МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
___________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
«История и методология прикладной математики и информатики»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Смирнов О.И., доцент каф. ПМиИ, к.ф.-м.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа предусматривает изучение тем основного содержания разделов дисциплины, которые не включены в лекционный материал. Результаты выполнения самостоятельной работы оцениваются в ходе промежуточной аттестации — тематика заданий включена в билеты.

Темы для самостоятельного изучения

8. История геометрии.

8.1 Создание аналитической геометрии.

8.2 Геометрия Лобачевского. Вопрос о непротиворечивости неевклидовой геометрии.

8.3 Эрлангенская программа Клейна. Системы геометрических теорий.

9. Математика случайных событий.

9.1 Первые успехи по статистике XVII в.

9.2 Успехи комбинаторики, вероятностные задачи и первые понятия теории вероятностей: частота, вероятность, математическое ожидание.

9.3 Случайные величины и случайные процессы. Возникновение и развитие математической статистики и ее приложения.

10. История развития электронно-вычислительной техники и программирования

10.1 Ранняя история развития вычислительной техники, вычислительной математики, первые шаги компьютерного моделирования, метод Монте-Карло.

10.2 Ранняя история советской кибернетики.

10.3 Компьютерная лингвистика.

10.4 Кибернетические вопросы биологии.

10.5 Экономическая кибернетика.

10.6 Системы программирования и проблемы достоверности программного обеспечения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вариационное исчисление и теория оптимальных процессов (1687-1994)

Одной из важнейших задач прикладной математики является помощь в выборе и создании наилучших конструкций, наилучших прогнозов будущего, наилучших технических, экономических и финансовых решений.

Понятно, что внимание, которое уделяется решению экстремальных задач, задач о поиске «максимумов и минимумов». Эти задачи стали предметом систематического исследования еще в семнадцатом веке.

Если подлежащая исследованию величина являлась функцией от некоторой переменной, то путь к решению открывало простое правило, которое теперь мы выражаем в виде: «значения переменной, доставляющие экстремум (максимум или минимум) разумно искать среди точек, в которых производная функции обращается в нуль». Однако еще в семнадцатом веке математикам стали встречаться задачи, где максимум или минимум исследуемого свойства зависели не от выбора того или иного значения независимой переменной, а от выбора функции в целом. Естественно, что новые задачи требовали и совершенно новых методов решения. Примером задачи такого типа, рассмотренной впервые еще Ньютоном в 1687 г., был выбор формы корпуса корабля, которая обеспечивала бы наименьшее сопротивление воды. Это – типичная вариационная задача. Однако, первым, кто подметил специфику нового типа задач на экстремум был швейцарский математик И. Бернулли (Bernoulli, 1667-1748). В июньском номере журнала «Acta eruditorium» за 1696 год Бернулли предложил математикам задачу о брахистотроне. Задача формулировалась так: среди всех линий, соединяющих две заданные точки, найти кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальное тело прошло бы путь между ними за кратчайшее время.

Лейбниц решил эту, по его определению, «прекрасную, до сих пор неслыханную задачу» и попросил Бернулли предоставить математикам год времени для состязания в ее решении. Бернулли согласился и в январе 1697 г. вновь опубликовал свою задачу, сопроводив ее следующим воззванием: «Остроумнейших математиков всего мира приветствую я – Иоганн Бернулли! Людей высокого ума ничем нельзя больше привлечь к работе, как указав им трудную и вместе с тем почетную задачу, решением которой возможно и славу приобрести и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность всего ученого мира, если по примеру Паскаля, Ферма и других предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют и как велика сила их ума. Если кто-либо найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу».

Еще до истечения срока были даны три решения: одно принадлежало Якову Бернулли, другое – Лопиталю, третье было опубликовано без подписи автора. Иоганн Бернулли узнал автора «по его львиным когтям», как он выразился. Решение принадлежало И. Ньютону.

В последующие годы И. Бернулли, его старшим братом Яковом, Лейбницем и др. решались отдельные вариационные задачи. Однако честь создания единого метода вариационных проблем исключительно и безраздельно принадлежит Леонарду Эйлеру (L. Euler, 1707 – 1783).

Еще в 1732 г. (т.е., когда Эйлеру было всего 25 лет) им была выполнена работа «Общее решение изопериметрической задачи, взятой в самом общем смысле». В ней Эйлер рассматривает уже не отдельные частные проблемы, а вообще «задачи, где отыскивают кривые, обладающие максимальным или минимальным свойством».

В последующие годы Л. Эйлер не раз возвращался к вариационным проблемам и, наконец, в 1744 г. подвел итоги своей работы в большом трактате «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле.

В отличие от своих предшественников, Эйлер рассматривает конкретные вариационные задачи как частный случай общей проблемы: «найти кривую *y(x)*, доставляющую экстремум некоторому «интегральному выражению» вида:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} Z(x; y; \dot{y}; \ldots y^{(n)})dx\,, \ (1)$$

т.е. в нашей терминологии – функционалу, зависящему от независимой переменной *x*, искомой функции *y* и ее производных вплоть до произвольного порядка».

Эйлер нашел, что искомая кривая должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} + \frac{d^2}{dx^2} Z_{\ddot{y}} - \ldots = 0\,. \ (2)$$

При выводе уравнения (2) Эйлер приближенно заменял искомую кривую y(x) на ломаную линию с вершинами в точках $y_0; y_1; \ldots y_{n-1}$ (рис.10).

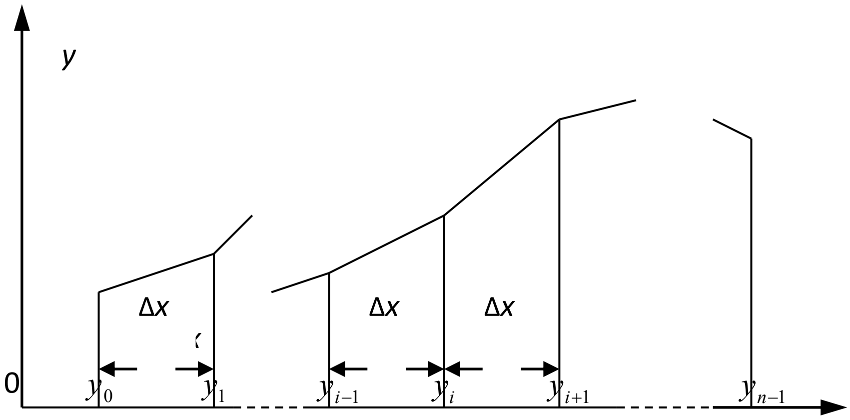

Рис. 10.

При этом «интегральное выражение» (1) переходило в функцию *n* переменных:

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x\,, \ (3)$$

где $\dot{y}_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ (для определенности в дальнейшем рассматриваем частный случай, когда подынтегральное выражение зависит только от *x*, *y* и $\dot{y}$; с рассмотрения этого частного случая начинал и сам Эйлер). Если на ломаной линии достигается экстремум, то, как уже было хорошо известно во времена Эйлера, все производные $\dfrac{\partial W_n}{\partial y_i}$ должны быть равны нулю. Из всех членов суммы W_n от y_i зависят только два: член $Z(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})\Delta x$ и член $Z(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x$, причем член с индексами i зависит от y_i; как непосредственно, так и через третий аргумент $\dot{y}_i$, а член с индексами с *i-1* зависит от y_i только через третий аргумент: $\dot{y}_{i-1} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$.

Следовательно, $\dfrac{\partial W_n}{\partial y_i} = Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x - Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) + Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})$

(Эйлер пользовался несколько отличными обозначениями), а это выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial W_n}{\partial y_i} = \left[Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i) - \frac{\Delta Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i)}{\Delta x} \right] \Delta x\,, \ (4)$$

где

$$\Delta Z_{\dot{y}} = Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) - Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})\,.$$

Эйлер затем переходил к пределу при n→∞; Δx→0 и получал необходимое условие того, что на плавной кривой достигается экстремум – знаменитое уравнение

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} = 0\,, \ (5)$$

названное впоследствии уравнением Эйлера. Для общего случая, когда z зависит не только от $\dot{y}$, но от $\ddot{y}; y^{(3)}$ и вообще от производных любого порядка, Эйлер аналогичным путем вывел уравнение (2), за которым, однако, в дальнейшем закрепилось название «уравнение Эйлера-Пуассона». Исторически это неправильно, поскольку уравнение (2) было выведено и исследовано Эйлером в 1744 г., задолго до рождения Пуассона (Poisson, 1780-1840).

В дальнейшем, при решении конкретных примеров, Эйлер непосредственно пользуется формулой (2), сводя тем самым вариационную проблему к задаче интегрирования дифференциального уравнения. Таким образом, Эйлер создал алгоритм решения вариационных задач.

В том же трактате 1744г. Эйлер указал те частные случаи, (с тех пор неизменно приводимые в учебниках вариационного исчисления) когда интегрирование уравнения (5) упрощается и выполняется в квадратурах, (а именно: 1. *Z* не зависит явно от *x*, 2. *Z* не зависит явно от *y*, 3. *Z* зависит только от $\dot{y}$, 4. *Z* зависит от $\dot{y}$ линейно).

Помимо функционалов вида (1) Эйлер исследует также функционалы, являющиеся произведением, частным или вообще произвольной функцией от определенных интегралов *W*. (Интересно отметить , что эти важные для приложений функционалы уже не рассматривались в более поздних учебниках по вариационному исчислению. Когда мне пришлось столкнуться с практическими задачами, приводящими к подобным функционалам, то существенную помощь в решении этих задач принесло обращение к первоисточнику, к трактату Л. Эйлера).

Наконец, Эйлер рассмотрел также задачи, в которых функция *y(x)* , доставляющая экстремум функционалу (1), должна была удовлетворять дополнительным условиям, например, длина кривой (т.е. ее периметр) должна быть равна заданной длине *L* и дал общий алгоритм решения подобных (изопериметрических) задач.

