МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«21» января 2022г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____ В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению лекционных занятий
по дисциплине (модулю)
«Направления развития механики в ТулГУ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-22

Тула 2022

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Глаголев В.В., зав.каф., д.ф.-м..н., проф. _____

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. Цели учебной дисциплины.

Целью освоения дисциплины «Направления развития механики в ТулГУ» является: ознакомление студентов с фундаментальными и прикладными исследованиями в области механики проводимыми ведущими учеными университета; формирование представлений о механике как фундаментальной науке синтетического характера, изучающей движение и термодинамику идеальных газов, вязкой жидкости, деформируемого твердого тела.

2. Приводятся задачи для самостоятельного решения. Часть задач сопровождается пояснениями хода решения.

Кинематика

Закон движения задан в следующем виде:

$$x_1 = \mathrm{x}_1 + \varphi_1(t)A(\mathrm{x}_1),$$
$$x_2 = \varphi_2(t)\mathrm{x}_2, \qquad (1)$$
$$x_3 = \varphi_3(t)\mathrm{x}_3.$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – функции от времени, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi_1(t)|_{t=0} = 0; \qquad \varphi_2(t)|_{t=0} = 1; \qquad \varphi_3(t)|_{t=0} = 1. \qquad (2)$$

Задача 1.

Найти уравнения материальных линий, в начальный момент времени совпадавших с декартовой сеткой пространственной системы координат. Построить в момент $t = t_k$ границу первоначально кубического (квадратного) материального объема по заданным начальным положениям его угловых точек ($\vec{x}_{(1)}; \vec{x}_{(2)}; \vec{x}_{(3)}; \vec{x}_{(4)}$).

Решение.

Найдем уравнения материальных линий сплошной среды, в начальный момент времени совпадавших с сеткой декартовых прямых пространственной системы координат. Для определения уравнений первоначально горизонтальных прямых (параллельных оси Ox_1) положим $\mathrm{x}_2 = const = C_2$. Далее рассматриваем движение в плоскости $\mathrm{x}_3 = 0$. Уравнение $\mathrm{x}_2 = C_2$ выделяет множество материальных точек, образующих при $t = 0$ горизонтальные прямые. Чтобы найти уравнения линий, которые

будут образовывать эти же материальные точки в момент времени *t*, подставим значение $\mathrm{x}_2 = C_2$ в уравнение (1). В результате получим:

$$x_1 = \mathrm{x}_1 + \varphi_1(t)A_2 \ , \qquad (3)$$
$$x_2 = \varphi_2 C_2 \ ,$$

где $A_2 = A(C_2)$.

Из уравнения (3) следует, что первоначально горизонтальные материальные прямые остаются горизонтальными (но при этом изменяются точки их пересечения с пространственной осью Ox_2). В частности, материальные точки, совпадающие при $t = 0$ с координатной осью Ox_1, для которых $C_2 = 0$, в соответствии с уравнениями (3) в произвольный момент времени будут располагаться на этой же прямой, а точки, для которых $C_2 = 1$, будут располагаться на прямой $x_2 = \varphi_2(t)$.

Рассмотрим теперь уравнения первоначально вертикальных $\mathrm{x}_1 = C_1$ материальных линий. Полагая в уравнениях (1) $\mathrm{x}_1 = C_1$, получим

$$x_1 = C_1 + \varphi_1(t)A(\mathrm{x}_2), \qquad (4)$$
$$x_2 = \varphi_2(t)\mathrm{x}_2 .$$

Система (4) - искомые уравнения в параметрическом виде, где роль параметра выполняет материальная координата x_2. Уравнения в явном виде получим подстановкой в первое уравнение (4) значения $\mathrm{x}_2 = x_2/\varphi_2$ из второго уравнения:

$$x_1 = C_1 + \varphi_1 A\left(\frac{x_2}{\varphi_2}\right). \qquad (5)$$

Отметим, что $A(x_2/\varphi_2)$ обозначает действие оператора А на аргумент x_2/φ_2. Например, если $A(\mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_2^2$, то $A(x_2/\varphi_2) = (x_2/\varphi_2)^2$. Таким образом, первоначально вертикальные материальные прямые в соответствии с уравнением (5) становятся в общем случае кривыми. Материальные точки, совпадавшие при $t = 0$ с осью Ox_2, в соответствии с уравнением (5) в произвольный момент времени будут располагаться на линии

$$x_1 = \varphi_1(t)A\left(\frac{x_2}{\varphi_2}\right).$$

Задача 2.

Найти поля перемещений и скоростей в лагранжевых и эйлеровых координатах.

Решение.

Найдем поле скоростей, соответствующее закону (1) в пространственных (эйлеровых) координатах.

Дифференцируя левую и правую части (1) по времени, находим поле скоростей в материальных (лагранжевых) координатах:

$$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \varphi_1' A(\mathrm{x}_2) \ ,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \varphi_2' \mathrm{x}_2 \ , \qquad (6)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = V_3 = \varphi_3' \mathrm{x}_3 .$$

Из закона (1) определим обратные соотношения между материальными пространственными координатами. В результате получим:

$$\mathrm{x}_1 = x_1 - \varphi_1(t) A(x_2 / \varphi_2(t)),$$
$$\mathrm{x}_2 = x_2 / \varphi_2(t), \qquad (7)$$
$$\mathrm{x}_3 = x_3 / \varphi_3(t).$$

Подставив соотношения (7) в выражения (6), находим поле скоростей в эйлеровых координатах:

$$V_1(x_1, x_2) = \varphi_1' A(x_2 / \varphi_2),$$
$$V_2(x_1, x_2) = (\varphi_2' / \varphi_2) \cdot x_2, \qquad (8)$$
$$V_3 = (\varphi_3' / \varphi_3) \cdot x_3 .$$

