


МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры  
«Прикладная математика и информатика»  
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 М.В. Грязев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по выполнению лабораторных работ**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Математическое моделирование»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

с направленностью (профилем)  
**Прикладная математика и информатика**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

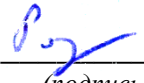
**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**  
**рабочей программы дисциплины (модуля)**

**Разработчик:**

Родионова Г.А., доцент каф. ПМии, к.т.н.

---

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*



---

*(подпись)*

## Содержание

Лабораторная работа №1. *Обтекание сферы потоком несжимаемой идеальной жидкости.*

Лабораторная работа №2 *Распространение тепла в сферическом теле.*

Лабораторная работа №3. *Рассеяние звуковых волн на сфере.*

Лабораторная работа №4. *Решение плоской задачи теории упругости.*

Лабораторная работа №5 *Моделирование риска разорения страховой компании.*

## Лабораторная работа № 1

### *Обтекание сферы потоком несжимаемой идеальной жидкости.*

#### I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков математического моделирования процесса обтекания сферы потоком несжимаемой идеальной жидкости и аналитического решения этой задачи.

#### II. ЗАДАНИЕ

1. Построить модель процесса обтекания сферы потоком жидкости.
2. Провести подробное аналитическое решение задачи.
3. Определить компоненты вектора скорости частиц жидкости.
4. Найти распределение скоростей частиц жидкости на поверхности сферы.
5. С помощью интеграла Бернулли определить давление на поверхности сферы.
6. Рассчитать зависимость давления на поверхности сферы от полярного угла  $\theta$ .
7. Рассчитать зависимость величин  $V_r$  и  $V_\theta$  от угла  $\theta$  при  $r = 1,2a; 5a; 10a$ .
8. Рассчитать зависимости  $V_r$  и  $V_\theta$  от  $r$  в диапазоне изменения  $r$  от  $a$  до  $10a$  при любых значениях  $\theta$ .

#### III. ВЫПОЛНЕНИЕ

##### 1. Математическая модель процесса обтекания сферы потоком жидкости

Движение несжимаемой идеальной жидкости описывается системой уравнений гидродинамики, состоящей из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1)$$

и уравнения неразрывности, которое в случае несжимаемости жидкости (плотность  $\rho = \text{const}$ ) имеет вид

$$\text{div} \bar{V} = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{V}$  - скорость жидкости;  $p$  - давление;  $\bar{F}$  - массовая сила, отнесенная к единице массы.

Используя формулу векторного анализа

$$(\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = \text{rot } \bar{V} \times \bar{V} + \text{grad } \frac{V^2}{2}$$

и рассматривая стационарное безвихревое движение жидкости при отсутствии массовых сил, из уравнения (1) получим

$$\text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

следовательно,

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C, \quad (3)$$

где  $C$  – константа, имеющая одно и то же значение во всех точках движущейся жидкости. Равенство (3) называется интегралом Бернулли.

Рассмотрим задачу об обтекании неподвижной абсолютно твердой сферы стационарным потоком идеальной жидкости. Пусть незавихренный поток несжимаемой идеальной жидкости, двигаясь поступательно со скоростью  $V_0$ , обтекает на своем пути твердую сферу радиуса  $a$ . Определим поле скоростей возмущенного движения жидкости.

Считая движение безвихревым ( $\text{rot } \bar{V} = 0$ ), введем в рассмотрение потенциал скоростей  $\psi$ . При этом скорость частиц жидкости будет определяться формулой

$$\bar{V} = \text{grad } \psi.$$

Для решения задачи введем систему сферических координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре сферы и направим ось  $z$  в сторону, противоположную движению потока (рис.1).

Из уравнения неразрывности следует, что потенциал скоростей  $\psi$  для несжимаемой жидкости должен удовлетворять всюду вне сферы уравнению Лапласа

$$\Delta \psi = 0 \quad (4)$$

Граничное условие на поверхности сферы состоит в равенстве нулю нормальной составляющей скорости  $V_n$ :

$$V_n|_{r=a} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (5)$$

Кроме того, потенциал  $\psi$  в бесконечности должен удовлетворять условию

$$\bar{V}_\infty = \text{grad } \psi_\infty = -\bar{V}_0. \quad (6)$$

Потенциал  $\psi$  представим в виде суммы двух слагаемых

$$\psi = \psi' + \psi_{\text{одн}}, \quad (7)$$

где  $\psi_{\text{одн}} = -V_0 \cdot z = -V_0 \cdot r \cdot \cos(\theta)$  – потенциал скоростей однородного потока;

$\psi'$  – потенциал скоростей возмущенного потока.