Вообще, богатство содержания трактата, опубликованного Эйлером в 1744г., изумительно, хотя стиль изложения, разумеется, сильно отличается от современных стандартов. Предельный переход от условия (4) к уравнению (5) Эйлер не обосновывает, достаточных условий не рассматривает. Даже простое условие (знак выражения $Z_{\dot{y}\dot{y}}$), позволяющее отличать – достигается на решениях уравнения (5) максимум или минимум функционала – Эйлером не использовалось и было найдено Лежандром (Legendre, 1752-1833) лишь в 1786г. Вместо этого условия Эйлер каждый раз исследует физический смысл задачи и из анализа физического смысла заключает, будет ли разыскиваемая им кривая доставлять максимум или минимум. Вообще, надо подчеркнуть, что Эйлер смотрит на уравнение (2) не как на формальный алгоритм, который позволяет мозгу от- дохнуть и заменить размышление и анализ конкретной задачи чисто формальными операциями. Для Эйлера уравнение (2) только помогает думать, и ценно тем, что позволяет сильно сократить круг функций «подозрительных» в отношении экстремума функционала (1). Коль скоро уравнение (2) найдено, то функции, доставляющие экстремум (если разумеется, он существует и достигается в классе кусочно-гладких функций) можно искать только среди его решений. Это резко сокращает круг поисков, но не заменяет целиком содержательного исследования задачи чисто формальными вычислениями. К этому Эйлер и не стремился; (поэтому критику уравнения Эйлера нельзя признать справедливой).

Возвращаясь к выводу уравнения (2), подчеркнем еще раз, что фактически Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на обычный экстремум функции *n* переменных с последующим переходом к пределу. Законность предельного перехода Эйлером не обосновывалась.

Недостатки метода Эйлера, громоздкого даже для функционалов, зависящих от одной переменной, особенно резко ощущались при исследовании задач на экстремум кратных интегралов.

Создание метода исследования, специфического для вариационных задач – метода вариаций – связано с именем Лагранжа (Lagrange, 1736-1813). Первое изложение своего метода Лагранж дал в письме к Эйлеру от 12 авг.1755г. Эйлер уже был тогда всемирное известным ученым, Лагранжу было 19 лет, и он еще не опубликовал ни одной научной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, горячо одобряя новый метод, и между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет. По рекомендации Эйлера Лагранж был в 1756г. избран иностранным членом Берлинской Академии. В письмах юного Лагранжа Эйлер нашел то, что он давно искал – простой и удобный аналитический метод исследования.

В последующие годы Эйлер интенсивно работал над усовершенствованием и развитием метода Лагранжа. Однако Эйлер не публиковал своих результатов, ожидая публикации работ Лагранжа. 2 октября 1759г. Эйлер пишет. Лагранжу: «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена тобою до величайшего совершенства.

Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты сам не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобою славы».

Работы Лагранжа были опубликованы в 1760-1762г.г. В них Лагранж вводит понятие о производной интегрального выражения (в современных терминах – функционала) и вводит по аналогии с дифференциалом d новый знак δ. Если функционал $\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx$ достигает на кривой *y(x)* экстремума, то, считает очевидным Лагранж, имеем

$\delta\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx = 0$, и тогда $\int_a^b \delta F(x;y;\dot{y})dx = 0$.

По аналогии с соотношением для дифференциалов:

$dF = F_y dy + F_{\dot{y}} d\dot{y}$, (6)

Лагранж пишет

$\delta F = F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y}$, (7)

и тогда

$$\delta\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y})dx \ . \ (8)$$

Ко второму члену в формуле (8) Лагранж применяет интегрирование по частям:

$$\int_a^b F_{\dot{y}} \delta\dot{y} dx = F_{\dot{y}}\,\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} dx \ ,$$

и тогда получает окончательно:

$$\delta\int_a^b F dx = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \delta y dx + F_{\dot{y}}\,\delta y\Big|_a^b \ . \ (9)$$

Приравняв нулю подынтегральное выражение, Лагранж получает уравнение Эйлера, а внеинтегральный член позволяет найти условия на концах искомой кривой.

Таким образом, метод Лагранжа позволил более просто вывести уравнение Эйлера, распространить его на кратные интегралы, а также позволил решать задачи на экстремум не только с закрепленными, но и со свободными концами искомой кривой.

Однако новый метод Лагранжа встретил холодное отношение современников и не сразу получил признание. Частично это было связано и с тем, что Лагранж важнейшую формулу (7) вводил просто по аналогии с известной из дифференциального исчисления формулой (6) и справедливость новой формулы (7) отнюдь не была очевидна; поэтому новый метод и встретили с недоверием. Для его развития и популяризации снова много сделал Эйлер, который, в частности, и предложил назвать новый алгоритм Лагранжа методом вариаций, а математическую дисциплину, изучающую экстремумы интегралов – вариационным исчислением. Так она с тех пор и называется.

В своих работах, опубликованных в 1766г. Эйлер разъяснил, что в вариационном исчислении искомая кривая, доставляющая экстремум сравнивается с бесконечно близкой к ней кривой, причем вариации δy и $\delta\dot{y}$ есть не что иное, как бесконечно малые приращения *y(x)* и ее производной при переходе от искомой кривой к соседней. Выяснилось, что в методе вариаций изучается разность между значениями интегралов, взятых на искомой кривой и кривой, близкой к ней:

$$\Delta J = \int_a^b F(x; y+\delta y; \dot{y}+\delta\dot{y})dx - \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx . \ (10)$$

Разлагая эту разность в ряд Тейлора, получаем:

$$\Delta J = \int_a^b (F_y\delta y + F_{\dot{y}}\delta\dot{y})dx + \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{y\dot{y}}\delta y\delta\dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx ,$$

причем величины первого порядка малости относительно δy и $\delta\dot{y}$ составляют первую вариацию интеграла:

$$\delta J = \int_a^b (F_y\delta y + F_{\dot{y}}\delta\dot{y})dx , \ (11)$$

а величины второго порядка малости – вторую вариацию $\delta^2 J$.

Для существования экстремума необходимо, чтобы первая вариация интеграла равнялась нулю. Из условия $\delta J=0$, интегрируя по частям второй член в формуле (9), получаем снова уравнение (5). Так Эйлер разъяснил окончательно существо методов вариационного исчисления. Изучение знака второй вариации позволило в дальнейшем проанализировать достаточные условия экстремума.

Вторая вариация функционала подверглась детальному исследованию в работах известного французского математика, члена Академии наук Адриана Мари Лежандра (Legendre, 1752–1833).

С помощью интегрирования по частям, он привел вторую вариацию $\delta^2 J$ функционала $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx$:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{y\dot{y}}\delta y\delta\dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx \ (12)$$

к следующему виду:

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\delta y^2 + R\delta\dot{y}^2)dx , \ (13)$$

где $$P = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{\dot{y}y}\right); R = \frac{1}{2}F_{\dot{y}\dot{y}} .$$

Для того, чтобы функция *y(x)*, удовлетворяющая уравнению Эйлера и, следовательно, обращающая в нуль первую вариацию, доставляла минимум функционалу, необходимо, чтобы вторая вариация была положительна. Однако между вариацией искомой функции δy и вариацией ее производной $\delta\dot{y}$ всегда может оказаться выполненным неравенство

$$\delta y^2 << \delta\dot{y}^2 , \ (14)$$

(это может быть в том случае, если δy – функция малая, но достаточно быстро колеблющаяся; тогда $\delta\dot{y}$ может быть в любое число раз больше, чем δy). Но раз так, то необходимым условием положительности второй вариации будет условие

$F_{\dot{y}\dot{y}} \geq 0$, (15)

и это условие тем самым необходимо для того, чтобы на функции *y(x)* достигался минимум функционала. Необходимым условием максимума будет неравенство обратного знака.

Лежандр пытался доказать, что выполнение усиленного условия (15) – неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ – уже не только необходимо, но и достаточно для минимума функционала. Разберем подробнее эту поучительную ошибку Лежандра. Поскольку на концах кривой, при *y=a* и *y=b,* вариация δy обращается в нуль, то для любой дифференцируемой функции *ω(x)* будет:

$$\int_a^b (\delta y^2 \dot{\omega} + 2\delta y \delta\dot{y}\omega)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(\delta y^2 \omega) = 0. \quad (16)$$

Поэтому, прибавив к правой части равенства (13) выражение (16), равное нулю, приведем вторую вариацию к виду:

$$\delta^2 J = \int_a^b [R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y \delta\dot{y}\omega + (P+\dot{\omega})\delta y^2]dx, \quad (17)$$

и попробуем подобрать функцию *ω(x)* так, чтобы из выражения в квадратных скобках можно было бы выделить полный квадрат. Пусть функция *ω(x)* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$R(P+\dot{\omega}) = \omega^2 \quad (18)$$

Тогда, подставив (18) в (17), получим:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y\delta\dot{y}\dot{\omega} + \frac{\delta y^2\omega^2}{R}\right]dx = \int_a^b R\left[\delta\dot{y}^2 + \frac{\delta y\omega}{R}\right]^2 dx.$$

(19)

Формула (19) свидетельствует, считал Лежандр, что знак второй вариации совпадает со знаком выражения $R = F_{\dot{y}\dot{y}}$, и поэтому выполнение неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ достаточно для того, чтобы функция *y(x),* удовлетворяющая уравнению Эйлера, доставляла минимум функционалу.

