МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 21 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

___________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)

"Математика в социально-гуманитарной сфере"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
39.03.01Социология

с направленностью (профилем)
Социальные процессы и структуры на макро- и микроуровнях

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 390301-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний:

Кузнецова В.А., доцент, к.ф.-м.н. ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Содержание практических занятий

1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества в математике относится к неопределяемым (подобно понятиям числа и точки).

Множеством является совокупность объектов, объединенных каким-либо признаком.

Объекты – элементы множества – обозначаются строчными буквами. Сами множества обозначаются заглавными (прописными) буквами латинского алфавита. Тот факт, что a является элементом множества A обозначается $a\in A$(говорят, что a принадлежит A); то, что a не является элементом множества A,обозначается $a\notin A$ (говорят, что a не принадлежит A).

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо характеристическое свойство, по которому можно определить, принадлежит данный элемент множеству или нет, например:

$M=\{1,2,3,4,5\}$ или $M=\{x:\ x\in N, 1\le x\le 5\}$

<u>Пример</u>: Найти элементы множества: $A=\{x:\ x\in N,\ 2x^2-7x+3=0\}$.

Решив квадратное уравнение, находим его корни $x_1=\frac{1}{2}\notin N$, $x_2=3\in N$, значит $A=\{3\}$.

- Множества, состоящие из одних и тех же объектов, называются равными

<u>Пример</u>: $A=\{0,2,3\}$, $B=\{3,2,0\}$

$A=B$

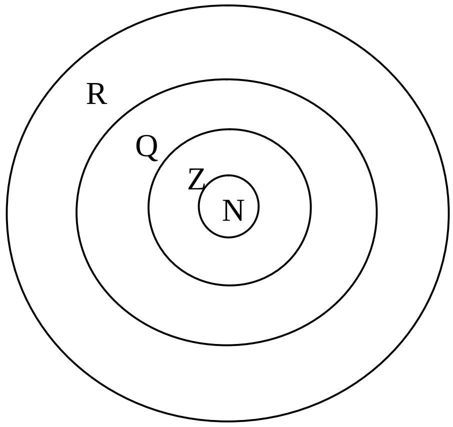
- Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то B называется подмножеством множества A: $B\subset A$

<u>Пример</u>: $B=\{3,2\}\subset A=\{3,2,0\}$

$\varnothing$ – подмножество любого множества; A подмножество A

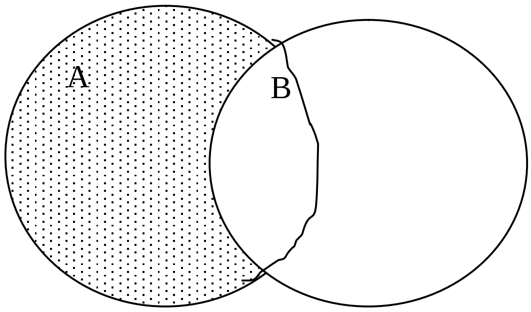
$N\subset Z\subset Q\subset R$

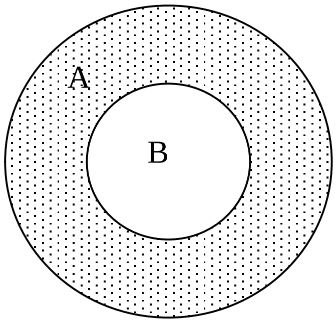
N –множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
R – множество действительных чисел



Изобразим множества A и B кругами на плоскости (диаграммы Эйлера-Венна)

• Множество C, элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называется разностью множеств A и Bи записывается $C = A \setminus B$.





Примеры

1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\} \Rightarrow A \setminus B = \{3\}$

2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\} \Rightarrow A \setminus B = \{1,2\}$

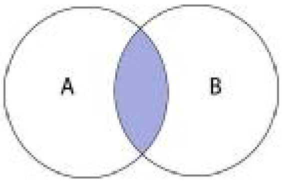
3) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

• Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ – дополнение множества B до множества A

• Множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A так и множеству B(и только из этих элементов), называется пересечением множеств A и B: $C = A \cap B$.

<u>Пример</u>: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$C = A \cap B = \{2,3\}$



• Множества, пересечение которых есть пустое множество, называются непересекающимися: $\{0,1\} \cap \{2\} = \varnothing$.

Пример.

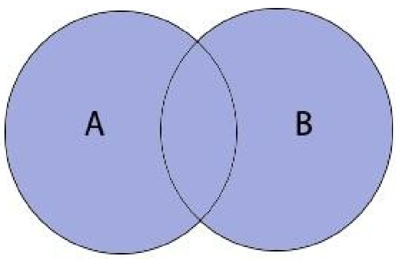
$$1)\begin{cases} x^2+4x+4=0 \\ x \ge 0 \end{cases} \varnothing$$

$$2)\begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \{-2;1\} \cap [0;+\infty) = \{1\}$$

• Множество C, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется объединением множеств A и B: $C = A \cup B$

Пример. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$

$C = A \cup B = \{1,2,3,4\}$



Пример:

1) $(x+1)(x^2-4)=0$ $\{-2,-1,2\}$–совокупность решений

$$2)\ (x-5)(x+3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ x>-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<5 \\ x<-3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow (-\infty;-3) \cup (5;+\infty)$$

Составить множества:

1) A– натуральные делители числа 12.

2) $B \setminus A$, если $A=\{-5,-4,-3\}$, $B=\{-5,-4,-3,-2\}$.

3) $R \setminus Q$, $Z \setminus N$

4) а) $[1;7] \cup [5;8]$, $[1;7] \cap [5;8]$, $[1;7] \setminus [5;8]$, $[5;8] \setminus [1;7]$

б) $(0;3] \cup [5;7)$, $(0;3] \cap [5;7)$, $(0;3] \setminus [5;7)$, $[5;7) \setminus (0;3]$

5) Объединение и пересечение корней уравнений
$x^2+9x-10=0$ и $x^2-3x+2=0$

6) Запишите решение неравенства $(x-1)(x-6)\geq 0$

7) A– натуральные делители числа 18,
B– натуральные делители числа 45. Найти $A \cap B$.

8) Найти $A \cap B$, если $A=\{x:\ x\in Z, |x|<5\}$ $B=\{x:\ x\in N, |x-1|<7\}$

9) Найти $A \cup B$, если $A=\{x:\ x^2-6x+9\leq 0\}$ $B=\{x:\ x\in Z, |x|\leq 1\}$

• Множество A называется эквивалентным множеству B ($A \sim B$), если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Различают конечные и бесконечные множества.

