

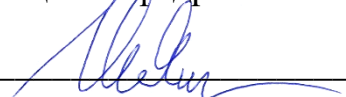
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры  
«Прикладная математика и информатика»  
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 М.В. Грязев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по выполнению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Математические модели в экономике»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

с направленностью (профилем)  
**Прикладная математика и информатика**

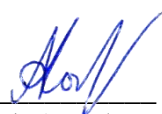
Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

## Разработчик методических указаний

Кочетыгов А.А., профессор каф. ПМИИ, к.т.н., доцент  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

Целью изучения дисциплины «Математические модели в экономике» является овладение методологией экономико–математического моделирования и наиболее типичными методами и моделями при решении задач управления организационными системами, экономическими объектами, проведении научных исследований.

Задачами освоения дисциплины являются выработка умений:

- изучение основных классов и разновидностей экономико–математических моделей;
- изучение основных классов и разновидностей методов решения экономико–математических задач;
- изучение способов построения экономико–математических моделей и разработки методов решения, основанных на этих моделях.

На практических занятиях по курсу «Математические модели в экономике» обсуждаются вопросы, закрепляющие и расширяющие материал, изложенный на лекциях. Рассматриваются некоторые расчетные задачи полезных для практики моделей.

Решение типовых задач курса базируется на учебных пособиях:

1. Кочетыгов, А.А. Математические модели в экономике: учеб. пособие / А.А. Кочетыгов; ТулГУ. – Тула: Изд–во ТулГУ, 2017. – 335 с.
2. Кочетыгов, А.А. Моделирование экономических систем: учеб. пособие / А.А. Кочетыгов; ТулГУ. – Тула: Изд–во ТулГУ, 2012. – 292 с.

В эти пособия приведены решения практически всех основных изучаемых вопросов. В конце каждой главы предлагаются индивидуальные задачи для каждого студента.

Дополнительно в качестве самостоятельных (аттестационных) предлагаются типовые задания с индивидуальными исходными данными.

Необходимо квалифицированно отвечать на контрольные вопросы каждой главы (темы).

### ***КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 1***

1. В чём суть и преимущества моделирования как метода исследования и познания?
2. Что такое математическая модель?
3. В чём отличие статических моделей от динамических, детерминированных моделей от стохастических?
4. Назовите этапы построения экономико–математической модели. Приведите пример построения и уточнения модели.
5. В чём проявляется системный подход к разработке и исследованию экономико–математических моделей?
6. Приведите классификацию и охарактеризуйте основные типы математических моделей.

7. Охарактеризуйте основные процессы специального типа, используемые в предпосылках моделей экономики.
8. Что такое производственная функция?
9. Охарактеризуйте основные виды и особенности производственных функций.
10. Каковы особенности имитационного моделирования?

## **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 2**

1. В чём заключаются суть и особенности балансовых моделей?
2. Что такое коэффициенты прямых, косвенных и полных затрат?
3. Как происходит укрупнение балансовой таблицы?
4. Укажите особенности динамических балансовых моделей.
5. Приведите примеры использования балансовых моделей.

**Задание 2.1.** Предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. Известны расходные коэффициенты (прямые затраты) единиц продукции  $i$ -го цеха, используемые как промежуточный продукт для выпуска единицы продукции  $j$ -го цеха, а также количество единиц  $y_i$  продукции  $i$ -го цеха, предназначенных для реализации (конечный продукт). Заданы также расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующего цеха, трудоёмкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1 чел.-час. Определить:

- 1) коэффициенты полных затрат;
- 2) валовой выпуск (план) для каждого цеха;
- 3) производственную программу цехов;
- 4) коэффициенты косвенных затрат.
- 5) суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы;
- 6) коэффициенты полных затрат сырья топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;
- 7) расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;
- 8) производственные затраты по цехам и на всю программу предприятия;
- 9) производственные затраты на единицу конечной продукции.

Варианты заданий приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

| Варианты заданий       |   |                                      |                     |                                 |
|------------------------|---|--------------------------------------|---------------------|---------------------------------|
| Номер<br>вариан-<br>та | Матрица<br>коэффициентов<br>прямых затрат | Матрица<br>прямых затрат<br>факторов | Конечный<br>продукт | Стоимость<br>единицы<br>фактора |

|   |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|
| 1 | $\begin{pmatrix} 0,23 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,21 & 0,11 \\ 0,09 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0 \\ 1,7 & 1,1 & 2,3 \\ 15 & 20 & 18 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 150 \\ 230 \\ 120 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 6 \\ 2,4 \end{pmatrix}$  |
| 2 | $\begin{pmatrix} 0,19 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,20 & 0,26 \\ 0 & 0,29 & 0,16 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,9 & 1,6 & 0,3 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,1 \\ 14 & 23 & 16 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 130 \\ 200 \\ 110 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 3,1 \end{pmatrix}$  |
| 3 | $\begin{pmatrix} 0,13 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,19 & 0,23 \\ 0,11 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,5 \\ 0,7 & 0,5 & 1,1 \\ 0,3 & 0 & 1,9 \\ 11 & 19 & 20 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 7 \\ 2,9 \end{pmatrix}$  |
| 4 | $\begin{pmatrix} 0,13 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,19 & 0,23 \\ 0,11 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,7 & 2,5 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 1,5 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 19 & 20 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 310 \\ 170 \\ 140 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 28 \\ 13 \\ 9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $\begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0,11 \\ 0,36 & 0,15 & 0,28 \\ 0,15 & 0,21 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,3 & 2,1 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 1,5 \\ 10 & 23 & 17 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 95 \\ 135 \\ 120 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ 1,9 \end{pmatrix}$  |
| 6 | $\begin{pmatrix} 0,11 & 0,21 & 0,14 \\ 0,23 & 0 & 0,26 \\ 0,09 & 0,11 & 0,22 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,5 & 1,4 & 1,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 1,5 \\ 20 & 18 & 14 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 345 \\ 390 \\ 510 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \\ 2,3 \end{pmatrix}$  |
| 7 | $\begin{pmatrix} 0,23 & 0,13 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,11 \\ 0,09 & 0 & 0,06 \end{pmatrix}$       | $\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,33 & 0 \\ 1,7 & 1,1 & 2,3 \\ 25 & 20 & 38 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 450 \\ 230 \\ 170 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 27 \\ 32 \\ 61 \\ 24 \end{pmatrix}$ |
| 8 | $\begin{pmatrix} 0,09 & 0,19 & 0 \\ 0,14 & 0,20 & 0,06 \\ 0 & 0,22 & 0,16 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,6 & 1,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,4 \\ 11 & 20 & 18 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 2,1 \end{pmatrix}$  |
| 9 | $\begin{pmatrix} 0,09 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,11 & 0,27 \\ 0,11 & 0,03 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,2 & 2,8 & 0,5 \\ 0,7 & 0,4 & 1,1 \\ 0,3 & 0 & 1,9 \\ 9 & 17 & 14 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 380 \\ 220 \\ 140 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 29 \end{pmatrix}$   |

|    |   |   |   |  |
|----|---|---|---|--|
| 10 | $\begin{pmatrix} 0,16 & 0,14 & 0,12 \\ 0 & 0,11 & 0,03 \\ 0,11 & 0,23 & 0,22 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,4 & 2,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 1,6 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 140 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 2,2 \end{pmatrix}$  |
| 11 | $\begin{pmatrix} 0,18 & 0 & 0,09 \\ 0,05 & 0,11 & 0,28 \\ 0,15 & 0,13 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 0,5 \\ 11 & 21 & 18 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 70 \\ 110 \\ 120 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \\ 2,9 \end{pmatrix}$  |
| 12 | $\begin{pmatrix} 0,06 & 0,11 & 0,12 \\ 0,20 & 0 & 0,16 \\ 0,09 & 0,11 & 0,27 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,3 & 1,2 & 1,1 \\ 0,9 & 0,2 & 0 \\ 0,7 & 0,8 & 1,5 \\ 22 & 24 & 21 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 85 \\ 70 \\ 100 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \\ 2,3 \end{pmatrix}$   |
| 13 | $\begin{pmatrix} 0,21 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,25 & 0,20 \\ 0,11 & 0 & 0,16 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,7 & 0 \\ 1,8 & 1,1 & 2,5 \\ 17 & 21 & 19 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 100 \\ 130 \\ 150 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 26 \\ 31 \end{pmatrix}$ |
| 14 | $\begin{pmatrix} 0,20 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,26 & 0,03 \\ 0 & 0,29 & 0,06 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,5 & 1,4 & 1,3 \\ 0,6 & 0,9 & 1,4 \\ 0 & 1,6 & 2,6 \\ 12 & 21 & 16 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 130 \\ 160 \\ 170 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \\ 2,1 \end{pmatrix}$   |
| 15 | $\begin{pmatrix} 0,16 & 0,12 & 0,13 \\ 0 & 0,18 & 0,03 \\ 0,11 & 0,25 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,6 & 2,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,2 & 1,1 \\ 1,3 & 0 & 1,9 \\ 10 & 19 & 23 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 120 \\ 130 \\ 140 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 7 \\ 2,5 \end{pmatrix}$  |
| 16 | $\begin{pmatrix} 0,23 & 0,11 & 0,12 \\ 0 & 0,09 & 0,21 \\ 0,15 & 0,23 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,6 & 2,2 & 0,9 \\ 0,3 & 0,5 & 1,1 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 11 & 21 & 20 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 120 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 8 \\ 2,3 \end{pmatrix}$  |
| 17 | $\begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0,21 \\ 0,08 & 0,12 & 0,18 \\ 0,11 & 0,29 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,6 & 2,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 1,1 \\ 1,2 & 0,2 & 1,5 \\ 12 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 275 \\ 295 \\ 180 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 27 \\ 19 \end{pmatrix}$ |
| 18 | $\begin{pmatrix} 0,31 & 0,20 & 0,18 \\ 0,23 & 0 & 0,26 \\ 0,09 & 0,12 & 0,22 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,9 & 1,2 & 1,6 \\ 0,3 & 0,4 & 0 \\ 0,7 & 0,6 & 1,5 \\ 21 & 18 & 25 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 110 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 8 \\ 2,3 \end{pmatrix}$  |
| 19 | $\begin{pmatrix} 0,21 & 0,13 & 0 \\ 0,07 & 0,25 & 0,20 \\ 0,11 & 0 & 0,16 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,4 & 2,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,9 & 1,6 \\ 0 & 0,4 & 1,5 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 130 \\ 200 \\ 110 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$  |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| 20 | $\begin{pmatrix} 0,20 & 0,19 & 0 \\ 0,04 & 0,26 & 0,06 \\ 0 & 0,29 & 0,36 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 0,4 & 2,2 & 0,3 \\ 0,8 & 0 & 1,4 \\ 1,2 & 0,4 & 0,5 \\ 11 & 21 & 18 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ 1,9 \end{pmatrix}$ |
| 21 | $\begin{pmatrix} 0,09 & 0,14 & 0,15 \\ 0 & 0,11 & 0,27 \\ 0,11 & 0,03 & 0,12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,6 & 2,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 1,1 \\ 1,2 & 0,2 & 1,5 \\ 12 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 275 \\ 295 \\ 180 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \\ 29 \end{pmatrix}$  |