Решающие возражения против утверждения Лежандра выставил Лагранж в 1797г. Он заметил, что доказательство Лежандра основано на допущении: если подынтегральная функция на некотором интервале положительна, то и определенный интеграл, взятый на этом же интервале, будет положительным. Однако это допущение верно лишь в том случае, если подынтегральная функция на рассматриваемом интервале конечна (т.е., если интеграл – «собственный»). Если же подынтегральная функция хотя бы в одной точке обращается в бесконечность, то интеграл от нее (теперь это уже будет «несобственный» интеграл) может быть и отрицательным. И Лагранж привел пример интеграла от положительной функции:

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \left.\frac{x}{1-x}\right|_a^b, \quad (20)$$

который становится отрицательным при $a = 0.5; b = 2$. Следовательно, для уверенности в положительности второй вариации надо удостовериться, что функция *ω(x)* – решение уравнения (18) – конечна на всем интервале $a \leq x \leq b$, а это справедливо далеко не для всех *P* и *R* . Так, если *R=–1* и *P=1*, то уравнение (18) принимает вид $\dot{\omega} + 1 + \omega^2 = 0$, откуда *ω=tg(c-x),* и в точках $x = c + \frac{2k+1}{2}\pi$ функция *ω(x)* обращается в бесконечность. После возражений

Лагранжа стало ясно, что условие Лежандра само по себе еще не гарантирует существования экстремума.

Следующий важный шаг в исследовании вариационных задач был сделан немецким математиком Карлом Якоби (Jacobi, 1804-1851). Якоби родился в Потсдаме, в семье банкира, учился в Берлинском университете, сразу после окончания его начал работать в университете Кенигсберга, сперва доцентом, затем экстраординарным (с 1827г.), и ординарным (с 1831г.) профессором. Таким образом, Якоби был исключительно преподавателем. Мы уже отмечали ранее, что это характерно для 19 века; математики 18 века, как правило, соединяли преподавание с практической деятельностью в области прикладной математики. Это изменение бытия математиков не могло не отразиться на изменении их сознания и в этом отношении очень характерна полемика между Якоби и представителем предшествующего поколения Ж.Б. Фурье (Fourier, 1768-1830): «Господин Фурье, – говорил Якоби в своей речи в 1830г., – считал, что главной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но как философ он должен был знать, что единственная цель науки – это служить доблести человеческого ума и что поэтому какой-нибудь вопрос теории чисел стоит не меньше, чем вопрос о системе мира».

Якоби отличался пылким и страстным характером. «Его избрание профессором Кенигсбергского университета, – рассказывает о нем Феликс Клейн, – натолкнулось на известные затруднения, потому, что каждому из членов факультета он успел сказать что-нибудь неприятное. В конце концов, все же победило неоспоримое значение его научных трудов».

В Кенигсберге Якоби быстро стал главой математической школы — кружка талантливых учеников, сплотившихся вокруг учителя и его идей. Мы еще будем упоминать в настоящей главе об учениках Якоби – Гессе и Клебше — продолжавших работу Якоби в области вариационного исчисления. «Влияние, которое имел Якоби на своих учеников, совершенно исключительно, — свидетельствует Ф. Клейн. — Самые упорные натуры подчинялись его образу мышления, он увлекал всякого к вершинам математического честолюбия, к пламенному интересу к указываемой им постановке очередной проблемы дня».

С той же страстностью Якоби принял участие в буржуазно-демократической революции в Германии в 1848г. Поражение революции омрачило последние годы Якоби, ненадолго пережившего ее; он скончался в 1851г.

Важность вклада, внесенного К. Якоби, в вариационное исчисление, заключается в том, что он впервые перешел от исследования изолированных кривых — решений уравнения Эйлера — (в дальнейшем эти кривые стали называться экстремалями) к исследованию семейств таких кривых, выходящих из одной точки, к исследованию поля.

Якоби подметил (и опубликовал в 1837г.), что на экстремалях перестает достигаться экстремум интеграла

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx ,$$

если бесконечно близкие экстремали, выходящие из точки a, пересекаются между собой ранее точки b. Таким образом, Якоби показал, что локальных условий – условий, проверяемых в каждой точке экстремали, таких условий, как уравнение Эйлера и неравенство Лежандра $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ – недостаточно для обеспечения экстремума и необходимо дополнительное условие, относящееся к отрезку $a \le x \le b$ в целом; это условие (называемое с тех пор условием Якоби) заключается в том, что экстремаль, соединяющая точки a и b, не должна пересекаться с бесконечно близкими к ней экстремалями, выходящими из точки a.

Двадцать лет спустя, в 1857г. ученик Якоби Гессе (Hesse, 1811-1874) придал условию Якоби аналитическую форму и показал его связь с проблемой положительности интеграла (19).

Действительно, обозначим через *h(x)* разность ординат между двумя бесконечно близкими экстремалями *y(x)* и *y(x)+h(x).* Так как *y(x)+h(x)* является экстремалью и удовлетворяет уравнению Эйлера, то

$$F_y(x; y+h; \dot{y}+\dot{h}) - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}}(x; y+h; \dot{y}+\dot{h}) = 0\,. \ (21)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и сохраняя члены только первого порядка малости, получим

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0\,. \ (22)$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение относительно расстояния *h* между двумя бесконечно близкими экстремалями. Его называют уравнением Якоби. Условие Якоби пересечения экстремалей можно теперь выразить аналитически – как условие, что решение уравнения Якоби (22) с начальными условиями $h(a) = 0, \dot{h}(a) = 1$ не обращается в нуль внутри отрезка $a \le x \le b$.

Заметим, что если в уравнении Лежандра (18) произвести замену переменных

$$\omega = -\frac{\dot{h}}{h} R \ \ (23)$$

то уравнение (18) примет вид:

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0\,, \ (24)$$

т.е. перейдет в уравнение Якоби. Если *h(x)* не обращается в нуль на отрезке $a \le x \le b$, то на этом отрезке существует и конечно (при *R>0*) решение $\omega(x)$ уравнения (18), а это и является (как уже было нами показано) достаточным условием положительности второй вариации.

Ученик Якоби Рудольф Клебш (Clebsch, 1833-1872) исследовал вторую вариацию у функционалов, зависящих от нескольких переменных и нашел условие различения максимума от минимума, обобщающее условие Лежандра.

Вариационные принципы

Условие Якоби позволило существенно уточнить понимание вариационных принципов, важность которых для построения механики была осознана в 18 веке. Впрочем, еще в 17 веке Пьер Ферма подметил, что закон преломления света можно вывести, если принять общий принцип: «природа действует наиболее легкими и доступными путями»; в соответствии с этим принципом луч света при движении в различных средах будет выбирать такой путь, движение по которому занимает кратчайшее время; определяя этот путь, мы получим закон преломления света.

В 18 веке Пьер Мопертюи (Maupertuis, 1698-1759), президент Берлинской академии наук, выдвинул более общий принцип: «Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным». Этот принцип, действительно, позволил выработать общую точку зрения на многие законы природы. В настоящее время под «действием» понимают произведение энергии на время и «принцип наименьшего действия» записывают в следующей формулировке (несколько отличной от первоначальной формулировки Мопертюи), предложенной Гамильтоном (Hamilton, 1805-1865): «при движении тела в потенциальном поле на траектории движения достигает минимума «интеграл действия»:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\,, \ (25)$$

где $L=T–U$, причем T – кинетическая энергия тела, а U - его потенциальная энергия. Так, в частности, для тела с массой m, движущегося в однородном поле тяготения $U=mgx$, где g – ускорение свободного падения, а $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, и интеграл (25) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx)dt\right). \quad (26)$$

Решив уравнение Эйлера для интеграла (26), найдем известный закон изменения ординаты x свободно брошенного тела: $x = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$. Точно так же можно найти законы движения тел в самых разнообразных силовых полях. Все они вытекают из одного общего принципа. Однако при такой формулировке принципа наименьшего действия в нем остается известный налет теологии и мистики: получается, что брошенное тело уже в начальный момент времени, при $t=t_1$, «знает» как нужно ему двигаться, чтобы «интеграл действия» в пределах от t_1 до t_2 обратился в минимум. Сам Мопертюи не имел ничего против такого истолкования; наоборот, Мопертюи считал, что он нашел «математическое» доказательство бытия божия: кто же кроме Бога, доказывал Мопертюи, мог указать каждому телу при $t=t_1$ такое движение, которое приведет к минимуму «действия» на всем интервале $t_1 \le t \le t_2$.

«Не в мелких деталях, не в частях Вселенной, отношения которой мы слишком мало знаем, нужно искать Верховное Существо, – писал Мопертюи в 1746 г., – а в явлениях, всеобщность которых не подвержена никаким исключениям, а простота их полностью поддается нашему обозрению... »

«Я осмелюсь сказать – продолжал Мопертюи, - что открыл универсальный принцип, на котором основываются все законы... это – принцип наименьшего действия; принцип такой мудрый, такой достойный Верховного Существа... Законы Движения и Покоя, выведенные из этого принципа, являются точно теми, какие наблюдаются в Природе; мы можем восхищаться результатами применения этого принципа ко всем явлениям. Движение животных, произрастание растений, вращение Звезд являются только его следствиями и зрелище Вселенной становится еще более величественным, еще более прекрасным, еще более достойным своего Творца, когда становится известным, что небольшое число законов, наиболее мудро установленных, достаточно для всех ее движений... Какое удовольствие для человеческого ума, рассматривая эти законы, являющиеся принципом Движения и Покоя всех тел Вселенной, найти в них доказательство существования Того, кто ею управляет».

Доводы Мопертюи вызвали в 18 веке большую полемику. Решающий удар по построениям Мопертюи нанесли результаты Якоби, показавшего, что действительное движение может не доставлять ни максимума, ни минимума интегралу (25), (а лишь обращать в нуль его первую вариацию), если на действительном движении не выполняется условие Якоби. Рассмотрим, для примера, движения тел, брошенных с одной и той же скоростью, но под различным углом к горизонту. Если этот угол больше 45°, то действительное движение тела по экстремали (параболе) не доставляет ни максимума, ни минимума интегралу (25), поскольку экстремаль в этом случае пересекается с экстремалями, бесконечно близкими к ней и условие Якоби не выполняется.

