

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«21» января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

  
В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Комплексный анализ»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

с направленностью (профилем)  
**Механика деформируемого твердого тела**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-22

Тула 2022

## Разработчик методических указаний

**Разработчик:**

Лавит И.М., проф., д.ф.-м.н., доц.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



---

(подпись)

Методические указания содержат задачи по различным разделам дисциплины «Комплексный анализ». Названия и номера пунктов соответствуют рабочей программе по дисциплине «Комплексный анализ».

### 1.1. Комплексные числа, комплексная плоскость

Даны три вершины параллелограмма  $z_1, z_2, z_3$ . Найти четвертую вершину  $z_4$ , противоположную вершине  $z_2$ .

Найти вершины правильного  $n$ -угольника, если его центр находится в точке  $z = 0$ , а одна из вершин  $z_1$  известна.

### 1.2. Комплексно-сопряженные числа

Решить уравнение  $\bar{z} = z^{n-1}$  ( $n \neq 2$  — натуральное число)

### 1.3. Арифметика комплексных чисел

Представить в алгебраической форме

$$1) \frac{1}{i}; \quad 2) \frac{1-i}{1+i}; \quad 3) \frac{2}{1-3i}; \quad 4) (1+i\sqrt{3})^3.$$

### 1.4. Модуль и аргумент комплексного числа, их свойства

Найти модули и аргументы комплексных чисел

$$1) 3i; \quad 2) -2; \quad 3) 1+i; \quad 4) -1-i; \quad 5) 2+5i; \quad 6) 2-5i; \\ 7) -2+5i; \quad 8) -2-5i$$

Доказать неравенства

$$1) \left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|; \quad 2) |z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$$

### 1.5. Числовые последовательности и их пределы

Доказать следующие предложения:

1) сходимость последовательности  $\{z_n = x_n + iy_n\}$  эквивалентна одновременной сходимости последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ ;

2) для того чтобы существовал предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq 0$  и (при подходящем определении  $\arg z_n$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  не является отрицательным числом, то можно, например, считать, что  $-\pi < \arg z_n \leq \pi$ .

### 1.6. Числовые ряды

исследовать сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$$c_n = \frac{n}{(2i)^n} \quad c_n = \frac{n!}{(in)^n} \quad c_n = \frac{e^{in}}{n} \quad c_n = \frac{e^{in}}{n^2}$$

### 1.7. Линии и области на комплексной плоскости

Выяснить геометрический смысл соотношений:

$$|z - z_0| < R; \quad |z - z_0| > R; \quad |z - z_0| = R.$$

$$|z - 2| - |z + 2| > 3.$$

$$|z| < \arg z, \text{ если } 0 < \arg z \leq 2\pi.$$

### 2.2. Голоморфные функции; условия Коши-Римана

Найти голоморфную функцию

$f(z) = u + iv$  по заданной действительной или мнимой части

$$u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$$

$$v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$$

$$v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$$

### 3.1. Интеграл по комплексному переменному, его простейшие свойства, связь с криволинейными интегралами второго рода

Вычислить интеграл  $\int |z| dz$  по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки  $z = 2 - i$ ;

2) по полуокружности  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$  (начало пути — в точке  $z = 1$ );

3) по полуокружности  $|z| = 1$ ,  $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$  (начало пути — в точке  $z = -i$ );

4) по окружности  $|z| = R$ .

### 3.2. Интегральная теорема Коши и ее следствия

Показать, что если путь не проходит через начало координат, то

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi ik,$$

где  $k$  — целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат ( $z = re^{i\varphi}$ ).

Показать, что если путь не проходит через точки  $\pm i$ , то

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где  $k$  — целое число.

### 4.1. Интегральная формула Коши

Вычислить интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ , если:

- 1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 — вне контура  $C$ ;
  - 2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 — вне контура  $C$ ;
- $C$  - простой замкнутый спрямляемый контур.

#### 4.2. Формула Коши для производных; бесконечная дифференцируемость голоморфных функций

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}, \text{ если точка } a \text{ лежит}$$

внутри контура  $C$ .

$C$  - простой замкнутый спрямляемый контур.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулами для производных интеграла Коши.