• Число элементов множества A называется его мощностью или кардинальным числом ($|A|$ или $cardA$).

Конечное множество, состоящее из n элементов имеетмощность $|A|=n$.

Если $A \sim N$, то множество A счетное.

Если $A \sim R$, то $A-$континуальное множество или множество мощности континуум.

Задачи для самостоятельного решения.

Изобразить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

а) $(A \cap B) \setminus C$

б) $(A \cup B) \setminus C$

в) $(A \cap B) \cap C$

г) $(A \setminus B) \cap C$

д) $(A \setminus B) \cup C$

е) $(A \setminus B) \setminus C$

ж) $(A \cap B) \cup C$

2. Множество комплексных чисел

Определение. *Комплексным числом* называют всякую упорядоченную пару (x, y) действительных чисел.

Его обозначают $z = x + yi,\ x, y \in R$, где $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 6x + 25 = 0$ над множеством комплексных чисел
Вычислим дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 36 - 100 = -64$.
Тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-64} = \sqrt{-1 \cdot 64} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{64} = 8i$
Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \frac{2(-3 \pm 4i)}{2} = -3 \pm 4i.$$

Запись $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.Действительные числа x и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа $z = x + yi$:

$$\operatorname{Re} z = x \text{ и } \operatorname{Im} z = y.$$

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 + z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 + x_2$, а мнимая равна $y = y_1 + y_2$, т.е.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 - z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 - x_2$, а мнимая равна $y = y_1 - y_2$, т.е.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Число $\overline{z} = x - yi$ называется *сопряженным* (комплексно сопряженным) числу $z = x + yi$. Отметим, что $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Частным (*отношением*) двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ при $z_2 \neq 0$ (т.е. $x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0$) называют комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Пример. Вычислить $(2-3i)^2+2i^{15}$

$$(2-3i)^2+2i^{15}=2^2-2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2+2i^{14}\cdot i=4-12i+9i^2+2(i^2)^7\cdot i=$$
$$=4-12i+9i^2+2(i^2)^7\cdot i=4-12i-9+2\cdot(-1)^7 i=-5-12i-2i=-5-14i$$

Пример. Вычислить $\dfrac{7+3i}{3i-1}$

$$\frac{7+3i}{3i-1}=\frac{7+3i}{-1+3i}=\frac{(7+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{-7-21i-3i-9i^2}{(-1)^2+3^2}=$$

$$=\frac{-7-24i+9}{1+9}=\frac{2-24i}{10}=\frac{1-12i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{12}{5}i\,.$$

Пример. Записать число $z=-\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$ в алгебраической форме.

Число z в алгебраической форме имеет вид $z=x+yi$. Преобразуем дробь, умножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z=-\frac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{1-i^2}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{2}=$$
$$=-\sqrt{2}(1-\mathrm{i})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

Алгебраическая форма: $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.Здесь $\operatorname{Re}z=x=-\sqrt{2}$ и $\operatorname{Im}z=y=\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $(4+5i)^2(5-4i)$ Ответ: $115+236i$
2. Вычислить $\dfrac{4-5i}{5+4i}-2i^{19}+i^{25}-i^{14}+2i^3$ Ответ: 1
3. Вычислить $\dfrac{2-5i}{3+i}$ Ответ: $0{,}1-1{,}7i$

3. Элементы математической логики

Логика возникла в культуре Древней Греции. Первое дошедшее до нас сочинение по логике - «Аналитики» Аристотеля (384-322 гг. до н.э.). Формальная логика просуществовала без серьёзных изменений более двадцати столетий. БУЛЬ Джордж (1815-1864) - английский математик, который считается основоположником математической логики.

Развитие математики выявило недостаточность логики Аристотеля и потребовало дальнейшего её развития. Независимо развивалась буддистская логика, но достоянием европейской науки она стала недавно, поэтому математическая логика берет начало из логики Аристотеля. Математическая логика является наукой о законах математического мышления. Предметом математической логики являются математические теории в целом, которые изучаются с помощью математических языков. При этом в первую очередь интересуются вопросами непротиворечивости математических теорий, их развязности и полноты.

Математическая логика отличается тем, что пользуется языком математических и логических символов, исходя из того, что в принципе они могут совсем заменить слова обычного языка и принятые в обычных живых языках способы объединения слов в предложения. Особенности математического мышления объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем. В связи с этим современную математическую логику определяют как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий и отношения между ними. Эти понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории - аксиомы. Всё дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом. Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом в построении геометрии. Изложение этой теории в Началах не безупречно. Евклид здесь пытается дать определение исходных понятий (точки, прямой, плоскости). В доказательстве теорем используются нигде явно не сформулированные положения, которые считаются очевидными. Таким образом, в этом построении отсутствует необходимая логическая строгость, хотя истинность всех положений теории не вызывает сомнений.

Отметим, что такой подход к аксиоматическому построению теории оставался единственным до XIX века. Большую роль в изменении такого подхода сыграли работы Н. И. Лобачевского (1792-1856). Лобачевский впервые в явном виде высказал убеждения в невозможности доказательства пятого постулата Евклида и подкрепил это убеждение созданием новой геометрии. Позже немецкий математик Ф. Клейн (1849-1925) доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского, чем фактически была доказана и невозможность доказательства пятого постулата Евклида. Так возникли и были решены в работах Н. И. Лобачевского и Ф. Клейна впервые в истории математики проблемы невозможности доказательства и непротиворечивости в аксиоматической теории. Непротиворечивость аксиоматической теории является одним из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путём вывести два противоречивых друг другу утверждения.

Доказательство непротиворечивости аксиоматических теорий можно осуществить различными методами. Одним из них является МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ или ИНТЕРПРЕТАЦИЙ. Здесь в качестве основных понятий и отношений выбираются элементы некоторого множества и отношения между ними, а затем проверяется, будут ли выполняться для выбранных понятий и отношений аксиомы данной теории, то есть строится модель для данной теории.

Так, аналитическая геометрия является арифметической интерпретацией геометрии Евклида. Ясно, что метод моделирования сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к проблеме непротиворечивости другой теории. Большинство интерпретаций для математических теорий (и, в частности, для арифметики) строится на базе теории множеств. Однако в конце XIX века в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы теории множеств). Ярким примером такого парадокса является парадокс Б. Рассела.