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 3**

1. Поясните различие задач экономической статики и динамики.
2. Охарактеризуйте различие содержания решаемых задач, математического аппарата и получаемых результатов для экономических моделей с дискретным и непрерывным временем.
3. Сформулируйте понятие экономического равновесия. Чем устойчивое равновесие отличается от неустойчивого?
4. Как связан темп прироста выпуска с нормой накопления?
5. Поясните особенности использования модели Вальраса.
6. Как выбрать норму накопления при заданном темпе прироста потребления в макромоделли роста?
7. В чём состоит проблема выбора наилучшего темпа роста потребления в модели Харрода–Домара?
8. Чем предпосылки модели Солоу отличаются от предпосылок модели Харрода–Домара?
9. Какие общие принципы заложены в моделях Солоу и Харрода–Домара?

**Задание 3.1.** Дана модель Солоу с производственной функцией

$$Y = K^b (E \cdot L)^{1-b},$$

где  $Y$  – выпуск,  $K$  – капитал,  $E$  – эффективность труда,  $L$  – труд,  $b$  – параметр модели.

Доля дохода капитала в общем доходе составляет  $b$ , темп прироста численности населения равен  $n\%$  в год, темп прироста параметра эффективности труда составляет  $g\%$  в год, а норма амортизации составляет  $\delta\%$  в год (табл. 3.5).

1. Определить норму сбережения, потребление на единицу эффективного труда и капиталовооружённость эффективного труда, соответствующие «золотому правилу».

2. Считаем, что экономика изначально находится на траектории сбалансированного роста, затем норма сбережений изменилась до значения

$\alpha_H$  %. Определить потребление на единицу эффективного труда до увеличения нормы сбережений, сразу после увеличения нормы сбережений и в долгосрочном периоде.

Таблица 3.5

Исходные данные для анализа модели Солоу

| № варианта | Параметр модели $b$ | Темп прироста численности населения $n\%$ | Темп прироста эффективности труда $g\%$ | Норма амортизации $\delta$ % | Новая норма сбережений $\alpha_H$ % |
|------------|---------------------|---|---|------------------------------|-------------------------------------|
| 1          | 0,35                | 1,5                                       | 3,6                                     | 4,8                          | 20                                  |
| 2          | 0,32                | 1,3                                       | 2,8                                     | 6,5                          | 34                                  |
| 3          | 0,36                | 2,4                                       | 2,1                                     | 3,4                          | 21                                  |
| 4          | 0,41                | 1,6                                       | 1,6                                     | 2,8                          | 24                                  |
| 5          | 0,42                | 2,4                                       | 2,8                                     | 4,7                          | 34                                  |
| 6          | 0,26                | 0,8                                       | 2,4                                     | 2,9                          | 38                                  |
| 7          | 0,35                | 1,3                                       | 1,6                                     | 4,6                          | 28                                  |
| 8          | 0,41                | 1,4                                       | 2,8                                     | 2,8                          | 34                                  |
| 9          | 0,36                | 1,7                                       | 2,1                                     | 7,1                          | 41                                  |
| 10         | 0,23                | 2,4                                       | 1,9                                     | 4,6                          | 24                                  |
| 11         | 0,42                | 1,6                                       | 2,8                                     | 2,8                          | 34                                  |
| 12         | 0,26                | 2,8                                       | 2,4                                     | 2,7                          | 25                                  |
| 13         | 0,29                | 1,5                                       | 2,6                                     | 4,8                          | 26                                  |
| 14         | 0,35                | 1,3                                       | 2,8                                     | 2,5                          | 34                                  |
| 15         | 0,41                | 2,4                                       | 2,1                                     | 3,4                          | 41                                  |
| 16         | 0,36                | 1,6                                       | 3,3                                     | 2,8                          | 24                                  |
| 17         | 0,40                | 2,4                                       | 2,8                                     | 5,7                          | 34                                  |
| 18         | 0,42                | 2,8                                       | 2,4                                     | 2,9                          | 38                                  |
| 19         | 0,26                | 1,3                                       | 1,6                                     | 5,6                          | 40                                  |
| 20         | 0,35                | 1,4                                       | 2,8                                     | 2,8                          | 34                                  |
| 21         | 0,46                | 1,7                                       | 2,1                                     | 6,1                          | 41                                  |
| 22         | 0,36                | 2,4                                       | 1,6                                     | 4,6                          | 24                                  |
| 23         | 0,43                | 1,6                                       | 2,8                                     | 2,8                          | 34                                  |
| 24         | 0,42                | 2,8                                       | 2,4                                     | 4,7                          | 25                                  |
| 25         | 0,26                | 1,5                                       | 3,1                                     | 4,8                          | 18                                  |



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 4

1. Поясните термин «маржинальные величины».
2. Что такое маржинальный анализ?
3. Поясните основные правила продолжения деятельности фирмы на основе маржинальных величин.
4. Поясните методику использования маржинального анализа.
5. Приведите примеры использования предельных величин в экономике.

**Задание 4.1.** Фирма производит продукцию и реализует её по цене  $P$  долл. за одну единицу. Постоянные издержки производства составляют  $TFC$  долл., а переменные изменяются в зависимости от объёма производства известным образом (табл. 4.5). Требуется проанализировать деятельность фирмы с использованием маржинального анализа. Необходимо:

1. Построить таблицу и графики маржинальных издержек, средних валовых и средних переменных издержек, маржинального дохода.
2. По построенным графикам отыскать оптимальный объём производства.
3. Определить точку банкротства фирмы и предельную точку производства.
4. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 4.5

Варианты задания

| №<br>вар. | Цена<br>$P$ | $TFC$ | Переменные издержки в зависимости от объёма производства |     |     |     |     |     |     |
|-----------|-------------|-------|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|           |             |       | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| 1         | 72          | 56    | 120  | 165 | 190 | 225 | 290 | 368 | 452 |
| 2         | 84          | 73    | 205  | 304 | 365 | 435 | 564 | 773 | 989 |
| 3         | 61          | 66    | 117  | 145 | 180 | 218 | 270 | 368 | 456 |
| 4         | 36          | 24    | 55   | 84  | 98  | 115 | 184 | 273 | 377 |
| 5         | 70          | 56    | 115  | 162 | 192 | 230 | 291 | 386 | 479 |
| 6         | 79          | 75    | 205  | 305 | 471 | 535 | 664 | 773 | 880 |
| 7         | 61          | 66    | 102  | 145 | 182 | 220 | 290 | 387 | 463 |
| 8         | 70          | 52    | 95   | 148 | 170 | 210 | 275 | 384 | 490 |
| 9         | 69          | 49    | 99   | 136 | 168 | 213 | 278 | 381 | 492 |
| 10        | 77          | 52    | 99   | 140 | 175 | 219 | 285 | 395 | 499 |
| 11        | 71          | 46    | 97   | 136 | 168 | 218 | 278 | 382 | 497 |
| 12        | 80          | 66    | 108  | 140 | 180 | 227 | 279 | 378 | 556 |
| 13        | 95          | 74    | 245  | 314 | 355 | 415 | 504 | 673 | 867 |
| 14        | 70          | 56    | 117  | 162 | 192 | 233 | 290 | 386 | 477 |
| 15        | 80          | 75    | 208  | 305 | 465 | 535 | 664 | 769 | 886 |
| 16        | 61          | 66    | 102  | 149 | 180 | 220 | 290 | 387 | 468 |
| 17        | 70          | 52    | 95   | 143 | 173 | 210 | 275 | 384 | 505 |

|    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |
|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 18 | 59 | 49 | 99  | 136 | 168 | 218 | 279 | 399 | 512 |
| 19 | 72 | 66 | 120 | 165 | 190 | 225 | 290 | 368 | 488 |
| 20 | 84 | 77 | 205 | 309 | 365 | 435 | 564 | 773 | 989 |
| 21 | 81 | 76 | 111 | 145 | 184 | 217 | 275 | 368 | 456 |
| 22 | 95 | 72 | 255 | 314 | 369 | 415 | 504 | 673 | 867 |
| 23 | 68 | 56 | 113 | 164 | 192 | 230 | 293 | 386 | 577 |
| 24 | 80 | 77 | 211 | 305 | 465 | 530 | 656 | 779 | 980 |
| 25 | 78 | 75 | 208 | 309 | 465 | 538 | 666 | 769 | 896 |

**Задание 4.2.** Общие издержки фирмы описываются функцией от объёма выпуска зависимостью  $C(q)$ . Известна функция спроса  $D(P)$ .

