

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Математические модели в экономике»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Кочетыгов А.А., профессор каф. ПМИИ, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Целью изучения дисциплины «Математические модели в экономике» является овладение методологией экономико–математического моделирования и наиболее типичными методами и моделями при решении задач управления организационными системами, экономическими объектами, проведении научных исследований.

Задачами освоения дисциплины являются выработка умений:

- изучение основных классов и разновидностей экономико–математических моделей;
- изучение основных классов и разновидностей методов решения экономико–математических задач;
- изучение способов построения экономико–математических моделей и разработки методов решения, основанных на этих моделях.

На практических занятиях по курсу «Математические модели в экономике» обсуждаются вопросы, закрепляющие и расширяющие материал, изложенный на лекциях. Рассматриваются некоторые расчетные задачи полезных для практики моделей.

Решение типовых задач курса базируется на учебных пособиях:

1. Кочетыгов, А.А. Математические модели в экономике: учеб. пособие / А.А. Кочетыгов; ТулГУ. – Тула: Изд–во ТулГУ, 2017. – 335 с.

2. Кочетыгов, А.А. Моделирование экономических систем: учеб. пособие / А.А. Кочетыгов; ТулГУ. – Тула: Изд–во ТулГУ, 2012. – 292 с.

В эти пособия приведены решения практически всех основных изучаемых вопросов. В конце каждой главы предлагаются индивидуальные задачи для каждого студента.

Дополнительно в качестве самостоятельных (аттестационных) предлагаются типовые задания с индивидуальными исходными данными.

Необходимо квалифицированно отвечать на контрольные вопросы каждой главы (темы).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 1

1. В чём суть и преимущества моделирования как метода исследования и познания?

2. Что такое математическая модель?

3. В чём отличие статических моделей от динамических, детерминированных моделей от стохастических?

4. Назовите этапы построения экономико–математической модели. Приведите пример построения и уточнения модели.

5. В чём проявляется системный подход к разработке и исследованию экономико–математических моделей?

6. Приведите классификацию и охарактеризуйте основные типы математических моделей.

7. Охарактеризуйте основные процессы специального типа, используемые в предпосылках моделей экономики.
8. Что такое производственная функция?
9. Охарактеризуйте основные виды и особенности производственных функций.
10. Каковы особенности имитационного моделирования?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 2

1. В чём заключаются суть и особенности балансовых моделей?
2. Что такое коэффициенты прямых, косвенных и полных затрат?
3. Как происходит укрупнение балансовой таблицы?
4. Укажите особенности динамических балансовых моделей.
5. Приведите примеры использования балансовых моделей.

Задание 2.1. Предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. Известны расходные коэффициенты (прямые затраты) единиц продукции i -го цеха, используемые как промежуточный продукт для выпуска единицы продукции j -го цеха, а также количество единиц y_i продукции i -го цеха, предназначенных для реализации (конечный продукт). Заданы также расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующего цеха, трудоёмкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1 чел.-час. Определить:

- 1) коэффициенты полных затрат;
- 2) валовой выпуск (план) для каждого цеха;
- 3) производственную программу цехов;
- 4) коэффициенты косвенных затрат.
- 5) суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы;
- 6) коэффициенты полных затрат сырья топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;
- 7) расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;
- 8) производственные затраты по цехам и на всю программу предприятия;
- 9) производственные затраты на единицу конечной продукции.

Варианты заданий приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Варианты заданий				
Номер варианта	Матрица коэффициентов прямых затрат	Матрица прямых затрат факторов	Конечный продукт	Стоимость единицы фактора

1	$\begin{pmatrix} 0,23 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,21 & 0,11 \\ 0,09 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0 \\ 1,7 & 1,1 & 2,3 \\ 15 & 20 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 150 \\ 230 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 6 \\ 2,4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0,19 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,20 & 0,26 \\ 0 & 0,29 & 0,16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9 & 1,6 & 0,3 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,1 \\ 14 & 23 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 130 \\ 200 \\ 110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 3,1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0,13 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,19 & 0,23 \\ 0,11 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 & 1,1 \\ 0,3 & 0 & 1,9 \\ 11 & 19 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 7 \\ 2,9 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0,13 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,19 & 0,23 \\ 0,11 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7 & 2,5 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 1,5 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 19 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 310 \\ 170 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 28 \\ 13 \\ 9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0,11 \\ 0,36 & 0,15 & 0,28 \\ 0,15 & 0,21 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 & 2,1 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 1,5 \\ 10 & 23 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 95 \\ 135 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ 1,9 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0,11 & 0,21 & 0,14 \\ 0,23 & 0 & 0,26 \\ 0,09 & 0,11 & 0,22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5 & 1,4 & 1,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 1,5 \\ 20 & 18 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 345 \\ 390 \\ 510 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \\ 2,3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0,23 & 0,13 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,11 \\ 0,09 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,33 & 0 \\ 1,7 & 1,1 & 2,3 \\ 25 & 20 & 38 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 450 \\ 230 \\ 170 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 27 \\ 32 \\ 61 \\ 24 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0,09 & 0,19 & 0 \\ 0,14 & 0,20 & 0,06 \\ 0 & 0,22 & 0,16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 & 1,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,4 \\ 11 & 20 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 2,1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0,09 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,11 & 0,27 \\ 0,11 & 0,03 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2 & 2,8 & 0,5 \\ 0,7 & 0,4 & 1,1 \\ 0,3 & 0 & 1,9 \\ 9 & 17 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 380 \\ 220 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 29 \end{pmatrix}$