Поле перемещений в лагранжевых координатах получим из (1):

$$u_1 = x_1 - \mathrm{x}_1 = \varphi_1(t) A(\mathrm{x}_1), \qquad (9)$$
$$u_2 = x_2 - \mathrm{x}_2 = (\varphi_2 - 1)\mathrm{x}_2, \qquad (10)$$
$$u_3 = x_3 - \mathrm{x}_3 = (\varphi_3 - 1)\mathrm{x}_3 \ .$$

То же поле перемещений в эйлеровых координатах с учетом выражений (7) принимает следующий вид:

$$u_1 = \varphi_1(t) A(x_2 / \varphi_2),$$

$$u_2 = \frac{\varphi_2 - 1}{\varphi_2} x_2 .$$

Полученное поле перемещений зависит лишь от координаты x_2 и не зависит от x_1. Движение материальных точек, лежащих в плоскости $x_3 = x_3 = 0$, можно представить как растяжение вдоль оси Ox_2 (в соответствии с законом (10)),а затем неоднородный сдвиг вдоль оси Ox_1 (в соответствии с (9)).

Задача 3.

Определить компоненты аффинора деформации и тензора деформаций Коши – Грина, указать слагаемые, образующие линейную часть тензора деформаций.

Решение.

В соответствии с определением аффинор деформации $\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}$ описывает движение бесконечно малой материальной окрестности точки $\vec{x}$ и связывает начальное положение элементарного вектор – волокна $d\vec{x}$ с положением $d\vec{x}$ этого же волокна в произвольный момент времени, при этом

$$d\vec{x} = d\vec{x} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} . \qquad (11)$$

Выражение (11) позволяет определить $\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}$ в следующих эквивалентных формах:

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} = \overset{\circ}{\vec{\nabla}} \vec{x} = \vec{e}_i \vec{e}_j \frac{\partial x_j}{\partial x^i} = \underset{\sim}{\mathbf{E}} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}} \vec{u} = (\delta_{ij} + \frac{\partial x_j}{\partial x^i}) , \qquad (12)$$

где $\overset{\circ}{\vec{\nabla}} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – набла – оператор начального состояния.

Из определений (12) следуют выражения декартовых компонент аффинора деформации:

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} . \qquad (13)$$

Дифференцируя закон движения (1) в соответствии с (13), получим следующую матрицу компонент аффинора деформации:

$$\Phi_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{x}_1} = 1 \; ; \; \Phi_{12} = \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{x}_1} = 0 \; ; \; \Phi_{13} = \frac{\partial x_3}{\partial \mathrm{x}_1} = 0$$

$$\Phi_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{x}_2} = \varphi_1(t)\frac{dA}{d\mathrm{x}_2} \; ; \; \Phi_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{x}_2} = \varphi_2(t) \; ; \; \Phi_{23} = 0 \qquad (14)$$

$$\Phi_{31} = 0 \; ; \; \Phi_{32} = 0 \; ; \; \Phi_{33} = \varphi_3(t) \; .$$

Определим векторы материального (сопутствующего) базиса $\vec{\text{э}}_i = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \mathrm{x}_i}$.

Данные векторы определяются разложением по пространственному базису:

$$\vec{\text{э}}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{x}_i}\vec{e}_j = \Phi_{ij}\vec{e}_j \, . \qquad (15)$$

Из (14) получаем представления векторов $\vec{\text{э}}_i$, соответствующие закону (1):

$$\vec{\text{э}}_1 = \Phi_{11}\vec{e}_1 + \Phi_{12}\vec{e}_2 + \Phi_{13}\vec{e}_3 = \vec{e}_1 ,$$

$$\vec{\text{э}}_2 = \Phi_{21}\vec{e}_1 + \Phi_{22}\vec{e}_2 + \Phi_{23}\vec{e}_3 = \varphi_1(t)\frac{dA}{d\mathrm{x}_2}\vec{e}_1 + \varphi_2(t)\vec{e}_2 \; , \qquad (16)$$

$$\vec{\text{э}}_1 = \varphi_3(t)\vec{e}_3 \; .$$

Из разложений (16) следует, что материальные векторы $\vec{\text{э}}_1$, совпадающие в начальный момент времени с $\vec{e}_1$, не изменяются при движении, векторы $\vec{e}_2$ меняются по величине и направлению, а векторы $\vec{e}_3$ меняют только длину.

Тензор деформации Коши – Грина $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ характеризует изменение длин элементарных вектор – волокон и углов между ними. Он определяется следующими выражениями:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}}^T - \underset{\sim}{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} + \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}} + \overset{\circ}{\vec{\nabla}}\vec{u} \cdot \vec{u}\overset{\circ}{\vec{\nabla}}) \; . \qquad (17)$$

В декартовом базисе на основании (17) получим следующие представления компонент тензора деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Phi_{ik}\Phi_{jk} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \; . \qquad (18)$$

Из (9), (10) или (14) находим, используя (18), компоненты тензора Коши – Грина. Предварительно выпишем матрицу градиента перемещений:

$$u_{1,1} = 0 \ ; \ u_{1,2} = \varphi_1 A_{,2} \ ; \ u_{1,3} = 0 \, ,$$
$$u_{2,1} = 0 \ ; \ u_{2,2} = \varphi_2 - 1 \ ; \ u_{2,3} = 0 \, , \qquad (19)$$
$$u_{3,1} = 0 \ ; \ u_{3,2} = 0 \ ; \ u_{3,3} = \varphi_3 - 1 \ .$$

Используя (19) и (18), находим

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(2u_{1,1} + \underline{u_{1,2}^2}) = 0 \, ,$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1} + \underline{u_{1,2}u_{2,2}}) = \frac{1}{2}\varphi_1 A_{,2} \ , \qquad (20)$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(2u_{2,2} + \underline{(u_{2,2})^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi_2 - 1 + (\varphi_2 - 1)^2\right) \, ,$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(2u_{3,3} + \underline{(u_{3,3})^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi_3 - 1 + (\varphi_3 - 1)^2\right).$$

Подчеркнутые в выражениях компоненты тензора ε_{ij} слагаемые опускают в случае его линеаризации.