#### 5.2. Функциональный ряд; равномерная сходимость; мажорирующий ряд Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$$

#### 6.2. Формула Тейлора

Указанные функции разложить в степенной

ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  и найти радиус сходимости

$$\sin^2 z \quad \frac{z}{z^2 - 4z + 13} \quad \frac{z^2}{(z+1)^2} \quad \ln \frac{1+z}{1-z} \quad \ln(z^2 - 3z + 2)$$

#### 7.2. Определение экспоненты, синуса и косинуса; их элементарные свойства; формула Эйлера

Разложить данные функции в ряды по степеням  $z$  и найти радиусы сходимости полученных рядов:

$$1) \ln \frac{\sin z}{z}; \quad 2) \operatorname{tg} z; \quad 3) \ln \cos z; \quad 4) \frac{z}{\sin z}.$$

Исходя из определения соответствующих функций, доказать, что

$$1) \sin^2 z + \cos^2 z = 1; \quad 2) \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right);$$

$$3) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

$$4) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

### 7.3. Гиперболические функции и их свойства

Исходя из определения соответствующих функций, доказать, что

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$1) \sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad 2) \cos iz = \operatorname{ch} z; \quad 3) \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z;$$

$$4) \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z.$$

Найти действительные и мнимые части следующих функций

$$1) \cos(2 + i); \quad 2) \sin 2i; \quad 3) \operatorname{tg}(2 - i);$$

$$4) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right); \quad 5) \operatorname{cth}(2 + i); \quad 6) \operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right).$$

### 7.4. Теорема о произведении экспонент и ее следствия

Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел  $e^{2+i}$ ;  $e^{2-3i}$ ;  $e^{3+4i}$ ;  $e^{-3-4i}$ ;  $-ae^{i\varphi}$  ( $a > 0$ ,  $|\varphi| \leq \pi$ );  $e^{-i\varphi}$  ( $|\varphi| \leq \pi$ );  $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$  ( $0 \leq \beta < \alpha \leq 2\pi$ ).

### 8.1. Разложение функции, голоморфной в кольце, в степенной ряд – ряд Лорана. Единственность разложения. Главная и правильная части ряда Лорана

Разложить следующие функции в степенной ряд

$$\frac{1}{z(1-z)} \text{ в окрестности точек } z=0, z=1$$

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} \text{ в окрестности точки } z=2 \text{ и в кольце } 1 < |z| < 2$$

$$\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2} \text{ в окрестности точки } z=2.$$

$$z^2 \sin \frac{1}{z-1} \text{ в окрестности точки } z=1$$

### 8.2. Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация особых точек по разложению функции в ряд Лорана в их окрестности

Найти особые точки функций и выяснить их характер

$$\frac{1}{z-z^3} \quad \frac{z^5}{(1-z)^2} \quad \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} \quad \frac{1}{z^3(2-\cos z)} \quad \operatorname{th} z \quad ze^{1/z}$$
$$e^{z-1/z} \quad \frac{1}{\sin z} \quad \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

### 8.3. Определение порядка полюса с помощью предельного перехода

Для всех конечных особых точек определить тип особой точки и, если это полюс, найти его порядок

$$\frac{1}{z^3 - z^5} \quad \frac{z^4}{1 + z^4} \quad \frac{1}{z(z^2 + 4)^2}$$

### 9.1. Определение вычета; вычисление вычета в полюсе с помощью предельного перехода

Найти вычеты в особых точках функций

$$\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} \quad \frac{1}{z(1 - z^2)} \quad \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)} \quad \frac{\sin 2z}{(z + 1)^3} \quad z^3 \cos \frac{1}{z - 2} \quad \sin z \sin \frac{1}{z}$$

### 9.2. Теорема Коши о вычетах

Найти интегралы

$$\int_C \frac{z dz}{(z - 1)(z - 2)^2}, \text{ где } C \text{ — окружность } |z - 2| = \frac{1}{2}.$$

$$\int_C \frac{dz}{(z - 3)(z^5 - 1)}, \text{ где } C \text{ — окружность } |z| = 2.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что сумма вычетов относительно всех особых точек (включая бесконечно удаленную) равна нулю.

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)} dz, \text{ где } C \text{ — окружность } |z| = 1.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \sin \frac{1}{z} dz, \text{ где } C \text{ — окружность } |z| = r.$$

$$\int_{|z|=5} \frac{z dz}{\sin z(1 - \cos z)}.$$

### 9.3. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов

Найти интегралы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad (a > 1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} \quad (a > b > 0).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}$$

### 10.1. Логарифмическая функция; ветви; точка ветвления

Найти точки ветвления, выделить ветви функции

$$w = \sin \operatorname{Ln} z \quad w = z + \operatorname{Ln} z$$

Представить в алгебраической форме

$$\operatorname{Ln}(2 - 3i) \quad \ln i$$

### 10.2. Выделение ветвей; разрезы

Найти точки ветвления, выделить ветви функции, указать положение разрезов, позволяющих определить голоморфную функцию – фиксированную ветвь исходной многозначной функции

$$w = \frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z} \quad w = \operatorname{Ln} [(z-a)(z-b)]$$

### 10.3. Обратные тригонометрические функции

Найти точки ветвления, выделить ветви функции, указать положение разрезов, позволяющих определить голоморфную функцию – фиксированную ветвь исходной многозначной функции

$$w = \frac{1}{z} \operatorname{Arcsin} z \quad w = \frac{1}{z^2} + \operatorname{Arctg} z$$