1. Определить предельные издержки фирмы, их минимальное значение и объём производства при минимальных предельных издержках.
2. Найти функцию предложения этой конкурентной фирмы  $S(P)$ .
3. Найти оптимальный объём производства и соответствующую цену для фирмы–монополиста при заданной функции спроса.
4. Определить коэффициент превышения оптимальной цены фирмы–монополиста относительно соответствующих издержек.

Таблица 4.6

Таблица исходных данных

| №  | Валовые издержки фирмы $C(q)$       | Функция спроса $D(P)$ |
|----|-------------------------------------|-----------------------|
| 1  | $C(q) = 749q - 4,4q^2 + 0,009q^3$   | $D(P) = 984 - 0,17P$  |
| 2  | $C(q) = 693q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$  | $D(P) = 840 - 0,12P$  |
| 3  | $C(q) = 931q - 4,8q^2 + 0,009q^3$   | $D(P) = 280 - 0,18P$  |
| 4  | $C(q) = 760q - 3,6q^2 + 0,006q^3$   | $D(P) = 1040 - 0,51P$ |
| 5  | $C(q) = 1045q - 3,5q^2 + 0,004q^3$  | $D(P) = 520 - 0,57P$  |
| 6  | $C(q) = 724q - 4,4q^2 + 0,009q^3$   | $D(P) = 816 - 0,15P$  |
| 7  | $C(q) = 671q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$  | $D(P) = 600 - 0,13P$  |
| 8  | $C(q) = 889q - 4q^2 + 0,006q^3$     | $D(P) = 240 - 0,11P$  |
| 9  | $C(q) = 528q - 2,6q^2 + 0,0045q^3$  | $D(P) = 1008 - 0,25P$ |
| 10 | $C(q) = 1098q - 3,8q^2 + 0,0044q^3$ | $D(P) = 624 - 13,2P$  |
| 11 | $C(q) = 1410q - 4,1q^2 + 0,004q^3$  | $D(P) = 1776 - 0,35P$ |
| 12 | $C(q) = 1458q - 6,6q^2 + 0,0105q^3$ | $D(P) = 840 - 0,16P$  |
| 13 | $C(q) = 1121q - 5,4q^2 + 0,009q^3$  | $D(P) = 820 - 0,36P$  |
| 14 | $C(q) = 690q - 3,5q^2 + 0,006q^3$   | $D(P) = 700 - 0,25P$  |

|    |                                    |                       |
|----|------------------------------------|-----------------------|
| 15 | $C(q) = 467q - 2,3q^2 + 0,004q^3$  | $D(P) = 336 - 0,96P$  |
| 16 | $C(q) = 755q - 4,4q^2 + 0,009q^3$  | $D(P) = 1728 - 0,27P$ |
| 17 | $C(q) = 495q - 3,6q^2 + 0,0099q^3$ | $D(P) = 580 - 0,65P$  |
| 18 | $C(q) = 1026q - 5,2q^2 + 0,009q^3$ | $D(P) = 1220 - 0,54P$ |
| 19 | $C(q) = 741q - 4,4q^2 + 0,009q^3$  | $D(P) = 1488 - 0,19P$ |
| 20 | $C(q) = 710q - 4,3q^2 + 0,0096q^3$ | $D(P) = 700 - 0,25P$  |
| 21 | $C(q) = 777q - 3,6q^2 + 0,006q^3$  | $D(P) = 240 - 0,17P$  |
| 22 | $C(q) = 544q - 2,6q^2 + 0,0045q^3$ | $D(P) = 1104 - 0,21P$ |

### ***КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 5***

1. Охарактеризуйте этапы построения прогнозных моделей.
2. Как оценить точность прогнозных моделей?
3. Как оценить адекватность прогнозных моделей?
4. Как проверить на значимость коэффициенты модели?
5. Поясните особенности адаптивных методов прогнозирования.
6. Поясните суть метода наименьших квадратов.
7. Сравните разновидности адаптивных методов прогнозирования.
8. Как сравнить влияние различных факторов на результирующую переменную?
9. В чём заключаются задачи моделирования изучения спроса?
10. В чём заключаются особенности моделирования спроса на основе марковских процессов?
11. Поясните виды спроса и факторы влияния на них.
12. Приведите примеры использования однофакторных и многофакторных моделей спроса.

**Задание 5.1.** Фирма выпустила на рынок три конкурирующих (взаимозаменяемых) изделия. С целью определения спроса на эти изделия произведён опрос покупателей. Оказалось, что из  $n$  человек  $N_1$  покупает первое изделие,  $N_2$  – второе,  $N_3$  – третье ( $n = N_1 + N_2 + N_3$ ).

Повторный опрос этих же покупателей через неделю показал, что из  $N_1$  человек, покупавших первое изделие  $M_1$  продолжают его покупать,  $M_2$  стали покупать второе изделие, остальные – третье.

Из  $N_2$  человек, покупавших второе изделие, продолжают его покупать  $K_2$  человек,  $K_1$  стали покупать первое изделие, остальные – третье.

Из  $N_3$  человек, покупавших третье изделие,  $L_3$  человек продолжают его покупать,  $L_1$  и  $L_2$  – стали покупать соответственно первое и второе (табл. 5.15). Определить, какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом: 1) через неделю; 2) через две недели; 3) через год.

Варианты значений параметров задачи приведены в табл. 5.15.

Таблица 5.15

| Варианты значений параметров |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| № вар.                       | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $M_1$ | $M_2$ | $K_1$ | $K_2$ | $L_1$ | $L_2$ |
| 1                            | 80    | 8     | 12    | 65    | 8     | 5     | 2     | 6     | 4     |
| 2                            | 60    | 10    | 15    | 35    | 25    | 4     | 5     | 5     | 8     |
| 3                            | 50    | 40    | 10    | 20    | 30    | 10    | 15    | 4     | 5     |
| 4                            | 40    | 70    | 90    | 10    | 30    | 15    | 45    | 40    | 20    |
| 5                            | 30    | 80    | 190   | 10    | 15    | 30    | 40    | 10    | 15    |
| 6                            | 50    | 20    | 30    | 20    | 25    | 8     | 10    | 4     | 6     |
| 7                            | 60    | 30    | 110   | 50    | 6     | 8     | 15    | 20    | 30    |
| 8                            | 70    | 20    | 60    | 35    | 15    | 4     | 13    | 15    | 25    |
| 9                            | 80    | 45    | 180   | 70    | 4     | 16    | 20    | 40    | 60    |
| 10                           | 90    | 20    | 60    | 80    | 6     | 7     | 11    | 10    | 20    |
| 11                           | 120   | 100   | 40    | 70    | 30    | 15    | 80    | 15    | 5     |
| 12                           | 150   | 50    | 20    | 100   | 35    | 3     | 40    | 7     | 8     |
| 13                           | 130   | 70    | 100   | 90    | 25    | 7     | 60    | 15    | 40    |
| 14                           | 140   | 85    | 75    | 75    | 45    | 10    | 70    | 20    | 30    |
| 15                           | 160   | 40    | 100   | 105   | 35    | 8     | 30    | 35    | 5     |
| 16                           | 170   | 200   | 130   | 100   | 40    | 40    | 150   | 30    | 40    |
| 17                           | 180   | 400   | 120   | 95    | 45    | 80    | 230   | 25    | 60    |
| 18                           | 200   | 40    | 160   | 110   | 60    | 4     | 32    | 65    | 70    |
| 19                           | 80    | 70    | 50    | 30    | 20    | 40    | 25    | 14    | 16    |
| 20                           | 30    | 40    | 130   | 25    | 2     | 10    | 20    | 20    | 100   |
| 21                           | 35    | 80    | 15    | 30    | 3     | 16    | 50    | 4     | 9     |
| 22                           | 70    | 50    | 80    | 40    | 10    | 10    | 32    | 20    | 50    |
| 23                           | 150   | 40    | 70    | 105   | 25    | 14    | 20    | 40    | 20    |
| 24                           | 40    | 200   | 160   | 25    | 5     | 40    | 120   | 40    | 100   |
| 25                           | 170   | 150   | 180   | 140   | 10    | 110   | 32    | 20    | 50    |
| 26                           | 72    | 20    | 60    | 35    | 15    | 4     | 13    | 15    | 25    |
| 27                           | 80    | 47    | 180   | 70    | 4     | 16    | 20    | 40    | 60    |

**Задание 5.2.** По имеющемуся тренд–сезонному временному ряду  $x_t$  ( $t = \overline{1, n}$ ) получить прогнозную мультипликативную модель Хольта–Уинтерса и выполнить прогноз ряда на один временной шаг. Необходимо:

1. Методом наименьших квадратов или графически по первым  $L$  значениям временного ряда оценить начальные значения параметров  $\hat{a}_{1,0}, \hat{a}_{2,0}$ .

2. Начальное значение коэффициентов сезонности получить делением первых  $L$  фактических значений ряда  $x_t$  на их оценки, вычисленные по линейной модели  $\hat{x}_t = \hat{a}_{1,0} + \hat{a}_{2,0}t$ ; ( $t = \overline{1, L}$ ).

3. Параметры сглаживания принять равными:  $\alpha_1 = 0,3$ ;  $\alpha_2 = 0,2$ ;  $\alpha_3 = 0,4$ .

4. По формулам мультипликативной модели Хольта–Уинтерса произвести расчёт параметров и значений показателя  $x_t$  ( $t = \overline{1, n}$ ), начиная с  $x_1$ .

5. Составить таблицу и графики динамики изменения параметров:

$$t, \hat{x}_t, \hat{a}_{1,t}, \hat{a}_{2,t}, x_t, \hat{f}_t, \varepsilon_t = x_t - \hat{x}_t, \varepsilon_t^{отн} = \frac{|\varepsilon_t|}{|x_t|}, t = \overline{1, n}.$$

6. Вычислить ошибки расчётов: среднюю арифметическую, среднюю квадратическую, среднюю по модулю.