Задача 4.

Определить главные значения и ориентацию главных осей тензора деформаций в момент времени $t = t_k$, записать разложение тензора деформаций по диадному базису его главных осей.

Решение.

Из определения главного направления $\vec{a}$ следует, что вектор-волокно, направленное в начальном состоянии вдоль $\vec{a}$, не изменяет своей ориентации в результате "чистой" деформации, следовательно,

$$\vec{a} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\mathbf{E}} \varepsilon \cdot \vec{a} \, , \qquad (21)$$

где ε – главное значение тензора деформаций.

Характеристическое уравнение для определения главных значений имеет вид

$$\left| \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij} \right| = 0 \ . \qquad (22)$$

Подставляя (20) в (22), получим:

$$\begin{vmatrix} 0-\varepsilon & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}-\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Раскрывая определитель по третьей строке, находим

$$(\varepsilon_{33}-\varepsilon)(\varepsilon(\varepsilon_{22}-\varepsilon)+\varepsilon_{12}^2)=0 \ . \qquad (23)$$

Из (23) следует, что одно из главных значений совпадает с ε_{33}. Два других находим из квадратного уравнения:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon - \varepsilon_{12}^2 = 0 \ . \qquad (24)$$

Корни данного уравнения определим по формуле

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-\varepsilon_{22} \pm \sqrt{\varepsilon_{22}^2 + 4\varepsilon_{12}^2}}{2} \ , \qquad (25)$$

где $\varepsilon_1 \rangle \varepsilon_2$.

При нумерации главных значений предполагаем, что $\varepsilon_2 > \varepsilon_{33} \equiv \varepsilon_3$. В результате получим:

$$\varepsilon_{ij} a_{ij}^{(1)} - \varepsilon_1 a_i^{(1)} = 0 \ . \qquad (26)$$

Полагая вектор $\vec{a}^{(1)}$ единичным, добавляем к (26) условие нормировки:

$$\left(a_1^{(1)}\right)^2 + \left(a_2^{(1)}\right)^2 = 1, \ a_3^{(1)} = 0 \ . \qquad (27)$$

Отметим, что в нашем случае $\vec{a}^{(3)} = \vec{e}_3$. Выпишем систему (26), принимая ε_{ij} из (20). В результате получим:

$$\varepsilon_{12} a_2^{(1)} - \varepsilon_1 a_1^{(1)} = 0, \qquad (28)$$

$$\varepsilon_{21} a_1^{(1)} + \varepsilon_{22} a_2^{(1)} - \varepsilon_1 a_2^{(1)} = 0 .$$

Из (28) находим косинусы углов между вектором $\vec{a}^{(1)}$ ($т.е.\ a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)}$) и осями $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Обозначим угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{a}^{(1)}$ через α_1, тогда

$$\vec{a}^{(1)} = \cos\alpha_1 \vec{e}_1 + \sin\alpha_1 \vec{e}_2 . \qquad (29)$$

Так как вектор $\vec{a}^{(2)}$ ортогонален $\vec{a}^{(1)}$, то

$$\vec{a}^{(2)} = -\sin\alpha_1 \vec{e}_1 + \cos\alpha_1 \vec{e}_2 . \qquad (30)$$

Запишем теперь разложение тензора по базису главных осей:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \varepsilon_2 \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \varepsilon_3 \vec{a}_3 \vec{a}_3 , \qquad (31)$$

где $\vec{a}_j \equiv \vec{a}^{(i)}$

Задача 5.

Определить левую меру искажения и тензор поворота в момент времени $t = t_k$. Изобразить на рисунке фазу " чистой " деформации первоначально кубического элементарного материального объема, выделенного в окрестности точки $\vec{x}_k$, и фазу его "вращения" как абсолютно твердого тела. Ребра элемента в начальном состоянии направить вдоль главных осей левой меры.

Решение.

Левая мера $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ связана с тензором деформаций следующим выражением:

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}}^2 = 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\mathbf{E}} \ . \qquad (32)$$

Согласно теореме Кейли – Гамильтона, главные значения левой меры λ_i связаны с главными значениями ε_i аналогичным образом, следовательно,

$$\lambda_i = \left|\sqrt{2\varepsilon_i + 1}\right|. \qquad (33)$$

Отметим, что главные значения удовлетворяют условию $\varepsilon_i > -0{,}5$, поэтому подкоренное выражение в (33) всегда положительно. Таким образом, диадное представление левой меры в базисе главных осей имеет следующий вид:

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}} = \lambda_1 \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 \vec{a}_3 . \qquad (34)$$

Для определения тензора поворота воспользуемся теоремой о полярном разложении аффинора деформации, согласно которой

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} = \underset{\sim}{\mathbf{U}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}} . \qquad (35)$$

В соответствии с выражением (35) можно представить движение сплошной среды как "чистую" деформацию (происходящую без поворота главных осей) и "вращение" материальной окрестности как абсолютно твердого тела. В процессе "чистой" деформации материальное вектор - волокно движется по закону:

$$d\vec{x}_u = d\vec{\mathrm{x}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{U}}(t) \ .$$

Если это волокно совпадает в начальный момент времени с главным направлением меры $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$, то $d\vec{\mathrm{x}} = \vec{a}_i d\mathrm{x}_i$ и в соответствии с (21) получим

$$d\vec{x}_{u_i} = \lambda_i \vec{a}_i d\mathrm{x}_i = \lambda_i d\vec{\mathrm{x}}_i \ , \ i \neq \Sigma . \qquad (36)$$

Из формулы (36) следует, что процесс "чистой" деформации можно представить как растяжение – сжатие первоначально кубического материального элемента с ребрами вдоль главных направлений $\vec{a}_i$. При этом в произвольный момент времени t он преобразуется в прямоугольный параллелепипед, ребра которого остаются направленными вдоль $\vec{a}_i$ и удлиняются (укорачиваются) в λ_i раз.