Принцип наименьшего действия более правильно называть «принципом стационарного действия» и формулировать следующим образом: на действительной траектории движения обращается в нуль первая вариация интеграла (25). При такой трактовке принципа наименьшего действия в нем не остается ничего теологического. Мы знаем, что многие законы природы могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений. Но эти уравнения можно рассматривать как уравнения Эйлера для некоторого функционала. И тогда действительное движение тел, подчиняющееся этому дифференциальному уравнению, обязательно обратит в нуль первую вариацию функционала. А если вдобавок оказалось выполнено условие Якоби и $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, то действительное движение доставит функционалу минимум – без всякого вмешательства Верховного Существа. Так, движение тела в однородном поле тяготения подчиняется уравнению

$m\ddot{x} = mg$, (27)

которое является – как легко проверить – уравнением Эйлера для функционала (26).

Таким образом, законы природы можно записывать в двух равносильных формах: в форме дифференциальных уравнений и в форме вариационного принципа, из которого эти уравнения будут следовать. Вторая форма записи является во многих случаях более удобной. Так, например, при записи в виде дифференциальных уравнений форма закона зависит от выбора системы координат, в то время как вариационный принцип сохраняет свою форму в любых координатах, что очень удобно. Так, если, например, кинетическая и потенциальная энергия системы (а с ними и их разность L=T–U), зависят от некоторых обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то из уравнений Эйлера для «интеграла действия» (25) непосредственно следуют знаменитые «уравнения Лагранжа»:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (28)$$

(уравнения второго порядка), сыгравшие столь большую роль в истории теоретической механики.

Вариационные принципы обладают большой эвристической ценностью. В частности, они послужили путеводной нитью при разработке основ квантовой механики.

В заключение рассмотрим один вариационный принцип, историю которого еще нельзя считать законченной. Известно, какую большую роль в понимании природных процессов играет второе начало термодинамики, которое можно сформулировать следующим образом: изолированная система стремится с течением времени к положению равновесия, в котором энтропия системы S максимальна, а скорость возрастания ее обращается в нуль. Однако второе начало термодинамики справедливо лишь для изолированных систем. Неизолированные системы – системы, которые обмениваются с окружающей средой энергией или веществом – не имеют равновесного состояния, в котором скорость возрастания энтропии обращалась бы в нуль. С течением времени они стремятся не к равновесному, а к стационарному состоянию. Естественно предположить, что стационарное состояние неравновесной системы характеризуется тем, что скорость возрастания энтропии в нем наименьшая по сравнению с нестационарными режимами — т.е. с течением времени скорость возрастания энтропии в неизолированной системе стремится к минимуму. Это предположение было выдвинуто в 40-х годах 20 века бельгийским ученым (родившимся в Москве в 1917г.) Ильей Романовичем Пригожиным. В настоящее время предположение Пригожина считается доказанным и играет важную роль в современной физике. Однако, еще в 1966г. против предположения Пригожина был выставлен контр-пример. Контр-пример относится к процессам теплопереноса, где скорость возрастания энтропии (в отличие от более сложных физических процессов) может быть вычислена аналитически.

Рассмотрим изотропную пластину, в которой температура является функцией координаты x. Одна сторона пластины *(x=0)* находится в контакте с источником тепла с абсолютной температурой T_1, вторая сторона *(x=1)* – в контакте с источником тепла с температурой T_2. Боковые стороны теплоизолированы. Выделим внутри пластины элементарный слой толщиной dx. Тогда через слой будет проходить поток тепла

$$J_q = \lambda \frac{dT}{dx} ,$$

где λ – коэффициент теплопроводности. Вследствие того, что поток тепла входит в слой при температуре T, а выходит – при $T-\frac{\partial T}{\partial x}dx$, то интенсивность возникновения энтропии в элементарном слое, как известно, равна

$$\sigma = J_q\left(\frac{1}{T-\frac{\partial T}{\partial x}dx}-\frac{1}{T}\right)=\lambda\frac{1}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx \ ,$$

а скорость возрастания энтропии во всей пластине равна интегралу

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sigma dx=\lambda\int_{x_1}^{x_2}\frac{\dot{T}^2}{T^2}dx. \ (29)$$

Теперь нетрудно проверить, что минимум интеграла (29) достигается при распределении температуры $T(x)=c_2e^{c_1x}$, отличном от стационарного распределения, когда

$T(x)=c_1x+c_2$.

Так, если $x_1=0$, $x_2=1$, $T(0)=1$, $T(1)=e$, то в стационарном режиме $T(x)=1+(e-1)x$ и скорость возникновения энтропии

$J=\lambda\frac{(e-1)^2}{e}=1.087\lambda$, в то время как в нестационарном режиме $T(x)=e^x$, удовлетворяющем тем же граничным условиям, скорость возникновения энтропии будет равна $J=\int_0^1\lambda dx=\lambda$ – или более чем на 8% меньше, чем в стационарном. Очевидно, что предположение Пригожина о минимуме скорости возрастания энтропии в стационарном состоянии неизолированной системы неверно и нуждается в дополнении и уточнении.

Причина ошибки заключается в том, что, производя расчеты скорости производства энтропии сразу для гораздо более сложного случая трехмерного распределения температур, И.Р. Пригожин пренебрег для упрощения малым отличием знаменателя $T^2(x)$ в формуле (29) от постоянной величины и это привело его к неверному результату.

Популярность принципа Пригожина связана с тем, что он дает очень общую характеристику выделения стационарных процессов из нестационарных в самых сложных системах, для которых сколько-нибудь полную математическую модель или систему уравнений выписать невозможно. Поэтому «принцип Пригожина» широко использовался как в общих рассуждениях о протекании процессов в сложных физических или биологических системах, так и для решения некоторых сложных технических задач. Однако именно в технических системах обнаружилась неверность решений, полученных при использовании «принципа Пригожина», что и заставило произвести его тщательную проверку.

Результаты проверки, опубликованные в 1966г., показали не универсальность принципа. Было доказано, что для систем, включающих теплоперенос, он не справедлив. Публикация эта вызвала оживленную дискуссию. Наиболее интересным был ответ самого И.Р. Пригожина, опубликованный в монографии. Признав, что в процессах теплопереноса минимум производства энтропии S действительно не достигается, авторы монографии попытались спасти универсальность «принципа Пригожина» указанием на то, что в этих процессах в стационарном режиме достигает минимума производство так называемой «взвешенной энтропии», ST^2, равной произведению настоящей энтропии S (обычной энтропии физики) на квадрат абсолютной температуры T. Исследуя интеграл (29), нетрудно проверить, что производство «взвешенной энтропии» действительно минимально в стационарном режиме.

Однако «взвешенная энтропия» имеет и другую размерность и совсем другой физический смысл, чем настоящая энтропия. Так, в процессе выравнивания температуры соприкасающихся тел в процессе перехода тепла от горячего тела к холодному, настоящая энтропия S, как известно, растет, а взвешенная энтропия ST^2 – убывает. Кроме того, остается неясным, в каких процессах и в каких системах в стационарном режиме достигает минимума производство настоящей энтропии S, и в каких – «взвешенной энтропии». Поэтому переход к «взвешенной энтропии», означает фактическое признание не универсальности «принципа Пригожина», который поэтому не имеет эвристической силы. Однако это не было признано явно и поэтому до последнего времени все еще широко распространено убеждение в универсальности принципа. Многие исследователи опираются на него и приходят к ошибкам. Так, исходя из этого принципа, выводилось распределение температур при поверхностном эффекте. Вывод недостоверен, поскольку не доказано, что в рассматриваемом случае принцип Пригожина справедлив. Как легко проверить путем исследования интеграла (29), принцип Пригожина не универсален даже для линейных систем и даже при малых отклонениях от равновесия.

Условный экстремум

Во многих случаях экстремум функционала отыскивается не среди произвольных функций (кривых), а в классе функций, удовлетворяющих дополнительным условиям. Подобные задачи называют задачами на условный экстремум и первые из них были известны еще в Древней Греции. Одна из наиболее знаменитых – это изопериметрическая задача, когда из всех кривых, имеющих одну и ту же длину, один и тот же периметр, – т.е. из всех изопериметрических кривых – ищут ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Как это часто было в Древней Греции, новую задачу сопроводили красивой легендой – рассказывали, что царица Дидона, основывая Карфаген, покупала у местных жителей землю для будущего города. Ей соглашались продать лишь участок земли, который можно охватить бычьей шкурой. Тогда Дидона разрезала шкуру на тонкие полоски, связала из них длинный ремень и расположила его так, чтобы охватить наибольшую площадь - т.е. решала именно изопериметрическую задачу, которую греки называли поэтому также «задачей Дидоны».

Метод решения изопериметрической и ей подобных задач был разработан Эйлером. Эйлер рассматривал изопериметрические задачи общего вида – когда нужно найти функцию y(x), доставляющую экстремум функционалу

$$J_1 = \int_a^b F_1(x; y; \dot{y})dx$$

при условии, что другой функционал

$$J_2 = \int_a^b F_2(x; y; \dot{y})dx$$

равен заданному значению J_{20}.

Для решения этой задачи Эйлер предложил и обосновал мнемоническое правило: искомая функция должна удовлетворять уравнению Эйлера для вспомогательного функционала:

$J = J_1 + \lambda_0 J_2$,

где λ_0 – некоторая постоянная величина, которая потом определяется. Для «задачи Дидоны» нужно найти максимум площади, т.е. интеграла

$$J_1 = \int_a^b y dx$$

при заданном значении длины кривой:

$$J_2 = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Составляя и решая уравнение Эйлера для вспомогательного функционала

$$J = \int_a^b (y + \lambda_0 \sqrt{1+\dot{y}^2})dx \ ,$$

получим уравнение экстремалей

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda_0^2 \ ,$$

где c_1 и c_2 –постоянные интегрирования, и убедимся, что это уравнение окружности радиуса λ_0. Если длина кривой равна s_0, то наибольшая площадь, охватываемая ею, равна $p = \frac{s_0}{4\pi}$ и достигается в том случае, если кривая является окружностью.