10	$\begin{pmatrix} 0,16 & 0,14 & 0,12 \\ 0 & 0,11 & 0,03 \\ 0,11 & 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 & 2,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 1,6 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 2,2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 0,18 & 0 & 0,09 \\ 0,05 & 0,11 & 0,28 \\ 0,15 & 0,13 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 0,5 \\ 11 & 21 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 \\ 110 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \\ 2,9 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 0,06 & 0,11 & 0,12 \\ 0,20 & 0 & 0,16 \\ 0,09 & 0,11 & 0,27 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 & 1,2 & 1,1 \\ 0,9 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 1,5 \\ 22 & 24 & 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 85 \\ 70 \\ 100 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \\ 2,3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0,21 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,25 & 0,20 \\ 0,11 & 0 & 0,16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,7 & 0 \\ 1,8 & 1,1 & 2,5 \\ 17 & 21 & 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 130 \\ 150 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 26 \\ 31 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 0,20 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,26 & 0,03 \\ 0 & 0,29 & 0,06 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5 & 1,4 & 1,3 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,6 \\ 12 & 21 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 130 \\ 160 \\ 170 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \\ 2,1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 0,16 & 0,12 & 0,13 \\ 0 & 0,18 & 0,03 \\ 0,11 & 0,25 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 & 2,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,2 & 1,1 \\ 1,3 & 0 & 1,9 \\ 10 & 19 & 23 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 120 \\ 130 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 7 \\ 2,5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 0,23 & 0,11 & 0,12 \\ 0 & 0,09 & 0,21 \\ 0,15 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 & 2,2 & 0,9 \\ 0,3 & 0,5 & 1,1 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 11 & 21 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 120 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 8 \\ 2,3 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0,21 \\ 0,08 & 0,12 & 0,18 \\ 0,11 & 0,29 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 & 2,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 1,1 \\ 1,2 & 0,2 & 1,5 \\ 12 & 13 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 275 \\ 295 \\ 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 27 \\ 19 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 0,31 & 0,20 & 0,18 \\ 0,23 & 0 & 0,26 \\ 0,09 & 0,12 & 0,22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & 1,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,7 & 0,6 & 1,5 \\ 21 & 18 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 8 \\ 2,3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 0,21 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,25 & 0,20 \\ 0,11 & 0 & 0,16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 & 2,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 1,6 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 130 \\ 200 \\ 110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$

20	$\begin{pmatrix} 0,20 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,26 & 0,06 \\ 0 & 0,29 & 0,36 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 0,5 \\ 11 & 21 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ 1,9 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 0,09 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,11 & 0,27 \\ 0,11 & 0,03 & 0,12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,6 & 2,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 1,1 \\ 1,2 & 0,2 & 1,5 \\ 12 & 13 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 275 \\ 295 \\ 180 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 29 \end{pmatrix}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 3

1. Поясните различие задач экономической статики и динамики.
2. Охарактеризуйте различие содержания решаемых задач, математического аппарата и получаемых результатов для экономических моделей с дискретным и непрерывным временем.
3. Сформулируйте понятие экономического равновесия. Чем устойчивое равновесие отличается от неустойчивого?
4. Как связан темп прироста выпуска с нормой накопления?
5. Поясните особенности использования модели Вальраса.
6. Как выбрать норму накопления при заданном темпе прироста потребления в макромоделе роста?
7. В чём состоит проблема выбора наилучшего темпа роста потребления в модели Харрода–Домара?
8. Чем предпосылки модели Солоу отличаются от предпосылок модели Харрода–Домара?
9. Какие общие принципы заложены в моделях Солоу и Харрода–Домара?

Задание 3.1. Дана модель Солоу с производственной функцией

$$Y = K^b (E \cdot L)^{1-b},$$

где Y – выпуск, K – капитал, E – эффективность труда, L – труд, b – параметр модели.

Доля дохода капитала в общем доходе составляет b , темп прироста численности населения равен $n\%$ в год, темп прироста параметра эффективности труда составляет $g\%$ в год, а норма амортизации составляет $\delta\%$ в год (табл. 3.5).

1. Определить норму сбережения, потребление на единицу эффективного труда и капиталовооружённость эффективного труда, соответствующие «золотому правилу».

2. Считаем, что экономика изначально находится на траектории сбалансированного роста, затем норма сбережений изменилась до значения

α_H %. Определить потребление на единицу эффективного труда до увеличения нормы сбережений, сразу после увеличения нормы сбережений и в долгосрочном периоде.

Таблица 3.5

Исходные данные для анализа модели Солоу

№ варианта	Параметр модели b	Темп прироста численности населения $n\%$	Темп прироста эффективности труда $g\%$	Норма амортизации δ %	Новая норма сбережений α_H %
1	0,35	1,5	3,6	4,8	20
2	0,32	1,3	2,8	6,5	34
3	0,36	2,4	2,1	3,4	21
4	0,41	1,6	1,6	2,8	24
5	0,42	2,4	2,8	4,7	34
6	0,26	0,8	2,4	2,9	38
7	0,35	1,3	1,6	4,6	28
8	0,41	1,4	2,8	2,8	34
9	0,36	1,7	2,1	7,1	41
10	0,23	2,4	1,9	4,6	24
11	0,42	1,6	2,8	2,8	34
12	0,26	2,8	2,4	2,7	25
13	0,29	1,5	2,6	4,8	26
14	0,35	1,3	2,8	2,5	34
15	0,41	2,4	2,1	3,4	41
16	0,36	1,6	3,3	2,8	24
17	0,40	2,4	2,8	5,7	34
18	0,42	2,8	2,4	2,9	38
19	0,26	1,3	1,6	5,6	40
20	0,35	1,4	2,8	2,8	34
21	0,46	1,7	2,1	6,1	41
22	0,36	2,4	1,6	4,6	24
23	0,43	1,6	2,8	2,8	34
24	0,42	2,8	2,4	4,7	25
25	0,26	1,5	3,1	4,8	18

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 4

1. Поясните термин «маржинальные величины».
2. Что такое маржинальный анализ?
3. Поясните основные правила продолжения деятельности фирмы на основе маржинальных величин.
4. Поясните методику использования маржинального анализа.
5. Приведите примеры использования предельных величин в экономике.

Задание 4.1. Фирма производит продукцию и реализует её по цене P долл. за одну единицу. Постоянные издержки производства составляют TFC долл., а переменные изменяются в зависимости от объёма производства известным образом (табл. 4.5). Требуется проанализировать деятельность фирмы с использованием маржинального анализа. Необходимо:

1. Построить таблицу и графики маржинальных издержек, средних валовых и средних переменных издержек, маржинального дохода.
2. По построенным графикам отыскать оптимальный объём производства.
3. Определить точку банкротства фирмы и предельную точку производства.
4. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 4.5

Варианты задания

№ вар.	Цена P	TFC	Переменные издержки в зависимости от объёма производства						
			1	2	3	4	5	6	7
1	72	56	120	165	190	225	290	368	452
2	84	73	205	304	365	435	564	773	989
3	61	66	117	145	180	218	270	368	456
4	36	24	55	84	98	115	184	273	377
5	70	56	115	162	192	230	291	386	479
6	79	75	205	305	471	535	664	773	880
7	61	66	102	145	182	220	290	387	463
8	70	52	95	148	170	210	275	384	490
9	69	49	99	136	168	213	278	381	492
10	77	52	99	140	175	219	285	395	499
11	71	46	97	136	168	218	278	382	497
12	80	66	108	140	180	227	279	378	556
13	95	74	245	314	355	415	504	673	867
14	70	56	117	162	192	233	290	386	477
15	80	75	208	305	465	535	664	769	886
16	61	66	102	149	180	220	290	387	468
17	70	52	95	143	173	210	275	384	505

18	59	49	99	136	168	218	279	399	512
19	72	66	120	165	190	225	290	368	488
20	84	77	205	309	365	435	564	773	989
21	81	76	111	145	184	217	275	368	456
22	95	72	255	314	369	415	504	673	867
23	68	56	113	164	192	230	293	386	577
24	80	77	211	305	465	530	656	779	980
25	78	75	208	309	465	538	666	769	896

Задание 4.2. Общие издержки фирмы описываются функцией от объёма выпуска зависимостью $C(q)$. Известна функция спроса $D(P)$.