7. Сделать прогноз ряда на один шаг вперёд; т.е. получить значение  $x_{n+1}$ .

8. Составить ретропрогноз на последний цикл ряда.

9. Исследовать адекватность полученной модели.

10. Исходным данным дать физическое толкование и проанализировать полученные результаты.

Ниже приведены **варианты** значений экономических рядов.

**Вариант № 1:** 12,6; 24,1; 40,4; 12,8; 13,7; 24,7; 42,7; 12,6; 13,4; 25,2; 50,1; 15,2; 14,4; 27,3; 53,6; 15,7; 15,9; 29,4; 58,8; 16,4.

**Вариант № 2:** 28; 22; 20; 24; 27; 29; 27; 25; 30; 32; 33; 27; 26; 28; 32; 34; 29; 30; 33; 35; 36; 31; 30; 37; 38.

**Вариант № 3:** 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7.

**Вариант № 4:** 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7.

**Вариант № 5:** 62,03; 69,9; 78,11; 89,14; 99,29; 111,06; 114,89; 130,13; 144,04; 166,13; 176,97; 185,06; 195,42; 202,34; 207,92; 214,57; 242,96.

**Вариант № 6:** 7,9; 9,2; 10,2; 10,8; 9,9; 8,8; 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2.

**Вариант № 7:** 3; 3,8; 3,1; 3,2; 3,4; 4,7; 4,2; 4,9; 5; 5,7; 5,2; 5,1.

**Вариант № 8:** 19,7; 20,4; 22,8; 20,7; 21,2; 22,3; 23,4; 20,3; 20,7; 22,1; 22,7; 21,1; 21,2; 23,7; 24,2; 21,4; 21,6; 25,4; 26,5; 22,7.

**Вариант № 9:** 160; 130; 159; 165; 156; 141; 157; 172; 157; 145; 163; 177; 163; 150; 160; 180; 159.

**Вариант № 10:** 18; 17; 16; 15; 16; 14; 13; 12; 14; 13; 10; 10; 11; 10; 9; 8.

**Вариант № 11:** 55; 51; 50; 57; 54; 53; 59; 56; 54; 60; 58; 55.

**Вариант № 12:** 60,9; 60,8; 60,6; 60,4; 61,5; 65,6; 64,7; 63,8; 62,4; 67; 70,8; 68,7; 67,9; 65,2; 71,1; 74,6; 72,1; 69,4; 69,5; 72,5; 77,5; 72,8.

**Вариант № 13:** 10,8; 10,4; 10,3; 10,1; 11,3; 10,7; 10,5; 10,4; 12,3; 12; 11,4; 11; 13,3; 12,7; 12; 11,9.

**Вариант № 14:** 0,62; 0,61; 0,6; 0,63; 0,62; 0,61; 0,65; 0,64; 0,62; 0,67; 0,66; 0,65; 0,71; 0,7; 0,68.

**Вариант № 15:** 37,5; 37,1; 86,9; 101,5; 35,7; 47,1; 99,2; 102; 39; 35,5; 99,2; 90,5; 46,1; 45,4; 92; 92,7.

**Вариант № 16:** 3; 5; 6; 7; 6; 4; 6; 9; 10; 7; 5; 10; 11; 12; 9; 7; 10; 14; 12; 10; 11; 15; 13.

**Вариант № 17:** 8,4; 8,6; 8,8; 9,5; 8,5; 9,1; 9,2; 9,9; 9,7; 9,9; 10,1; 10,8; 10,5; 10,7; 12,2; 11,9; 12,3; 12,5; 13,2.

**Вариант № 18:** 15; 16; 18; 20; 17; 18; 20; 22; 19; 21; 23; 25; 20; 26; 28; 29.

**Вариант № 19:** 73; 75; 76; 76; 74; 73; 74; 78; 79; 77; 76; 75; 77; 80; 82; 83; 80; 79; 81; 85; 83; 81; 84.

**Вариант № 20:** 57; 59; 60; 58; 60; 63; 64; 62; 66; 67; 69; 68; 67; 68; 71; 69.

**Вариант № 21:** 13,7; 24,7; 42,7; 12,6; 13,4; 25,2; 50,1; 15,2; 14,4; 27,3; 53,6; 15,7; 15,9; 29,4; 58,8; 16,4.

**Вариант № 22:** 29; 27; 25; 30; 32; 33; 27; 26; 28; 32; 34; 29; 30; 33; 35; 36; 31; 30; 37; 38.

**Вариант № 23:** 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

**Вариант № 24:** 8,3; 8,7; 10,3; 10,7; 9,9; 8,6; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

**Вариант № 25:** 128; 130; 132; 131; 130; 129; 129; 132; 133; 132; 131; 132; 135; 136; 135; 133; 132; 135; 137; 136; 133.

**Вариант № 26:** 8,9; 9,1; 10,9; 10,8; 10,2; 8,9; 9,4; 9,7; 11,2; 11; 9,4; 9,3; 10,2; 10,1; 11,1; 12,2; 10,4; 9,7; 9,2; 9,6; 10,8; 11,4.

**Задание 5.3.** По имеющемуся тренд–сезонному временному ряду  $x_t$  ( $t = \overline{1, n}$ ) получить прогнозную аддитивную и мультипликативную модели ряда и выполнить прогноз этого ряда на два временных шага. Необходимо:

1. Определить значение периода  $L$  по максимальное значение автокорреляционной функции ряда.
2. Определить значения коэффициентов сезонности.
3. Определить коэффициенты линейного тренда.
4. Выполнить прогноз этого ряда на два временных шага.
5. Оценить качество модели: вычислить коэффициент детерминации и среднюю ошибку прогноза. Исследовать адекватность полученной модели.
6. Исходным данным дать физическое толкование (интерпретацию) и проанализировать полученные результаты.

Исходные данные взять из задания 5.2.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 6

1. Что означает отношение предпочтения?
2. Каким свойствам должна удовлетворять функция полезности?
3. Каков экономический смысл свойств функции полезности? Приведите пример функции полезности.
4. Сформулируйте задачу потребительского выбора. Что такое целевая функция потребителя?
5. Что такое предельная полезность и предельная норма замещения?
6. Поясните графическое определение предельной полезности.
7. Сравните модели Стоуна и Слуцкого.
8. Что такое линии безразличия потребительского выбора?

**Задание 6.1.** На основании данных о потреблении взаимозаменяемых и взаимодополняемых продуктов  $x_1$  и  $x_2$  в различных сочетаниях  $i$  (табл. 6.3), их цене  $P_1$  и  $P_2$ , полезности  $U$  и бюджете (доходах) потребителя  $R$  (табл. 6.4) построить кривую безразличия и определить оптимальный план потребления названных продуктов.

Варианты заданий приведены в табл. 6.3 и табл. 6.4.

Таблица 6.3

Исходные данные о потреблении продуктов  $x_1$  и  $x_2$

| №<br>$n/$<br>$n$ | ПРОДУКТЫ |      |      |      |      |      |      |          |      |     |     |      |     |     |
|------------------|----------|------|------|------|------|------|------|----------|------|-----|-----|------|-----|-----|
|                  | $x_{1i}$ |      |      |      |      |      |      | $x_{2i}$ |      |     |     |      |     |     |
|                  | $i$      |      |      |      |      |      |      | $i$      |      |     |     |      |     |     |
|                  | 1        | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 1        | 2    | 3   | 4   | 5    | 6   | 7   |
| 1                | 1,9      | 2,0  | 3,0  | 6,0  | 13,0 | 13,5 | 14,0 | 13,4     | 12,5 | 4,0 | 2,5 | 2,0  | 1,9 | 1,7 |
| 2                | 5,9      | 6,0  | 9,9  | 14,0 | 20,0 | 24   | 25   | 13,6     | 12,0 | 7,5 | 6,0 | 5,0  | 4,5 | 4,6 |
| 3                | 4,9      | 5,0  | 7,0  | 10,0 | 14,0 | 17,0 | 17,2 | 18,0     | 17,0 | 12  | 7,5 | 5,0  | 4,5 | 4,4 |
| 4                | 1,1      | 1,2  | 1,5  | 3,0  | 8,0  | 10   | 14,0 | 14,0     | 12,0 | 8,0 | 3,0 | 1,2  | 1,1 | 1,1 |
| 5                | 2,1      | 2,2  | 2,4  | 4,0  | 9,0  | 11,0 | 13,0 | 14,0     | 12,0 | 8,0 | 4,0 | 2,0  | 1,3 | 1,2 |
| 6                | 1,3      | 1,4  | 1,7  | 4,0  | 8,5  | 10,0 | 15,0 | 14,0     | 11,0 | 9,0 | 4,0 | 1,3  | 1,2 | 1,1 |
| 7                | 2,2      | 2,5  | 3,0  | 5,0  | 7,0  | 11,0 | 14,0 | 13,0     | 11,0 | 9,0 | 5,0 | 4,0  | 2,5 | 2,1 |
| 8                | 1,1      | 1,2  | 2,0  | 6,0  | 8,0  | 12,0 | 14,0 | 13,0     | 11,0 | 7,0 | 2,8 | 2,0  | 1,5 | 1,3 |
| 9                | 1,1      | 1,2  | 1,5  | 3,0  | 8,0  | 11,0 | 14,2 | 14,0     | 12,0 | 8,0 | 4,0 | 2,0  | 1,3 | 1,2 |
| 10               | 22,0     | 28,0 | 32,0 | 42,0 | 47,4 | 47,6 | 47,8 | 24,4     | 24,3 | 24  | 23  | 20,8 | 20  | 17  |
| 11               | 2,2      | 2,3  | 3,3  | 6,2  | 13,3 | 13,8 | 14,2 | 13,7     | 12,8 | 4,0 | 2,8 | 2,3  | 2,2 | 2,0 |
| 12               | 3,9      | 4,0  | 6,0  | 8,0  | 11,0 | 13,0 | 13,3 | 14,5     | 13,0 | 8,5 | 7,0 | 6,0  | 5,5 | 5,6 |
| 13               | 5,4      | 5,5  | 7,5  | 10,5 | 14,5 | 17,5 | 17,7 | 18,5     | 17,5 | 12  | 8,0 | 5,5  | 5,0 | 4,9 |
| 14               | 1,4      | 1,5  | 1,8  | 3,3  | 8,3  | 10,3 | 14,3 | 14,3     | 12,3 | 8,3 | 3,3 | 1,5  | 1,4 | 1,4 |
| 15               | 1,9      | 2,0  | 2,2  | 3,8  | 8,8  | 10,8 | 12,8 | 13,8     | 11,8 | 7,8 | 3,8 | 1,8  | 1,1 | 1,0 |