Теперь можно оценить, какого размера участок земли могла купить Дидона. Если считать, что площадь шкуры быка равнялась 4 м^2 и Дидона разрезала ее на ремни шириной 0,5 см, то длина ремня составила 800 метров, а площадь купленного участка $p = \frac{800^2}{4\pi} = 50100 м^2$, или примерно 5,01 гектар. На такой площади, действительно, можно основать город, так что греческая легенда, во всяком случае, правдоподобна. Если бы Дидона располагала ремень по контуру квадрата, то она получила бы участок площадью 40000 м^2 или на 21,5% меньше.

Помимо простейшей изопериметрической задачи с одним интегральным условием, Эйлер рассматривает и задачи, когда задано несколько подобных условий – т.е. когда требуется, чтобы несколько интегралов вида

$$J_i = \int_a^b F_i(x; y; \dot{y})dx$$

сохраняли заданное значение. В этом случае уравнение Эйлера составляется для вспомогательного функционала

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^{n} J_i \ .$$

Не менее часто, чем интегральные условия, в практических задачах вариационного исчисления встречаются функциональные связи — когда, например, нужно найти две функции y(x) и z(x), доставляющие экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F\,(x; y; \dot{y}; z; \dot{z})dx$$

при условии, что эти функции связаны между собой уравнением

$\varphi(x;y;z)=0$

называемым уравнением связи.

В 1788г. Лагранж, в своем трактате «Аналитическая механика» дал мнемоническое правило решения этой задачи: надо составить уравнения Эйлера для вспомогательного функционала

$$J_i = \int_a^b F_i(x; y; \dot{y}; z; \dot{z})dx + \varphi(x; y; z)\lambda(x) \ , (30)$$

где $\lambda(x)$ – некоторая, подлежащая определению, функция от x (множитель Лагранжа). Всего для определения трех неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$ и $\lambda(x)$ получаются три уравнения – два уравнения Эйлера для функционала (30) и уравнение связи, позволяющие решить поставленную задачу. В той же работе 1788г. «Аналитическая механика» Лагранж рассмотрел и обобщения этой задачи – когда задано не одно, а несколько уравнений связи или когда в уравнения связи входят не только сами функции $y(x)$, $z(x)$ и т.п., но и их производные

Любопытно отметить, что первоначально знаменитое «правило множителей Лагранжа» было сформулировано именно для вариационных задач, и лишь 9 лет спустя, в «Теории аналитических функций» Лагранж формулирует его для задачи отыскания условного экстремума функции n переменных: для отыскания условного экстремума функции n переменных

$f_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$

при условиях

$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)=0; i=1,2, \ldots .m,$

надо составить вспомогательную функцию

$L=f_0+\lambda_1 f_1+\ldots\lambda_m f_m,$

где λ_1, $\lambda_2 \ldots$ λ_m -числовые множители Лагранжа и для этой функции решать задачу на безусловный экстремум.

Вот подлинная формулировка Лагранжа из «Теории аналитических функций»: «можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, то нужно к минимизируемой функции прибавить функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, добавленные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных».

«Правило множителей» Лагранжа входит во все курсы математического анализа, широко применялось и применяется для решения самых разнообразных задач оптимизации. И только в начале 20 века было замечено, что это знаменитое правило нуждается в уточнении. Рассмотрим простую задачу: найти минимум функции $f_0 = x_1 + x_2$ при условии, что $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Здесь сразу видно, что единственным решением является $x_1=0$, $x_2=0$. В то же время составляя вспомогательную функцию

$L = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)$,

и приравнивая нулю производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0,$$

мы не получим правильного решения ни при каких конечных λ_1.

Причина достаточно ясна: уже само уравнение связи $x_1^2 + x_2^2 = 0$ дает единственное решение $x_1=x_2=0$ и вопрос о минимуме суммы x_1+x_2 теряет смысл.

Для восстановления справедливости «правила множителей» Лагранжа нужно писать вспомогательную функцию в виде

$L=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots\lambda_m f_m,$

и рассматривать случай $\lambda_0=0$ как особый, но возможный. То же самое справедливо и относительно изопери-метрической задачи: если мы ищем экстремум одного функционала при заданном значении другого, но это заданное значение экстремально для второго функционала, то вариация искомой кривой невозможна, мнемоническое правило в его первоначальном виде теряет смысл, но его можно восстановить, если вспомогательный функционал записывать в виде:

$J=\lambda_0 J_1+\lambda_1 J_2$

и не исключать особого случая $\lambda_0=0$. На эти обстоятельства указывали Вейерштрасс в 1877 и более подробно немецкий математик А. Кнезер (Kneser, 1862-1930) в своем учебнике по вариационному исчислению, вышедшему в 1900г.

Сильный экстремум. Разрывные экстремали и экстремали с вертикальными отрезками

Новый этап развития вариационного исчисления во второй половине 19 века связан с именем Карла Вейерштрасса. До Вейерштрасса не различались понятия сильного и слабого экстремума, хотя фактически обращение в нуль первой вариации являлось необходимым условием слабого относительного экстремума, поскольку значение функционала на экстремали сравнивалось с его значением на кривых, близких к экстремали в смысле близости первого порядка (близость первого порядка – это малость модуля разности, как между самими функциями, так и между их первыми производными; близость нулевого порядка – модуль разности между самими функциями мал, но максимум модуля расстояния между производными может и не быть малым).

Вейерштрасс впервые начал исследовать не только слабый, но и сильный экстремум — экстремум по сравнению с кривыми, находящимися в близости нулевого порядка.

Кроме того, до Вейерштрасса считали очевидным, что если функционал ограничен снизу и существует экстремаль, доставляющая минимум, то наименьшее значение функционала как раз и достигается на экстремали. Вейерштрасс показал, что если даже функционал ограничен снизу, то его наименьшее значение может достигаться вообще за пределами рассматриваемого класса функций. Вейерштрасс привел простой пример – функционал

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 \dot{y}^2 dx \quad (31)$$

с условиями на концах: *y(-1)=–1; y(1)=1.*

Этот функционал не отрицателен и ограничен снизу значением нуль. Однако ни на какой непрерывной функции, соединяющей точки $x=-1$; $y=-1$ и $x=1$; $y=1$ минимальное значение, равное нулю, не достигается, поскольку на любой непрерывной функции, соединяющей эти точки, будут участки, где при $x\neq 0$ будет $\dot{y} \neq 0$, и поэтому на любой непрерывной функции минимум функционала (31) достигаться не будет. Минимум будет достигаться за пределами класса непрерывных функций – а именно на разрывной функции: $y=-1$, для $-1\le x<0$ и $y=1$ для $0\le x\le 1$, т.е. на функции, совершающей скачок при $x=0$.

Работы Вейерштрасса, продолженные в конце 19 века Д. Гильбертом (Hilbert, 1862-1943) завершили в основном построение здания классического вариационного исчисления. Дальнейшие работы были направлены на уточнение и дополнение отдельных частностей.

Так, например, Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymohd, 1831-1889) уточнил вывод уравнения Эйлера; он показал, что при его выводе нет необходимости делать допущение о непрерывности второй производной экстремали; используя лемму, доказанную Дюбуа-Реймоном, можно показать, что на тех интервалах, где $F_{\dot{y}\dot{y}}$ сохраняет знак, вторая производная экстремали непрерывна.

В 1958–61г.г. Вадим Федорович Кротов (родился в 1932 году) уточнил вопрос о классах кривых, на которых может достигаться экстремум простейшего функционала

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx .$$

Пример функционала (31), рассмотренного еще Вейерштрассом, показывает, что экстремум может, вообще говоря, достигаться на разрывных функциях или (если дополнить функцию в точке разрыва вертикальным отрезком) может достигаться на кривых с вертикальными отрезками. В.Ф. Кротов поставил вопрос, — когда, в каких случаях экстремум функционала $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx$ будет достигаться в классе кусочно-гладких функций, и когда

– в классе функций кусочно-непрерывных, имеющих разрывы. В.Ф. Кротов показал, что ответ на этот вопрос определяется поведением функции:

$$W(x;y)=\lim_{\dot y\to\pm\infty}F(x;y;\dot y)\cdot\frac{1}{\dot y}\text{, (32)}$$

которую правильно будет назвать критерием Кротова. Возможны следующие случаи:

1. Не существует ни правого, ни левого конечных пределов критерия (32) — т.е. при $\dot y\to\infty$ будет W→+∞, а при $\dot y\to-\infty$ — соответственно W→–∞, или наоборот.

В этом случае экстремум может достигаться только на кусочно-гладких функциях, вертикальных отрезков у кривых, доставляющих экстремум, быть не может.

2. Правый и левый пределы существуют в конечном числе точек внутри интервала $a\le x\le b$. В этом случае кривая, доставляющая экстремум, может в этих точках – и только в них – иметь вертикальные отрезки.

