МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институтприкладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 21 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____*В.В. Глаголев*

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)

"*Математика в социально-гуманитарной сфере*"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
37.03.01 Психология

с направленностью (профилем)
Психология в социальной сфере

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 370301-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Кузнецова В.А., доцент, к.ф.-м.н. _____
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества в математике относится к неопределяемым (подобно понятиям числа и точки).

Множеством является совокупность объектов, объединенных каким-либо признаком.

Объекты – элементы множества – обозначаются строчными буквами. Сами множества обозначаются заглавными (прописными) буквами латинского алфавита. Тот факт, что a является элементом множества A обозначается $a \in A$ (говорят, что a принадлежит A); то, что a не является элементом множества A ,обозначается $a \notin A$ (говорят, что a не принадлежит A).

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо характеристическое свойство, по которому можно определить, принадлежит данный элемент множеству или нет, например:

$M = \{1,2,3,4,5\}$ или $M = \{x:\ x \in N, 1 \le x \le 5\}$

Пример: Найти элементы множества: $A = \{x:\ x \in N,\ 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$.

Решив квадратное уравнение, находим его корни $x_1 = \frac{1}{2} \notin N$, $x_2 = 3 \in N$, значит $A = \{3\}$.

- Множества, состоящие из одних и тех же объектов, называются равными

Пример: $A = \{0,2,3\}$, $B = \{3,2,0\}$

$A = B$

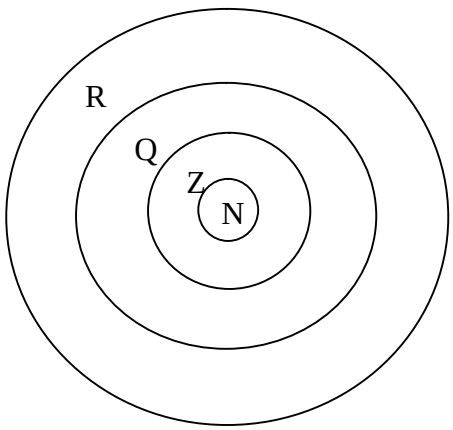
- Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то B называется подмножеством множества A: $B \subset A$

Пример: $B = \{3,2\} \subset A = \{3,2,0\}$

$\varnothing$ – подмножество любого множества; A подмножество A

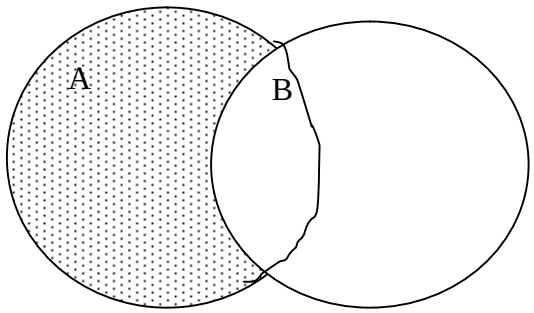
$N \subset Z \subset Q \subset R$

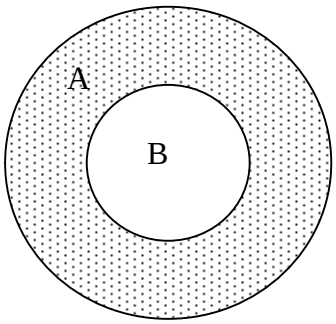
N –множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
R – множество действительных чисел



Изобразим множества A и B кругами на плоскости (диаграммы Эйлера-Венна)

• Множество C, элементами которого являются все элементы множества A, не принадлежащие множеству B, называется разностью множеств A и Bи записывается $C = A \setminus B$.





Примеры

1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\} \Rightarrow A \setminus B = \{3\}$

2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\} \Rightarrow A \setminus B = \{1,2\}$

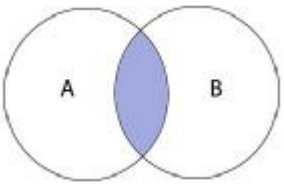
3) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$

• Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ – дополнение множества B до множества A

• Множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A так и множеству B(и только из этих элементов), называется пересечением множеств A и B: $C = A \cap B$.

Пример: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$C = A \cap B = \{2,3\}$



• Множества, пересечение которых есть пустое множество, называются непересекающимися: $\{0,1\}\ \mathbf{I}\ \{2\} = \varnothing$.

Пример.

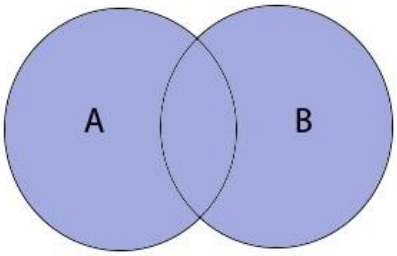
1) $\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \varnothing$

2) $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \{-2;1\}\ \mathbf{I}\ [0;+\infty) = \{1\}$

• Множество C, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется объединением множеств A и B: $C = A\,\mathbf{U}\,B$

Пример. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$C = A\,\mathbf{U}\,B = \{1,2,3,4\}$



Пример:

1) $(x+1)(x^2-4) = 0$ $\{-2,-1,2\}$ – совокупность решений

2) $(x-5)(x+3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5 \\ x > -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x < -3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow (-\infty;-3)\,\mathbf{U}\,(5;+\infty)$

Задания. Составить множества:

1) A– натуральные делители числа 12.

2) $B \setminus A$, если $A=\{-5,-4,-3\}, B=\{-5,-4,-3,-2\}$.

3) $R \setminus Q$, $Z \setminus N$

4) а) $[1;7] \mathbf{U} [5;8]$, $[1;7] \mathbf{I} [5;8]$

б) $[0;3] \mathbf{U} [5;7]$, $[0;3] \mathbf{I} [5;7]$

5) Объединение и пересечение корней уравнений

$x^2+9x-10=0$ и $x^2-3x+2=0$

6) Запишите решение неравенства $(x-1)(x-6) \geq 0$

7) A– натуральные делители числа 18,

B– натуральные делители числа 45. Найти $A \mathbf{I} B$.