Тогда из выражений (3), (5) и (6) получаем

$$\Delta \psi' = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial r} \Big|_{r=a} = V_0 \cdot \cos(\theta); \quad (9)$$

$$\bar{V}'_\infty = \text{grad } \psi'_\infty = 0. \quad (10)$$

Таким образом, задача состоит в нахождении решения уравнения (8), удовлетворяющего граничному условию (9) и условию на бесконечности (10).

## 2. Аналитическое решение задачи

В сферической системе координат

$$\Delta\psi' = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \varphi^2} \right].$$

Так как рассматриваем осесимметричную задачу, то функция  $\psi$  не зависит от координаты  $\varphi$ . Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right] + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (11)$$

Будем решать уравнение (11) методом разделения переменных. Для этого полагаем

$$\psi'(r, \theta) = R(r) \Phi(\theta). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR}{dr} \right] = - \frac{1}{\Phi \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[ \sin(\theta) \frac{d\Phi}{d\theta} \right].$$

Так как левая часть последнего равенства не зависит от  $\theta$ , а правая от  $r$ , то можем записать

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR}{dr} \right] = \lambda; \quad \frac{1}{\Phi \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[ \sin(\theta) \frac{d\Phi}{d\theta} \right] = -\lambda.$$

где  $\lambda$  - постоянная разделения, которую считаем неотрицательной.

Положим  $\lambda = n(n+1)$ , где  $n$  – целое число. Тогда для первого уравнения будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \cdot \frac{dR}{dr} \right] &= n(n+1); \\ \frac{2r}{R} \cdot \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} &= n(n+1); \\ r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R &= 0; \end{aligned}$$

Положим  $R = r^\mu$ , получим:

$$R'' = \mu \cdot (\mu - 1) \cdot r^{\mu-2}; \quad R' = \mu \cdot r^{\mu-1}.$$

Подставим в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} r^2 \mu(\mu-1)r^{\mu-2} + 2r\mu r^{\mu-1} - n(n+1)r^\mu &= 0; \\ \mu(\mu-1) + 2\mu - n(n+1) &= 0; \\ \mu^2 + \mu - n(n+1) &= 0; \\ \mu_1 = n, \quad \mu_2 = -(n+1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем решение:

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)},$$

где  $A_n, B_n$  постоянные.

Решим второе уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{d\Phi}{d\theta} \right) &= -n(n+1); \\ \frac{1}{\Phi \cdot \sin \theta} \left( \cos \theta \cdot \frac{d\Phi}{d\theta} + \sin \theta \cdot \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} \right) &= -n(n+1); \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{d\Phi}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + n(n+1) \cdot \Phi &= 0.\end{aligned}$$

Обозначим  $\frac{d\Phi}{d\theta} = \Phi'$ ,  $\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} = \Phi''$ , тогда уравнение примет вид

$$\Phi'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Phi' + n(n+1)\Phi = 0. \quad (14)$$

Положим  $\cos \theta = s$ , тогда  $\theta = \arccos s$ ,  $\Phi = \Phi(\theta) = \Phi(\arccos s)$ . Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\Phi' &= -\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{d\Phi}{ds}; \\ \Phi'' &= -\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{d\Phi'}{ds} = -\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{d}{ds} \left[ -\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{d\Phi}{ds} \right] = -s \cdot \frac{d\Phi}{ds} + (1-s^2) \frac{d^2\Phi}{ds^2}.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (14):

$$\begin{aligned}(1-s^2) \frac{d^2\Phi}{ds^2} - s \frac{d\Phi}{ds} + \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \left( -\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{d\Phi}{ds} \right) + n(n+1) \cdot \Phi &= 0; \\ (1-s^2) \frac{d^2\Phi}{ds^2} - 2s \frac{d\Phi}{ds} + n(n+1) \cdot \Phi &= 0.\end{aligned}$$

Получили дифференциальное уравнение Лежандра.

Окончательно получаем решение:

$$\Phi(\theta) = C_n P_n(\cos \theta)$$

где  $C_n$  - постоянные;

$P_n$  - полином Лежандра порядка  $n$ .

Для выполнения условия (10) необходимо положить  $A_n = 0$ . Таким образом,

$$\psi' = a_n P_n(\cos \theta) r^{-(n+1)},$$

где  $a_n$  - некоторая постоянная.