3. Правый и левый пределы существуют в любой точке интервала $a\le x\le b$. В этом случае экстремум может достигаться на кривых, имеющих в общем случае любое число вертикальных отрезков. Такие кривые могут иногда носить необычайно причудливый характер. Основная идея доказательства может быть изложена следующим образом: предположим, что экстремум функционала $J=\int_a^b F(x;y;\dot y)dx$ достигается на кривой, имеющей при x = x_0 вертикальный отрезок от *$y=y_1$* до *$y=y_2$*; его можно рассматривать, как предел наклонных прямых при $\dot y\to\pm\infty$ (рис. 11). Для вычисления значения функционала на вертикальном отрезке достаточно поменять ролями x и y, и тогда значение J_1 функционала на вертикальном отрезке будет равно

$$J_1=\lim_{x_1\to x_2}\int_{x_1}^{x_2}F(x;y;\dot y)dx=\int_{y_1}^{y_2}\lim_{\dot y\to\pm\infty}F\left(x;y;\frac{1}{dx/dy}\right)\frac{dx}{dy}dy=.$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}W(x;y)dy\text{. (33)}$$

Теперь сразу видно, что если, например, правый предел критерия Кротова (32) стремится к бесконечности, а левый — к минус бесконечности, мы можем сколь угодно близко от функции с разрывом в точке *$x=x_0$* провести кусочно-гладкие кривые (с участком наклонной прямой, круто про

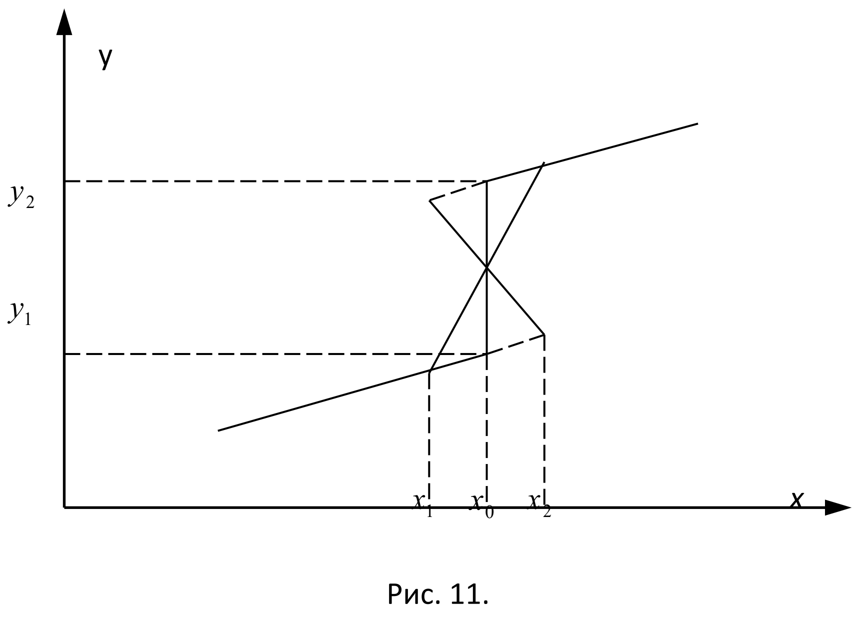

Рис. 11.

ходящей вблизи *$x=x_0$*), на которых значение функционала будет и сколь угодно велико, и сколь угодно мало. Следовательно, если не существует ни правого, ни левого пределов критерия (32), то экстремум функционала может достигаться только в классе кусочно-гладких функций.

Результаты В.Ф. Кротова удачно дополнили известные классические теоремы о простейшем функционале $J=\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx$, согласно которым изломы экстремали возможны лишь там, где $F_{\dot{y}\dot{y}}=0$, а при $F_{\dot{y}\dot{y}}\neq 0$ экстремаль имеет непрерывную вторую производную. Теперь можно дополнительно утверждать, что разрывы на функции, доставляющей экстремум, возможны лишь в точках, где критерий (32) существует. Если же критерий (32) не существует при любых *x*, лежащих в интервале $a\le x\le b$, а функционал ограничен снизу, то минимум его при $F_{\dot{y}\dot{y}}>0$ будет достигаться на гладкой функции, имеющей непрерывную вторую производную.

Впервые результаты В.Ф. Кротова были доложены им на Всесоюзном съезде математиков в Ленинграде в 1961г. Они встретили яростную критику участников съезда, дружно отвергавших их, как нестрогие, недостаточно доказанные, а некоторые даже утверждали, что результаты ошибочны. Благожелательно отнесся к В.Ф. Кротову лишь председатель секции, на которой В.Ф. Кротов делал доклад. «Напрасно вы так яростно нападаете на Кротова, – сказал он, обращаясь к участникам секции, — ведь пройдет несколько лет, и вы сами будете студентам на лекциях рассказывать его результаты. И ведь совсем не так отнеслись к нему Эйлер и Лагранж, если бы они могли сегодня присутствовать в нашем зале. Они сказали бы: «Молодец, коллега Кротов, ты нас продолжил». И действительно, уже в 1965г. результаты В.Ф. Кротова вошли в преподавание.

Экстремумы в замкнутых областях

Наиболее существенным из того нового, что внес 20 век в развитие вариационного исчисления, был переход к исследованию экстремумов в замкнутых областях, учет ограничений в виде неравенств, которым должны удовлетворять искомые функции и их производные. Без учета подобных ограничений было крайне трудно применять вариационное исчисление к решению прикладных задач, где подобные ограничения встречаются очень часто – можно сказать, – на каждом шагу. Практические потребности ставили перед вариационным исчислением новые задачи, требовали разработки новых методов решения – и новые методы были разработаны. Математики 18 века не рассматривали задач с ограничениями в виде неравенств. Впервые задача с ограничением была рассмотрена в 1831г. Гольдшмидтом, который рассматривал старую, известную еще Бернулли и Эйлеру, задачу об отыскании кривой *y(x)* заданной длины с закрепленными концами, которая при вращении вокруг оси абсцисс образовала бы тело вращения с наименьшей поверхностью. В этой старой задаче Гольдшмидт заметил, то, что ускользнуло от внимания Эйлера: для того, чтобы задача имела смысл, искомая кривая *y(x)* не должна заходить ниже оси абсцисс, то есть при отыскании кривой нужно учитывать ограничение $y\ge 0$. Наличие подобных неравенств резко осложняет задачу отыскания экстремума функционала, приводит к тому, что основной метод решения – сведение к интегрированию уравнения Эйлера – перестает работать. Действительно, наличие любого дополнительного неравенства $\varphi(x;y)\ge 0$ приводит к тому, что экстремум надо искать теперь в замкнутой области изменения переменной y(x), включающей в себя свою границу $\varphi(x;y)=0$. Пусть на некотором участке кривая, доставляющая экстремум, проходит по границе. Тогда для нее допустимой будет лишь односторонняя вариация, $\delta y>0$, а вариация $\delta y<0$ не допустима, ибо выводит искомую кривую за пределы допустимой области. Первую вариацию функционала δJ еще Эйлер и Лагранж умели приводить к виду

$$\delta J=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}\right)\delta y dx\,. \quad (34)$$

Если экстремум рассматривается в открытой области, то вариация δy является произвольной функцией и тогда из условия $\delta J\ge 0$ следует $F_y-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}=0$ – т.е. выполняется уравнение Эйлера, позволяющее после интегрирования фактически определить искомую функцию *y(x)*. Однако в замкнутой области, при $\delta y>0$ из условия $\delta J\geq 0$ уже не следует уравнение Эйлера, а следует только, что

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{\dot{y}} \geq 0 \quad (35)$$

– т.е. получаем вместо уравнения всего лишь неравенство, не позволяющее определить однозначно искомую функцию *y(x)*.

Для того чтобы обойти возникшую трудность, Гольдшмидт заменой переменных преобразовал замкнутую область $y\geq 0$ в открытую. В дальнейшем так же поступали другие математики 19 века, которые время от времени сталкивались с задачами на экстремум с ограничениями. Однако каждый раз преобразовывать замкнутую область в открытую - весьма громоздко, причем трудности возрастают по мере усложнения структуры замкнутой области. Требовался единый алгоритм решения задач с ограничениями и этот алгоритм был разработан Надеждой Николаевной Гернет (1877-1943). Остановимся несколько подробнее на ее биографии, поскольку жизнь Н.Н. Гернет известна гораздо менее, нежели она заслуживает.

Отец Надежды Николаевны, Н.А. Гернет, представитель довольно известного дворянского рода Гернетов, был активным участником революционного движения, привлекался по делу Каракозова в 1866 г., отсидел некоторое время в Петропавловской крепости, затем был выслан сперва в Вологодскую, а затем в Симбирскую губернии. В Симбирске 23 апреля 1877г. и родилась Надежда Николаевна. По матери, урожденной Филатовой, она была родственницей А.Н. Крылова и А.М. Ляпунова. Возможно, что их пример оказал влияние на выбор Надеждой Николаевной жизненного пути. После окончания Симбирской гимназии в 1894г., она переезжает в Петербург, где учится на Высших женских курсах, а после окончания их в 1898 г. продолжает образование в Германии, в Геттингентском университете, под руководством Д. Гильберта. В 1901г. она представила диссертацию, посвященную вариационному исчислению, за которую была удостоена степени доктора философии с «наивысшей похвалой», и в том же году вернулась в Россию, где стала преподавать математику на Высших женских курсах. Именно в докторской диссертации Н.Н. Гернет (тема которой, безусловно, была подсказана ее руководителем, Д. Гильбертом), было начато исследование экстремума для функционалов, заданных в замкнутых областях.

В 1913г Н.Н. Гернет опубликовала книгу «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления» и представила ее к защите на степень магистра в Московский университет. Защитив в 1915г. диссертацию, Н.Н. Гернет стала второй в истории России женщиной – магистром математики русского университета.

В 1915г. Н.Н. Гернет избрали профессором Высших женских курсов, а в 1917г. после слияния их с университетом, Н.Н.Гернет стала профессором Петроградского (с 1924г. – Ленинградского) университета. В Ленинградском университете она работала до 1929г., а с 1930г. и до самой смерти в блокадном Ленинграде в 1943г., она преподавала в Ленинградском политехническом институте. Вся жизнь Н.Н. Гернет – женщины одинокой и незамужней – была отдана науке и преподаванию.

Основные научные результаты Н.Н. Гернет (помимо работ по исследованию ряда Лагранжа) относятся к вариационному исчислению. В этой области Н.Н. Гернет удалось добиться выдающихся результатов, которые не были по достоинству оценены при ее жизни.