8) Найти $A \mathbf{I} B$, если $A=\{x:\ x \in Z, |x|<5\}$ $B=\{x:\ x \in N, |x-1|<7\}$

9) Найти $A \mathbf{U} B$, если $A=\{x:\ x^2-6x+9 \leq 0\}$ $B=\{x:\ x \in Z, |x| \leq 1\}$

• Множество A называется эквивалентным множеству B ($A : B$), если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Различают конечные и бесконечные множества.

• Число элементов множества A называется его мощностью или кардинальным числом ($|A|$ или $cardA$).

Конечное множество, состоящее из n элементов имеетмощность $|A|=n$.

Если $A : N$, то множество A счетное.

Если $A : R$, то A – континуальное множество или множество мощности континуум.

Задания. Изобразить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

а) $(A \mathbf{I} B) \setminus C$

б) $(A \mathbf{U} B) \setminus C$

в) $(A \mathbf{I} B) \mathbf{I} C$

г) $(A \setminus B) \mathbf{I} C$

д) $(A \setminus B) \mathbf{U} C$

е) $(A \setminus B) \setminus C$

ж) $(A \mathbf{I} B) \mathbf{U} C$

2. Множество комплексных чисел

Определение. *Комплексным числом* называют всякую упорядоченную пару (x, y) действительных чисел.

Его обозначают $z = x + yi,\ x, y \in R$, где $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 6x + 25 = 0$ над множеством комплексных чисел

Вычислим дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 36 - 100 = -64$.

Тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-64} = \sqrt{-1 \cdot 64} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{64} = 8i$

Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \frac{2(-3 \pm 4i)}{2} = -3 \pm 4i.$$

Запись $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.Действительные числа x и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа $z = x + yi$:

$$\mathrm{Re}\, z = x \ \text{ и } \ \mathrm{Im}\, z = y.$$

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 + z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 + x_2$, а мнимая равна $y = y_1 + y_2$, т.е.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 - z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 - x_2$, а мнимая равна $y = y_1 - y_2$, т.е.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Число $\bar{z} = x - yi$ называется *сопряженным* (комплексно сопряженным) числу $z = x + yi$. Отметим, что $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

Частным (отношением) двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ при $z_2 \neq 0$ (т.е. $x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0$) называют комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} i.$$

Пример. Вычислить $(2 - 3i)^2 + 2i^{15}$

$$(2 - 3i)^2 + 2i^{15} = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 + 2i^{14} \cdot i = 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 \cdot i =$$

$$= 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 \cdot i = 4 - 12i - 9 + 2 \cdot (-1)^7 i = -5 - 12i - 2i = -5 - 14i$$

Пример. Вычислить $\dfrac{7+3i}{3i-1}$

$$\frac{7+3i}{3i-1}=\frac{7+3i}{-1+3i}=\frac{(7+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{-7-21i-3i-9i^2}{(-1)^2+3^2}=$$

$$=\frac{-7-24i+9}{1+9}=\frac{2-24i}{10}=\frac{1-12i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{12}{5}i.$$

Пример. Записать число $z=-\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$ в алгебраической форме.

Число z в алгебраической форме имеет вид $z=x+yi$. Преобразуем дробь, умножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z=-\frac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{1-i^2}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{2}=$$

$$=-\sqrt{2}(1-\mathrm{i})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

Алгебраическая форма: $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.Здесь $\mathrm{Re}\,z=x=-\sqrt{2}$ и $\mathrm{Im}\,z=y=\sqrt{2}$.

Задания.

1. Вычислить $(4+5i)^2(5-4i)$ Ответ: $115+236i$
2. Вычислить $\dfrac{4-5i}{5+4i}-2i^{19}+i^{25}-i^{14}+2i^3$ Ответ: 1
3. Вычислить $\dfrac{2-5i}{3+i}$ Ответ: $0{,}1-1{,}7i$

3. Элементы математической логики

Логика возникла в культуре Древней Греции. Первое дошедшее до нас сочинение по логике - «Аналитики» Аристотеля (384-322 гг. до н.э.). Формальная логика просуществовала без серьёзных изменений более двадцати столетий. БУЛЬ Джордж (1815-1864) - английский математик, который считается основоположником математической логики.

Математическая логика является наукой о законах математического мышления. Предметом математической логики являются математические теории в целом, которые изучаются с помощью математических языков. При этом в первую очередь интересуются вопросами непротиворечивости математических теорий, их развязности и полноты.

Математическая логика отличается тем, что пользуется языком математических и логических символов, исходя из того, что в принципе они могут совсем заменить слова обычного языка и принятые в обычных живых языках способы объединения слов в предложения. Особенности математического мышле-

ния объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем. В связи с этим современную математическую логику определяют как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий и отношения между ними. Эти понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории - аксиомы. Всё дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом. Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом в построении геометрии. Изложение этой теории в Началах не безупречно. Евклид здесь пытается дать определение исходных понятий (точки, прямой, плоскости). В доказательстве теорем используются нигде явно не сформулированные положения, которые считаются очевидными. Таким образом, в этом построении отсутствует необходимая логическая строгость, хотя истинность всех положений теории не вызывает сомнений.

Отметим, что такой подход к аксиоматическому построению теории оставался единственным до XIX века. Большую роль в изменении такого подхода сыграли работы Н. И. Лобачевского (1792-1856). Лобачевский впервые в явном виде высказал убеждения в невозможности доказательства пятого постулата Евклида и подкрепил это убеждение созданием новой геометрии. Позже немецкий математик Ф. Клейн (1849-1925) доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского, чем фактически была доказана и невозможность доказательства пятого постулата Евклида. Так возникли и были решены в работах Н. И. Лобачевского и Ф. Клейна впервые в истории математики проблемы невозможности доказательства и непротиворечивости в аксиоматической теории. Непротиворечивость аксиоматической теории является одним из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путём вывести два противоречивых друг другу утверждения.

Доказательство непротиворечивости аксиоматических теорий можно осуществить различными методами. Одним из них является МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ или ИНТЕРПРЕТАЦИЙ. Здесь в качестве основных понятий и отношений выбираются элементы некоторого множества и отношения между ними, а затем проверяется, будут ли выполняться для выбранных понятий и отношений аксиомы данной теории, то есть строится модель для данной теории. Так, аналитическая геометрия является арифметической интерпретацией геометрии Евклида. Ясно, что метод моделирования сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к проблеме непротиворечивости другой теории. Большинство интерпретаций для математических теорий (и, в частности, для арифметики) строится на базе теории множеств. Однако в конце XIX века в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы теории множеств). Ярким примером такого парадокса является парадокс Б. Рассела.