Пример. Назовём множество нормальным, если оно не содержит себя в качестве своего элемента и ненормальным в противном случае.

Например, множество всех книг - нормальное множество, а множество всех мыслимых вещей - ненормальное множество. Пусть L - множество всех нормальных множеств. К какому классу относится множество L? Если L - нормальное множество, то $L \in L$, т.е. содержится в классе нормальных множеств, но тогда оно содержит себя в качестве своего элемента, и поэтому ненормально. Если L - ненормальное множество, то $L \notin L$, т.е. не содержится среди нормальных множеств, но тогда L не содержит себя в качестве своего элемента, и потому оно нормально. Таким образом, понятие нормального множества приводит к противоречию.

Попытки устранить противоречия в теории множеств привели к необходимости построить аксиоматическую теорию множеств. Последующие видоизменения и усовершенствования этой теории привели к созданию современной теории множеств. Однако средства этой аксиоматической теории не позволяют доказать её непротиворечивость. Другие методы обоснования математики были развиты Д. ГИЛЬБЕРТОМ (1862-1943) и его школой. Они основываются на построении математических теорий как синтаксических теорий, в которых все аксиомы записываются формулами в некотором алфавите и точно указываются правила вывода одних формул из других, т.е. в теорию как составная часть входит математическая логика.

Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой требовалось доказать, стала предметом другой математической теории, которую Гилберт назвал МЕТАМАТЕМАТИКОЙ, или ТЕОРИЕЙ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ. В связи с этим возникает задача построения синтаксической, т.е. формализованной аксиоматической теории самой математической логики. Выбирая по-разному системы аксиом и правила вывода одних формул из других, получают различные синтаксические логические теории. Каждую из них называют ЛОГИЧЕСКИМ ИСЧИСЛЕНИЕМ.

Основная идея математической логики - формализация знаний и рассуждений. Известно, что наиболее легко формализуемые знания - математические. Таким образом, математическая логика, по существу, - наука о математике, или метаматематика. Центральным понятием математической логики является ``математическое доказательство''. Действительно, ``доказательные'' (иначе говоря, дедуктивные) рассуждения - единственный вид признаваемых в математике рассуждений. Рассуждения в математической логике изучаются с точки зрения формы, а не смысла.

По существу, рассуждения моделируются чисто ``механическим" процессом переписывания текста (формул). Такой процесс называют выводом.Говорят еще, что математическая логика оперирует только синтаксическими понятиями.Однако обычно всё же важно, как соотносятся рассуждения с действительностью (или нашими представлениями). Поэтому, надо всё же иметь в виду некоторый смысл формул и вывода. При этом используют термин семантика (синоним слова ``смысл") и чётко разделяют синтаксис и семантику. Когда же действительно интересуются только синтаксисом, часто используют термин ``формальная система". Мы будем использовать синоним этого термина - ``исчисление" (используются ещё термины ``формальная теория" и ``аксиоматика"). Объектом формальных систем являются строки текста (последовательности символов), с помощью которых записываются формулы.

Формальная система определена, если:

Задан алфавит (множество символов, используемых для построения формул).

Определено, какие именно строки считать формулами (остальные строки считаются просто бессмысленными).

Выделено множество формул, называемых аксиомами. Это - стартовые точки в выводах.

Задано множество правил вывода, которые позволяют из некоторой формулы (или множества формул) получать новую формулу.

Отрицание логического высказывания - логическое высказывание, принимающее значение "истинно", если исходное высказывание ложно, и наоборот. Это специальная логическая операция. В зависимости от местоположения различают внешнее и внутреннее отрицание, свойства и роли которых существенно различаются.

Внешнее отрицание (пропозициональное) служит для образования сложного высказывания из другого (не обязательно простого) высказывания. В нем утверждается отсутствие положения дел, описываемого в отрицаемом высказывании. Традиционно отрицательное высказывание считается истинным, если, и только если, отрицаемое высказывание ложно. В естественном языке отрицание обычно выражается оборотом «неверно, что», за которым следует отрицаемое высказывание.

В языках формальных теорий отрицание называется особая унарная пропозициональная связка, используемая для образования из одной формулы другой, более сложной. Для обозначений отрицание обычно используются символы «\отрицание», «-» или «- 1». В классической логике высказываний формула - А истинна тогда и только тогда, когда формула А ложна.

Однако в неклассической логике отрицание может не обладать всеми свойствами классического отрицания. В этой связи возникает вполне закономерный вопрос о минимальном наборе свойств, которому должна удовлетворять некоторая унарная операция, чтобы ее можно было считать отрицанием, а также о принципах классификации различных отрицаниях в неклассических формальных теориях.

Фактически указанное выше традиционное понимание внешнего (пропозиционального) отрицания может быть выражено через систему следующих требований: (I) Если А - истинно (ложно), то не-А - ложно (истинно); (II) Если не-А - истинно (ложно), то А - ложно (истинно). Отрицание, удовлетворяющее условию (1), принято называть минимальным отрицанием..

Внутреннее отрицание входит в состав простого высказывания. Различают отрицание в составе связки (отрицательная связка) и терминное отрицание.

Отрицание в составе связки выражается с помощью частицы «не», стоящей перед глаголом-связкой (если он имеется) или перед смысловым глаголом. Оно служит для выражения суждений об отсутствии каких-то отношений («Иван не знает Петра»), или для образования отрицательной предицирующей связки в составе категорических атрибутивных суждений.Терминное отрицание используется для образования негативных терминов. Оно выражается через приставку «не» или близкие ей по смыслу («Все неспелые яблоки - зеленые»).

Конъюнкция двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны (от лат. conjunctio - союз, связь), в широком смысле - сложное высказывание, образованное с помощью союза «и». В принципе можно говорить о конъюнкции бесконечного числа высказываний (например, о конъюнкции всех истинных предложений математики). В логике конъюнкцией называют логическую связку (операцию, функцию; обозначают: &,); образованное с её помощью сложное высказывание истинно только при условии одинаковой истинности его составляющих. В классической логике высказываний конъюнкция вместе с отрицанием составляют функционально-полную систему пропозициональных связок. Это означает, что через них можно определить любую другую пропозициональную связку. Одним из свойств конъюнкции является коммутативность (т. е. эквивалентность А& В и В & А). Однако, иногда, говорят о некоммутативной, т. е. упорядоченной конъюнкции (примером высказывания с такой конъюнкции может служить:«Ямщик свистнул, и лошади поскакали»).