В ее уже упоминавшейся книге «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления» приведен общий алгоритм решения задач на экстремум в замкнутой области. Н.Н. Гернет рассуждала следующим образом: пусть требуется найти функцию y(x), доставляющую экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx \quad (36)$$

при наличии ограничения

$y \geq \varphi(x)$. (37)

Равенство $y=\varphi(x)$ очерчивает границу допустимой области. Для искомой функции $y(x)$ теорема Эйлера несправедлива. Н.Н. Гернет предложила изящную замену переменных: вместо переменной $y(x)$, она предложила ввести новую переменную $z(x)$, связанную с прежней равенством:

$z^2=y-\varphi(x)$. (38)

На новую переменную, $z(x)$, не наложено уже никаких ограничений. Границе области $y=\varphi(x)$ соответствует просто значение $z=0$; следовательно, для функции $z(x)$, доставляющей экстремум функционалу (36), переписанному к новой переменной z, теорема Эйлера будет уже справедливой. В то же время, после элементарных преобразований нетрудно установить, что уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}=0 \quad (39)$$

для функционала (36), переписанного к переменной $z(x)$, принимает вид

$$z\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)=0, \quad (40)$$

т.е. распадается на два уравнения: $z=0$ (граница допустимой области) и уравнение Эйлера для исходного функционала. Из уравнения (40) следует, что для функционалов (36) при наличии ограничения (37) справедлива обобщенная теорема Эйлера, сформулированная Н.Н. Гернет: если экстремум существует и достигается в классе кусочно-гладких функций, то он достигается на составных кривых, составленных из отрезков экстремалей и кусков границы допустимой области (разумеется, в частных случаях длина отрезков экстремалей или кусков границы области может и обращаться в нуль). Эту важную теорему будет справедливо называть «теоремой Гернет». Обобщенная теорема Эйлера была доказана Н.Н. Гернет не только для простейшего неравенства (37), но и неравенств общего вида: $\varphi(x;y)=0$, а также – что особенно важно – для дифференциальных неравенств: $\varphi(x;y;\dot{y})\geq 0$. Н.Н. Гернет установила также условия в точках перехода от экстремали к границе области и показала, что в точке перехода для всех функционалов, кроме вырожденных (т.е. таких, у которых $F_{\dot{y}\dot{y}}=0$), касательные к экстремали и границе области должны совпадать. Это условие позволяет определить недостающие постоянные интегрирования в уравнениях отрезков экстремалей. Располагая обобщенной теоремой Эйлера и условиями в точках сопряжения, можно уже не преобразовывать в каждой конкретной задаче замкнутую область в открытую – поиск кривой, доставляющей экстремум, сводится теперь в основном к поиску точек сопряжения. Наконец, Н.Н. Гернет на основе преобразования неравенства Эйлера, установила важное неравенство (кривизна экстремали, проведенной касательно к границе области, не меньше кривизны границы в точке касания), помогающее установить структуру кривой, доставляющей экстремум, в случае сложной границы области.

Таким образом, Н.Н. Гернет разработала в 1913г. общий и удобный алгоритм решения задач на экстремум функционалов при наличии простых или дифференциальных неравенств, наложенных на искомые функции и их производные.

Интересна судьба научного наследия Гернет. Наиболее простые из ее результатов (случай конечных неравенств и невырожденных функционалов) вошли в учебники вариационного исчисления; остальные продолжали оставаться малоизвестными. Наиболее подробно проблема экстремума в замкнутых областях с включением многих результатов Н.Н. Гернет была рассмотрена в учебнике Н.М. Гюнтера (1871-1941), но он вышел в свет всего за два месяца до начала страшной войны 1941-1945 г.г., в огне которой погибла большая часть тиража учебника. Да и сама книга «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления», изданная малым тиражом в 1913г., быстро стала библиографической редкостью. В 1937г. некоторые из результатов Н.Н. Гернет были переоткрыты американским математиком

Валлентайном, но и работы Валлентайна не пользовались большой известностью до 50-х годов 20 века, когда потребности быстро развивающейся теории управления поставили вариационные задачи в замкнутой области в центр внимания математиков. Только тогда обнаружилось, что такие важные проблемы, как отыскание наилучших законов движения и программ управления для ракет, искусственных спутников Земли и других технических объектов, могут рассматриваться как вариационные задачи, но при обязательном учете ограничений на сами искомые функции и их производные. Что же касается первой половины 20 века, то методы вариационного исчисления очень редко использовались в технике. Вариационное исчисление изучалось в университетах в основном для нужд физики, в технических учебных заведениях оно не преподавалось и для задач выбора наилучших конструкций, законов управления и т.п. почти никогда не использовалось. Использование вариационного исчисления, прежде всего, затруднялось тем, что технические задачи почти всегда приводили к необходимости поиска экстремума в замкнутой области; в распространенных учебниках методы решения таких задач почти не излагались, а работы Н.Н. Гернет и Валлентайна были практически неизвестны не только инженерам, но и большинству математиков. Во-вторых, существовал и трудно преодолимый психологический барьер, препятствовавший проникновению совершенно новых методов расчета в широкие круги инженеров. Возможно, что барьер этот был связан с тем, что вариационное исчисление излагалось лишь в университетских учебниках на весьма абстрактном уровне; инженерам оно часто казалось непонятной чистой математикой. Достаточно сказать, что когда в 1950г. профессор Б.Л. Давыдов в журнале «Уголь» опубликовал статью, в которой он, пользуясь вариационным исчислением, нашел наивыгоднейшую диаграмму скорости подъема клети в шахте, (использование этой диаграммы могло принести существенный экономический эффект), то на следующий год в том же журнале были, опубликованы отклики пяти авторов на эту статью, в которых самым непримиримым образом отвергались результаты Б.Л. Давыдова. Исчерпав технические аргументы, оппоненты Б.Л. Давыдова перешли к доводам политическим: «метафизическое отношение проф. Давыдова привело его к надуманной, абстрактной теории, которая применима как будто везде, а в действительности – нигде. Марксизм учит, что абстрактной истины нет, истина всегда конкретна», – так писали они в своем отклике. После опубликования этих резких отзывов Б.Л. Давыдов прекратил дальнейшую работу в области применения вариационных методов.

С трудными психологическими барьерами пришлось столкнуться и автору этих строк в конце пятидесятых годов в ходе работы по применению методов вариационного исчисления для оптимизации работы электрических приводов. Оптимизация позволила найти способы, существенно повышающие быстродействие и производительность электропривода, (изложено в монографии) но внедрение этих способов затянулось на много лет и проходило далеко не гладко.

Психологический барьер меньше ощущался в совершенно новых областях техники — таких как ракетная и космическая техника. Не случайно, что именно в этих областях, начиная с 50-х годов, стали особенно широко применяться новые вариационные методы, разработка которых связана, прежде всего, с именем академика Льва Семеновича Понтрягина (1908-1988). Столкнувшись с необходимостью (характерной для технических задач) отыскания экстремума в замкнутых областях, Л.С. Понтрягин разработал особый метод, получивший в дальнейшем широкую известность под не совсем удачным названием «принцип максимума». Название было связано с тем, что функция $u(t)$, доставляющая экстремум функционалу в замкнутой области, определяется в методике Л.С. Понтрягина из условия максимума гамильтоновой функции H по переменной u.

Отметим, что работы Л.С. Понтрягина по «принципу максимума» выросли в ходе его совместных исследований с выдающимся теоретиком и практиком систем управления Александром Ароновичем Фельдбаумом (1913-1969). А.А. Фельдбаум впервые в 1953-55 г.г. обратил внимание на специфику задач оптимизации для линейных систем, подметил, что управление в этом случае проходит целиком по границам допустимой области, скачком переходя от нижней границы к верхней, доказал лежащую в основе приложений теорему о числе переключений («теорема об «n» интервалах»), и привлек к этой проблеме внимание математиков.

«Принцип максимума» был впервые выдвинут Л.С. Понтрягиным в качестве гипотезы в 1956г., и сразу же получил широкое применение в решении разнообразных технических задач оптимизации. Доказан «принцип максимума» был несколько позже.

Принципиальных различий между методами вариационного исчисления (с учетом результатов Н.Н. Гернет) и «принципом максимума» нет. Различия заключаются скорее в обозначениях и в методике доказательств, которые в «принципе максимума» много сложней. Теоремы «принципа максимума» относятся к объектам, дифференциальные уравнения которых записаны в нормальной форме Коши:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1;\ldots x_n;u)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1\ldots x_n;u),$$

где u - функция, которую называют управлением. Ограничения наложены только на управление:

$$|u| \le 1, \ (42)$$

а функционалом, минимум которого разыскивается, является время перехода объекта (41) из одного заданного состояния в другое. Л.С. Понтрягин предложил ввести промежуточную функцию

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i \ , (43)$$

где $\psi_I(t)$ - вспомогательные переменные, подчиненные уравнениям

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ (44)$$

и доказал, что минимум времени перехода обеспечит управление, которое доставляет максимум функции H (теорема о максимуме). В общем случае из теоремы о максимуме следует, что внутри допустимой области, очерченной неравенством (42), должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \ (45)$$

которое вместе с n уравнениями (41) и n уравнениями (44) позволяет определить $2n+1$ функций (экстремалей) $x_1;\ \ldots x_n,\ \psi_1;\ldots\ \psi_n$ и $u(t)$, доставляющих экстремум внутри допустимой области. Для точек сопряжения экстремали и границы приведены «условия скачка», аналогичные условиям, найденным ранее Н.Н. Гернет.