Пример. Назовём множество нормальным, если оно не содержит себя в качестве своего элемента и ненормальным в противном случае.

Например, множество всех книг - нормальное множество, а множество всех мыслимых вещей - ненормальное множество. Пусть L - множество всех нормальных множеств. К какому классу относится множество L? Если L - нормальное множество, то $L \in L$, т.е. содержится в классе нормальных множеств, но тогда оно содержит себя в качестве своего элемента, и поэтому ненормально. Если L - ненормальное множество, то $L \notin L$, т.е. не содержится среди нормальных множеств, но тогда L не содержит себя в качестве своего элемента, и потому оно нормально. Таким образом, понятие нормального множества приводит к противоречию.

Попытки устранить противоречия в теории множеств привели к необходимости построить аксиоматическую теорию множеств. Последующие видоизменения и усовершенствования этой теории привели к созданию современной теории множеств. Однако средства этой аксиоматической теории не позволяют доказать её непротиворечивость. Другие методы обоснования математики были развиты Д. ГИЛЬБЕРТОМ (1862-1943) и его школой. Они основываются на построении математических теорий как синтаксических теорий, в которых все аксиомы записываются формулами в некотором алфавите и точно указываются правила вывода одних формул из других, т.е. в теорию как составная часть входит математическая логика.

Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой требовалось доказать, стала предметом другой математической теории, которую Гилберт назвал МЕТАМАТЕМАТИКОЙ, или ТЕОРИЕЙ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ. В связи с этим возникает задача построения синтаксической, т.е. формализованной аксиоматической теории самой математической логики. Выбирая по-разному системы аксиом и правила вывода одних формул из других, получают различные синтаксические логические теории. Каждую из них называют ЛОГИЧЕСКИМ ИСЧИСЛЕНИЕМ.

Основная идея математической логики - формализация знаний и рассуждений. Известно, что наиболее легко формализуемые знания - математические. Таким образом, математическая логика, по существу, - наука о математике, или метаматематика. Центральным понятием математической логики является ``математическое доказательство''. Действительно, ``доказательные'' (иначе говоря, дедуктивные) рассуждения - единственный вид признаваемых в математике рассуждений. Рассуждения в математической логике изучаются с точки зрения формы, а не смысла.

По существу, рассуждения моделируются чисто ``механическим'' процессом переписывания текста (формул). Такой процесс называют выводом.Говорят еще, что математическая логика оперирует только синтаксическими понятиями.Однако обычно всё же важно, как соотносятся рассуждения с действительностью (или нашими представлениями). Поэтому, надо всё же иметь в виду некоторый смысл формул и вывода. При этом используют термин семантика (синоним слова ``смысл'') и чётко разделяют синтаксис и семантику. Когда же действительно интересуются только синтаксисом, часто используют термин ``фор-

мальная система". Мы будем использовать синоним этого термина - ``исчисление" (используются ещё термины ``формальная теория" и ``аксиоматика"). Объектом формальных систем являются строки текста (последовательности символов), с помощью которых записываются формулы.

Формальная система определена, если:

- Задан алфавит (множество символов, используемых для построения формул).

- Определено, какие именно строки считать формулами (остальные строки считаются просто бессмысленными).

- Выделено множество формул, называемых аксиомами. Это - стартовые точки в выводах.

- Задано множество правил вывода, которые позволяют из некоторой формулы (или множества формул) получать новую формулу.

Отрицание логического высказывания - логическое высказывание, принимающее значение "истинно", если исходное высказывание ложно, и наоборот. Это специальная логическая операция. В зависимости от местоположения различают внешнее и внутреннее отрицание, свойства и роли которых существенно различаются.

Внешнее отрицание (пропозициональное) служит для образования сложного высказывания из другого (не обязательно простого) высказывания. В нем утверждается отсутствие положения дел, описываемого в отрицаемом высказывании. Традиционно отрицательное высказывание считается истинным, если, и только если, отрицаемое высказывание ложно. В естественном языке отрицание обычно выражается оборотом «неверно, что», за которым следует отрицаемое высказывание.

В языках формальных теорий отрицание называется особая унарная пропозициональная связка, используемая для образования из одной формулы другой, более сложной. Для обозначений отрицание обычно используются символы «\отрицание», «-» или «- 1». В классической логике высказываний формула - А истинна тогда и только тогда, когда формула А ложна.

Однако в неклассической логике отрицание может не обладать всеми свойствами классического отрицания. В этой связи возникает вполне закономерный вопрос о минимальном наборе свойств, которому должна удовлетворять некоторая унарная операция, чтобы ее можно было считать отрицанием, а также о принципах классификации различных отрицаниях в неклассических формальных теориях.

Фактически указанное выше традиционное понимание внешнего (пропозиционального) отрицания может быть выражено через систему следующих требований: (I) Если А - истинно (ложно), то не-А - ложно (истинно); (II) Если не-А - истинно (ложно), то А - ложно (истинно). Отрицание, удовлетворяющее условию (1), принято называть минимальным отрицанием..

Внутреннее отрицание входит в состав простого высказывания. Различают отрицание в составе связки (отрицательная связка) и терминное отрицание.

Отрицание в составе связки выражается с помощью частицы «не», стоящей перед глаголом-связкой (если он имеется) или перед смысловым глаголом.

Оно служит для выражения суждений об отсутствии каких-то отношений («Иван не знает Петра»), или для образования отрицательной предицирующей связки в составе категорических атрибутивных суждений.Терминное отрицание используется для образования негативных терминов. Оно выражается через приставку «не» или близкие ей по смыслу («Все неспелые яблоки - зеленые»).