Дизъюнкция двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда хотя бы одно из них истинно(от лат. disjunctio - разобщение, обособление), в широком смысле - сложное высказывание, образованное из двух или более предложений с помощью союза «или», выражающего альтернативность, или выбор.В символической логике дизъюнкцией называют логическую связку (операцию, функцию), образующую из предложений А и В сложное высказывание, обозначаемое обычно как А V В, которое является истинным при истинности по крайней мере одного из двух дизъюнктивных членов.

Импликация двух логических высказываний А и В - логическое высказывание, ложное только тогда, когда В ложно, а А истинно (от лат. implicatio - сплетение, от implico - тесно связываю) - логическая связка, соответствующая грамматической конструкции «если.., то...», с помощью которой из двух простых высказываний образуется сложное высказывание. В импликативном высказывании различают антецедент (основание) - высказывание, идущее после слова «если», и консеквент (следствие) - высказывание, идущее за словом «то».Импликативное высказывание представляет в языке логики условное высказывание обычного языка. Последнее играет особую роль, как в повседневных, так и в научных рассуждениях, основной его функцией является обоснование одного путем ссылки на нечто другое.

Выражаемую условным высказыванием связь обосновывающего и обосновываемого трудно охарактеризовать в общем виде, и только иногда природа ее относительно ясна.

Эта связь может быть, в частности, связью логического следования, имеющей место между посылками и заключением правильного умозаключения («Если все живые многоклеточные существа смертны и медуза является таким существом, то она смертна»). Связь может представлять собой закон природы («Если тело подвергнуть трению, оно начнет нагреваться») или причинную связь («Если Луна в новолуние находится в узле своей орбиты, наступает солнечное затмение»). Рассматриваемая связь может иметь также характер социальной закономерности, правила, традиции и т.п. («Если меняется экономика, меняется и политика», «Если обещание дано, оно должно быть выполнено»).

Связь, выражаемая условным высказыванием, предполагает, что консеквент с определенной необходимостью «вытекает» из антецедента и что есть некоторый общий закон, сумев сформулировать который, мы можем логически вывести консеквент из антецедента. Например, условное высказывание «Если висмут- металл, то он пластичен» предполагает общий закон «Все металлы пластичны», делающий консеквент данного высказывания логическим следствием его антецедента.

И в обычном языке, и в языке науки условное высказывание, кроме функции обоснования, может выполнять также целый ряд других задач. Оно может формулировать условие, не связанное с к.-л. подразумеваемым общим законом или правилом («Если захочу, разрежу свой плащ»), фиксировать какую-то последовательность («Если прошлое лето было сухим, то в этом году оно дождливое»), выражать в своеобразной форме неверие («Если вы решите задачу, я докажу великую теорему Ферма»), противопоставление («Если в огороде растет капуста, то в саду растет яблоня») и т.п. Многочисленность и разнородность функций условного высказывания существенно затрудняет его анализ.

В логических системах абстрагируются от особенностей обычного употребления условного высказывания, что ведет к различным импликациям. Наиболее известны из них импликация материальная, строгая импликация и релевантная (уместная) импликация.

Материальная импликация - одна из основных связок классической логики. Определяется она таким образом: импликация ложна только в случае истинности антецедента и ложности консеквента и истинна во всех остальных случаях. Условное высказывание «Если А, то В» предполагает некоторую реальную связь между тем, о чем говорится в А и В; выражение «А материально имплицирует В» такой связи не предполагает.

Строгая импликация определяется через модальное понятие (логической) невозможности: «А строго имплицирует В» означает «Невозможно, чтобы А было истинно, а В ложно».

В релевантной логике импликация понимается как условный союз в его обычном смысле.

В случае релевантной импликация нельзя сказать, что истинное высказывание может быть обосновано путем ссылки на любое высказывание и что с помощью ложного высказывания можно обосновать какое угодно высказывание.

Эквивалентность двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны или ложны (от позднелат. equivalens - равноценный) - родовое наименование всевозможных отношений типа равенства, т.е. рефлексивных , симметричных и транзитивных бинарных отношений. Примеры: эквиполентность (совпадение по смыслу, значению, содержанию, выразительным и (или) дедуктивным возможностям между понятиями, концепциями, научными теориями или формализующими их формальными системами) конгруентность или подобие геометрия, фигур; изоморфизм; равномощность множеств и другие эквивалентность каких-либо объектов означает их равенство (тождество) в каком-либо отношении(например, изоморфные множества неразличимы по своей "структуре", если под "структурой" понимать совокупность тех их свойств, относительно которых эти множества изоморфны). Всякое отношение эквивалентности порождает разбиение множества, на котором оно определено, на попарно не пересекающиеся "классы эквивалентности " в один класс относят при этом эквивалентные друг другу элементы данного множества.

Рассмотрение классов эквивалентности в качестве новых объектов представляет собой один из основных способов порождения (введения) абстрактных понятий в логико-математических (и вообще естественно-научных) теориях. Так, считая эквивалентными дроби a/b и c/d с целыми числителями и знаменателями, если ad=bc, вводят в рассмотрение рациональные числа как классы эквивалентных дробей; считая эквивалентными множества, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие, вводят понятие мощности (кардинального числа) множества (как класс эквивалентных между собой множеств); считая эквивалентными два куска вещества, вступающие в равных условиях в одинаковые химических реакции, приходят к абстрактному понятию химического состава и т.п.

Термин " эквивалентность" употребляют часто не как родовой, а как синоним некоторых из его частных значений ("эквивалентность теорий" вместо "эквивалентность", " эквивалентность множеств" вместо "равномощность", " эквивалентность слов" в абстрактной алгебре вместо "тождество" и т.п.).

Математическая логика является наукой о законах математического мышления. Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, и это, конечно, расширило область логических исследований. Сфера применения математической логики очень широка. С каждым годом растет глубокое проникновение идей и методов математической логики в информатику, вычислительную математику, лингвистику, философию. Мощным импульсом для развития и расширения области применения математической логики стало появление электронно-вычислительных машин. Оказалось, что в рамках математической логики уже есть готовый аппарат для проектирования вычислительной техники. Методы и понятия математической логики является основой, ядром интеллектуальных информационных систем. Средства математической логики стали эффективным рабочим инструментом для специалистов многих отраслей науки и техники. Математическую логику необходимо знать всем специалистам, независимо в какой среде он работает (будь то инженер, преподаватель, юрист или врач).