Наиболее интересен случай, когда в уравнения (41) управление входит линейно, т.е. они имеют вид

$$\dot{x}_i = g_i(x_1;\ldots x_n) + u h_i(x_1;\ldots x_n). \ (46)$$

В этом случае, очевидно, что при наличии ограничения (42) максимум промежуточной функции H достигается на границе области, а конкретно – на функции

$$u = sign\sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i \ . (47)$$

Все результаты легко обобщаются и на случай нескольких управляющих воздействий $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Собственно, именно частный случай управлений, входящих в уравнения (41) линейно, как раз и принес известность и популярность «принципу максимума». Этот частный случай часто встречается на практике и в то же время для него «теорема о максимуме» сразу позволяет определить структуру управления (47), а затем и точки переключения от $u=+1$ к $u=-1$ и наоборот.

Что же касается общего случая, когда уравнения (41) не линейны по u, то «принцип максимума» не вносит ничего более удобного, чем использование теоремы Н.Н. Гернет: точки перехода от экстремалей к границе допустимой области $u=\pm 1$ надо находить с помощью «условий скачка», а это сложнее, чем использование условий сопряжения.

Подробный сравнительный анализ достоинств и недостатков методов решения задач оптимизации, основанных на вариационном исчислении и на «принципе максимума» с указаниями, в каких случаях предпочтительнее использовать тот или другой метод.

Разработка Л.С Понтрягиным и его сотрудниками «принципа максимума», явилась важным и высоко оцененным вкладом в науку. Отрицательную роль сыграло утверждение о непригодности методов вариационного исчисления для решения задач оптимизации в замкнутых областях, поскольку диссертация Н.Н. Гернет и учебник Н.М. Гюнтера остались, по-видимому, неизвестными Л.С. Понтрягину. Надо отметить, что Л.С. Понтрягину многие и неоднократно указывали на ошибочность его утверждений о вариационном исчислении. Однако, несмотря на все эти возражения, утверждение о невозможности для вариационного исчисления решить задачи на экстремум в замкнутой области в неизменном виде повторялось во втором и во всех последующих изданиях монографии. А ведь авторитет Л.С. Понтрягина был велик и вполне заслужен.

Возникает интересный вопрос: почему Л.С. Понтрягин отказывался исправить свое неверное суждение о возможностях вариационного исчисления, несмотря на то, что многие знающие люди указывали ему на ошибку? Согласно одному из устных рассказов, на предложения исправить ошибку, Л.С. Понтрягин отвечал: «монография – это классика. А классику не исправляют».

В результате в СССР имел место известный перекос: методикой «принципа максимума» пользовались даже при решении тех задач, в которых методы вариационного исчисления вели к цели гораздо быстрее и проще.

Так, например, в 1965г. в журнале «Электричество» была опубликована статья, автор которой для отыскания оптимального управления электроприводами прокатного стана применил сложный аппарат «принципа максимума», не справился с ним и допустил ошибку. Я написал тогда письмо автору статьи, где указывал на ошибку и показал, как просто и легко можно получить правильный результат, использовав более простой аппарат вариационного исчисления. Автор статьи с негодованием ответил мне: «Но ведь академик Понтрягин доказал, что для задач с ограничениями вариационное исчисление непригодно». Ошибка так и не была исправлена. Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что чрезмерное преклонение даже перед самыми заслуженными авторитетами (авторитет Л.С. Понтрягина вполне заслужен) может приносить вред. Для избежания ошибок нужно внимательнее изучать историю математики.

В США все происходило проще: результаты Н.Н. Гернет, как уже говорилось, были в 1937г. переоткрыты американским математиком Валлентайном. По-видимому, Валлентайн не был знаком с работами Н.Н. Гернет. Он также ввел замену переменных для преобразования замкнутой области в открытую, использовав замену, очень похожую на преобразование, использованное Н.Н. Гернет. Поэтому американские исследователи с самого начала успешно использовали методы вариационного исчисления для решения задач оптимизации, как в открытых областях изменения переменных, так и в замкнутых областях, при учете ограничений в виде неравенств, а «принципом максимума» пользовались только там, где он действительно выгоден и удобен.

Несколько позже Л.С. Понтрягина, американский математик Ричард Беллман (Bellman, 1920-1984) разработал еще один интересный метод оптимизации в замкнутых областях, получивший название «динамическое программирование». Монография Р. Беллмана под этим названием вышла в свет в 1957г., а в русском переводе – в 1960г. Методы Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана и их многочисленные модификации в дальнейшем стали называть «неклассическими вариационными методами», или «теорией оптимального управления», противопоставляя их «классическому вариационному исчислению». Оснований для такого противопоставления нет: мы убедились, что и в рамках классического вариационного исчисления были разработаны методы, позволяющие решать задачи на экстремум в замкнутой области и другие задачи оптимального управления. Другое дело, что специфика практических задач оптимизации заставила более подробно разработать те разделы вариационного исчисления, на которые до второй половины двадцатого века не обращали большого внимания.

Так, например, в известных учебниках лишь очень коротко и поверхностно рассматривались вырожденные функционалы – т.е. те функционалы, которые от первой (или от второй) производной искомой функции зависят линейно – т.е. имеют вид:

$$J = \int_a^b [M(x;y) + \dot{y}N(x;y)]dx, \quad (48)$$

или

$$J = \int_a^b [M(x;y;\dot{y}) + \ddot{y}N(x;y;\dot{y})]dx, \quad (49)$$

а между тем многие важные практические задачи приводят именно к вырожденным функционалам, обладающим особыми свойствами.

Методы, позволяющие решать практические задачи оптимизации и оптимального управления, дополняющие классическое вариационное исчисление, с наибольшей полнотой изложены в монографии (по инициативе Р. Беллмана был сделан ее перевод на английский язык, опубликованный в США в 1968г. и в Англии в 1969г.).

Так, например, там отмечено, что многие задачи оптимизации приводят к функционалам вида

$$J = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t;x;\dot{x})dt, \quad (50)$$

т.е. к усредняемым функционалам с предельным переходом. Между тем для подобных функционалов несправедлива основная теорема вариационного исчисления и экстремум может достигаться не на экстремалях. Так, например, для простейшего из функционалов вида (50):

$$J = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt, \quad (51)$$

уравнение Эйлера принимает вид: $2x = 0$ и ему удовлетворяет единственная экстремаль $x=0$, на которой функционал

достигает своего минимального значения, равного нулю. Однако то же значение нуль функционал принимает и на многих других функциях — например, на функциях $x = t^k e^{-\alpha t}$, для любых $k \geq 0$, $\alpha > 0$, то есть на функциях, которые заведомо не удовлетворяют уравнению Эйлера и условиям максимума Понтрягина. Функционалы вида (50) требуют особого подхода.

С появлением методов, позволяющих отыскивать экстремумы в замкнутой области и основанных либо на теореме Н.Н. Гернет, либо на «принципе максимума», или на динамическом программировании, задачи оптимизации стало можно решать на основе вполне адекватного математического аппарата. Для успешного поиска оптимума стало требоваться уже не столько искусство математика, сколько хорошее знание особенностей рассматриваемой технической задачи, понимание того, какими факторами можно пренебречь, к каким последствиям это приведет и т.п.

Оптимальные законы управления были найдены сначала для объектов космической техники и электроприводов постоянного и переменного тока, а затем и для очень многих других систем и устройств.

Каждый раз переход на оптимальное управление позволял повысить эффективность оптимизируемых систем, сократить расход энергии и топлива.

В то же время надо заметить, что вариационные методы сами по себе позволяли найти лишь закон управления, программу изменения его как функции времени, но эта программа чувствительна к помехам, к неизбежным погрешностям измерений, при наличии которых программное управление очень трудно использовать.

Для того чтобы реализовать оптимальное управление на практике, создать устройство, автоматически реализующее оптимальное движение при наличии погрешностей измерения, не полностью известных возмущающих сил и т.п., требовались иные, более сложные подходы, о которых мы расскажем в следующей главе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. АН СССР. Институт истории естествознания и техники. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3 т. Т.1. С древнейших времен до начала нового времени / под ред. А.П. Юшкевича; АН СССР, Ин-т истории естествознания и техники.— М.: Наука, 1970 .— 350с.; Т.2. Математика XVII столетия / под ред. А.П. Юшкевича; АН СССР, Ин-т истории естествознания и техники.— М.: Наука, 1970 .— 299с.; Т.3. Математика XVIII столетия / под ред. Юшкевича А.П.; АН СССР, Ин-т истории естествознания и техники.— М.: Наука, 1972 .— 494с.
2. Киселев, А.Б. Большая математическая энциклопедия: Для школьников и студентов / Науч. ред. А.Б. Киселев.— М.: Олма-пресс, 2004 .— 639с.
3. Петров, Ю.П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет / Ю.П. Петров, Л.Ю. Петров .— 3-е изд., доп. — СПб., 2002 .— 141с.
4. Рыбников, К. А. История математики : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов / К. А. Рыбников .— 2-е изд. [перераб.] .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974 .— 455 с.
5. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк; пер. с нем. И. Б. Погребысского .— 5-е изд., испр. — М.: Наука, 1990 .— 256 с.; 4-е изд. — М.: Наука, 1984 .— 284с.; 2-е изд. — М.: Наука, 1969 .— 328 с.
6. Российская академия наук. Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Историко-математические исследования. Серия 2. Вып.12(47) / РАН. Ин-т истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова; редкол.: С.С. Демидов(гл.ред.) [и др.].— М.: Янус-К, 2007.— 384с.
7. Российская академия наук. Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Историко-математические исследования. Серия 2. Вып.10(45) / РАН, Ин-т истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова; редкол.: С. С. Демидов (гл.ред.) [и др.] .— М.: Янус-К, 2005.— 392с.
8. РАН. Ин-т истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Историко-математические исследования. Сер.2. Вып.8(43) / ред. кол.: С.С. Демидов и др.; РАН. Ин-т истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова.— М.: Янус-К, 2003 .— 416с.