Конъюнкция двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны (от лат. conjunctio - союз, связь), в широком смысле - сложное высказывание, образованное с помощью союза «и». В принципе можно говорить о конъюнкции бесконечного числа высказываний (например, о конъюнкции всех истинных предложений математики). В логике конъюнкцией называют логическую связку (операцию, функцию; обозначают: &,); образованное с её помощью сложное высказывание истинно только при условии одинаковой истинности его составляющих. В классической логике высказываний конъюнкция вместе с отрицанием составляют функционально-полную систему пропозициональных связок. Это означает, что через них можно определить любую другую пропозициональную связку. Одним из свойств конъюнкции является коммутативность (т. е. эквивалентность A& B и B & A). Однако, иногда, говорят о некоммутативной, т. е. упорядоченной конъюнкции (примером высказывания с такой конъюнкции может служить:«Ямщик свистнул, и лошади поскакали»).

Дизъюнкция двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда хотя бы одно из них истинно(от лат. disjunctio - разобщение, обособление), в широком смысле - сложное высказывание, образованное из двух или более предложений с помощью союза «или», выражающего альтернативность, или выбор.В символической логике дизъюнкцией называют логическую связку (операцию, функцию), образующую из предложений A и B сложное высказывание, обозначаемое обычно как A V B, которое является истинным при истинности по крайней мере одного из двух дизъюнктивных членов.

Импликация двух логических высказываний A и B - логическое высказывание, ложное только тогда, когда B ложно, а A истинно (от лат. implicatio - сплетение, от implico - тесно связываю) - логическая связка, соответствующая грамматической конструкции «если.., то...», с помощью которой из двух простых высказываний образуется сложное высказывание. В импликативном высказывании различают антецедент (основание) - высказывание, идущее после слова «если», и консеквент (следствие) - высказывание, идущее за словом «то». Импликативное высказывание представляет в языке логики условное высказывание обычного языка. Последнее играет особую роль, как в повседневных, так и в научных рассуждениях, основной его функцией является обоснование одного путем ссылки на нечто другое.

Выражаемую условным высказыванием связь обосновывающего и обосновываемого трудно охарактеризовать в общем виде, и только иногда природа ее относительно ясна.

Эта связь может быть, в частности, связью логического следования, имеющей место между посылками и заключением правильного умозаключения

(«Если все живые многоклеточные существа смертны и медуза является таким существом, то она смертна»). Связь может представлять собой закон природы («Если тело подвергнуть трению, оно начнет нагреваться») или причинную связь («Если Луна в новолуние находится в узле своей орбиты, наступает солнечное затмение»). Рассматриваемая связь может иметь также характер социальной закономерности, правила, традиции и т.п. («Если меняется экономика, меняется и политика», «Если обещание дано, оно должно быть выполнено»).

Связь, выражаемая условным высказыванием, предполагает, что консеквент с определенной необходимостью «вытекает» из антецедента и что есть некоторый общий закон, сумев сформулировать который, мы можем логически вывести консеквент из антецедента. Например, условное высказывание «Если висмут- металл, то он пластичен» предполагает общий закон «Все металлы пластичны», делающий консеквент данного высказывания логическим следствием его антецедента.

И в обычном языке, и в языке науки условное высказывание, кроме функции обоснования, может выполнять также целый ряд других задач. Оно может формулировать условие, не связанное с к.-л. подразумеваемым общим законом или правилом («Если захочу, разрежу свой плащ»), фиксировать какую-то последовательность («Если прошлое лето было сухим, то в этом году оно дождливое»), выражать в своеобразной форме неверие («Если вы решите задачу, я докажу великую теорему Ферма»), противопоставление («Если в огороде растет капуста, то в саду растет яблоня») и т.п. Многочисленность и разнородность функций условного высказывания существенно затрудняет его анализ.

В логических системах абстрагируются от особенностей обычного употребления условного высказывания, что ведет к различным импликациям. Наиболее известны из них импликация материальная, строгая импликация и релевантная (уместная) импликация.

Материальная импликация - одна из основных связок классической логики. Определяется она таким образом: импликация ложна только в случае истинности антецедента и ложности консеквента и истинна во всех остальных случаях. Условное высказывание «Если А, то В» предполагает некоторую реальную связь между тем, о чем говорится в А и В; выражение «А материально имплицирует В» такой связи не предполагает.

Строгая импликация определяется через модальное понятие (логической) невозможности: «А строго имплицирует В» означает «Невозможно, чтобы А было истинно, а В ложно».

В релевантной логике импликация понимается как условный союз в его обычном смысле.

В случае релевантной импликация нельзя сказать, что истинное высказывание может быть обосновано путем ссылки на любое высказывание и что с помощью ложного высказывания можно обосновать какое угодно высказывание.

Эквивалентность двух логических высказываний - логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны или ложны (от

позднелат. equivalens - равноценный) - родовое наименование всевозможных отношений типа равенства, т.е. рефлексивных , симметричных и транзитивных бинарных отношений. Примеры: эквиполентность (совпадение по смыслу, значению, содержанию, выразительным и (или) дедуктивным возможностям между понятиями, концепциями, научными теориями или формализующими их формальными системами) конгруентность или подобие геометрия, фигур; изоморфизм; равномощность множеств и другие эквивалентность каких-либо объектов означает их равенство (тождество) в каком-либо отношении(например, изоморфные множества неразличимы по своей "структуре", если под "структурой" понимать совокупность тех их свойств, относительно которых эти множества изоморфны). Всякое отношение эквивалентности порождает разбиение множества, на котором оно определено, на попарно не пересекающиеся "классы эквивалентности " в один класс относят при этом эквивалентные друг другу элементы данного множества.

Рассмотрение классов эквивалентности в качестве новых объектов представляет собой один из основных способов порождения (введения) абстрактных понятий в логико-математических (и вообще естественно-научных) теориях. Так, считая эквивалентными дроби a/b и c/d с целыми числителями и знаменателями, если ad=bc, вводят в рассмотрение рациональные числа как классы эквивалентных дробей; считая эквивалентными множества, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие, вводят понятие мощности (кардинального числа) множества (как класс эквивалентных между собой множеств); считая эквивалентными два куска вещества, вступающие в равных условиях в одинаковые химических реакции, приходят к абстрактному понятию химического состава и т.п.

Термин " эквивалентность" употребляют часто не как родовой, а как синоним некоторых из его частных значений ("эквивалентность теорий" вместо "эквивалентность", " эквивалентность множеств" вместо "равномощность", " эквивалентность слов" в абстрактной алгебре вместо "тождество" и т.п.).