Фаза "вращения" ребер материального элемента описывается согласно (35) следующим выражением:

$$d\vec{x}_i = d\vec{x}_{u_i} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}}(t) = d\vec{\mathrm{x}}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} . \qquad (37)$$

При этом ребра параллелепипеда, полученного в результате "чистой" деформации, поворачиваются как жесткое целое. На основании выражений (36) и (37) триэдр главных осей $\overrightarrow{a_i}$ в результате поворота занимает положение $\vec{b}$, причем

$$\vec{b} = \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}} = \frac{d\vec{x}_i}{\left|d\vec{x}_i\right|} . \qquad (38)$$

Так как в процессе вращения длины волокон не изменяются, то

$$\left|d\vec{x}_i\right| = \left|d\vec{x}_{u_i}\right| = \lambda_i d\mathrm{x}_i , \ i \neq \Sigma . \qquad (39)$$

Подставляя (36) в (37), получим

$$d\vec{x}_i = \lambda_i d\mathrm{x}_i \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}} = d\mathrm{x}_i \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} . \qquad (40)$$

Из выражений (38)-(40) находим положения векторов повернутого базиса в следующем виде:

$$\vec{b}_i = \lambda_i^{-1} \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} , \ \ i \neq \Sigma \ . \qquad (41)$$

Компоненты тензора поворота в базисе главных осей, согласно (38) и (41), определяются по формулам

$$\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = R_{ij}^{(a)} = \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}} \cdot \vec{a}_j = \lambda_i^{-1} \vec{a}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} \cdot \vec{a}_j . \qquad (42)$$

Тот же самый результат можно получить, определяя тензор поворота непосредственно из разложения (35). Действительно,

$$\underset{\sim}{\mathbf{R}} = \underset{\sim}{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}}, \qquad \underset{\sim}{\mathbf{U}}^{-1} = \lambda_1^{-1}\vec{a}_1\vec{a}_1 + \lambda_2^{-1}\vec{a}_2\vec{a}_2 + \lambda_3^{-1}\vec{a}_3\vec{a}_3,$$

откуда следуют формулы (42). Из формул (42) следует, что компоненты R_{ij} тензора поворота совпадают с косинусами углов между векторами $\vec{b}_i$ и $\vec{a}_i$. Так как в нашем случае $\vec{b}_3 = \vec{a}_3\vec{e}_3$, то вращение главных осей происходит вокруг оси $\vec{e}_3$ на угол β, так что $\cos\varphi = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_2 = R_{11}^{(a)} = R_{22}^{(a)}$. Смешанные компоненты тензора $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ выражаются через β по следующим формулам:

$$R_{12} = \vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 = \sin\beta \ ; \ R_{21} = \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_1 = -\sin\beta.$$

Для нахождения угла поворота главных осей запишем диадное представление аффинора деформации в пространственном базисе.

На основании (14) получим:

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} = \vec{e}_1\vec{e}_1 + \varphi_1 A_{,2}\vec{e}_2\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + \varphi_3\vec{e}_3\vec{e}_3. \qquad (43)$$

Полагая в (42) i = j = 1 и определяя скалярные произведения $\vec{a}_i \cdot \vec{e}_j$ из (29) и (30), получаем:

$$\cos\beta = \lambda_1^{-1}\vec{a}_1 \cdot \underset{\sim}{\mathbf{\Phi}} \cdot \vec{a}_1 = \lambda_1^{-1}(\cos^2\alpha_1 + \varphi_1 A_{,2}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + \varphi_2\sin^2\alpha_1). \qquad (44)$$

Задача 6.

Определить линии тока и траектории.

Решение.

Найдем линии тока, соответствующие распределению скоростей в форме (8). Как известно, линии тока в фиксированный момент времени $t = t_k$ определяются как кривые, касательные к которым совпадают с направлением вектора скорости в данной точке пространственной системы координат. Из определения следует, что элементарный вектор $d\vec{x}$, касательный к линии тока, удовлетворяет следующему условию:

$$d\vec{x} = d\lambda\,\vec{V}(x_i, t_k), \qquad (45)$$

где λ - параметр.

Запишем систему (45) для поля скоростей (8):

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \varphi'_{1k} A(x_2 / \varphi_{2k}),$$

$$\frac{dx_2}{d\lambda} = \frac{\varphi'_{2k}}{\varphi_{2k}} x_2, \qquad (46)$$

$$\frac{dx_3}{d\lambda} = \frac{\varphi'_{3k}}{\varphi} x_3.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (46) относительно неизвестных функций $x_i(\lambda)$ интегрируется с учетом начальных условий, определяющих координаты точек $x_i^{(0)}$, через которую проходит линия тока. Начальные условия имеют следующий вид:

$$x_i \,|_{\lambda=0} = x_i^{(0)}. \qquad (47)$$

Интегрируя второе и третье уравнения системы (46) с учетом (47), получим:

$$x_2 = x_2^{(0)} \exp\left(\frac{\varphi'_{2k}}{\varphi_{2\mathrm{k}}} \lambda\right), \qquad (48)$$

$$x_3 = x_3^{(0)} \exp\left(\frac{\varphi'_{3k}}{\varphi_{3\mathrm{k}}} \lambda\right).$$

