МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
_____М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
«Комплексный анализ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик:

Баранов В.П., профессор кафедры ПМиИ, д.т.н., доцент

1. ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

К каждому практическому занятию студент должен изучить теоретические вопросы, необходимые для решения практических задач по данной теме.

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Представление комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
2) Модуль и главное значение аргумента комплексных чисел.
3) Операции над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
4) Построение множества точек на плоскости комплексного переменного, удовлетворяющих заданным условиям.
5) Установление линии по заданному уравнению.

1.2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Понятие функции комплексного переменного. Действительная и мнимая части.
2) Предел и непрерывность функции.
3) Модуль и главное значение аргумента функции.
4) Представление комплексных чисел, заданными через элементарные функции комплексного переменного, в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

1.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Дифференциал и производная.
2) Условия комплексной дифференцируемости Коши-Римана.
3) Аналитичность (голоморфность) функции в точке и области.
4) Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного.

2) Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

3) Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

1.5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Числовые ряды с комплексными членами.
2) Функциональные ряды. Равномерная сходимость.
3) Степенные ряды. Теорема Абеля.
4) Ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора.
5) Ряд Лорана. Область сходимости.

1.6. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Нули аналитической функции. Порядок нуля.

2) Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции. Теорема Сохоцкого.

1.7. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИЙ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

Определение и формулы вычисления вычета аналитической функции в изолированной особой точке.

1.8. ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Основная теорема теории вычетов.
2) Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.
3) Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

1.9. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Лемма Жордана .

2) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$.

3) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

4) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$.

1.10. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Определение логарифмического вычета.
2) Подсчет числа нулей аналитической функции.
3) Принцип аргумента.
4) Теорема Руше.

1.11. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Понятие конформного отображения.
2) Конформные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями.

1.12. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОРИГИНАЛОВ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Определение преобразования Лапласа.
2) Изображение элементарных функций.
3) Свойства преобразования Лапласа.
4) Отыскание оригинала по изображению. Формула Меллина. Теоремы разложения.

1.13. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

1) Решение задачи Коши операционным методом.
2) Решение систем дифференциальных уравнений первого порядка операционным методом.

1.14. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ

Теоретические сведения, которые должен освоить студент:

Формула Дюамеля и ее применение для решения задачи Коши.

2. ПОДГОВКА К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1) Подготовка к контрольной работе № 1 по темам 1.1–1.4.
2) Подготовка к контрольной работе № 2 по темам 1.5–1.14.

3. ВЫПОЛНЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Выполнение курсовой работы осуществляется по графику, представленному в методических указаниях к курсовой работе.

4. ПОДГОТОВКА К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМУ ЗАЧЕТУ

ВОПРОСЫ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМУ ЗАЧЕТУ

1. Комплексные числа и действия над ними. Поле комплексных чисел.
2. Замкнутая комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана. Метрическое пространство комплексных чисел.
3. Топология комплексной плоскости.
4. Понятие области на комплексной плоскости. Линия Жордана. Односвязные и многосвязные области.
5. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции.
6. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитичность функции в точке и области.
7. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения.
8. Элементарные функции комплексного переменного. Дробно-линейные функции и их отображения.
9. Элементарные функции комплексного переменного. Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$ и их отображения.
10. Элементарные функции комплексного переменного. Функция Жуковского и ее отображение.
11. Элементарные функции комплексного переменного. Показательная и логарифмическая функции и их отображения.
12. Элементарные функции комплексного переменного. Тригонометрические и гиперболические функции и их отображения.
13. Определение интеграла от функции комплексного переменного и его свойства.
14. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

15. Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

16. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

17. Принцип максимума модуля аналитической функции.

18. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра. Производная n-го порядка аналитической функции. Теоремы Морера и Лиувилля.

19. Числовые ряды с комплексными числами. Абсолютная и условная сходимости. Признаки Даламбера и Коши.

20. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Критерий Коши.

21. Степенные ряды. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара.

22. Ряд Тейлора. Представление аналитической функции рядом Тейлора. Тейлоровские разложения элементарных функций.

23. Нули аналитической функции. Теорема единственности. Следствия.

24. Ряд Лорана. Область сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

25. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Устранимая особая точка и разложение в ее окрестности аналитической функции.

26. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Полюс порядка m функции $f(z)$ и ее разложение в окрестности полюса. Определение мероморфной функции.

27. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Поведение аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

28. Определение и формулы вычисления вычета аналитической функции в изолированной особой точке.

29. Основная теорема теории вычетов. Вычет аналитической функции в бесконечно удаленной точке. Интегральная формула Коши в неограниченной области.

30. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов. Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi,\ \sin\varphi)d\varphi$.

31. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

32. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов. Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$. Лемма Жордана.

33. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов для многозначных функций. Интегралы вида $\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx,\ 0<\alpha<1$.

34. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов для многозначных функций. Интегралы вида $\int_0^\infty x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)dx,\ 0<\alpha<1$.

35. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов для многозначных функций. Интегралы вида $\int_0^\infty f(x)\ln x dx$.

36. Понятие логарифмического вычета и его вычисление.

37. Подсчет числа нулей аналитической функции. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры.

38. Определение преобразования Лапласа. Область сходимости. Преобразование Хевисайда.

39. Изображение элементарных функций: единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции.

40. Свойства преобразования Лапласа: свойство линейности, теоремы подобия, смещения и запаздывания. Теорема умножения (изображение свертки).

41. Свойства преобразования Лапласа: теоремы дифференцирования оригинала и изображения.

42. Свойства преобразования Лапласа: теоремы интегрирования оригинала и изображения.

43. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина. Изображение произведения двух оригиналов.

44. Первая теорема разложения (случай регулярной на бесконечности функции).

45. Вторая теорема разложения. Определение оригинала для дробно-рациональной функции.

46. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом.

47. Решение задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на основе формулы Дюамеля.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного: учебник. – М.: Физматлит, 2010. – 332 с.

2. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного: учебник. – М.: Бином, 2013. – 248 с.

3. Баранов В.П. Комплексный анализ: учеб. пособие – Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. – 128 с.

Дополнительная литература

1. Копаев А.В., Леванков В.И., Мастихин А.В. Теория функций комплексного переменного. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 38 с.

2. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие. – М.: Бином, 2012. – 362 с.

3. Половинкин Е.С. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматлит, 2003. – 208 с.

4. Лаврентьев Е.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.

5. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): учебное пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 192 с.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

7. Теория функций комплексного переменного: учебно-методическое пособие / Под. ред Г.С. Садыкова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 80 с.

8. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций ком плексного переменного. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.

9. Алгазин О.Д., Бунина Т.А., Дубровин В.М. Операционное исчисление: учебно-методическое пособие. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 49 с.

10. Карасев И.П. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2008. – 216 с.

11. Малышева Н.Б., Розендорн Э.Р. Функции комплексного переменного: учебник. – М.: Физматлит, 2010. – 168 с.

12. Натанзон С.М. Курс комплексного анализа: учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.

13. Посицельская Л.Н. Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2007. – 136 с.

14. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 2004. – 336 с.