4. Элементы теории пределов

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Число А называется *пределом* функции при $x \to x_0$, если для любого $e > 0$, сколь угодно малого, можно указать такое число $d > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < d$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < e$.

Если А есть предел функции $f(x)$, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Определение. Пусть аргумент x стремится к точке x_0, принимая все время значения $x > x_0$ $(x < x_0)$. Тогда число A_1 (A_2), к которому стремится при этом функция $f(x)$, называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 *справа (слева)* или правосторонним (левосторонним).

Записывается следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_1$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_2\right)$.

Доказано, что если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ существует, то существуют в этой точке и оба односторонних предела и они равны, т.е. $A_1 = A_2 = A$. Обратно: если существуют односторонние пределы и они равны, то существует и предел функции. Если же хотя бы один из односторонних пределов не существует или они оба существуют, но не равны между собой, то предел функции не существует.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы нескольких функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)+..+f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)+..+\lim_{x\to x_0}f_n(x)$$

Теорема 2. Предел произведения нескольких функций, имеющих конечные пределы, равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot..\cdot f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f_2(x)\cdot..\cdot\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Теорема 3. Предел частного двух функций, имеющих конечные пределы, равен частному их пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)},$$

если $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0$.

В рассмотренных теоремах о пределах речь шла о существовании конечных пределов слагаемых, сомножителей, числителей и знаменателей.

В случае несоблюдения этих требований теоремы уже неприменимы, и сказать сразу о существовании предела и тем более его величине для таких выражений нельзя. Такие выражения называют неопределенными (или неопределенностями). Исходя из теорем, можно сделать вывод о существовании четырех видов неопределенностей:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty.$$

Т.к. теоремы о пределах в этих случаях неприменимы, то исходя из конкретного вида переменных в каждом отдельном примере, проводят преобразования, позволяющие найти предел. (Эти преобразования называются *раскрытием неопределенности*).

<u>Примеры.</u> Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталя):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{4x^2+x-5}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{8}{x^4}\right)}{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\infty}{3}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+6x-7}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+7)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+7}=\dfrac{3}{8}.$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+x}}{\sqrt{x^2-4}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}}{x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}}{x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

5. $$\lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{ctg2x}{ctg3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{pmatrix} t=\frac{p}{2}-x \\ x\to\frac{p}{2} \\ t\to 0 \end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{ctg2\left(\frac{p}{2}-t\right)}{ctg3\left(\frac{p}{2}-t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{ctg(p-2t)}{ctg\left(\frac{3p}{2}-3t\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-ctg2t}{tg3t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{tg2t\cdot tg3t}=\left(\frac{-1}{0}\right)=-\infty.$$

6. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^x=(2)^{+\infty}=+\infty$$

7. $$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{4+x+x^2}-2\right)\left(\sqrt{4+x+x^2}-2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{4+x+x^2}\right)^2-2^2}{(x+1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{4+x+x^2-4}{(x+1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x(1+x)}{(x+1)\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x}{\left(\sqrt{4+x+x^2}+2\right)}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$

<u>Примеры.</u>

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin(p-2x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}.$$

При решении воспользовались формулой приведения $\sin(p-2x)=\sin 2x$ и первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=1$.

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2-1}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-3}{x+2}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{x+2}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-9x}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-9x}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-9}{1+\frac{2}{x}}}=e^{-9}.$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

<u>Непрерывность функции</u>

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности, и если предел функции при $x\to x_0$ существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Определение. Если в точке x_0 функция не является непрерывной, то точка x_0 называется *точкой разрыва* этой функции, а сама функция – разрывной в этой точке.

При этом предполагается, что в некоторой окрестности точки x_0 функция определена, в самой же точке x_0 она может быть как определена, так и не определена.

Из определения непрерывности следует, что разрыв в точке x_0 будет в следующих случаях:

- $f(x_0)$ не существует, т.е. функция не определена в точке x_0,
- не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. не существуют односторонние пределы при $x\to x_0$, или односторонние пределы существуют, но не равны между собой,

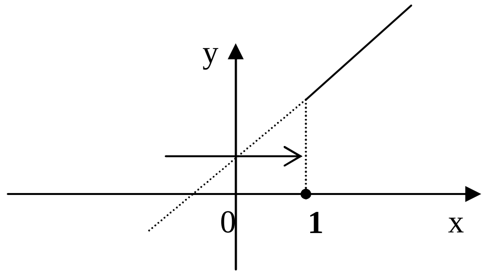
- существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но он не равен $f(x_0)$.

Различают разрывы двух видов:

Точка разрыва x_0 является *точкой разрыва I рода*, если односторонние пределы существуют, конечны, но:

а) либо они не равны между собой, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (в этом случае имеем точку разрыва типа "скачка");

б) либо они равны между собой, но не равны значению функции $f(x_0)$ или в этой точке функция не определена (в этом случае имеем точку устранимого разрыва).



Остальные точки разрыва являются *точкамиразрыва II рода*. Для них либо предел функции в точке не существует вовсе, либо один или оба односторонние пределы бесконечны.

В последнем случае точка разрыва называется точкой бесконечного разрыва.

<u>Пример</u>. Определить, при каких значениях *a* функция $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-1}{x+1}, & x\neq -1; \\ a, & x=-1. \end{cases}$ непрерывна на всей числовой оси.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x)$.

Если $x\neq -1$, то функция $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}$ непрерывна. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1-0}\frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}=2\lim_{x\to -1-0}\left(x-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3,$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1+0}\frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x+1}=2\lim_{x\to -1+0}\left(x-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-3.$$

Для выполнения условия непрерывности функции в точке необходимо, чтобы односторонние пределы были равны значению функции в точке. Значит, $a=-3$ и функция $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-1}{x+1}, & x\neq -1; \\ -3, & x=-1. \end{cases}$ будет непрерывной на всей числовой оси.

<u>Пример.</u> Исследовать функцию на непрерывность:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2-3x-10}$$

Найдём область определения данной функции:

$x^2-3x-10\neq 0$, $(x-5)(x+2)\neq 0$.

$D(f)$: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;5)\cup(5;+\infty)$

Итак, имеем две точки разрыва: $x_1=-2$ и $x_2=5$.