1. Определить предельные издержки фирмы, их минимальное значение и объём производства при минимальных предельных издержках.
2. Найти функцию предложения этой конкурентной фирмы $S(P)$.
3. Найти оптимальный объём производства и соответствующую цену для фирмы–монополиста при заданной функции спроса.
4. Определить коэффициент превышения оптимальной цены фирмы–монополиста относительно соответствующих издержек.

Таблица 4.6

Таблица исходных данных

№	Валовые издержки фирмы $C(q)$	Функция спроса $D(P)$
1	$C(q) = 749q - 4,4q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 984 - 0,17P$
2	$C(q) = 693q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$	$D(P) = 840 - 0,12P$
3	$C(q) = 931q - 4,8q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 280 - 0,18P$
4	$C(q) = 760q - 3,6q^2 + 0,006q^3$	$D(P) = 1040 - 0,51P$
5	$C(q) = 1045q - 3,5q^2 + 0,004q^3$	$D(P) = 520 - 0,57P$
6	$C(q) = 724q - 4,4q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 816 - 0,15P$
7	$C(q) = 671q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$	$D(P) = 600 - 0,13P$
8	$C(q) = 889q - 4q^2 + 0,006q^3$	$D(P) = 240 - 0,11P$
9	$C(q) = 528q - 2,6q^2 + 0,0045q^3$	$D(P) = 1008 - 0,25P$
10	$C(q) = 1098q - 3,8q^2 + 0,0044q^3$	$D(P) = 624 - 13,2P$
11	$C(q) = 1410q - 4,1q^2 + 0,004q^3$	$D(P) = 1776 - 0,35P$
12	$C(q) = 1458q - 6,6q^2 + 0,0105q^3$	$D(P) = 840 - 0,16P$
13	$C(q) = 1121q - 5,4q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 820 - 0,36P$
14	$C(q) = 690q - 3,5q^2 + 0,006q^3$	$D(P) = 700 - 0,25P$

15	$C(q) = 467q - 2,3q^2 + 0,004q^3$	$D(P) = 336 - 0,96P$
16	$C(q) = 755q - 4,4q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 1728 - 0,27P$
17	$C(q) = 495q - 3,6q^2 + 0,0099q^3$	$D(P) = 580 - 0,65P$
18	$C(q) = 1026q - 5,2q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 1220 - 0,54P$
19	$C(q) = 741q - 4,4q^2 + 0,009q^3$	$D(P) = 1488 - 0,19P$
20	$C(q) = 710q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$	$D(P) = 700 - 0,25P$
21	$C(q) = 777q - 3,6q^2 + 0,006q^3$	$D(P) = 240 - 0,17P$
22	$C(q) = 544q - 2,6q^2 + 0,0045q^3$	$D(P) = 1104 - 0,21P$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 5

1. Охарактеризуйте этапы построения прогнозных моделей.
2. Как оценить точность прогнозных моделей?
3. Как оценить адекватность прогнозных моделей?
4. Как проверить на значимость коэффициенты модели?
5. Поясните особенности адаптивных методов прогнозирования.
6. Поясните суть метода наименьших квадратов.
7. Сравните разновидности адаптивных методов прогнозирования.
8. Как сравнить влияние различных факторов на результирующую переменную?
9. В чём заключаются задачи моделирования изучения спроса?
10. В чём заключаются особенности моделирования спроса на основе марковских процессов?
11. Поясните виды спроса и факторы влияния на них.
12. Приведите примеры использования однофакторных и многофакторных моделей спроса.

Задание 5.1. Фирма выпустила на рынок три конкурирующих (взаимозаменяемых) изделия. С целью определения спроса на эти изделия произведён опрос покупателей. Оказалось, что из n человек N_1 покупает первое изделие, N_2 – второе, N_3 – третье ($n = N_1 + N_2 + N_3$).

Повторный опрос этих же покупателей через неделю показал, что из N_1 человек, покупавших первое изделие M_1 продолжают его покупать, M_2 стали покупать второе изделие, остальные – третье.

Из N_2 человек, покупавших второе изделие, продолжают его покупать K_2 человек, K_1 стали покупать первое изделие, остальные – третье.

Из N_3 человек, покупавших третье изделие, L_3 человек продолжают его покупать, L_1 и L_2 – стали покупать соответственно первое и второе (табл. 5.15). Определить, какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом: 1) через неделю; 2) через две недели; 3) через год.

Варианты значений параметров задачи приведены в табл. 5.15.

Таблица 5.15

Варианты значений параметров

№ вар.	N_1	N_2	N_3	M_1	M_2	K_1	K_2	L_1	L_2
1	80	8	12	65	8	5	2	6	4
2	60	10	15	35	25	4	5	5	8
3	50	40	10	20	30	10	15	4	5
4	40	70	90	10	30	15	45	40	20
5	30	80	190	10	15	30	40	10	15
6	50	20	30	20	25	8	10	4	6
7	60	30	110	50	6	8	15	20	30
8	70	20	60	35	15	4	13	15	25
9	80	45	180	70	4	16	20	40	60
10	90	20	60	80	6	7	11	10	20
11	120	100	40	70	30	15	80	15	5
12	150	50	20	100	35	3	40	7	8
13	130	70	100	90	25	7	60	15	40
14	140	85	75	75	45	10	70	20	30
15	160	40	100	105	35	8	30	35	5
16	170	200	130	100	40	40	150	30	40
17	180	400	120	95	45	80	230	25	60
18	200	40	160	110	60	4	32	65	70
19	80	70	50	30	20	40	25	14	16
20	30	40	130	25	2	10	20	20	100
21	35	80	15	30	3	16	50	4	9
22	70	50	80	40	10	10	32	20	50
23	150	40	70	105	25	14	20	40	20
24	40	200	160	25	5	40	120	40	100
25	170	150	180	140	10	110	32	20	50
26	72	20	60	35	15	4	13	15	25
27	80	47	180	70	4	16	20	40	60

Задание 5.2. По имеющемуся тренд–сезонному временному ряду x_t ($t = \overline{1, n}$) получить прогнозную мультипликативную модель Хольта–Уинтерса и выполнить прогноз ряда на один временной шаг. Необходимо:

1. Методом наименьших квадратов или графически по первым L значениям временного ряда оценить начальные значения параметров $\hat{a}_{1,0}, \hat{a}_{2,0}$.