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>16</b> | 1,4  | 1,5  | 1,8  | 4,1  | 8,6  | 10,1 | 15,1 | 14,1 | 11,1 | 9,1 | 4,1 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |
| <b>17</b> | 2,1  | 2,4  | 2,9  | 4,9  | 6,9  | 10,9 | 13,8 | 13,9 | 11,7 | 9,2 | 5,2 | 3,8 | 2,5 | 2,3 |
| <b>18</b> | 21,8 | 27,8 | 32,7 | 40,9 | 45,4 | 46,5 | 46,6 | 23,6 | 23,3 | 23  | 22  | 21  | 20  | 17  |
| <b>19</b> | 1,6  | 1,9  | 2,3  | 6,4  | 8,1  | 12,0 | 14,1 | 13,0 | 11,5 | 7,2 | 3,2 | 2,0 | 1,9 | 1,7 |
| <b>20</b> | 2,1  | 2,2  | 2,5  | 4,0  | 9,0  | 11,0 | 15,0 | 15,0 | 13,0 | 9,0 | 5,0 | 3,0 | 2,3 | 2,2 |
| <b>21</b> | 2,9  | 3,0  | 4,0  | 7,0  | 14,0 | 14,5 | 15,0 | 14,4 | 13,5 | 5,0 | 3,5 | 3,0 | 2,9 | 2,7 |
| <b>22</b> | 2,5  | 2,6  | 5,6  | 7,4  | 9,5  | 11,4 | 11,8 | 12,0 | 11,6 | 7,0 | 5,4 | 4,0 | 4,1 | 4,0 |
| <b>23</b> | 3,9  | 4,0  | 6,0  | 9,0  | 13,0 | 16,0 | 16,2 | 17,0 | 16,0 | 11  | 6,5 | 4,0 | 3,5 | 3,4 |
| <b>24</b> | 1,0  | 1,1  | 1,4  | 3,0  | 8,0  | 10,0 | 14,0 | 14,0 | 12,0 | 8,0 | 3,0 | 1,1 | 1,0 | 1,0 |
| <b>25</b> | 1,1  | 1,2  | 1,4  | 3,0  | 8,0  | 10,0 | 12,0 | 13,0 | 11,0 | 7,0 | 3,0 | 1,3 | 1,1 | 1,1 |
| <b>26</b> | 1,5  | 1,6  | 1,9  | 4,2  | 8,8  | 10,2 | 15,2 | 14,2 | 11,2 | 9,2 | 4,2 | 1,5 | 1,4 | 1,3 |

Таблица 6.4

Цены и полезность продуктов. Доход потребителей

| №<br>варианта | ПОКАЗАТЕЛИ |       |       |     |
|---------------|------------|-------|-------|-----|
|               | $U$        | $P_1$ | $P_2$ | $R$ |
| 1             | 15         | 4     | 4,9   | 37  |
| 2             | 18         | 5     | 10,3  | 100 |
| 3             | 13         | 8     | 1,9   | 72  |
| 4             | 12         | 2     | 1,8   | 14  |
| 5             | 11         | 5     | 2,6   | 14  |
| 6             | 15         | 30    | 8,2   | 150 |
| 7             | 30         | 4     | 30,4  | 80  |
| 8             | 14         | 15    | 4,8   | 90  |
| 9             | 12         | 20    | 0,9   | 80  |
| 10            | 22         | 6     | 1,5   | 120 |
| 11            | 17         | 6     | 6,9   | 39  |
| 12            | 20         | 7     | 12,3  | 102 |
| 13            | 15         | 10    | 3,8   | 74  |
| 14            | 14         | 4     | 3,2   | 16  |
| 15            | 13         | 6     | 2,6   | 16  |
| 16            | 17         | 32    | 10,2  | 152 |
| 17            | 32         | 6     | 32,4  | 82  |
| 18            | 16         | 17    | 6,6   | 92  |
| 19            | 14         | 22    | 2,9   | 82  |
| 20            | 14         | 8     | 3,5   | 122 |
| 21            | 16         | 5     | 5,9   | 38  |
| 22            | 19         | 6     | 11,3  | 101 |
| 23            | 12         | 3     | 2,6   | 15  |
| 24            | 14         | 9     | 2,8   | 73  |
| 25            | 13         | 3     | 2,5   | 15  |



|    |    |   |     |    |
|----|----|---|-----|----|
| 26 | 18 | 4 | 4,9 | 37 |
|----|----|---|-----|----|

**Задание 6.2.** Дана функция полезности  $U = (x_1 - a_1)^{b_1} (x_2 - a_2)^{b_2}$ , цены  $P_1$  и  $P_2$ , доход  $R$ . Найти точку локального рыночного равновесия потребителя. Пусть цена  $P_2$  увеличилась на  $\beta$ , %. Найти новую точку локального равновесия. Сколько денег надо доплатить для того, чтобы не снизился уровень потребления (полезности, благосостояния). Найти структуру новой точки равновесия.

#### Исходные данные

| № Вар. | Параметры функции предпочтения |       |       |       | Цены продуктов |       | Доход $R$ | Увеличение цены $P_2$ $\beta$ , % |
|--------|--------------------------------|-------|-------|-------|----------------|-------|-----------|-----------------------------------|
|        | $a_1$                          | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $P_1$          | $P_2$ |           |                                   |
| 1      | 1,3                            | 0,65  | 0,32  | 0,2   | 7,1            | 2,85  | 850       | 136                               |
| 2      | 4,6                            | 0,38  | 0,65  | 0,32  | 6,5            | 4,2   | 426       | 41                                |
| 3      | 2,3                            | 0,55  | 0,45  | 0,25  | 5,5            | 6,2   | 750       | 150                               |
| 4      | 1,4                            | 0,96  | 0,42  | 0,3   | 6,1            | 2,75  | 530       | 96                                |
| 5      | 5,2                            | 0,78  | 0,52  | 0,4   | 8,2            | 3,26  | 824       | 152                               |
| 6      | 3,4                            | 0,58  | 0,47  | 0,42  | 2,5            | 5,5   | 520       | 95                                |
| 7      | 2,4                            | 0,57  | 0,42  | 0,43  | 5,6            | 6,3   | 556       | 26                                |
| 8      | 3,2                            | 0,65  | 0,33  | 0,17  | 8,2            | 1,23  | 920       | 150                               |
| 9      | 2,2                            | 0,55  | 0,41  | 0,19  | 6,5            | 1,05  | 450       | 147                               |
| 10     | 1,5                            | 0,25  | 0,22  | 0,11  | 6,2            | 2,03  | 511       | 44                                |
| 11     | 5,5                            | 0,39  | 0,33  | 0,28  | 8,8            | 5,85  | 700       | 53                                |
| 12     | 1,7                            | 0,42  | 0,66  | 0,14  | 7,3            | 5,41  | 850       | 26                                |
| 13     | 2,9                            | 0,23  | 0,36  | 0,19  | 6,3            | 3,21  | 530       | 54                                |
| 14     | 6,2                            | 0,96  | 0,45  | 0,16  | 4,3            | 4,26  | 532       | 236                               |
| 15     | 4,6                            | 0,84  | 0,94  | 0,34  | 8,2            | 5,42  | 651       | 197                               |
| 16     | 2,7                            | 0,95  | 0,41  | 0,21  | 7,7            | 2,13  | 750       | 195                               |
| 17     | 3,5                            | 0,34  | 0,45  | 0,22  | 6,4            | 3,12  | 987       | 178                               |
| 18     | 1,9                            | 0,63  | 0,44  | 0,26  | 7,5            | 2,56  | 855       | 65                                |
| 19     | 2,8                            | 1,1   | 0,64  | 0,15  | 6,6            | 4,96  | 864       | 32                                |
| 20     | 2,2                            | 0,97  | 0,53  | 0,32  | 7,9            | 3,86  | 900       | 142                               |

**Задание 6.3.** Целевая функция потребителя зависит от двух благ  $x_1$  и  $x_2$  следующим образом:  $U(x_1, x_2) = a_1 1,5 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \rightarrow \max$ . Известны цены благ ( $P_1$  и  $P_2$ ) и доход потребителя  $R$ . Найти точку локального рыночного равновесия потребителя. Пусть цена  $P_2$  становится равной  $P_{2H}$ . Каков необходимый размер компенсации? Какова новая структура потребительского набора?