Подставляя в первое из уравнений системы (46) функцию $x_2(\lambda)$ из (48) и интегрируя по λ, найдем закон изменения $x_1(\lambda)$:

$$x_1(\lambda) = \varphi'_{1k} \int_0^1 A\left(\frac{1}{\varphi_{2k}} x_2(\lambda)\right) d\lambda + x_1^{(0)}. \qquad (49)$$

Уравнения линий тока в параметрическом виде (48), (49) не позволяют получить наглядную информацию об их геометрии. Исключим параметр λ из системы (46) и представим ее в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{\varphi'_{1k} A(x_2 / \varphi_{2k})} = \frac{\varphi_{2k}}{\varphi'_{2k} x_2} dx_2 = \frac{\varphi'_{3k}}{\varphi x_3} dx_3. \qquad (50)$$

Систему (50) можно трактовать как уравнение линии от пересечения двух цилиндрических поверхностей. В частности, первое равенство соответствует цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси

Ox_3. Уравнение линии от пересечения данной поверхности с плоскостью, перпендикулярной образующей (Ox_1x_2) имеет вид

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\varphi_{2k}\varphi'_{1k}}{\varphi'_{2k}} \frac{A\left(x_2/\varphi_{2k}\right)}{x_2} dx_2 .$$

Интегрируя данное уравнение, получим уравнение поверхности в явном виде, которое с учетом начального условия (47) представим в форме

$$x_1 = x_1(x_2) + x_1^{(0)} - x_1(x_2^{(0)}), \qquad (51)$$

где $x_1(x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\varphi_{2k}\varphi'_{1k}}{\varphi'_{2k}} \frac{A\left(x_2/\varphi_{2k}\right)}{x_2} dx_2$.

Из второго равенства системы (50) находим поверхность с образующей параллельной оси Ox_1. В результате интегрирования, с учетом начальных условий, получим

$$x_2 = (x_2^{(0)} / x_3^{(0)\frac{m_3}{m_2}}) x_3^{\frac{m_3}{m_2}}, \qquad (52)$$

где $m_2 = \frac{\varphi_{2k}}{\varphi'_{2k}}$, $m_3 = \frac{\varphi_{3k}}{\varphi'_{3k}}$.

Линии от пересечения цилиндрических поверхностей (51) и (52) являются линиями тока, проходящими через заданные точки. Уравнения траекторий как линий от пересечения двух поверхностей можно определить, исключив время из закона движения (1).

Теория напряжений

В декартовом базисе задано однородное поле тензора напряжений $\underset{\sim}{\mathbf{S}}$:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Задача 1.

Определить вектор напряжения и главный вектор нагрузки, действующий на материальную площадку в виде треугольника, координаты вершин которого в эйлеровой системе координат (a,0,0), (0, b,0), (0,0, c).

Полученные главный вектор нагрузки и вектор напряжения, действующие на данную площадку, показать на рисунке.

Решение.

Главный вектор нагрузки материального объекта определяется как сумма произведений всех векторов напряжений на различных площадках, соответствующих различным граням рассматриваемого объекта на площади этих граней. Так как рассматриваемый объект есть материальная площадка, то найти главный вектор нагрузки означает найти произведение вектора напряжений на этой площадке на площадь этой площадки.

Для нахождения вектора напряжения, воспользуемся выражением, устанавливаемым связь между тензором напряжений и вектором напряжения на произвольной площадке. Площадка соответствует треугольнику с заданными координатами вершин. Таким образом, вектор напряжения $p_i^{(\vec{n})}$:

$$\vec{p}^{(\vec{n})} = \underset{\sim}{\mathbf{S}} \cdot \vec{n} \quad \text{или} \quad p_i^{(\vec{n})} = S_{ij} \cdot n_j, \qquad (53)$$

где компоненты вектора $\vec{n} = n_j \vec{e}_j$ определяются из следующих условий:

- вектор $\vec{n}$ есть внешняя нормаль к площадке, определяемой треугольником с заданными координатами вершин;
- вектор $\vec{n}$ есть единичный вектор.

Определим вектор $\vec{n}$ как нормальный к плоскости, в которой расположен данный треугольник. В рассматриваемом случае для нахождения уравнения плоскости удобно использовать уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1.$$

Коэффициенты при x_1, x_2 и x_3 задают координаты вектора нормали $\vec{N}$ к плоскости. Вектор единичной нормали имеет вид

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \left(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \right)$$

Главный вектор нагрузки – вектор с началом в точке, соответствующей геометрическому центру треугольника, длиной равной произведению модуля вектора напряжений на площадь рассматриваемого треугольника и совпадающий с вектором напряжений по направлению:

$$\vec{P}^{(\vec{n})} = \vec{p}^{(\vec{n})} \cdot \Delta\Sigma_n,$$

где $\Delta\Sigma_n$ – площадь рассматриваемого треугольника,

$$\Delta\Sigma_n = \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}\ .$$

В результате: $P_i^{(\vec{n})} = \sqrt{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2} \cdot p_i^{(\vec{n})}$.

Определим компоненты векторов напряжения, действующих на другие грани тетраэдра. Нормальные компоненты находим согласно выражения (53):

$$\vec{p}_i^{(\vec{n})} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}} = -\vec{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}}.$$

Касательные составляющие определяются по формуле

$$p_{ij}^{(i)} = -\vec{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}} \cdot \vec{e}_j\ .$$

При построении учитываем, что вектор $\vec{p}_{ij}^{(i)}$ действует в плоскости грани i вдоль j оси. Площадка, нормальный вектор $\vec{n}$, вектор напряжения $\vec{p}^{(\vec{n})}$ на ней, а также составляющие векторов напряжений, действующие на другие площадки тетраэдра, изображены на рис. 1.