2. Начальное значение коэффициентов сезонности получить делением первых L фактических значений ряда x_t на их оценки, вычисленные по линейной модели $\hat{x}_t = \hat{a}_{1,0} + \hat{a}_{2,0}t$; ($t = \overline{1, L}$).

3. Параметры сглаживания принять равными: $\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,4$.

4. По формулам мультипликативной модели Хольта–Уинтерса произвести расчёт параметров и значений показателя x_t ($t = \overline{1, n}$), начиная с x_1 .

5. Составить таблицу и графики динамики изменения параметров:

$$t, \hat{x}_t, \hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}, x_t, \hat{f}_t, \varepsilon_t = x_t - \hat{x}_t, \varepsilon_t^{omn} = \frac{|\varepsilon_t|}{|x_t|}, t = \overline{1, n}.$$

6. Вычислить ошибки расчётов: среднюю арифметическую, среднюю квадратическую, среднюю по модулю.

7. Сделать прогноз ряда на один шаг вперёд; т.е. получить значение x_{n+1} .

8. Составить ретропрогноз на последний цикл ряда.

9. Исследовать адекватность полученной модели.

10. Исходным данным дать физическое толкование и проанализировать полученные результаты.

Ниже приведены **варианты** значений экономических рядов.

Вариант № 1: 12,6; 24,1; 40,4; 12,8; 13,7; 24,7; 42,7; 12,6; 13,4; 25,2; 50,1; 15,2; 14,4; 27,3; 53,6; 15,7; 15,9; 29,4; 58,8; 16,4.

Вариант № 2: 28; 22; 20; 24; 27; 29; 27; 25; 30; 32; 33; 27; 26; 28; 32; 34; 29; 30; 33; 35; 36; 31; 30; 37; 38.

Вариант № 3: 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7.

Вариант № 4: 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7.

Вариант № 5: 62,03; 69,9; 78,11; 89,14; 99,29; 111,06; 114,89; 130,13; 144,04; 166,13; 176,97; 185,06; 195,42; 202,34; 207,92; 214,57; 242,96.

Вариант № 6: 7,9; 9,2; 10,2; 10,8; 9,9; 8,8; 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2.

Вариант № 7: 3; 3,8; 3,1; 3,2; 3,4; 4,7; 4,2; 4,9; 5; 5,7; 5,2; 5,1.

Вариант № 8: 19,7; 20,4; 22,8; 20,7; 21,2; 22,3; 23,4; 20,3; 20,7; 22,1; 22,7; 21,1; 21,2; 23,7; 24,2; 21,4; 21,6; 25,4; 26,5; 22,7.

Вариант № 9: 160; 130; 159; 165; 156; 141; 157; 172; 157; 145; 163; 177; 163; 150; 160; 180; 159.

Вариант № 10: 18; 17; 16; 15; 16; 14; 13; 12; 14; 13; 10; 10; 11; 10; 9; 8.

Вариант № 11: 55; 51; 50; 57; 54; 53; 59; 56; 54; 60; 58; 55.

Вариант № 12: 60,9; 60,8; 60,6; 60,4; 61,5; 65,6; 64,7; 63,8; 62,4; 67; 70,8; 68,7; 67,9; 65,2; 71,1; 74,6; 72,1; 69,4; 69,5; 72,5; 77,5; 72,8.

Вариант № 13: 10,8; 10,4; 10,3; 10,1; 11,3; 10,7; 10,5; 10,4; 12,3; 12; 11,4; 11; 13,3; 12,7; 12; 11,9.

Вариант № 14: 0,62; 0,61; 0,6; 0,63; 0,62; 0,61; 0,65; 0,64; 0,62; 0,67; 0,66; 0,65; 0,71; 0,7; 0,68.

Вариант № 15: 37,5; 37,1; 86,9; 101,5; 35,7; 47,1; 99,2; 102; 39; 35,5; 99,2; 90,5; 46,1; 45,4; 92; 92,7.

Вариант № 16: 3; 5; 6; 7; 6; 4; 6; 9; 10; 7; 5; 10; 11; 12; 9; 7; 10; 14; 12; 10; 11; 15; 13.

Вариант № 17: 8,4; 8,6; 8,8; 9,5; 8,5; 9,1; 9,2; 9,9; 9,7; 9,9; 10,1; 10,8; 10,5; 10,7; 12,2; 11,9; 12,3; 12,5; 13,2.

Вариант № 18: 15; 16; 18; 20; 17; 18; 20; 22; 19; 21; 23; 25; 20; 26; 28; 29.

Вариант № 19: 73; 75; 76; 76; 74; 73; 74; 78; 79; 77; 76; 75; 77; 80; 82; 83; 80; 79; 81; 85; 83; 81; 84.

Вариант № 20: 57; 59; 60; 58; 60; 63; 64; 62; 66; 67; 69; 68; 67; 68; 71; 69.

Вариант № 21: 13,7; 24,7; 42,7; 12,6; 13,4; 25,2; 50,1; 15,2; 14,4; 27,3; 53,6; 15,7; 15,9; 29,4; 58,8; 16,4.

Вариант № 22: 29; 27; 25; 30; 32; 33; 27; 26; 28; 32; 34; 29; 30; 33; 35; 36; 31; 30; 37; 38.

Вариант № 23: 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

Вариант № 24: 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

Вариант № 25: 128; 130; 132; 131; 130; 129; 129; 132; 133; 132; 131; 132; 135; 136; 135; 133; 132; 135; 137; 136; 133.

Вариант № 26: 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

Задание 5.3. По имеющемуся тренд–сезонному временному ряду x_t ($t = \overline{1, n}$) получить прогнозную аддитивную и мультипликативную модели ряда и выполнить прогноз этого ряда на два временных шага. Необходимо:

1. Определить значение периода L по максимальное значение автокорреляционной функции ряда.

2. Определить значения коэффициентов сезонности.

3. Определить коэффициенты линейного тренда.

4. Выполнить прогноз этого ряда на два временных шага.

5. Оценить качество модели: вычислить коэффициент детерминации и среднюю ошибку прогноза. Исследовать адекватность полученной модели.

6. Исходным данным дать физическое толкование (интерпретацию) и проанализировать полученные результаты.

Исходные данные взять из задания 5.2.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 6

1. Что означает отношение предпочтения?
2. Каким свойствам должна удовлетворять функция полезности?
3. Каков экономический смысл свойств функции полезности? Приведите пример функции полезности.
4. Сформулируйте задачу потребительского выбора. Что такое целевая функция потребителя?
5. Что такое предельная полезность и предельная норма замещения?
6. Поясните графическое определение предельной полезности.
7. Сравните модели Стоуна и Слуцкого.
8. Что такое линии безразличия потребительского выбора?