Исходные данные

| № вар. | Параметры функции предпочтения |       |       | Цены продуктов |       | Доход $R$ | Новая цена $P_{2H}$ |
|--------|--------------------------------|-------|-------|----------------|-------|-----------|---------------------|
|        | $a_1$                          | $b_1$ | $b_2$ | $P_1$          | $P_2$ |           |                     |
| 1      | 2,85                           | 0,7   | 0,9   | 28             | 42    | 460       | 53                  |
| 2      | 3,1                            | 0,5   | 0,7   | 40             | 70    | 800       | 90                  |
| 3      | 4,5                            | 0,6   | 0,8   | 25             | 34    | 505       | 55                  |
| 4      | 1,7                            | 0,4   | 0,8   | 100            | 120   | 685       | 135                 |
| 5      | 4                              | 0,2   | 0,6   | 115            | 145   | 745       | 175                 |
| 6      | 0,5                            | 0,3   | 0,5   | 11             | 19    | 400       | 25                  |
| 7      | 1,75                           | 0,4   | 0,8   | 25             | 40    | 550       | 55                  |
| 8      | 3                              | 0,1   | 0,2   | 35             | 45    | 602       | 65                  |
| 9      | 2,5                            | 0,3   | 0,6   | 40             | 50    | 500       | 60                  |
| 10     | 1,5                            | 0,2   | 0,4   | 20             | 30    | 450       | 45                  |
| 11     | 2,8                            | 0,7   | 0,9   | 63             | 85    | 950       | 100                 |
| 12     | 3,2                            | 0,2   | 0,6   | 81             | 100   | 995       | 125                 |
| 13     | 1,1                            | 0,1   | 0,3   | 79             | 95    | 960       | 125                 |
| 14     | 4,7                            | 0,4   | 0,8   | 64             | 74    | 850       | 86                  |
| 15     | 2,3                            | 0,6   | 0,8   | 87             | 99    | 950       | 113                 |
| 16     | 2                              | 0,1   | 0,4   | 94             | 102   | 900       | 125                 |
| 17     | 1,9                            | 0,2   | 0,5   | 229            | 250   | 999       | 265                 |
| 18     | 5                              | 0,3   | 0,6   | 34             | 49    | 465       | 70                  |
| 19     | 3,2                            | 0,4   | 0,6   | 65             | 76    | 888       | 90                  |
| 20     | 4,2                            | 0,5   | 0,8   | 86             | 93    | 950       | 110                 |
| 21     | 2,4                            | 0,7   | 0,9   | 75             | 90    | 800       | 100                 |
| 22     | 3,6                            | 0,4   | 0,5   | 46             | 77    | 750       | 99                  |
| 23     | 3,3                            | 0,5   | 0,9   | 29             | 55    | 650       | 66                  |
| 24     | 1                              | 0,3   | 0,5   | 15             | 35    | 500       | 55                  |

**Задание 6.4.** В некоторой отрасли действуют 2 фирмы с функциями издержек  $C_1(q_1) = a_1q_1^2 + a_2q_1$ ;  $C_2(q_2) = b_1q_2^2 + b_2q_2$ . Спрос на продукцию отрасли задан функцией  $D(P) = q_1 + q_2 = d_1 - d_2P$ .

В предположении, что фирмы взаимодействуют в соответствии с моделью Курно, определить цену продукции и равновесные объёмы производства для каждой фирмы и всей отрасли.

#### Исходные данные

| №<br>вари-<br>анта | Параметры моделей издержек фирм и спроса |       |       |       |       |       |
|--------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|
|                    | $a_1$                                    | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $d_1$ | $d_2$ |
| 1                  | 0,7                                      | 3,3   | 0,8   | 4,1   | 373   | 2,4   |
| 2                  | 1,8                                      | 5,2   | 1,7   | 3,3   | 582   | 3,1   |
| 3                  | 1,7                                      | 1,3   | 1,8   | 5,2   | 2133  | 0,9   |
| 4                  | 0,8                                      | 8,4   | 0,7   | 1,3   | 884   | 5,0   |
| 5                  | 3,7                                      | 3,7   | 1,8   | 8,4   | 307   | 4,7   |
| 6                  | 1,8                                      | 2,8   | 1,7   | 3,7   | 298   | 0,8   |
| 7                  | 0,7                                      | 4,7   | 2,8   | 2,8   | 4227  | 3,7   |
| 8                  | 4,8                                      | 5,0   | 4,7   | 4,7   | 1440  | 2,8   |
| 9                  | 1,7                                      | 3,1   | 5,8   | 5,0   | 321   | 4,7   |
| 10                 | 2,8                                      | 2,8   | 2,7   | 3,1   | 278   | 5,8   |
| 11                 | 2,7                                      | 4,4   | 2,8   | 2,8   | 373   | 1,7   |
| 12                 | 5,8                                      | 2,2   | 4,7   | 4,4   | 582   | 3,8   |
| 13                 | 2,7                                      | 4,7   | 2,8   | 2,2   | 733   | 0,7   |
| 14                 | 2,8                                      | 6,4   | 3,7   | 4,7   | 884   | 5,8   |
| 15                 | 0,7                                      | 5,1   | 0,8   | 6,4   | 307   | 3,3   |
| 16                 | 5,8                                      | 4,9   | 4,7   | 5,1   | 1298  | 5,6   |
| 17                 | 3,7                                      | 5,8   | 3,8   | 4,9   | 4227  | 1,3   |
| 18                 | 0,8                                      | 3,7   | 0,6   | 5,8   | 2240  | 0,4   |
| 19                 | 4,7                                      | 2,8   | 7,8   | 3,7   | 1321  | 3,7   |
| 20                 | 5,8                                      | 4,3   | 4,7   | 2,8   | 473   | 0,8   |
| 21                 | 3,7                                      | 5,8   | 6,5   | 4,3   | 582   | 4,7   |
| 22                 | 0,8                                      | 3,7   | 0,4   | 5,8   | 833   | 5,1   |
| 23                 | 4,7                                      | 6,4   | 5,8   | 3,7   | 774   | 3,0   |
| 24                 | 6,5                                      | 5,1   | 3,7   | 6,4   | 3070  | 1,2   |
| 25                 | 1,4                                      | 3,1   | 1,8   | 5,1   | 2980  | 5,8   |

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 7

1. Поясните классы моделей математического программирования.
2. Какие приёмы используются для приведения задачи линейного программирования к каноническому виду?
3. Каким образом задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации и наоборот?
4. Охарактеризуйте особенности решения транспортной задачи.
5. Укажите пути нахождения оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке.
8. Поясните механизм использования метода северо–западного угла.
9. Поясните методику использования метода потенциалов.

**Задание 7.1.** Объём производства определяется производственной функцией Кобба–Дугласа в виде  $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ , стоимость единицы капитальных  $C_K$  и трудовых ресурсов  $C_L$  известны (см. табл. исходных данных, все величины измеряются в условных единицах). Производство имеет ресурсное ограничение  $R$ .

Определить оптимальное распределение ресурсов, обеспечивающее максимальный выпуск продукции.

Определить параметр (множитель) Лагранжа  $\lambda$ .

Дать физическую интерпретацию всех величин.

### Исходные данные

| №<br>вари-<br>анта | Параметры модели |       |       | Ресурсное<br>ограниче-<br>ние $R$ | Стоимость<br>единицы<br>капитала $C_K$ | Стоимость<br>единицы<br>труда $C_L$ |
|--------------------|------------------|-------|-------|-----------------------------------|--|-------------------------------------|
|                    | $a_0$            | $a_1$ | $a_2$ |                                   |  |                                     |
| 1                  | 3,7              | 0,24  | 0,89  | 947                               | 3,3                                    | 2,4                                 |
| 2                  | 12,8             | 0,39  | 0,81  | 6500                              | 5,2                                    | 3,1                                 |
| 3                  | 4,7              | 0,17  | 0,52  | 1000                              | 5,3                                    | 2,4                                 |
| 4                  | 5,8              | 0,35  | 0,71  | 1653                              | 8,4                                    | 5,0                                 |
| 5                  | 0,7              | 0,29  | 0,66  | 2407                              | 3,7                                    | 4,7                                 |
| 6                  | 7,8              | 0,39  | 0,81  | 985                               | 2,8                                    | 5,8                                 |
| 7                  | 0,8              | 0,17  | 0,82  | 3349                              | 4,7                                    | 3,7                                 |
| 8                  | 5,8              | 0,35  | 0,71  | 883                               | 5,0                                    | 2,8                                 |
| 9                  | 13,7             | 0,24  | 0,69  | 1247                              | 3,1                                    | 4,7                                 |
| 10                 | 2,8              | 0,55  | 0,85  | 653                               | 2,8                                    | 5,8                                 |
| 11                 | 0,7              | 0,31  | 0,81  | 1349                              | 4,4                                    | 6,7                                 |
| 12                 | 5,8              | 0,42  | 0,82  | 6530                              | 2,2                                    | 3,8                                 |
| 13                 | 9,7              | 0,31  | 0,71  | 2247                              | 4,7                                    | 7,7                                 |

|    |     |      |      |      |     |      |
|----|-----|------|------|------|-----|------|
| 14 | 2,8 | 1,24 | 0,12 | 320  | 9,4 | 15,8 |
| 15 | 4,7 | 0,39 | 0,85 | 1653 | 5,1 | 3,3  |
| 16 | 5,8 | 0,27 | 0,80 | 2350 | 4,9 | 5,6  |
| 17 | 3,7 | 0,35 | 0,82 | 6500 | 5,8 | 1,3  |
| 18 | 8,8 | 0,24 | 0,71 | 2400 | 3,7 | 8,4  |
| 19 | 0,7 | 0,34 | 0,85 | 2653 | 2,8 | 3,7  |
| 20 | 5,8 | 0,27 | 0,81 | 3049 | 4,3 | 3,8  |
| 21 | 3,7 | 0,35 | 0,82 | 4500 | 5,8 | 4,7  |
| 22 | 7,8 | 0,54 | 0,71 | 870  | 3,7 | 5,1  |
| 23 | 4,7 | 0,24 | 0,86 | 2400 | 6,4 | 3,0  |
| 24 | 6,5 | 0,39 | 0,77 | 6500 | 5,1 | 5,2  |
| 25 | 4,4 | 0,19 | 0,76 | 1560 | 3,1 | 5,8  |

**Задание 7.2.** Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Известны потребности в сырье каждого из предприятий. Сырьё сосредоточено в трёх местах его получения, запасы которых известны. На каждое из предприятий сырьё может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются соответствующей матрицей (см. варианты задания). Составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 1.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 7                 | 4     | 17    | 5     | 120    |
| $A_2$              | 4                 | 2     | 12    | 8     | 280    |
| $A_3$              | 3                 | 8     | 18    | 2     | 160    |
| Потребности        | 130               | 220   | 60    | 70    |        |