### 10.4. Обратные гиперболические функции

Найти точки ветвления, выделить ветви функции, указать положение разрезов, позволяющих определить голоморфную функцию – фиксированную ветвь исходной многозначной функции

$$w = \operatorname{Arth} z - \operatorname{Arcth} z$$

### 10.5. Степенная и показательная функции. Частные случаи.

Найти точки ветвления, выделить ветви функции, указать положение разрезов, позволяющих определить голоморфную функцию – фиксированную ветвь исходной многозначной функции

$$w = e^{1/(\sqrt{z}-1)}$$

$$w = \operatorname{tg} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$$

$$w = z^i$$

Представить в алгебраической форме

$$1) 1^{\sqrt{2}}; \quad 2) (-2)^{\sqrt{2}}; \quad 3) 2^i; \quad 4) 1^{-i}; \quad 5) i^i;$$

$$6) \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}; \quad 7) (3-4i)^{1+i}; \quad 8) (-3+4i)^{1+i}.$$

### 11.2. Вычет в бесконечно удаленной точке

Найти вычет в бесконечно удаленной точке

$$\frac{1}{z^3 - z^5} \quad \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} \quad \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$$

### 12.1. Конформное отображение. Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Во что преобразуются указанные области при заданных отображающих функциях?

$$\text{Квадрант } x > 0, y > 0; \quad w = \frac{z-i}{z+i}$$

Полукруг  $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0; w = \frac{2z - i}{2 + iz}$

Кольцо  $1 < |z| < 2; w = \frac{z}{z - 1}$

## 12.2. Простейшие конформные отображения: круга на круг, круга на полуплоскость

Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего:

- 1) верхнюю полуплоскость на себя;
- 2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
- 3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

Найти функцию  $w(z)$ , отображающую круг  $|z| < R$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$  так, что  $w(R) = 0, w(-R) = \infty, w(0) = 1$ . Каков при этом отображении образ верхнего полукруга?

## 13.1. Логарифмическая производная и логарифмический вычет

Найти  $\operatorname{res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)} \right]_{z=a}$ , если:

- 1)  $a$  — нуль порядка  $n$  функции  $f(z)$ ;
- 2)  $a$  — полюс порядка  $n$  функции  $f(z)$

Найти  $\operatorname{res} \left[ \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right]_{z=a}$ , если  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $a$  и:

- 1)  $a$  — нуль порядка  $n$  функции  $f(z)$ ;
- 2)  $a$  — полюс порядка  $n$  функции  $f(z)$ .

## 13.2. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Пользуясь теоремой Руше, найти количество лежащих внутри круга  $|z| < 1$  корней данных уравнений

$$z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$$

$$2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$$

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

В каких квадрантах лежат корни уравнения

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0?$$

## 14.1. Сингулярный интеграл

Пусть  $C$  — замкнутый контур. Найти  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$ , если плотность интеграла типа Коши — указанная функция ( $n$  — натуральное число):

$$1) \varphi(\zeta) = (\zeta - a)^n; \quad 2) \varphi(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - a)^n} \quad (a \text{ внутри } C);$$

$$3) \varphi(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - a)^n} \quad (a \text{ вне } C).$$

## 14.2. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого-Племеля

Найти  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$ , если

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^3 + i\zeta^2 - \zeta + 4i}{\zeta^4 - 3\zeta^2 - 4} + \frac{\ln \frac{\zeta - 2}{\zeta - 3}}{\zeta^2 - 4}$$

и  $C$  — окружность  $|\zeta| = 3/2$

Пусть плотность интеграла типа Коши  $\varphi(\zeta) = 1/\zeta^n$ . Найти  $F(z)$  вне  $C$ , если контур  $C$  — указанная линия:

- 1) граница кольца  $r < |z| < R$ ;
- 2) прямая  $\text{Im } \zeta = \pi$ , пробегаемая слева направо;
- 3) граница полосы  $|\text{Im } z| < \pi$ ;
- 4) полуокружность  $|\zeta| = R$ ,  $0 < \arg \zeta < \pi$  (начало в точке  $R$ );
- 5) полуокружность  $|\zeta| = R$ ,  $-\pi < \arg \zeta < 0$  (начало в точке  $R$ ).

В пп. 4) и 5) найти предельные значения  $F^\pm(\zeta)$  на  $C$  и вычислить  $F(0)$ .

## 15.2. Нахождение оригинала с помощью теоремы о вычетах

Найти оригиналы:

$$\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)} \quad \frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$$

## 15.4. Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= 0; & y(0) &= 1, & y'(0) &= -6 \\ y'' - 10y' + 25y &= 0; & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1 \\ y'' + 4y &= \sin 2x + 1; & y(0) &= 1/4, & y'(0) &= 0 \end{aligned}$$