Задание 6.1. На основании данных о потреблении взаимозаменяемых и взаимодополняемых продуктов x_1 и x_2 в различном сочетании i (табл. 6.3), их цене P_1 и P_2 , полезности U и бюджете (доходах) потребителя R (табл. 6.4) построить кривую безразличия и определить оптимальный план потребления названных продуктов.

Варианты заданий приведены в табл. 6.3 и табл. 6.4.

Таблица 6.3

Исходные данные о потреблении продуктов x_1 и x_2

№ <i>n</i> / <i>n</i>	ПРОДУКТЫ													
	x_{1i}							x_{2i}						
	<i>i</i>							<i>i</i>						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
1	1,9	2,0	3,0	6,0	13,0	13,5	14,0	13,4	12,5	4,0	2,5	2,0	1,9	1,7
2	5,9	6,0	9,9	14,0	20,0	24	25	13,6	12,0	7,5	6,0	5,0	4,5	4,6
3	4,9	5,0	7,0	10,0	14,0	17,0	17,2	18,0	17,0	12	7,5	5,0	4,5	4,4
4	1,1	1,2	1,5	3,0	8,0	10	14,0	14,0	12,0	8,0	3,0	1,2	1,1	1,1
5	2,1	2,2	2,4	4,0	9,0	11,0	13,0	14,0	12,0	8,0	4,0	2,0	1,3	1,2
6	1,3	1,4	1,7	4,0	8,5	10,0	15,0	14,0	11,0	9,0	4,0	1,3	1,2	1,1
7	2,2	2,5	3,0	5,0	7,0	11,0	14,0	13,0	11,0	9,0	5,0	4,0	2,5	2,1
8	1,1	1,2	2,0	6,0	8,0	12,0	14,0	13,0	11,0	7,0	2,8	2,0	1,5	1,3
9	1,1	1,2	1,5	3,0	8,0	11,0	14,2	14,0	12,0	8,0	4,0	2,0	1,3	1,2
10	22,0	28,0	32,0	42,0	47,4	47,6	47,8	24,4	24,3	24	23	20,8	20	17
11	2,2	2,3	3,3	6,2	13,3	13,8	14,2	13,7	12,8	4,0	2,8	2,3	2,2	2,0
12	3,9	4,0	6,0	8,0	11,0	13,0	13,3	14,5	13,0	8,5	7,0	6,0	5,5	5,6
13	5,4	5,5	7,5	10,5	14,5	17,5	17,7	18,5	17,5	12	8,0	5,5	5,0	4,9
14	1,4	1,5	1,8	3,3	8,3	10,3	14,3	14,3	12,3	8,3	3,3	1,5	1,4	1,4
15	1,9	2,0	2,2	3,8	8,8	10,8	12,8	13,8	11,8	7,8	3,8	1,8	1,1	1,0

16	1,4	1,5	1,8	4,1	8,6	10,1	15,1	14,1	11,1	9,1	4,1	1,4	1,3	1,2
17	2,1	2,4	2,9	4,9	6,9	10,9	13,8	13,9	11,7	9,2	5,2	3,8	2,5	2,3
18	21,8	27,8	32,7	40,9	45,4	46,5	46,6	23,6	23,3	23	22	21	20	17
19	1,6	1,9	2,3	6,4	8,1	12,0	14,1	13,0	11,5	7,2	3,2	2,0	1,9	1,7
20	2,1	2,2	2,5	4,0	9,0	11,0	15,0	15,0	13,0	9,0	5,0	3,0	2,3	2,2
21	2,9	3,0	4,0	7,0	14,0	14,5	15,0	14,4	13,5	5,0	3,5	3,0	2,9	2,7
22	2,5	2,6	5,6	7,4	9,5	11,4	11,8	12,0	11,6	7,0	5,4	4,0	4,1	4,0
23	3,9	4,0	6,0	9,0	13,0	16,0	16,2	17,0	16,0	11	6,5	4,0	3,5	3,4
24	1,0	1,1	1,4	3,0	8,0	10,0	14,0	14,0	12,0	8,0	3,0	1,1	1,0	1,0
25	1,1	1,2	1,4	3,0	8,0	10,0	12,0	13,0	11,0	7,0	3,0	1,3	1,1	1,1
26	1,5	1,6	1,9	4,2	8,8	10,2	15,2	14,2	11,2	9,2	4,2	1,5	1,4	1,3

Таблица 6.4

Цены и полезность продуктов. Доход потребителей

№ варианта	ПОКАЗАТЕЛИ			
	U	P_1	P_2	R
1	15	4	4,9	37
2	18	5	10,3	100
3	13	8	1,9	72
4	12	2	1,8	14
5	11	5	2,6	14
6	15	30	8,2	150
7	30	4	30,4	80
8	14	15	4,8	90
9	12	20	0,9	80
10	22	6	1,5	120
11	17	6	6,9	39
12	20	7	12,3	102
13	15	10	3,8	74
14	14	4	3,2	16
15	13	6	2,6	16
16	17	32	10,2	152
17	32	6	32,4	82
18	16	17	6,6	92
19	14	22	2,9	82
20	14	8	3,5	122
21	16	5	5,9	38
22	19	6	11,3	101
23	12	3	2,6	15
24	14	9	2,8	73
25	13	3	2,5	15

26	18	4	4,9	37
----	----	---	-----	----

Задание 6.2. Дана функция полезности $U = (x_1 - a_1)^{b_1}(x_2 - a_2)^{b_2}$, цены P_1 и P_2 , доход R . Найти точку локального рыночного равновесия потребителя. Пусть цена P_2 увеличилась на β , %. Найти новую точку локального равновесия. Сколько денег надо доплатить для того, чтобы не снизился уровень потребления (полезности, благосостояния). Найти структуру новой точки равновесия.