Вариант 2.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 4                 | 8     | 4     | 5     | 420    |
| $A_2$              | 6                 | 2     | 6     | 8     | 230    |
| $A_3$              | 3                 | 11    | 5     | 12    | 560    |
| Потребности        | 230               | 320   | 160   | 170   |        |

Вариант 3.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 57    | 35    | 27    | 200    |
| $A_2$              | 12                | 62    | 34    | 32    | 280    |
| $A_3$              | 11                | 68    | 33    | 11    | 320    |
| Потребности        | 300               | 220   | 130   | 200   |        |

Вариант 4.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 24                | 8     | 34    | 5     | 520    |
| $A_2$              | 36                | 22    | 16    | 8     | 300    |
| $A_3$              | 43                | 11    | 25    | 12    | 600    |
| Потребности        | 200               | 320   | 400   | 170   |        |

Вариант 5.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 2                 | 4     | 7     | 3     | 510    |
| $A_2$              | 5                 | 6     | 8     | 9     | 90     |
| $A_3$              | 7                 | 2     | 4     | 8     | 120    |
| Потребности        | 270               | 140   | 200   | 110   |        |

Вариант 6.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 4                 | 8     | 4     | 15    | 420    |
| $A_2$              | 6                 | 22    | 6     | 17    | 400    |
| $A_3$              | 3                 | 11    | 5     | 12    | 560    |
| Потребности        | 230               | 350   | 160   | 270   |        |

Вариант 7.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 14    | 17    | 27    | 220    |
| $A_2$              | 12                | 16    | 12    | 32    | 280    |
| $A_3$              | 11                | 13    | 18    | 11    | 320    |
| Потребности        | 300               | 180   | 130   | 200   |        |

Вариант 8.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 6                 | 4     | 7     | 9     | 200    |
| $A_2$              | 5                 | 1     | 8     | 12    | 270    |
| $A_3$              | 11                | 6     | 4     | 3     | 130    |
| Потребности        | 120               | 80    | 240   | 160   |        |

Вариант 9.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 31                | 7     | 29    | 5     | 120    |
| $A_2$              | 34                | 2     | 26    | 8     | 280    |
| $A_3$              | 43                | 8     | 17    | 2     | 160    |
| Потребности        | 130               | 220   | 60    | 70    |        |

Вариант 10.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 14                | 8     | 17    | 35    | 420    |
| $A_2$              | 16                | 2     | 12    | 38    | 230    |
| $A_3$              | 13                | 11    | 18    | 12    | 560    |
| Потребности        | 230               | 320   | 160   | 170   |        |

Вариант 11.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 12                | 4     | 7     | 13    | 510    |
| $A_2$              | 5                 | 16    | 8     | 9     | 90     |
| $A_3$              | 7                 | 2     | 14    | 18    | 120    |
| Потребности        | 270               | 140   | 200   | 110   | 720    |

Вариант 12.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 14                | 8     | 34    | 15    | 500    |
| $A_2$              | 6                 | 22    | 16    | 18    | 400    |
| $A_3$              | 13                | 15    | 25    | 12    | 550    |
| Потребности        | 200               | 390   | 400   | 170   |        |

Вариант 13.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 14                | 7     | 9     | 5     | 180    |
| $A_2$              | 16                | 2     | 6     | 8     | 280    |
| $A_3$              | 13                | 8     | 21    | 12    | 460    |
| Потребности        | 180               | 420   | 60    | 70    |        |

Вариант 14.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 4                 | 8     | 4     | 7     | 520    |
| $A_2$              | 6                 | 22    | 11    | 4     | 400    |
| $A_3$              | 3                 | 11    | 5     | 3     | 560    |
| Потребности        | 230               | 350   | 160   | 270   |        |

Вариант 15.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 14    | 5     | 7     | 120    |
| $A_2$              | 2                 | 6     | 14    | 32    | 280    |
| $A_3$              | 11                | 13    | 3     | 11    | 320    |
| Потребности        | 200               | 280   | 130   | 200   |        |

Вариант 16.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 14                | 8     | 7     | 5     | 520    |
| $A_2$              | 11                | 6     | 4     | 8     | 300    |
| $A_3$              | 13                | 11    | 3     | 12    | 600    |
| Потребности        | 180               | 320   | 400   | 170   |        |

Вариант 17.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 7                 | 4     | 9     | 5     | 120    |
| $A_2$              | 4                 | 2     | 6     | 8     | 280    |
| $A_3$              | 3                 | 8     | 5     | 2     | 160    |
| Потребности        | 130               | 220   | 60    | 70    |        |

Вариант 18.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 8     | 4     | 5     | 420    |
| $A_2$              | 7                 | 2     | 6     | 8     | 230    |
| $A_3$              | 10                | 11    | 5     | 12    | 560    |
| Потребности        | 230               | 320   | 160   | 170   |        |

Вариант 19.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 57    | 35    | 27    | 400    |
| $A_2$              | 12                | 62    | 34    | 32    | 280    |
| $A_3$              | 11                | 68    | 33    | 20    | 320    |
| Потребности        | 300               | 220   | 130   | 200   |        |

Вариант 20.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 27                | 14    | 34    | 5     | 520    |
| $A_2$              | 32                | 16    | 16    | 8     | 300    |
| $A_3$              | 20                | 13    | 25    | 12    | 600    |
| Потребности        | 200               | 320   | 400   | 170   |        |

Вариант 21.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 4                 | 8     | 4     | 7     | 490    |
| $A_2$              | 6                 | 22    | 11    | 4     | 410    |
| $A_3$              | 3                 | 11    | 5     | 3     | 560    |
| Потребности        | 250               | 340   | 160   | 270   |        |

Вариант 22.



| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 8                 | 14    | 5     | 7     | 220    |
| $A_2$              | 2                 | 6     | 14    | 32    | 380    |
| $A_3$              | 11                | 13    | 3     | 11    | 420    |
| Потребности        | 270               | 290   | 230   | 200   |        |

Вариант 23.

| Пункты отправления | Пункты назначения |       |       |       | Запасы |
|--------------------|-------------------|-------|-------|-------|--------|
|                    | $B_1$             | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |        |
| $A_1$              | 14                | 8     | 7     | 5     | 330    |
| $A_2$              | 11                | 6     | 4     | 8     | 350    |
| $A_3$              | 13                | 11    | 3     | 12    | 580    |
| Потребности        | 280               | 320   | 370   | 190   |        |

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 8

1. Приведите классификацию игр и поясните их особенности.
2. Что такое минимаксная и максиминная стратегии игроков?
3. Что такое чистая и смешанная стратегии игроков?
4. В чём заключается геометрическое решение игровых задач?
6. Как игры сводятся к задачам линейного программирования?
7. В чём суть проблемы последовательного принятия решения?
8. Как строится и анализируется дерево решений?

**Задание 8.1.** Исследовать решение трёх игровых задач. Требуется:

1. Найти графическое решение игры № 1 (табл. 8.2).
2. Найти решение игры № 2.
3. Составить двойственную пару задач линейного программирования (прямую и обратную) для игры № 3. Указать возможные пути решения этих задач, их содержательный смысл.
4. Проанализировать результаты. Дать содержательную трактовку (физическую интерпретацию) имеющихся данных и полученных решений.

Варианты заданий приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Варианты исходных данных (матрицы платежей)

| № вар. | Игра № 1  | Игра № 2  | Игра № 3   |
|--------|---|---|--|
| 1      | $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 19 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ |
| 2      | $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$     |

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
| 3  | $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 10 & 13 & 19 & 22 \\ 17 & 16 & 18 & 19 \\ 9 & 12 & 25 & 11 \end{pmatrix}$            | $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 10 & 5 & 8 & 14 \\ 4 & 12 & 5 & 18 \end{pmatrix}$       |
| 4  | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ -6 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$      |
| 5  | $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 102 & 13 & 111 & 212 \\ 137 & 126 & 120 & 129 \\ 49 & 92 & 115 & 151 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$        |
| 6  | $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 90 & 83 & 119 & 212 \\ 107 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 102 & 35 & 211 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} -1 & -7 & 28 & 2 \\ 17 & 12 & 8 & 21 \\ 0 & 31 & 10 & 11 \end{pmatrix}$  |
| 7  | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$                      | $\begin{pmatrix} 5 & 37 & 9 & 0 \\ 7 & 10 & 28 & 12 \\ 19 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$     |
| 8  | $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 190 & 83 & 119 & 212 \\ 107 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 102 & 35 & 211 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ 9 & 2 & 52 & 11 \end{pmatrix}$      |
| 9  | $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 & 9 \\ 15 & 12 & 8 & 14 \\ -7 & 9 & 5 & -8 \end{pmatrix}$                 | $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 19 & 13 \\ 18 & 17 & 4 & 6 \\ 12 & 15 & 5 & 21 \end{pmatrix}$   |
| 10 | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 9 \\ 15 & 26 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$                    | $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$        |
| 11 | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$                      | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 19 & -3 \\ 7 & 14 & 8 & 12 \\ 15 & 2 & 0 & -11 \end{pmatrix}$   |
| 12 | $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 & 2 \\ 11 & 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 4 \\ -6 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$      |
| 13 | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$                   | $\begin{pmatrix} 13 & 10 & -5 & 12 \\ -7 & 10 & 8 & 25 \\ 19 & 3 & 18 & 13 \end{pmatrix}$ |
| 14 | $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$                      | $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 & 12 \\ 7 & 0 & 8 & -8 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$        |

|    |   |   |  |
|----|---|---|--|
| 15 | $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$                   | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 19 & -3 \\ 7 & 1 & 18 & 14 \\ 9 & 2 & 10 & -11 \end{pmatrix}$    |
| 16 | $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$               | $\begin{pmatrix} 13 & 3 & -5 & 12 \\ -7 & 0 & 10 & 41 \\ 19 & 12 & -23 & 11 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$    | $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 & 2 \\ 12 & 6 & 8 & 14 \\ 5 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$               | $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 19 & 13 \\ 7 & 16 & 8 & 14 \\ 19 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$     |
| 18 | $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$  | $\begin{pmatrix} 90 & 83 & 79 & 22 \\ 197 & 106 & 108 & 149 \\ 129 & 72 & 35 & 211 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 12 \\ 7 & 11 & 8 & 14 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$         |

**Задание 8.2.** Фирма рассматривает вопрос о приобретении ценных бумаг (акций) некоторого эмитента.

Если рейтинг рассматриваемых акций возрастает, то такое приобретение окажется фирме выгодным. Известен процент выигрыша при удачной стратегии (проигрыша при неблагоприятном состоянии рынка).