Определим характер разрыва функции в каждой из этих точек.

Точка $x_1=-2$ является точкой устранимого разрыва (первого рода), так как:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-3x-10}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-5)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)}{(x-5)}=0.$$

Точка $x_2=5$ является точкой бесконечного разрыва (второго рода), так как:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x+4}{x^2-3x-10}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-5)}=\left(\frac{49}{0}\right)=\infty.$$

Окончательный ответ: функция непрерывна при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;5)\cup(5;+\infty)$; точки $x_1=-2$ и $x_2=5$ являются точками разрыва.

5. Основы дифференциального исчисления

Пусть $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Процесс нахождения производной называют также дифференцированием.

Таблица производных основных элементарных функций

1	$(C)'=0,\quad C=const$	8	$(\cos x)'=-\sin x$
2	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1},\ n\neq 0$	9	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
3	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\quad a>0,\ a\neq 1$	10	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
4	$(e^x)'=e^x$	11	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a},\ a>0,\ a\neq 1$	12	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования функций

Пусть C – постоянная, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда:

1	$(C \cdot u)' = C \cdot u'$
2	$(u+v)' = u' + v'$
3	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Дифференцирование *сложной* функции:

$$y'_x(u(x)) = y'_u(u(x)) \cdot u'(x).$$

Производная функции, заданной *параметрически*, т.е. $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

<u>Примеры.</u> Найти производные функций:

1. $y = \arcsin^2 5^x + \sqrt{x+2}$

$$y' = \left(\arcsin^2 5^x + \sqrt{x+2}\right)' = \left(\arcsin^2 5^x\right)' + \left(\sqrt{x+2}\right)'$$

Можно представить первое слагаемое как $y = u^2$, где $u = \arcsin 5^x$. При этом $\left(u^2\right)' = 2u \cdot u'$. В свою очередь $u = \arcsin v$, где $v = 5^x$, и $(\arcsin v)' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} v'$.

Тогда

$$y' = 2\arcsin 5^x \left(\arcsin 5^x\right)' + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = 2\arcsin 5^x \frac{1}{\sqrt{1-5^{2x}}} \left(5^x\right)' + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} =$$

$$= \frac{2\arcsin 5^x}{\sqrt{1-5^{2x}}} 5^x \ln 5 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}.$$

2. $y = tg^3(\sin 2x) + 2^x$

$$y' = \left(tg^3(\sin 2x) + 2^x\right)' = \left(tg^3(\sin 2x)\right)' + \left(2^x\right)'$$

Можно представить первое слагаемое как $y=u^3$, где $u=tg(\sin 2x)$. При этом $\left(u^3\right)'=3u^2\cdot u'$. В свою очередь $u=tgv$, где $v=\sin 2x$, и $(tgv)'=\dfrac{1}{\cos^2 v}v'$. Далее

$v=\sin w$, где $w=2x$, $(\sin w)'=\cos w\cdot w'$

Тогда

$$y'=3tg^2(\sin 2x)(tg(\sin 2x))'+2^x\ln 2=$$

$$=3tg^2(\sin 2x)\frac{1}{\cos^2(\sin 2x)}(\sin 2x)'+2^x\ln 2=$$

$$=\frac{3tg^2(\sin 2x)}{\cos^2(\sin 2x)}\cos 2x\cdot 2+2^x\ln 2=\frac{6tg^2(\sin 2x)}{\cos^2(\sin 2x)}\cos 2x+2^x\ln 2.$$

3. $y=\dfrac{\cos 8x}{x^5}-\arccos 3x$

$$y'=\left(\frac{\cos 8x}{x^5}-\arccos 3x\right)'=\left(\frac{\cos 8x}{x^5}\right)'-(\arccos 3x)'$$

В первом слагаемом воспользуемся правилом дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Во втором слагаемом функцию можно представить как

$y=\arccos u$, где $u=3x$. При этом $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

Тогда

$$y'=\frac{(\cos 8x)'\cdot x^5-\cos 8x\cdot\left(x^5\right)'}{x^{10}}+\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3=$$

$$=\frac{-8\sin 8x\cdot x^5-\cos 8x\cdot 5x^4}{x^{10}}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}=$$

$$=\frac{-x^4(8x\sin 8x+5\cos 8x)}{x^{10}}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}=-\frac{8x\sin 8x+5\cos 8x}{x^6}+\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

1. $y=\sin 3x\cdot\lg 7x^2$

$$y'=\left(\sin 3x\cdot\lg 7x^2\right)'$$

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения $(uv)'=u'v+uv'$.

Тогда

$$y' = (\sin 3x)' \cdot \lg 7x^2 + \sin 3x \cdot (\lg 7x^2)' =$$

$$= 3\cos 3x \cdot \lg 7x^2 + \sin 3x \cdot \frac{1}{7x^2 \ln 10} \cdot 7 \cdot 2x =$$

$$= 3\cos 3x \cdot \lg 7x^2 + \sin 3x \cdot \frac{2}{x \ln 10} = 3\cos 3x \cdot \lg 7x^2 + \frac{2\sin 3x}{x \ln 10}.$$

5. $y = \left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)\sin 6x$

$$y' = \left(\left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)\sin 6x\right)' = \left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)' \sin 6x + \left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)(\sin 6x)' =$$

$$= \left(14x - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right)\sin 6x + \left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) \cdot 6 \cdot \cos 6x =$$

$$= \left(14x - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right)\sin 6x + 6\left(7x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)\cos 6x.$$

6. $y = arcctg \ln(5x^3 + 3)$

$$y' = (arcctg \ln(5x^3 + 3))' = -\frac{1}{1 + \ln^2(5x^3 + 3)}(\ln(5x^3 + 3))' =$$

$$= -\frac{1}{1 + \ln^2(5x^3 + 3)} \cdot \frac{1}{5x^3 + 3}(5x^3 + 3)' =$$

$$= -\frac{1}{1 + \ln^2(5x^3 + 3)} \cdot \frac{1}{5x^3 + 3} \cdot 15x^2 = -\frac{15x^2}{(5x^3 + 3)(1 + \ln^2(5x^3 + 3))}.$$

7. $\begin{cases} x = 3tg 5t, \\ y = t^5 + 8t + 1 \end{cases}$

Функция задана параметрически, поэтому $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$. Вычислим x'_t и y'_t отдельно:

$$x'_t = \frac{15}{\cos^2 5t}, \quad y'_t = 5t^4 + 8,$$

тогда $y'_x = (5t^4 + 8) : \frac{15}{\cos^2 5t} = \frac{(5t^4 + 8)\cos^2 5t}{15} = \frac{1}{15}(5t^4 + 8)\cos^2 5t$.