Исходные данные

№ Вар.	Параметры функции предпочтения				Цены продуктов		Доход R	Увеличение цены P_2 β , %
	a_1	a_2	b_1	b_2	P_1	P_2		
1	1,3	0,65	0,32	0,2	7,1	2,85	850	136
2	4,6	0,38	0,65	0,32	6,5	4,2	426	41
3	2,3	0,55	0,45	0,25	5,5	6,2	750	150
4	1,4	0,96	0,42	0,3	6,1	2,75	530	96
5	5,2	0,78	0,52	0,4	8,2	3,26	824	152
6	3,4	0,58	0,47	0,42	2,5	5,5	520	95
7	2,4	0,57	0,42	0,43	5,6	6,3	556	26
8	3,2	0,65	0,33	0,17	8,2	1,23	920	150
9	2,2	0,55	0,41	0,19	6,5	1,05	450	147
10	1,5	0,25	0,22	0,11	6,2	2,03	511	44
11	5,5	0,39	0,33	0,28	8,8	5,85	700	53
12	1,7	0,42	0,66	0,14	7,3	5,41	850	26
13	2,9	0,23	0,36	0,19	6,3	3,21	530	54
14	6,2	0,96	0,45	0,16	4,3	4,26	532	236
15	4,6	0,84	0,94	0,34	8,2	5,42	651	197
16	2,7	0,95	0,41	0,21	7,7	2,13	750	195
17	3,5	0,34	0,45	0,22	6,4	3,12	987	178
18	1,9	0,63	0,44	0,26	7,5	2,56	855	65
19	2,8	1,1	0,64	0,15	6,6	4,96	864	32
20	2,2	0,97	0,53	0,32	7,9	3,86	900	142

Задание 6.3. Целевая функция потребителя зависит от двух благ x_1 и x_2 следующим образом: $U(x_1, x_2) = a_1 1,5 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \rightarrow \max$. Известны цены благ (P_1 и P_2) и доход потребителя R . Найти точку локального рыночного равновесия потребителя. Пусть цена P_2 становится равной P_{2H} . Каков необходимый размер компенсации? Какова новая структура потребительского набора?

Исходные данные

№ вар.	Параметры функции предпочтения			Цены продуктов		Доход R	Новая цена P_{2H}
	a_1	b_1	b_2	P_1	P_2		
1	2,85	0,7	0,9	28	42	460	53
2	3,1	0,5	0,7	40	70	800	90
3	4,5	0,6	0,8	25	34	505	55
4	1,7	0,4	0,8	100	120	685	135
5	4	0,2	0,6	115	145	745	175
6	0,5	0,3	0,5	11	19	400	25
7	1,75	0,4	0,8	25	40	550	55
8	3	0,1	0,2	35	45	602	65
9	2,5	0,3	0,6	40	50	500	60
10	1,5	0,2	0,4	20	30	450	45
11	2,8	0,7	0,9	63	85	950	100
12	3,2	0,2	0,6	81	100	995	125
13	1,1	0,1	0,3	79	95	960	125
14	4,7	0,4	0,8	64	74	850	86
15	2,3	0,6	0,8	87	99	950	113
16	2	0,1	0,4	94	102	900	125
17	1,9	0,2	0,5	229	250	999	265
18	5	0,3	0,6	34	49	465	70
19	3,2	0,4	0,6	65	76	888	90
20	4,2	0,5	0,8	86	93	950	110
21	2,4	0,7	0,9	75	90	800	100
22	3,6	0,4	0,5	46	77	750	99
23	3,3	0,5	0,9	29	55	650	66
24	1	0,3	0,5	15	35	500	55

Задание 6.4. В некоторой отрасли действуют 2 фирмы с функциями издержек $C_1(q_1) = a_1q_1^2 + a_2q_1$; $C_2(q_2) = b_1q_2^2 + b_2q_2$. Спрос на продукцию отрасли задан функцией $D(P) = q_1 + q_2 = d_1 - d_2P$.

В предположении, что фирмы взаимодействуют в соответствии с моделью Курно, определить цену продукции и равновесные объёмы производства для каждой фирмы и всей отрасли.

Исходные данные

№ варианта	Параметры моделей издержек фирм и спроса					
	a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	d_2
1	0,7	3,3	0,8	4,1	373	2,4
2	1,8	5,2	1,7	3,3	582	3,1
3	1,7	1,3	1,8	5,2	2133	0,9
4	0,8	8,4	0,7	1,3	884	5,0
5	3,7	3,7	1,8	8,4	307	4,7
6	1,8	2,8	1,7	3,7	298	0,8
7	0,7	4,7	2,8	2,8	4227	3,7
8	4,8	5,0	4,7	4,7	1440	2,8
9	1,7	3,1	5,8	5,0	321	4,7
10	2,8	2,8	2,7	3,1	278	5,8
11	2,7	4,4	2,8	2,8	373	1,7
12	5,8	2,2	4,7	4,4	582	3,8
13	2,7	4,7	2,8	2,2	733	0,7
14	2,8	6,4	3,7	4,7	884	5,8
15	0,7	5,1	0,8	6,4	307	3,3
16	5,8	4,9	4,7	5,1	1298	5,6
17	3,7	5,8	3,8	4,9	4227	1,3
18	0,8	3,7	0,6	5,8	2240	0,4
19	4,7	2,8	7,8	3,7	1321	3,7
20	5,8	4,3	4,7	2,8	473	0,8
21	3,7	5,8	6,5	4,3	582	4,7
22	0,8	3,7	0,4	5,8	833	5,1
23	4,7	6,4	5,8	3,7	774	3,0
24	6,5	5,1	3,7	6,4	3070	1,2
25	1,4	3,1	1,8	5,1	2980	5,8

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 7

1. Поясните классы моделей математического программирования.
2. Какие приёмы используются для приведения задачи линейного программирования к каноническому виду?
3. Каким образом задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации и наоборот?
4. Охарактеризуйте особенности решения транспортной задачи.
5. Укажите пути нахождения оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые осложнения в их постановке.
8. Поясните механизм использования метода северо–западного угла.
9. Поясните методику использования метода потенциалов.

Задание 7.1. Объём производства определяется производственной функцией Кобба–Дугласа в виде $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$, стоимость единицы капитальных C_K и трудовых ресурсов C_L известны (см. табл. исходных данных, все величины измеряются в условных единицах). Производство имеет ресурсное ограничение R .

Определить оптимальное распределение ресурсов, обеспечивающее максимальный выпуск продукции.

Определить параметр (множитель) Лагранжа λ .

Дать физическую интерпретацию всех величин.