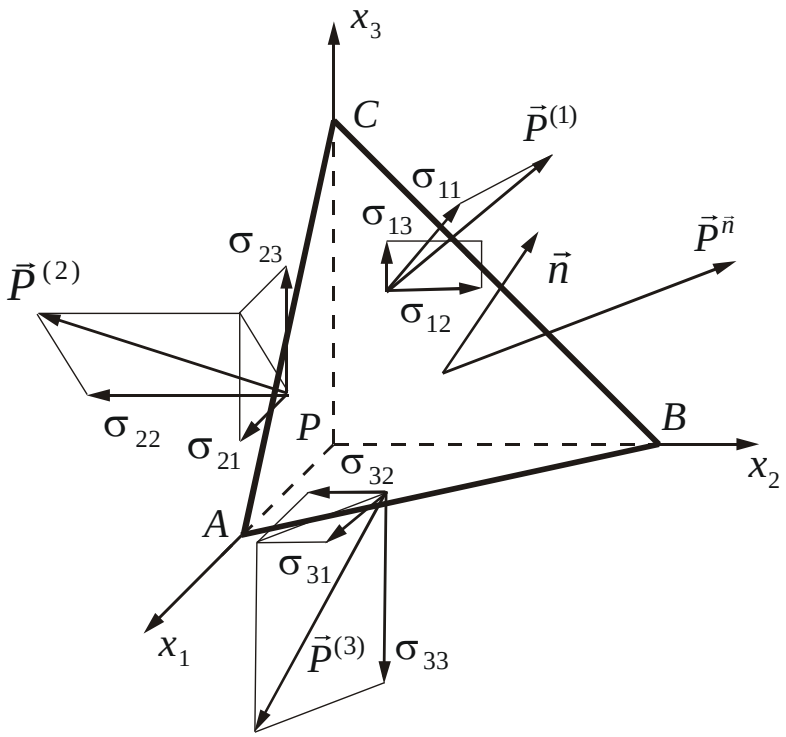

Рис. 1. Вектор напряжения $\vec{p}^{(\vec{n})}$ и составляющие векторов напряжений, действующие на площадках тетраэдра

Задача 2.

Найти главные значения и ориентацию главных осей тензора напряжений относительно декартова базиса. Записать диадное представление тензора напряжений в главных осях. Показать на рисунке главные векторы нагрузки, действующие по граням параллелепипеда, ребра которого направлены по главным осям и имеют размеры *a, b, c*.

Решение.

Найдем в общем виде выражения для определения главных значений и главных направлений тензора напряжений. Собственное значение $\vec{\sigma}_i$ и собственное направление $\vec{a}_i$ удовлетворяют уравнению

$$\vec{a} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}} - \vec{a}\sigma \underset{\sim}{\mathbf{E}} = 0 \qquad (54)$$

или в проекциях на оси отсчетной декартовой системы координат

$$\begin{aligned} &(\sigma_{11} - \sigma)a_1 + \sigma_{12}a_2 + \sigma_{13}a_3 = 0, \\ &\sigma_{12}a_1 + (\sigma_{22} - \sigma)a_2 + \sigma_{23}a_3 = 0, \\ &\sigma_{13}a_1 + \sigma_{23}a_2 + (\sigma_{33} - \sigma)a_3 = 0. \end{aligned} \qquad (55)$$

Из (55) следует характеристическое уравнение в виде равенства нулю определителя.

Для нахождения главных значений тензора напряжений решим характеристическое уравнение для матрицы, соответствующей заданному тензору:

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \qquad (56)$$

Раскрывая определитель, приходим к алгебраическому уравнению третьего порядка относительно переменной σ:

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0,$$

где $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma_0$ – первый инвариант тензора напряжений,

$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$ – второй инвариант тензора напряжений,

$I_3 = \det\sigma_{ij}$ – третий инвариант тензора напряжений.

Известно, что характеристическое уравнение симметричного оператора имеет действительные корни, количество которых равно степени уравнения.

Таким образом, в общем случае тензор напряжений имеет три главных значения: σ_1, σ_2, σ_3. Первый индекс присваивается максимальному, а третий – минимальному собственным значениям $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Каждому из трех собственных значений (после его подстановки в систему (55)) ставится в соответствие собственный вектор. Так как $\vec{a}$ единичный вектор, то для определения его ориентации достаточно определить отношение его декартовых координат, например $\frac{a_1}{a_3}$ и $\frac{a_2}{a_3}$, если $a_3 \neq 0$. Для решения данной задачи можно использовать любые два линейно независимых уравнения из системы трех линейно зависимых уравнений (55). В результате получим три собственных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, которые в случае различных собственных значений линейно независимы и ортогональны.

Диадное представление тензора напряжений в базисе главных осей получает следующий вид:

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}} = \sigma_1 \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \sigma_2 \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \sigma_3 \vec{a}_3 \vec{a}_3 \ . \tag{57}$$

Определим главные векторы нагрузки, действующие по граням параллелепипеда, ребра которого направлены по главным осям и имеют размеры *a, b, c*. Нормаль к грани параллелепипеда есть $\vec{n}_i = \pm \vec{a}_i$. Площади граней представляют произведения длин соответствующих ребер. Например, для грани с нормалью $\vec{n}_1 = -\vec{a}_1$ площадь грани $\Sigma_{\vec{n}} = bc$.