Математическая логика является наукой о законах математического мышления. Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению, и это, конечно, расширило область логических исследований. Сфера применения математической логики очень широка. С каждым годом растет глубокое проникновение идей и методов математической логики в информатику, вычислительную математику, лингвистику, философию. Мощным импульсом для развития и расширения области применения математической логики стало появление электронно-вычислительных машин. Оказалось, что в рамках математической логики уже есть готовый аппарат для проектирования вычислительной техники. Методы и понятия математической логики является основой, ядром интеллектуальных информационных систем. Средства математической логики стали эффективным рабочим инструментом для специалистов многих отраслей науки и техники. Математическую логику необходимо знать всем специалистам, неза-

висимо в какой среде он работает (будь то инженер, преподаватель, юрист или врач).

4. Элементы комбинаторики

Определение. *Комбинаторика* – раздел дискретной математики, который изучает количества комбинаций, составленных из конечного числа элементов заданного конечного множества элементов различной природы, различающиеся количеством и/или порядком. К таким комбинациям относятся

- *перестановки* P_n - число способов, которыми можно переставить n элементов. Число перестановок из n элементов можно найти по формуле $P_n = n!$.

- *сочетания* C_n^m - число способов, которыми можно из n элементов выбрать m элементов, причем порядок элементов в комбинации из m элементов безразличен. Число перестановок из n элементов по m элементов можно найти по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, при этом $C_n^m = C_n^{n-m}$.

- *размещения* A_n^m - число способов, которыми можно из n элементов выбрать m элементов, располагая взятые m элементов в различном порядке. Число размещений из n элементов по m элементов можно найти по формуле $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

5. Случайные события

Непосредственный подсчет вероятности

Определение. Под *случайным событием* понимается всякий факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

Определение. Несколько событий в данном испытании называются попарно *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Определение. Несколько событий в данном испытании называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным по сравнению с остальными.

Определение. Несколько событий в данном испытании образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них.

Определение. Случайные события, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, называются *случаями (исходами, шансами).*

Определение (*Классическое определение вероятности*). Если результаты одного испытания можно представить в виде полной группы n равновоз-

можных и несовместных исходов и если событие A появляется только в m случаях, то вероятность события A равна отношению числа случаев, в которых событие A появляется, к общему числу всех случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Заметим, что всегда $0\le P(A)\le 1$. При этом событие, для которого $P(A)=0$, называется *невозможным,* а событие, для которого $P(A)=1$, называется *достоверным*.

Понятие геометрической вероятности можно рассматривать как обобщение понятия классической вероятности на случай с бесконечным (несчетным) числом исходов. Если брошенная наудачу точка может попасть в любую точку области G, то вероятность попасть в какую-либо часть g области G (событие A) пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от расположения и формы этой части:

$$P(A)=\frac{мера\ g}{мера\ G}.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Определение. *Суммой* $A+B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Определение. *Суммой* нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Если несколько событий попарно несовместны, то их сумма сводится к появлению одного события (безразлично какого). Для двух несовместных событий A и B их сумма $A+B$ есть событие, состоящее в появлении или A, или B.

Определение. *Произведением* $A\cdot B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном (одновременном или последовательном) наступлении обоих этих событий.

Определение. *Произведением* нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение. Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Определение. Несколько событий называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы, т.е. вероятность наступления одного их них не зависит от наступления других.

Теорема (сложения вероятностей несовместных событий) Пусть A и B - несовместные события, тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Следствие. Пусть $A_1,A_2...,A_n$ - попарно несовместные события, образующие полную группу, тогда

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Следствие. Пусть $A_1,A_2...,A_n$ - попарно независимые события, тогда вероятность наступления хотя бы одного из этих событий находится по формуле

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

Определение. Два несовместных события, образующие полную группу, называются *противоположными* и обозначаются как A и $\bar{A}$, при этом $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Теорема (сложения вероятностей совместных событий) Пусть A и B - совместные события, тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

Теорема (умножения вероятностей независимых событий) Пусть A и B - независимые события, тогда $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - попарно независимые события, тогда

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$$

Определение. Вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A произошло, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P(B/A)$.

Теорема (умножения вероятностей зависимых событий) Пусть A и B - зависимые события, тогда $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$.

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - зависимые события, тогда

$$P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2A_3\cdots A_{n-1})$$

Пример.В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди 2-х извлеченных изделий окажется: а) одно окрашенное; б) 2 окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Воспользуемся формулой классического подсчета вероятностей $P(A)=\frac{m}{n}$.

Очевидно, общее количество возможных исходов n равно $n=C_5^2=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5}{2}=10$.

а) Определим число благоприятных исходов m. Очевидно, что способов, которыми можно извлечь 1 окрашенное изделие из 3 и 1 неокрашенное изделие из 2, равно соответственно: $C_3^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3$ и $C_2^1=\frac{2!}{1!\cdot 1!}=2$.

Всего получится $m=6$ способов.

Тогда $P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=0,6$.

б) Определим число благоприятных исходов m. Способов, которыми можно извлечь 2 окрашенных изделия из 3, равно $C_3^2=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3$.

Тогда $m=3$.

Тогда $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0,3$.

в) *Первый способ.* Событие A – извлекли хотя бы одно окрашенное изделие. Тогда событие $\bar{A}$ - ни одного окрашенного. Определим число благоприят-

ных исходов m. Способов, которыми можно извлечь 2неокрашенное изделия из 2 равно $C_2^2 = 1$.

Всего получится $m = 1$ способов.

$$P(\bar{A}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Второй способ. Хотя бы одно окрашенное – одно или два. В решении под а) подсчитана вероятность того, что извлечено одно окрашенное изделие, под б) – два окрашенных. Тогда вероятность того, что извлечено хотя бы одно окрашенное изделие, равна сумме $P(A) = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$

Пример. Из урны, содержащей два белых и три черных шара, извлекают по одному без возвращения все шары. Найти вероятности событий: 1) третий шар белый; 2) третий и четвертый шары белые; 3) пятый шар белый, если первый был белый.

1) Возможны следующие варианты:

Первый шар – белый, второй – черный, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – белый, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – черный, третий – белый.