Исходные данные

№ варианта	Параметры модели			Ресурсное ограничение R	Стоимость единицы капитала C_K	Стоимость единицы труда C_L
	a_0	a_1	a_2			
1	3,7	0,24	0,89	947	3,3	2,4
2	12,8	0,39	0,81	6500	5,2	3,1
3	4,7	0,17	0,52	1000	5,3	2,4
4	5,8	0,35	0,71	1653	8,4	5,0
5	0,7	0,29	0,66	2407	3,7	4,7
6	7,8	0,39	0,81	985	2,8	5,8
7	0,8	0,17	0,82	3349	4,7	3,7
8	5,8	0,35	0,71	883	5,0	2,8
9	13,7	0,24	0,69	1247	3,1	4,7
10	2,8	0,55	0,85	653	2,8	5,8
11	0,7	0,31	0,81	1349	4,4	6,7
12	5,8	0,42	0,82	6530	2,2	3,8
13	9,7	0,31	0,71	2247	4,7	7,7

14	2,8	1,24	0,12	320	9,4	15,8
15	4,7	0,39	0,85	1653	5,1	3,3
16	5,8	0,27	0,80	2350	4,9	5,6
17	3,7	0,35	0,82	6500	5,8	1,3
18	8,8	0,24	0,71	2400	3,7	8,4
19	0,7	0,34	0,85	2653	2,8	3,7
20	5,8	0,27	0,81	3049	4,3	3,8
21	3,7	0,35	0,82	4500	5,8	4,7
22	7,8	0,54	0,71	870	3,7	5,1
23	4,7	0,24	0,86	2400	6,4	3,0
24	6,5	0,39	0,77	6500	5,1	5,2
25	4,4	0,19	0,76	1560	3,1	5,8

Задание 7.2. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Известны потребности в сырье каждого из предприятий. Сырьё сосредоточено в трёх местах его получения, запасы которых известны. На каждое из предприятий сырьё может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются соответствующей матрицей (см. варианты задания). Составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 1.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	17	5	120
A_2	4	2	12	8	280
A_3	3	8	18	2	160
Потребности	130	220	60	70	

Вариант 2.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	4	5	420
A_2	6	2	6	8	230
A_3	3	11	5	12	560
Потребности	230	320	160	170	

Вариант 3.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	57	35	27	200
A_2	12	62	34	32	280
A_3	11	68	33	11	320
Потребности	300	220	130	200	

Вариант 4.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	24	8	34	5	520
A_2	36	22	16	8	300
A_3	43	11	25	12	600
Потребности	200	320	400	170	

Вариант 5.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	3	510
A_2	5	6	8	9	90
A_3	7	2	4	8	120
Потребности	270	140	200	110	

Вариант 6.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	4	15	420
A_2	6	22	6	17	400
A_3	3	11	5	12	560
Потребности	230	350	160	270	

Вариант 7.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	14	17	27	220
A_2	12	16	12	32	280
A_3	11	13	18	11	320
Потребности	300	180	130	200	

Вариант 8.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	4	7	9	200
A_2	5	1	8	12	270
A_3	11	6	4	3	130
Потребности	120	80	240	160	

Вариант 9.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	31	7	29	5	120
A_2	34	2	26	8	280
A_3	43	8	17	2	160
Потребности	130	220	60	70	

Вариант 10.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	8	17	35	420
A_2	16	2	12	38	230
A_3	13	11	18	12	560
Потребности	230	320	160	170	

Вариант 11.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	4	7	13	510
A_2	5	16	8	9	90
A_3	7	2	14	18	120
Потребности	270	140	200	110	720

Вариант 12.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	8	34	15	500
A_2	6	22	16	18	400
A_3	13	15	25	12	550
Потребности	200	390	400	170	

Вариант 13.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	7	9	5	180
A_2	16	2	6	8	280
A_3	13	8	21	12	460
Потребности	180	420	60	70	

Вариант 14.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	4	7	520
A_2	6	22	11	4	400
A_3	3	11	5	3	560
Потребности	230	350	160	270	

Вариант 15.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	14	5	7	120
A_2	2	6	14	32	280
A_3	11	13	3	11	320
Потребности	200	280	130	200	

Вариант 16.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	8	7	5	520
A_2	11	6	4	8	300
A_3	13	11	3	12	600
Потребности	180	320	400	170	

Вариант 17.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	5	2	160
Потребности	130	220	60	70	

Вариант 18.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	8	4	5	420
A_2	7	2	6	8	230
A_3	10	11	5	12	560
Потребности	230	320	160	170	

Вариант 19.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	57	35	27	400
A_2	12	62	34	32	280
A_3	11	68	33	20	320
Потребности	300	220	130	200	

Вариант 20.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	27	14	34	5	520
A_2	32	16	16	8	300
A_3	20	13	25	12	600
Потребности	200	320	400	170	

Вариант 21.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	4	7	490
A_2	6	22	11	4	410
A_3	3	11	5	3	560
Потребности	250	340	160	270	

Вариант 22.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	14	5	7	220
A_2	2	6	14	32	380
A_3	11	13	3	11	420
Потребности	270	290	230	200	

Вариант 23.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	8	7	5	330
A_2	11	6	4	8	350
A_3	13	11	3	12	580
Потребности	280	320	370	190	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 8

1. Приведите классификацию игр и поясните их особенности.
2. Что такое минимаксная и максиминная стратегии игроков?
3. Что такое чистая и смешанная стратегии игроков?
4. В чём заключается геометрическое решение игровых задач?
6. Как игры сводятся к задачам линейного программирования?
7. В чём суть проблемы последовательного принятия решения?
8. Как строится и анализируется дерево решений?

Задание 8.1. Исследовать решение трёх игровых задач. Требуется:

1. Найти графическое решение игры № 1 (табл. 8.2).
2. Найти решение игры № 2.
3. Составить двойственную пару задач линейного программирования (прямую и обратную) для игры № 3. Указать возможные пути решения этих задач, их содержательный смысл.
4. Проанализировать результаты. Дать содержательную трактовку (физическую интерпретацию) имеющихся данных и полученных решений.

Варианты заданий приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Варианты исходных данных (матрицы платежей)

№ вар.	Игра № 1	Игра № 2	Игра № 3
1	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 19 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 13 & 19 & 22 \\ 17 & 16 & 18 & 19 \\ 9 & 12 & 25 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 10 & 5 & 8 & 14 \\ 4 & 12 & 5 & 18 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ -6 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 102 & 13 & 111 & 212 \\ 137 & 126 & 120 & 129 \\ 49 & 92 & 115 & 151 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 & 83 & 119 & 212 \\ 107 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 102 & 35 & 211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 28 & 2 \\ 17 & 12 & 8 & 21 \\ 0 & 31 & 10 & 11 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 37 & 9 & 0 \\ 7 & 10 & 28 & 12 \\ 19 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 190 & 83 & 119 & 212 \\ 107 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 102 & 35 & 211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ 9 & 2 & 52 & 11 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 & 9 \\ 15 & 12 & 8 & 14 \\ -7 & 9 & 5 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 19 & 13 \\ 18 & 17 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 5 & 21 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 9 \\ 15 & 26 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 19 & -3 \\ 7 & 14 & 8 & 12 \\ 15 & 2 & 0 & -11 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ -6 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 10 & -5 & 12 \\ -7 & 10 & 8 & 25 \\ 19 & 3 & 18 & 13 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 & 12 \\ 7 & 0 & 8 & -8 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

15	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 19 & -3 \\ 7 & 1 & 18 & 14 \\ 9 & 2 & 10 & -11 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 3 & -5 & 12 \\ -7 & 0 & 10 & 41 \\ 19 & 12 & -23 & 11 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 19 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 90 & 83 & 79 & 22 \\ 197 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 72 & 35 & 211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 11 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 8.2. Фирма рассматривает вопрос о приобретении ценных бумаг (акций) некоторого эмитента.