Тогда главные векторы нагрузки, действующие на этой грани

$$\vec{P}^{(\vec{n})} = -\vec{a}_1 \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}} bc.$$

Аналогично определяются главные векторы нагрузки, действующие по другим граням параллелепипеда. Главные векторы нагрузки, действующие по граням параллелепипеда, показаны на рис. 2.

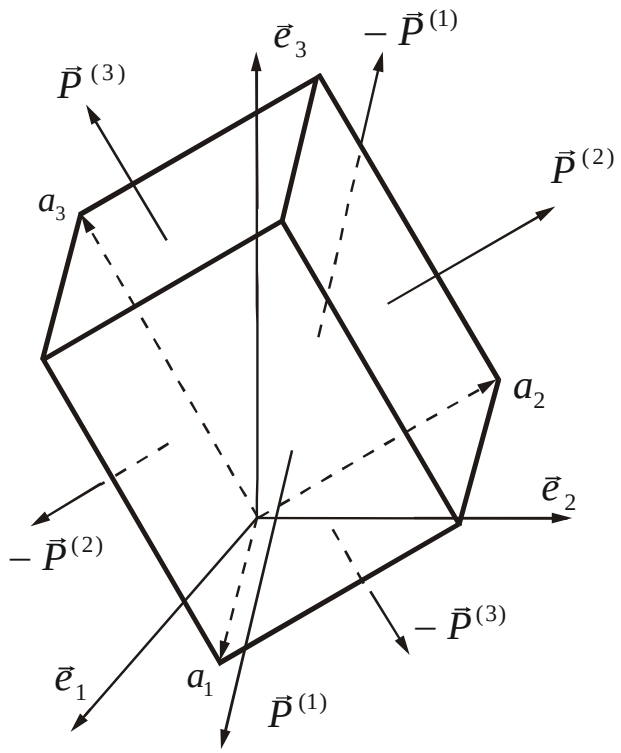

Рис. 2. Главные векторы нагрузки, действующие по граням параллелепипеда

Задача 3.

Построить вектор напряжений на октаэдрической площадке, найти и показать его тангенциальную и нормальную составляющие. Определить интенсивность напряжения и угол вида напряженного состояния. Показать на рисунке.

Решение.

Для нахождения вектора напряжения воспользуемся выражением (53), устанавливаемым связь между тензором напряжений и вектором напряжения на произвольной площадке. Октаэдрическими называют материальные площадки, равно наклоненные к главным осям, при этом единичные нормали к таким площадкам определяют следующим выражением:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\pm\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 \pm \vec{a}_3)\,. \qquad (58)$$

Таким образом, вектор напряжения $\vec{p}^{(\vec{n})}$ на октаэдрической площадке:

$$\vec{p}^{(\vec{n})} = \underset{\sim}{\mathbf{S}} \cdot \vec{n} \quad \text{или} \quad p_i^{(\vec{n})} = \sigma_{ij} \cdot n_j\,.$$

Представим тензор деформации в виде

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}} = \sigma_0 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{S}}\,, \qquad (59)$$

где $\tilde{\mathbf{S}}$ – девиатор напряжений,

$\sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)$ – среднее гидростатическое напряжение.

Таким образом, учитывая (58) и (59), $p_i^{(\vec{n})}$ примет вид

$$\vec{p}^{(\vec{n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)\cdot\left(\sigma_0 \underset{\sim}{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{S}}\right).$$

Далее имеем:

$$\vec{p}^{(\vec{n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)\cdot\tilde{\mathbf{S}}. \qquad (60)$$

Первое слагаемое в (60) есть нормальная составляющая вектора напряжений на октаэдрической площадке $\vec{p}_n^{(\vec{n})}$, тогда второе слагаемое – касательная составляющая – $\vec{\tau}$.

Разложим девиатор по базису главных осей:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\sigma}_1 \vec{a}_1\vec{a}_1 + \tilde{\sigma}_2 \vec{a}_2\vec{a}_2 + \tilde{\sigma}_3 \vec{a}_3\vec{a}_3,$$

где $\tilde{\sigma}_i$ – главные значения девиатора.

Главные значения девиатора найдем, используя главные значения тензора напряжений, учитывая, что

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i - \sigma.$$

Главные оси тензора напряжений и девиатора, получающегося при разложении тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие, совпадают.

Найдем касательную составляющую $\vec{\tau}$ напряжения, действующего на октаэдрической площадке: $\vec{\tau} = \vec{n}\cdot\tilde{\mathbf{S}}$,

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right)\cdot\left(\tilde{\sigma}_1 \vec{a}_1\vec{a}_1 + \tilde{\sigma}_2 \vec{a}_2\vec{a}_2 + \tilde{\sigma}_3 \vec{a}_3\vec{a}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tilde{\sigma}_1 \vec{a}_1 + \tilde{\sigma}_2 \vec{a}_2 + \tilde{\sigma}_3 \vec{a}_3\right).$$

Покажем, что векторы $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ ортогональны, для чего рассмотрим их скалярное произведение и учтем, что первый инвариант девиатора равен нулю:

$$\vec{n}\cdot\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tilde{\sigma}_1 \vec{a}_1 + \tilde{\sigma}_2 \vec{a}_2 + \tilde{\sigma}_3 \vec{a}_3\right) = \frac{1}{3}\left(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3\right) = 0.$$

На рис. 3 показаны вектор напряжения, действующий на октаэдрической площадке.