Геометрический смысл производной

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $M(x_0; f(x_0))$, то есть $f'(x_0) = tg j$.

Уравнение касательной проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 2e^{2x}$ в точке $x_0 = 0$.

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем $f(x_0) = f(0) = 0^3 + 2e^{2\cdot 0} = 2$.

Найдем производную $f'(x) = 3x^2 + 4e^{2x}$.

Вычислим значение производной в точке x_0: $f'(0) = 0 + 4e^0 = 4$.

Составим уравнение касательной: $y = 2 + 4(x - 0)$ или $y = 4x + 2$.

<u>Физический смысл производной</u>

Если $x = x(t)$– функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $x'(t)$ есть скорость, а вторая производная $x''(t)$ – ускорение этой точки в момент времени t.

<u>Интервалы возрастания и убывания функции</u>

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех $x \in (a;b)$, то функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

<u>Экстремумы функции</u>

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими*. Точки экстремума функции находятся среди критических точек.

<u>Достаточное условие экстремума.</u>

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки $x = x_0$, за исключением, быть может, самой этой точки, при этом сама функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности этой точки, включая эту точку. Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 *– точка максимума* функции $f(x)$;

2) если же при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – *точка минимума* функции $f(x)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на некотором отрезке $[a;b]$, нужно вычислить значения функции в критических точках, лежащих в интервале $(a;b)$, и на концах отрезка, а затем из полученных таким образом значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Направление вогнутости кривой и точки перегиба

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную. Тогда она имеет в этой точке касательную, уравнение которой есть $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

В некоторой окрестности (x_0-d, x_0+d) график функции может располагаться либо выше касательной, либо ниже, либо с обеих сторон от касательной.

Определение. Говорят, что в точке $M(x_0,y_0)$ кривая $y=f(x)$*вогнута* вниз или просто вогнута (вогнута вверх или *выпукла*), если для всех x из некоторой окрестности (x_0-d, x_0+d) точки x_0 все точки кривой расположены выше касательной (ниже касательной).

Если в точке M кривая переходит с одной стороны касательной на другую, то точка M называется *точкой перегиба* кривой. В точке перегиба кривая меняет выпуклость на вогнутость или наоборот. Точка перегиба - пограничная точка между участками выпуклости и вогнутости кривой.

Исследование функции $y=f(x)$ на выпуклость, вогнутость, точки перегиба проводят по следующему плану:

1. Находят все критические точки второй производной. Для этого:

а) находят вторую производную, приравнивают ее к нулю и находят действительные корни полученного уравнения.

б) находят точки, где конечная производная $f''(x)$ не существует.

2. Исследуют $f''(x)$ на изменение знака при переходе через каждую критическую точку. Если при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то x_0 – точка перегиба графика функции $y=f(x)$, если знак не меняется, то в точке x_0 перегиба нет, при этом сама функция $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности этой точки, включая эту точку.

Нахождение асимптот кривой (графика функции)

Если функция $y=f(x)$ определена и ограничена на конечном промежутке, то график ее можно построить по нескольким точкам, соединяя их плавной кривой. Но если область определения функции бесконечно велика или функция не ограничена, судить о графике по нескольким точкам трудно, т.к. ветви графика уходят в бесконечность. На помощь в этом случае часто приходят асимптоты кривой графика.

Определение. Прямая линия называется *асимптотой* для кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки *M*, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки *M*вдоль кривой в бесконечность.

Заметим сразу, что кривая $y = f(x)$ может приближаться к асимптоте как не пересекая, так и пересекая ее. Различают два вида асимптот: вертикальные, наклонные.

Вертикальные асимптоты (параллельные оси Oy).

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$. Верно и обратное: если прямая $x = x_0$ - вертикальная асимптота, то хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен бесконечности (возможно и оба).

Таким образом, кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту в точках, приближаясь к которым функция стремится к бесконечности. Это либо точки разрыва функции, либо граничные точки области определения.

Заметим, что вертикальные асимптоты график функции не может пересекать.

Наклонные асимптоты задаются уравнением $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right),$$

при условии, что оба предела существуют.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 9x + 17}{x - 8}$ и построить ее график.

1) Найдем область определения функции: $x \neq 8$.
2) Проверим на четность, нечетность

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 9x + 17}{-x - 8} = \frac{x^2 + 9x + 17}{-x - 8} = -\frac{x^2 + 9x + 17}{x + 8}.$$

Видно, что $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$. Значит, $y(x)$ - функция общего вида.

3) Найдем промежутки монотонности, экстремумы функции

$$y' = \left(\frac{x^2 - 9x + 17}{x - 8} \right)' = \frac{(2x - 9)(x - 8) - (x^2 - 9x + 17)}{(x - 8)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 9x - 16x + 72 - x^2 + 9x - 17}{(x - 8)^2} = \frac{x^2 - 16x + 55}{(x - 8)^2}.$$

$y' = 0$ при

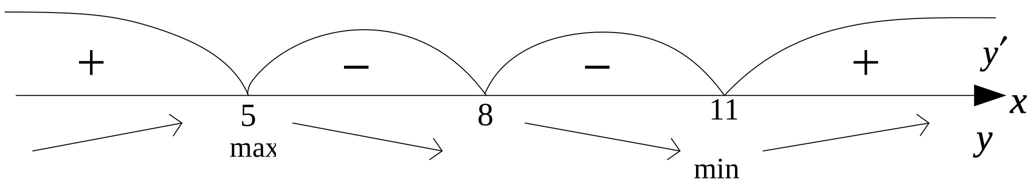
$$x^2 - 16x + 55 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 64 + 55 = 9,$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = 8 \pm 3,$$

$$x_1 = 11,\ x_2 = 5.$$

$y' = \infty$ в точке $x = 8$, которая не принадлежит области определения функции. Ставим на оси знаки первой производной:



При $x \in (-\infty; 5) \cup (11; +\infty)$ функция возрастает, при $x \in (5; 8) \cup (8; 11)$ - убывает. Тогда $x = 5$ - точка максимума, $x = 11$ - точка минимума.Значения функции в этих точках:

$$y(5) = 1, \quad y(11) = 13.$$

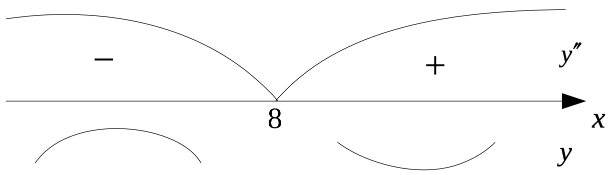
4) Найдем промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 16x + 55}{(x-8)^2}\right)' = \frac{(2x-16)(x-8)^2 - (x^2 - 16x + 55) \cdot 2 \cdot (x-8)}{(x-8)^4} =$$

$$= \frac{(2x-16)(x-8) - 2(x^2 - 16x + 55)}{(x-8)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 16x - 16x + 128 - 2x^2 + 32x - 110}{(x-8)^3} = \frac{18}{(x-8)^3}$$

$y'' \neq 0$ для любых x из ООФ, $y'' = \infty$ в точке $x = 8$, которая не принадлежит ООФ, следовательно, точек перегиба нет. Определим знаки второй производной:



При $x \in (-\infty; 8)$ график функции выпуклый, при $x \in (8; +\infty)$ - график функции вогнутый.

5) Найдем асимптоты графика функции

Вертикальные: $\lim\limits_{x \to 8-} \dfrac{x^2 - 9x + 17}{x - 8} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 8+} \dfrac{x^2 - 9x + 17}{x - 8} = +\infty$.

Таким образом, $x = 8$ вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты задаются уравнением $y = kx + b$. Найдем k и b:

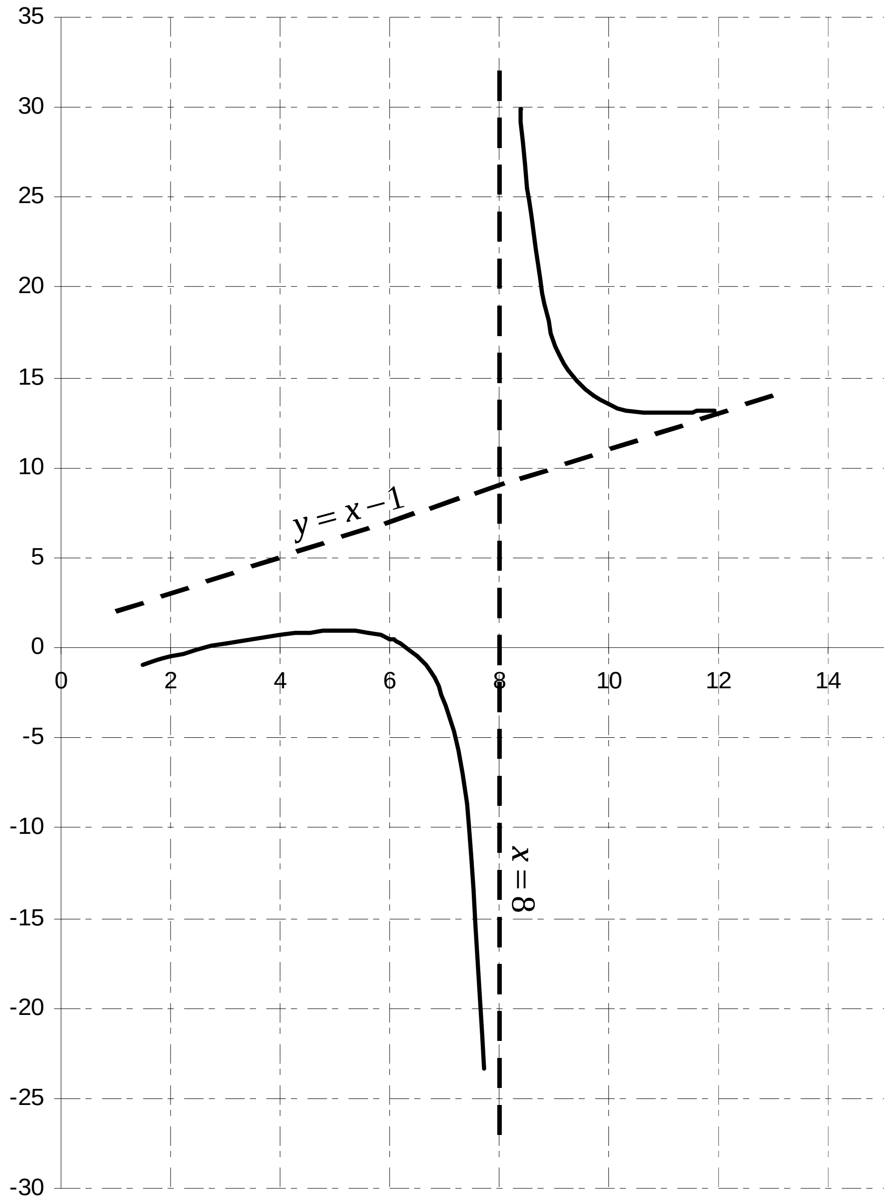
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+17}{x(x-8)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{9}{x}+\frac{17}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{8}{x}\right)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-9x+17}{x-8}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-9x+17-x^2+8x}{x-8}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+117}{x-8}\right) = -1$$

Наклонная асимптота $y = x - 1$.

Строим график:



6. Основные периоды развития математики и их особенности

1. Изучение конспекта лекций (темы – обзор истории математики)
2. Подготовка и написание реферата по выбранной теме
3. Подготовка доклада по теме реферата

Основная литература

1. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. /Д.Я. Стройк— Москва : Наука, 1990. — 256 с.

2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/92615 — Загл. с экрана.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010 .— 416 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009 .— 544 с.

5. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон.текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/9112.html.— ЭБС «IPRbooks»

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая ста-тистика / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.

7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Кнорус, 2010. – 664 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2010. – 288с.

9. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2011. – 404 с.

10. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Кнорус, 2010. – 493 с.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/ 2014100214370663049600009433, по паролю

2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000 8498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316
2. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.- Загл. с экрана

3. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.- .- Загл. с экрана

4. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ , по паролю.- Загл. с экрана.

5. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа http://cyberleninka.ru/ ,свободный.- Загл. с экрана.

6. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //window.edu.ru. ,свободный.-Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //exponenta.ru. ,свободный.-Загл. с экрана.