Если рейтинг рассматриваемых акций возрастает, то такое приобретение окажется фирме выгодным. Известен процент выигрыша при удачной стратегии (проигрыша при неблагоприятном состоянии рынка).

Фирма может либо сразу принять решение о покупке пакета акций, либо выполнить (заказать) исследование рынка, что бы лучше оценить относительное правдоподобие повышения или спада рейтинга акций.

Имеем пространство действий фирмы: $A = \{a_1, a_2, a_3\} = \{\text{изучить рейтинг акций, купить пакет акций, не покупать акции}\}$.

Пространство параметров состояний рынка ценных бумаг: $B = \{b_1, b_2\} = \{\text{рейтинг акций возрос, рейтинг снизился}\}$.

Выборочное пространство обследования рынка ценных бумаг: $X = \{x_1, x_2\} = \{\text{прогноз повышения рейтинга акций, прогноз снижения рейтинга акций}\}$.

Вероятности всех неопределённых исходов рассматриваемой задачи приведены в табл. 8.3.

Требуется на основе построения дерева решений проанализировать стратегию действий фирмы и оценить её возможные результаты.

Необходимо:

1. Записать логическую структуру дерева в хронологическом порядке, описывая узлы решений и неопределённость вместе со всеми разветвлениями в каждом узле.

2. Определить вероятность для всех дуг (ветвей) неопределённостей, позаботившись о соответствующих условиях для каждой дуги.

3. Вычислить и приписать значения выигрыша финальным дугам.

4. Двигаясь по дереву справа налево, вычислить математическое ожидание выигрыша в узлах неопределённостей, максимизировать выигрыш в узлах решений и, таким образом, определить наилучшие действия и их ожидаемые выигрыши.

5. Проанализировать полученные результаты для различных затрат на обследование рейтинга акций.

6. Сколько максимально может стоить исследование рынка?

7. Каков выигрыш инвестора при покупке акций без исследования рынка?

Таблица 8.3

Варианты исходных данных

Номер варианта	Вероятности исходов $P(x_1 b_1)$	Вероятности исходов $P(x_1 b_2)$	Вероятности исходов $P(b_1)$	Сумма средств на покупку акций, тыс.р.	Процент выигрыша при удачной стратегии
1	0,75	0,48	0,65	24	27
2	0,8	0,35	0,7	13	48
3	0,9	0,22	0,85	8	56
4	0,75	0,48	0,65	27	30
5	0,85	0,35	0,7	53	14
6	0,9	0,29	0,83	10	35
7	0,82	0,22	0,65	6	18
8	0,96	0,48	0,7	70	11
9	0,9	0,35	0,85	16	53
10	0,75	0,27	0,65	25	18
11	0,85	0,22	0,7	15	17
12	0,9	0,48	0,83	50	45
13	0,82	0,35	0,65	60	14
14	0,76	0,27	0,7	35	6
15	0,9	0,2	0,85	8	40
16	0,75	0,38	0,65	15	14
17	0,85	0,35	0,7	13	15
18	0,87	0,27	0,78	80	8
19	0,82	0,25	0,65	17	11
20	0,76	0,3	0,7	23	26
21	0,95	0,38	0,85	5	50
22	0,92	0,35	0,65	6	14
23	0,75	0,27	0,7	7	135
24	0,85	0,27	0,8	35	48
25	0,9	0,24	0,65	8	16

26	0,82	0,38	0,7	15	20
27	0,96	0,35	0,85	13	19
28	0,88	0,27	0,65	80	5
29	0,98	0,18	0,7	1,6	28
30	0,97	0,33	0,83	4,5	41

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 9

1. Поясните смысл критерия минимизации издержек обращения.
2. Поясните особенности модели расчёта оптимальных параметров системы управления однономенклатурными запасами.
3. Какие используются приёмы и механизмы управления товарными запасами различных групп товаров?
4. Охарактеризуйте особенности постановки и решения задач управления запасами.
5. Написать уравнение и построить типовой график уровня товарных запасов на любой момент времени t .

Задание 9.1. По имеющимся исходным данным (интенсивность продажи товаров λ тн./день; величина анализируемого периода T , дней; затраты на ввоз одной партии товара $C_{в1}$, руб.; затраты на хранение единицы товара (тонны) в течение одного дня $C_{х1}$, руб.) определить оптимальные значения основных величин, определяющих модель управления товарными запасами, по критерию минимума издержек обращения.

Необходимо:

1. Составить критерий минимизации издержек обращения при управлении товарными запасами.
 2. Построить график зависимости издержек обращения от размера партии поставок.
 3. Найти оптимальные значения величин:
 - затраты на ввоз и хранение товаров за период T ;
 - размер одной партии поставки товара;
 - число поставок за анализируемый период;
 - интервал поставок.
 3. Скорректировать полученные характеристики при округлении (в меньшую сторону) оптимального интервала поставок до целого и увеличения его в 2 раза.
 4. Написать уравнение и построить график уровня товарных запасов на любой момент времени t .
 5. Проанализировать полученные результаты.
- Варианты заданий приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Варианты исходных данных

№ варианта	Интенсивность продажи товаров Z_3 , тн/день	Величина анализируемого периода T , дней	Затраты на ввоз одной партии товара C_{B1} , руб.	Затраты на хранение 1 тн. товара в течение дня C_{x1} , руб.
1	2,6	440	800	17
2	0,9	310	409	16
3	2,0	360	200	9
4	3,8	750	315	20
5	1,8	100	515	11
6	1,5	309	370	18
7	0,9	610	110	30
8	1,5	100	450	15
9	3,9	700	280	26
10	5,0	1140	468	24
11	6,7	790	330	48
12	15,0	1960	600	19
13	7,4	10000	1050	9
14	11	980	136	18
15	4,6	800	86	10
16	5,5	424	120	0,94
17	1,4	715	225	11
18	2,0	512	107	0,267
19	3,8	325	85	16
20	4,5	890	179	3
21	1,5	1786	600	24
22	0,9	510	240	17
23	6,7	1620	555	25
24	1,4	715	244	15
25	2,0	612	111	0,79
26	3,8	1425	790	67
27	4,5	1925	202	27
28	8,9	3660	769	11
29	2,1	228	70	6
30	2,0	365	50	0,274