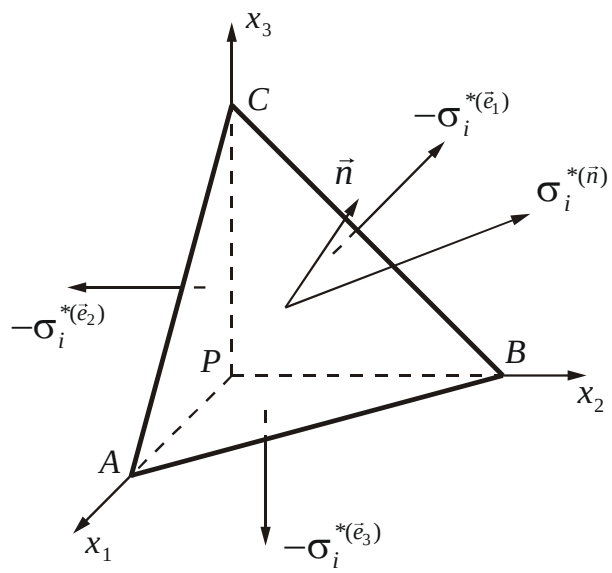

Рис. 3. Вектор напряжения, действующий на октаэдрической площадке

Определим интенсивность напряжения: $\tau^2 = \tilde{\sigma}_1{}^2 + \tilde{\sigma}_2{}^2 + \tilde{\sigma}_3{}^2$.

Определим угол вида или фазу γ напряженного состояния:

$$\cos 3\gamma = \frac{3\sqrt{6}\det\left(\tilde{\sigma}_{ij}\right)}{\tau^3},$$

где $\det\left(\tilde{\sigma}_{ij}\right) = I_3 = \tilde{\sigma}_1 \cdot \tilde{\sigma}_2 \cdot \tilde{\sigma}_3$ – третий инвариант девиатора.

Угол вида напряженного состояния имеет область определения $0 \le \gamma \le \dfrac{2\pi}{3}$.

Угол вида, тангенциальная и нормальная составляющие вектора напряжения показаны на рис. 10.2.

Задача 1

Относительно совмещенных материальных осей X_i и пространственных осей x_i задано поле перемещений сплошной среды

$x_1 = \mathrm{X}_1$, $x_2 = \mathrm{X}_2 + A\mathrm{X}_3$, $x_3 = \mathrm{X}_3 + A\mathrm{X}_2$, где A – константа. Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме (в лагранжевых и эйлеровых переменных).

Задача 2

Для поля перемещений $x_1 = \mathrm{X}_1$, $x_2 = \mathrm{X}_2 + A\mathrm{X}_3$, $x_3 = \mathrm{X}_3 + A\mathrm{X}_2$, где A – константа, определить смещенное положение материальных частиц, которые первоначально составляли:

- круг с границей $\mathrm{X}_2^2 + \mathrm{X}_3^2 = 1/\left(1 - A^2\right)$ в плоскости $\mathrm{X}_1 = 0$;
- бесконечно малый куб, ребра которого лежат на осях координат и имеют длину $d\mathrm{X}_i = d\mathrm{X}$.

Нарисовать смещенные конфигурации, если $A = 1/2$.

Задача 3
Относительно совмещенных материальных и пространственных осей задан вектор перемещения $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$. Определить смещенное положение частицы, первоначально находившейся в точке (1,0,2).

Задача 4
Деформация задана в лагранжевой форме:
$x_1 = X_1 + X_3\left(e^2 - 1\right),\ \ x_2 = X_2 + X_3\left(e^2 - e^{-2}\right),\ x_3 = e^2X_3$, где e – константа. Показать, что аффинор отличен от нуля и найти эйлеровы уравнения, описывающие эту деформацию.

Задача 5
Некоторый объем сплошной среды совершает перемещение
$\vec{u} = \left(3X_2 - 4X_3\right)\vec{e}_1 + \left(2X_1 - X_3\right)\vec{e}_2 + \left(X_2 - X_1\right)\vec{e}_3$.
Определить смещенное положение вектора, соединяющего частицы A (1, 0, 3) и B (3, 6, 6), считая, что материальные и пространственные оси совпадают.

Задача 6
Для поля перемещений $\vec{u} = \left(3X_2 - 4X_3\right)\vec{e}_1 + \left(2X_1 - X_3\right)\vec{e}_2 + \left(X_2 - X_1\right)\vec{e}_3$ определить смещенное положение радиуса-вектора частицы C (2, 6, 3), который параллелен вектору, соединяющему частицы A (1, 0, 3) и B (3, 6, 6). Показать, что эти два вектора остаются параллельными и после деформации.

Задача 7
Некоторый объем сплошной среды испытывает деформацию $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа,. Вычислить меру деформации Коши и использовать ее для определения тензора деформации Коши-Грина.

Задача 8
В случае поля перемещений задачи 7 вычислить квадрат длины сторон OA и OB и диагонали OC малого прямоугольника, изображенного на рисунке, после деформации. Вычислить изменение квадрата длины линейного элемента и сверить результат с полученным по формуле $(dx)^2 - (dX)^2 = d\vec{X} \cdot 2\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot d\vec{X}$.

Задача 9
Дано поле перемещений $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа. Вычислить тензор линейной деформации Коши-Грина.

Задача 10
Для поля перемещений $\vec{u} = \left(x_1 - x_3\right)^2\vec{e}_1 + \left(x_2 - x_3\right)^2\vec{e}_2 + x_1x_2\vec{e}_3$ при ограничениях, принятых в теории малых деформаций, определить тензор линейной деформации, тензор линейного поворота и вектор поворота в точке P с координатами (0, 2, -1).

Задача 11
Для поля перемещений $\vec{u} = \left(x_1 - x_3\right)^2\vec{e}_1 + \left(x_2 - x_3\right)^2\vec{e}_2 + x_1x_2\vec{e}_3$ найти изменение длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение), в направлении $\vec{v} = \left(8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right)/9$ в точке P с координатами (0, 2, -1).