Найдем вероятность каждого из этих вариантов, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$p_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

2) Найдем вероятность того, что первый шар – черный, второй – черный, третий – белый, четвертый - белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

3) Найдем вероятность того, что первый шар – белый, второй – черный, третий – черный, четвертый – черный, пятый - белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10}.$$

Пример.Вероятности появления каждого из двух независимых событийA и B соответственно равны 0,6 и 0,5. Найти вероятность появления только одного из них.

СобытиеC, состоящее в появлении только одного из событийA иB, заключается в том, что появляется событие A, но не появляется событие B или событии B наступает, а событие A не наступает. Вероятность появления событияA равна $P(A)=0,6$, а ненаступлениясобытияA равна $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,6=0,4$. Вероятность появления событияB равна $P(B)=0,5$, а $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,5=0,5$.

Тогда $P(C)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0,6\cdot 0,5+0,4\cdot 0,5=0,5$.

Пример. Вероятности того, что определенная таблица содержится в каждом из трех справочников равны 0,6; 0,9; 0,75. Найти вероятность того, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Пусть событиеA состоит в том, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Событие A_1 - таблица содержится в первом справочнике, тогда $\mathrm{p}(\mathrm{A}_1)=0,6$, а вероятность того, что таблица не содержится в первом справочнике $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{A}}_1)=1-\mathrm{p}(\mathrm{A}_1)=0,4$.

Аналогично, A_2 - таблица содержится во втором справочнике, тогда $\mathrm{p}(\mathrm{A}_2)=0,9$, а вероятность того, что таблица не содержится во втором справочнике $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{A}}_2)=1-\mathrm{p}(\mathrm{A}_2)=0,1$.

И, A_3 - таблица содержится в третьем справочнике, тогда $\mathrm{p}(\mathrm{A}_3)=0,75$, а вероятность того, что таблица не содержится в третьем справочнике $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{A}}_3)=1-\mathrm{p}(\mathrm{A}_3)=0,25$.

События A_1, A_2, A_3 независимы, поэтому по теореме об умножении вероятностей $\mathrm{p}(\mathrm{A})=p(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=p(\overline{A}_1)\,p(\overline{A}_2)\,p(\overline{A}_3)=0,4\cdot 0,1\cdot 0,25=0,01$.

Пример. Кадровая служба банка на объявление в Интернете получила 300 резюме. Практика показывает, что вероятность того, что претендент имеет высшее образование, равна 0,7, вероятность того, что претендент имеет опыт работы в банке – 0,3, а вероятность того, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке – 0,2. Оценить количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование.

Пусть событие A состоит в том, что претендент имеет высшее образование, B — претендент имеет опыт работы в банке. По условию $\mathrm{p}(\mathrm{A})=0.7$, $\mathrm{p}(\mathrm{B})=0.3$. Событие AB состоит в том, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке. $p(AB)=0.2$.

Найдем вероятность того, что претендент, имеет или опыт работы в банке, или высшее образование, то есть $p(A+B)$.

Так какAиB совместные события, то по теореме о сумме вероятностей совместных событий

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

$$p(A+B)=0.7+0.3-0.2=0.8$$

Оценим количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование. Всего 300 претендентов. Следовательно, $300\cdot 0.8=240$ претендентов имеют или опыт работы в банке, или высшее образование.

6. Элементы статистики

Конечная цель любого исследования состоит в выявлении закономерностей. Одни проявляются в единичных случаях и называются динамическими закономерностями. Характер динамической закономерности устанавливает поведение каждого признака. Другие - только вмассовых, т.е. в группе явлений, которая наряду с признаками, присущими индивидуальным явлениям, характеризуются и общими для всех - статистические закономерности.

Общественное явление складывается из массы индивидуальных и выявить закономерность означает найти повторяемость внутри всей массы явлений, где наряду с главными действует и множество второстепенных, неустойчивых, случайных факторов. Это приводит к тому, что в обществе нет строго определенных динамических закономерностей.

Статистическая закономерность является количественным выражением определенной тенденции. Можно обнаружить статистическую закономерность распространения культуры картофеля в России в годы крестьянской войны под предводительством Е.Пугачева. Анализируя полученные данные, историк на основе содержательного, качественного подхода решает, отражает ли найденная статистическая закономерность историческое явление, какую степень обобщения несет, какие условия ее определили.

Большинство явлений может характеризоваться либо с точки зрения частоты повторения во времени или пространстве, тогда задается вопрос: сколько раз? – либо с точки зрения уровня или интенсивности: каков уровень или какова степень интенсивности? В обоих случаях явления можно выразить в количественной форме.

Выборочный метод использовался в Древнем Египте и античной Греции при изучении явлений хозяйственной жизни, а в Русском государстве XVII и XVIII вв. применялся для определения величины всего урожая.

Идея выборочного метода — заменить сплошное обследование массовых однородных объектов частичным их обследованием, не допуская при этом существенных ошибок в выводах. Для этого выборка должна быть репрезентативной,т. е. достаточно хорошо представлять изучаемый признак генеральной совокупности, что обеспечивается случайностью отбора. Обеспечить случайность выборки, если историк производит отбор данных из многочисленной генеральной совокупности сохранившихся сведений, возможно при помощи жребия или таблицы случайных чисел.

Если же при помощи жребия или случайных чисел отбор выполнить не удается, применяются другие способы выборки: механический, типический и серийный.

При *механической выборке* генеральная совокупность разбивается на равные части и из каждой части берется одна единица. Генеральную совокупность при механическом отборе можно ранжировать или упорядочить по величине изучаемого или коррелирующего с ним признака, что позволит повысить репрезентативность выборки. Например, при 5%-ной выборке интервал отбора составит 20 единиц, тогда отбор нужно начинать с 10-й или с 11-й единицы. В первом случае в выборку попадут 10, 30, 50, 70 и с таким же интервалом последующие единицы; во втором случае - единицы с номерами 11, 31, 51, 71 и т.д.

Типическая, или районированная, выборка заключается в разделении генеральной совокупности на типические группы, образованные по какому-либо признаку. Например, территория, подлежащая обследованию, разделяется на районы, отличающиеся социально-экономическими или географическими условиями. И из каждого района производят отбор единиц в выборочную совокупность.