Фирма может либо сразу принять решение о покупке пакета акций, либо выполнить (заказать) исследование рынка, что бы лучше оценить относительное правдоподобие повышения или спада рейтинга акций.

Имеем пространство действий фирмы:  $A = \{a_1, a_2, a_3\} = \{\text{изучить рейтинг акций, купить пакет акций, не покупать акции}\}$ .

Пространство параметров состояний рынка ценных бумаг:  $B = \{b_1, b_2\} = \{\text{рейтинг акций возрос, рейтинг снизился}\}$ .

Выборочное пространство обследования рынка ценных бумаг:  $X = \{x_1, x_2\} = \{\text{прогноз повышения рейтинга акций, прогноз снижения рейтинга акций}\}$ .

Вероятности всех неопределённых исходов рассматриваемой задачи приведены в табл. 8.3.

Требуется на основе построения дерева решений проанализировать стратегию действий фирмы и оценить её возможные результаты.

#### **Необходимо:**

1. Записать логическую структуру дерева в хронологическом порядке, описывая узлы решений и неопределённость вместе со всеми разветвлениями в каждом узле.

2. Определить вероятность для всех дуг (ветвей) неопределённостей, позаботившись о соответствующих условиях для каждой дуги.

3. Вычислить и приписать значения выигрыша финальным дугам.

4. Двигаясь по дереву справа налево, вычислить математическое ожидание выигрыша в узлах неопределённостей, максимизировать выигрыш в узлах решений и, таким образом, определить наилучшие действия и их ожидаемые выигрыши.

5. Проанализировать полученные результаты для различных затрат на обследование рейтинга акций.

6. Сколько максимально может стоить исследование рынка?

7. Каков выигрыш инвестора при покупке акций без исследования рынка?

Таблица 8.3

Варианты исходных данных

| Номер<br>вари-<br>анта | Вероятности<br>исходов<br>$P(x_1   b_1)$ | Вероятности<br>исходов<br>$P(x_1   b_2)$ | Вероятности<br>исходов<br>$P(b_1)$ | Сумма<br>средств на<br>покупку<br>акций, тыс.р. | Процент<br>выигрыша<br>при удачной<br>стратегии |
|------------------------|--|--|------------------------------------|---|---|
| 1                      | 0,75                                     | 0,48                                     | 0,65                               | 24  | 27  |
| 2                      | 0,8                                      | 0,35                                     | 0,7                                | 13  | 48  |
| 3                      | 0,9                                      | 0,22                                     | 0,85                               | 8   | 56  |
| 4                      | 0,75                                     | 0,48                                     | 0,65                               | 27  | 30  |
| 5                      | 0,85                                     | 0,35                                     | 0,7                                | 53  | 14  |
| 6                      | 0,9                                      | 0,29                                     | 0,83                               | 10  | 35  |
| 7                      | 0,82                                     | 0,22                                     | 0,65                               | 6   | 18  |
| 8                      | 0,96                                     | 0,48                                     | 0,7                                | 70  | 11  |
| 9                      | 0,9                                      | 0,35                                     | 0,85                               | 16  | 53  |
| 10                     | 0,75                                     | 0,27                                     | 0,65                               | 25  | 18  |
| 11                     | 0,85                                     | 0,22                                     | 0,7                                | 15  | 17  |
| 12                     | 0,9                                      | 0,48                                     | 0,83                               | 50  | 45  |
| 13                     | 0,82                                     | 0,35                                     | 0,65                               | 60  | 14  |
| 14                     | 0,76                                     | 0,27                                     | 0,7                                | 35  | 6   |
| 15                     | 0,9                                      | 0,2                                      | 0,85                               | 8   | 40  |
| 16                     | 0,75                                     | 0,38                                     | 0,65                               | 15  | 14  |
| 17                     | 0,85                                     | 0,35                                     | 0,7                                | 13  | 15  |
| 18                     | 0,87                                     | 0,27                                     | 0,78                               | 80  | 8   |
| 19                     | 0,82                                     | 0,25                                     | 0,65                               | 17  | 11  |
| 20                     | 0,76                                     | 0,3                                      | 0,7                                | 23  | 26  |
| 21                     | 0,95                                     | 0,38                                     | 0,85                               | 5   | 50  |
| 22                     | 0,92                                     | 0,35                                     | 0,65                               | 6   | 14  |
| 23                     | 0,75                                     | 0,27                                     | 0,7                                | 7   | 135   |
| 24                     | 0,85                                     | 0,27                                     | 0,8                                | 35  | 48  |
| 25                     | 0,9                                      | 0,24                                     | 0,65                               | 8   | 16  |

|    |      |      |      |     |    |
|----|------|------|------|-----|----|
| 26 | 0,82 | 0,38 | 0,7  | 15  | 20 |
| 27 | 0,96 | 0,35 | 0,85 | 13  | 19 |
| 28 | 0,88 | 0,27 | 0,65 | 80  | 5  |
| 29 | 0,98 | 0,18 | 0,7  | 1,6 | 28 |
| 30 | 0,97 | 0,33 | 0,83 | 4,5 | 41 |

### **КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ 9**

1. Поясните смысл критерия минимизации издержек обращения.
2. Поясните особенности модели расчёта оптимальных параметров системы управления однономенклатурными запасами.
3. Какие используются приёмы и механизмы управления товарными запасами различных групп товаров?
4. Охарактеризуйте особенности постановки и решения задач управления запасами.
5. Написать уравнение и построить типовой график уровня товарных запасов на любой момент времени  $t$ .

**Задание 9.1.** По имеющимся исходным данным (интенсивность продажи товаров  $\lambda$  тн./день; величина анализируемого периода  $T$ , дней; затраты на ввоз одной партии товара  $C_{в1}$ , руб.; затраты на хранение единицы товара (тонны) в течение одного дня  $C_{х1}$ , руб.) определить оптимальные значения основных величин, определяющих модель управления товарными запасами, по критерию минимума издержек обращения.

Необходимо:

1. Составить критерий минимизации издержек обращения при управлении товарными запасами.
  2. Построить график зависимости издержек обращения от размера партии поставок.
  3. Найти оптимальные значения величин:
    - затраты на ввоз и хранение товаров за период  $T$ ;
    - размер одной партии поставки товара;
    - число поставок за анализируемый период;
    - интервал поставок.
  3. Скорректировать полученные характеристики при округлении (в меньшую сторону) оптимального интервала поставок до целого и увеличения его в 2 раза.
  4. Написать уравнение и построить график уровня товарных запасов на любой момент времени  $t$ .
  5. Проанализировать полученные результаты.
- Варианты заданий приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

## Варианты исходных данных

| №<br>вари-<br>анта | Интенсив-<br>ность прода-<br>жи товаров $Z_3$ ,<br>тн/день | Величина<br>анализируе-<br>мого периода<br>$T$ , дней | Затраты на ввоз<br>одной партии<br>товара $C_{B1}$ ,<br>руб. | Затраты на хране-<br>ние 1 тн. товара в<br>течение дня $C_{x1}$ ,<br>руб. |
|--------------------|--|---|--|---|
| 1                  | 2,6  | 440   | 800  | 17  |
| 2                  | 0,9  | 310   | 409  | 16  |
| 3                  | 2,0  | 360   | 200  | 9   |
| 4                  | 3,8  | 750   | 315  | 20  |
| 5                  | 1,8  | 100   | 515  | 11  |
| 6                  | 1,5  | 309   | 370  | 18  |
| 7                  | 0,9  | 610   | 110  | 30  |
| 8                  | 1,5  | 100   | 450  | 15  |
| 9                  | 3,9  | 700   | 280  | 26  |
| 10                 | 5,0  | 1140  | 468  | 24  |
| 11                 | 6,7  | 790   | 330  | 48  |
| 12                 | 15,0   | 1960  | 600  | 19  |
| 13                 | 7,4  | 10000   | 1050   | 9   |
| 14                 | 11   | 980   | 136  | 18  |
| 15                 | 4,6  | 800   | 86   | 10  |
| 16                 | 5,5  | 424   | 120  | 0,94  |
| 17                 | 1,4  | 715   | 225  | 11  |
| 18                 | 2,0  | 512   | 107  | 0,267   |
| 19                 | 3,8  | 325   | 85   | 16  |
| 20                 | 4,5  | 890   | 179  | 3   |
| 21                 | 1,5  | 1786  | 600  | 24  |
| 22                 | 0,9  | 510   | 240  | 17  |
| 23                 | 6,7  | 1620  | 555  | 25  |
| 24                 | 1,4  | 715   | 244  | 15  |
| 25                 | 2,0  | 612   | 111  | 0,79  |
| 26                 | 3,8  | 1425  | 790  | 67  |
| 27                 | 4,5  | 1925  | 202  | 27  |
| 28                 | 8,9  | 3660  | 769  | 11  |
| 29                 | 2,1  | 228   | 70   | 6   |
| 30                 | 2,0  | 365   | 50   | 0,274   |