При *серийной выборке* совокупность делят на одинаковые по объему группы – серии. В выборочную совокупность отбираются серии, а внутри серий производится сплошное наблюдение единиц, попавших в серию.

Применение того или иного способа отбора зависит от свойств изучаемого явления и потому предполагает обязательное предварительное знакомство с объектами исследования.

Группировка - наиболее распространенный прием представления совокупности разрозненных данных в удобной для восприятия форме. Это начальный этап обработки данных источников, фундамент для большинства других приемов математико-статистического анализа. Благодаря группировке можно соотнести сводные показатели по совокупности в целом со сводными показателями по группам. Появляется возможность сравнивать, анализировать причины различий между группами, изучать взаимосвязи между признаками.

Метод группировки позволяет сложное явление представить через ряд более простых, что помогает прийти к анализу всей системы в целом. Методом группировки характеризуются типы явлений в их взаимных отношениях, а также вскрывается причинная зависимость между отдельными факторами и общей тенденцией развития процесса.

В науке различают 3 основных вида группировок: типологический, структурный, аналитический.

Типологическая группировка расчленяет качественно-разнородную совокупность на однородные группы, на типы. В основу группировки закладывается качественный признак. Так, например, широко известно использование типологической группировки В.И. Лениным для анализа крестьянских хозяйств: пролетарских, собственно крестьянских и капиталистических или - бедняцких, середняцких и кулацких. Примером типологической группировки выступает распределение промышленности периода новой экономиче-

ской политики (НЭП) по социальным секторам - государственная, кооперативная, частная. Выделение типов на основе количественного признака состоит в определении групп с учетом значений (величины) изучаемых признаков. При этом очень важно правильно установить интервал группировки, на основе которого количественно различаются одни группы от других, намечаются границы выделения их нового качества.

Структурная группировка представляет качественно-однородную совокупность в виде количественных групп. В большинстве своем структурные группировки производятся на основе образования качественно однородных групп, хотя нередко они применяются и без предварительного расчленения совокупности на части. В основу этих группировок закладывается количественный признак. Примером может служить распределение рабочих по стажу, по размерам заработной платы, по возрасту.

Третий метод – метод *аналитической группировки* - заключается в исследовании взаимосвязей между факторными признаками в качественно однородной совокупности. С помощью аналитических группировок удается выявлять признаки, которые могут выступать или причиной, или следствием того или иного явления. Этот метод еще называют факторным, при этом один из признаков группировки рассматривается как результат, а другой - как фактор. Например, дана группировка малых предприятий по размерам прибыли и продолжительности оборота средств. При одном и том же сроке оборота капитала предприятия могут иметь разную прибыль, следовательно, признак «оборачиваемость средств» - фактор (или условие), а признак «прибыль» - результат. Чтобы установить связь между признаками, данные группируются по признаку-фактору.

Результаты группировочного материала оформляются в виде таблиц или в иных графических формах. На базе группировки рассчитываются сводные показатели по группам, появляется возможность их сравнения, анализа причин различий между группами, изучения взаимосвязей между признаками. Группировка создает основу для последующей сводки и анализа данных.

Обобщающий количественный показатель, характеризующий типичный уровень совокупности по определенному признаку называют средней величиной. Она широко применяется в различных отраслях знаний.В исторической науке средние величины присутствуют давно, но не в полной мере. Для обработки массовых данных в статистике разработаны средние гармоническая, геометрическая, квадратическая, а также описательные средние - мода и медиана.

Выборочная средняя (средняя арифметическая) - является самым распространенный вид средних величин. Она исчисляется путем отношения суммы всех значений признака к общему числу наблюдений:

$$\overline{X}_{в} = \frac{\sum_{i} x_i m_i}{n},$$

где $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ - варианты признака (результаты измерений);

n – число единиц наблюдения ($n = \sum_i m_{x_i}$, *где* m_{x_i} - соответствующие частоты).

Мода (Mo) представляет наиболее часто встречающееся значение признака в упорядоченной совокупности, наиболее типичное среднее значение. В дискретном ряду Мо определяется без вычислений как значение признака с наибольшей частотой. Для вычисления моды в интервальном ряду сначала определяется модальный класс, т.е. интервал с наибольшей частотой. Затем Мо вычисляется по формуле:

$$\text{Мо} = X_0 + K\frac{P_2 - P_1}{2P_2 - P_1 - P_3}, \text{где}$$

X_0- нижняя граница модального интервала;

К - величина интервала;

P_1 – частота интервала, предшествующего модальному;

P_2 - частота модального интервала;

P_3 - частота интервала, последующего за модальным.

Медиана (Me) - величина, определяющая значение признака, находящегося в середине упорядоченной совокупности. Медиана делит изучаемую совокупность так, что число единиц с большим и меньшим, чем медиана значением признака, одинаково. В интервальной группировке для вычисления Ме необходимо найти медианный интервал - интервал, которому соответствует первая из накопленных частот, превышающая половину суммы всех частот ряда распределения. Затем считают по формуле:

$$\text{Ме} = X_0 + K\frac{\sum P/2 - \sum m - 1}{P_m}, \text{где}$$

X_0- нижняя граница медианного интервала;

К - величина медианного интервала;

$\sum P$- сумма частот;

$\sum m - 1$- сумма частот интервалов, предшествующих медианному (накопленная частота в интервале, предшествующем медианному).

P_m - частота медианного интервала.

Средняя геометрическая средняя величина используется для сохранения неизменности произведения индивидуальных значений признака, например, при анализе динамики (для расчета среднего темпа роста), при заданном минимальном и максимальном значениях признака.

Средняя гармоническая применяется, если необходимо оставить постоянной сумму величин, обратных индивидуальным значениям признака, в этом случае частоты (веса) неизвестны, а известны произведения признака на соответствующую частоту (примеры: средние затраты труда, времени, материалов на одну деталь, средняя урожайность, средняя скорость и т.п.).

Средняя квадратическая рассчитывается, когда необходимо сохранить неизменной сумму квадратов индивидуальных величин; при расчете показате-

лей вариации (примеры: средняя площадь, средний диаметр, средняя длина квадратного участка и т.п.).

Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется по формуле

$$s_в = \sqrt{d_в},\ где\ d_в = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - x_в)^2\ - выборочная\ дисперсия$$

Формулы расчета среднего значения показателя через относительные величины структуры позволяют охарактеризовать зависимость средней не только от индивидуальных значений осредняемой величины, но и от структуры совокупности, поскольку изменение структуры совокупности приводит к изменению средней величины, при этом индивидуальные значения осредняемого признака могут оставаться неизменными.

Эмпирическая функция распределения определяется по формуле

$$F^*(x) = \frac{m_{x_i}}{n}$$

где в числителе стоит число вариантов выборки, меньших х.

Пример 1. Имеются данные о размерах основных фондов (млн. руб) 30 предприятий: 0,42, 0,24,0,49, 0,67,0,45, 0,27, 0,39, 0,21,, 0,58, 0,40, 0,28, 0,73, 0.44, 0,56, 1,21, 0,63, 0,79, 0,81, 1,07, 0,68, 0,94, 0,76, 0,63, 0,38, 0.65, 1,14, 0,46, 1.38, 0,72, 0,91. Построить интервальный ряд, гистограмму, полигон частот, вычислить моду, медиану, среднюю гармоническую.

Пример 2. Выборка X объемом 100 измерений задана таблицей:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0,2	1,4	2,6	3,8	5	6,2	7,4
m_{x_i}	5	13	25	25	19	10	3

где x_i - результаты измерений, m_{x_i} - соответствующие частоты. Построить полигон относительных частот, найти моду, медиану, кумуляту, эмпирическую функцию распределения. Вычислить выборочное среднее квадратическое отклонение.

Познание сущности исторических явлений и механизмов ихразвития предполагает раскрытие внутренних системных связейи их оценку. Эти связи сложны и многообразны, среди них необходимовыделить наиболее существенные, формирующиехарактер развития явления.

Важнейшим условием анализа связей всех видов является возможностьих количественного выражения. Математическая статистикаразработала целый ряд методов, помогающих решить этузадачу. Среди них *–корреляционный анализ*.Данный метод позволяет установить наличие, форму и направленность связи, а также количественно оценить ее силу. При этомдля числового выражения изучаемых процессов и явлений можнопользоваться всеми шкалами измерения, принятыми в современнойнауке. Такая универсальность сделала метод корреляционногоанализа весьма популярным и востребованным в исторических исследованиях.

Корреляция – показатель, отражающий взаимную зависимость двух или более величин. При этом величины должны выбираются случайно, а зависимость может определяться либо совпадением, либо отношениями причинности. Необходимо выяснить, не является ли корреляция ложной, то есть основанной на совпадении. Для этого вводится еще одна новая случайная величина. Только при изменении значения одной величины, которое влечет за собой неминуемое систематическое изменение значения другой величины, корреляция считается установленной. Такое изменение может быть выражено в виде коэффициента корреляции, или корреляционного отношения. Коэффициент корреляции показывает, насколько тесно две переменных связаны между собой.

В основе корреляционного анализа лежит идея сопоставленияколебаний значений изучаемых признаков относительно друг друга.Если численные значения одного признака изменяются одновременносо значением другого, то можно предположить, что междуними существует связь.

В математике различают функциональную и статистическую зависимость.

Функциональная зависимость двух количественных признаков или переменных состоит в том, что каждому значению одной переменной всегда соответствует одно определенное значение другой переменной. Функциональная зависимость предполагает рассмотрение признаков изолированно, однако в общественной жизни подобная ситуация складывается крайне редко. Как правило, воздействие одной переменной на другую не изолировано от других факторов, а происходит в условиях их влияния на изучаемую взаимосвязь. Для описания подобного рода зависимости используется понятие статистической, или корреляционной, связи.

В отличие от функциональной зависимости, когда каждому значению одного признака всегда соответствует определенное значение другого, в случае статистической зависимости некоему значению одного признака могут соответствовать различные значения другого. Причина этого заключается в том, что при статистической зависимости связь между признаками (двумя, тремя, несколькими) определяется не только взаимодействием между ними самими, но и воздействием множества других неучтенных факторов. В результате такого воздействия связь между признаками присутствует и проявляется не в каждом конкретном случае, а только «в среднем», как тенденция. Поэтому установить наличие взаимосвязи и определить ее количественную меру можно не посредством единичных наблюдений, а лишь применительно к определенной совокупности объектов, т.е. в среднем по отношению к массовым объектам или явлениям. Соответственно характеризующие эти объекты или явления количественные показатели называются массовыми данными.Анализ статистической (корреляционной) связи предполагает выявление характера связи и оценку тесноты связи. Корреляционный анализ позволяет оценить тесноту связи при помощи специальных показателей, выбор которых зависит от вида функциональной зависимости, адекватно описывающего рассматриваемую статистическую взаимосвязь.

В корреляционном анализе одной из основных мер связи между признаками является парный линейный коэффициент корреляции. С его помощью измеряется теснота связи между двумя признаками. Линейный коэффициент корреляции r изменяется в пределах от -1 до +1. Равенство коэффициента нулю свидетельствует об отсутствии линейной связи. Равенство коэффициента -1 или +1 говорит о наличии функциональной зависимости. Приr= 1 присутствует прямая связь, т.е. увеличение или уменьшение одного признака сопровождается аналогичным изменением другого признака. При r= -1 связь обратная, т.е. увеличение или уменьшение одного признака сопровождается противоположным по направлению изменением другого признака.

Метод корреляции помогает решить определенный класс задач, приблизиться к пониманию причинно-следственных механизмов.

7. Основные периоды развития математики и их особенности

1. Изучение конспекта лекций (темы – обзор истории математики)
2. Подготовка и написание реферата по выбранной теме
3. Подготовка доклада по теме реферата

Основная литература

1. Дерр, В. Я. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Я. Дерр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 596 с. — ISBN 978-5-8114-6515-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159475. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 18-е изд., перераб. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4916-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152643. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 : Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL:

https://e.lanbook.com/book/159505. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. — Москва : Наука, 1990. — 256 с.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письмен-ный. – М.: Айрис-Пресс, 2010. – 288с.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/20141002143706630496000094 33, по паролю
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/20141002144129431551000 0 8498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- https://tsutula.bibliotech.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.- http://www.iprbookshop.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.