Будем искать потенциал  $\psi'$  в виде ряда

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) r^{-(n+1)}$$

Подставляя этот ряд в граничное условие (9), получаем

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) \cdot (n+1) \cdot a^{-(n+2)} = V_0 \cdot \cos \theta.$$

Учитывая, что  $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ , находим

$$a_n = 0, n \neq 1; \quad a_1 = -\frac{1}{2} a^3 \cdot V_0.$$

Таким образом,

$$\psi' = -\frac{1}{2} a^3 \cdot V_0 \cdot r^{-2} \cdot \cos \theta.$$

На основании формулы (7) окончательно получаем решение задачи

$$\psi = -V_0 \left[ r + \frac{a^3}{2 \cdot r^2} \right] \cos \theta.$$

### 3. Определение компонент вектора скорости частиц жидкости

Определив потенциал скоростей  $\psi$ , можем найти компоненты вектора скорости частиц жидкости по формулам

$$V_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad V_\varphi = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{\partial \psi}{\partial r} = -V_0 \left[ 1 - \frac{a^3}{r^3} \right] \cdot \cos \theta; \\ V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left( V_0 \left[ r + \frac{a^3}{2r^2} \right] \cdot \sin \theta \right) = V_0 \left[ 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right] \cdot \sin \theta; \\ V_\varphi &= \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

### 4. Нахождение распределения скоростей частиц жидкости на поверхности сферы

На поверхности сферы, т. е. при  $r = a$ , компоненты скорости равны:

$$\begin{aligned} V_r|_{r=a} &= -V_0 \left[ 1 - \frac{a^3}{a^3} \right] \cdot \cos \theta = 0; \\ V_\theta|_{r=a} &= V_0 \left[ 1 + \frac{a^3}{2a^3} \right] \cdot \sin \theta = \frac{3}{2} V_0 \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Тогда модуль скорости частиц жидкости на поверхности сферы равен:

$$V|_{r=a} = V_\theta|_{r=a} = \frac{3}{2} V_0 \cdot \sin \theta$$

### 5. Определение давления на поверхности сферы.

Для определения давления воспользуемся интегралом Бернулли:

На поверхности сферы будем иметь

$$p = C - \frac{9}{8} \rho \cdot V_0^2 \cdot \sin^2(\theta).$$

Отсюда видно, что распределение давления относительно плоскости XOY, перпендикулярной к направлению потока, симметрично. Тогда ясно, что давления, приложенные к поверхности сферы, взаимно уравновешиваются. Это, так называемый, парадокс Даламбера. Он объясняется тем, что в действительности безотрывное безвихревое обтекание сферы не имеет места. С поверхности сферы срываются вихри, которые видоизменяют как картину течения, так и распределение давления на поверхности сферы.

## IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА.



В отчете должны быть представлены: цель работы, задание, выполнение, решение задачи в математическом пакете.

Лабораторная работа № 2  
*Распространение тепла в сферическом теле.*

**I. Цель работы.**

Приобретение навыков построения математической модели распространения тепла в сферическом теле.

**II. Задание.**

1. Построить математическую модель процесса распространения тепла в сферическом теле.

2. Провести подробные преобразования и получить решение (13) поставленной задачи.

3. Построить кривые распределения относительной избыточной температуры  $\theta$  в шаре по относительному радиусу  $\frac{r}{R}$  при постоянном числе Фурье  $F = \frac{a \cdot t}{R^2}$ , равном  $\frac{10}{10}, \frac{10}{20}, \frac{10}{30}$ .

4. Рассчитать и построить графики зависимости функции  $\theta$  от числа Фурье, изменяющегося от 0,05 до 1 с шагом 0,05 для следующих значений отношения  $\frac{r}{R} : \frac{10}{25}, \frac{10}{50}, \frac{10}{100}$ .

**III. Выполнение.**

1. Теоретические сведения.

Процесс распространения тепла в изотропной среде описывается уравнением теплопроводности

$$\lambda \Delta T + \text{grad } \lambda \text{grad } T - \frac{\partial}{\partial t}(c \rho T) + q = 0,$$

где

$T$  - температура,

$\rho$  - плотность материала, из которого изготовлено моделируемое сферическое тело,

$\lambda$  - коэффициент теплопроводности,

$c$  - удельная массовая теплоемкость (теплоемкость вещества),

$q$  - мощность внутренних источников теплоты,

$t$  - время продолжения процесса распространения тепла.

Для однородного тела величины  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $c$  постоянны и уравнение примет вид

$$\Delta T - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{\lambda} = 0,$$

где  $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ .

При решении конкретных задач теории теплопроводности начальные и граничные условия обеспечивают получение однозначного решения уравнения теплопроводности.

Таким образом, математическая модель процесса распространения тепла представляет собой уравнение теплопроводности и уравнения, описывающие начальные и граничные условия.

Рассмотрим следующую краевую задачу теории теплопроводности.

## 2. Постановка задачи.

Дано сферическое тело радиуса  $R$  с известным начальным распределением температуры  $T_0$ . В начальный момент времени поверхность шара мгновенно охлаждается до некоторой температуры  $T_c$ , которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения. Требуется найти распределение температуры  $T$  внутри шара в любой момент времени  $t$ .

Охлаждение происходит равномерно, так что изотермы внутри шара представляют собой концентрические сферы, то есть температура  $T$  зависит только от радиус-вектора  $r$  и времени  $t$ .

Дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии источников тепла имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T, \quad a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}.$$

Уравнение теплопроводности для рассматриваемой симметричной задачи в сферической системе координат записывается в виде:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \cdot \left[ \frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right]. \quad (1)$$

Необходимо найти решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$T(r,0) = T_0, \quad (2)$$

$$T(R,t) = T_c, \quad (3)$$

$$T(0,t) \neq \infty, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, будем искать решение первой краевой задачи. Условие (4) обозначает, что температура в центре сферы на протяжении всего процесса теплообмена должна быть конечной. Условие (5) есть условие симметрии.

## 3. Решение задачи.

Перепишем дифференциальное уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} [rT(r,t)] = a \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rT(r,t)]. \quad (6)$$

Будем решать поставленную задачу методом интегральных преобразований, используя для этого преобразование Лапласа. Применим преобразование Лапласа к уравнению (6) относительно переменной  $t$ , положив

$$T_L(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot T(r,t) dt. \text{ Учитывая, что}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) dt = p \cdot T_L(r, p) - T(r, 0) = p \cdot T_L(r, p) - T_0,$$

получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [r T_L(r, p)] - \frac{p}{a} r T_L(r, p) + \frac{r T_0}{a} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения в частных производных (6) мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение (7) относительно изображения  $T_L(r, p)$ .

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$r \cdot T_L(r, p) - \frac{T_0}{p} \cdot r = \overline{A} e^{\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r} + \overline{B} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r} = A \cdot \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right) + B \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right). \quad (8)$$

Так как в центре шара  $r=0$  температура  $T(0, t)$  и ее преобразование Лапласа  $T_L(0, p)$  согласно условию о конечности температуры (4) не могут быть величинами бесконечно большими, то есть  $\lim_{r \rightarrow 0} r \cdot T_L(r, p) = 0$ , то следует положить  $A = 0$ .

Таким образом, имеем:

$$T_L(r, p) - \frac{T_0}{p} = B \cdot \frac{1}{r} \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right). \quad (9)$$

Постоянную  $B$  определим из граничного условия для изображения  $T_L(R, p) = \frac{T_c}{p}$ , которое получается в результате применения преобразования

Лапласа к условию (3).

Найдем

$$B = - \frac{(T_0 - T_c) \cdot R}{p \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot R \right)}.$$

Тогда решение (9) примет следующий вид:

$$\frac{T_0}{p} - T_L(r, p) = \frac{(T_0 - T_c) \cdot R \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right)}{p \cdot r \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot R \right)}. \quad (10)$$

Теперь, зная преобразование Лапласа температуры, можем найти распределение температуры в теле, осуществив обратное преобразование Лапласа. Для этого воспользуемся теоремой разложения.

**Теорема разложения.**

Если изображение представляет собой дробную функцию

$$f_L(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \frac{A_0 + A_1 \cdot p + A_2 \cdot p^2 + \dots}{B_1 \cdot p + B_2 \cdot p^2 + \dots}, \quad (11)$$

то

$$f(t) = L^{-1} \left[ \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(P_n)}{\psi'(P_n)} e^{P_n t},$$

где  $P_n$  - простые корни функции  $\psi(p)$ .

Правая часть равенства (10), являющаяся отношением функций

$$\varphi(p) = (T_0 - T_c) \cdot R \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right) \quad \text{и} \quad \psi(p) = p \cdot r \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot R \right), \quad \text{может быть}$$

представлена в виде (11), так как

$$\frac{\operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot r \right)}{p \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot R \right)} = \frac{r \cdot \sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{1}{3!} \left( r \cdot \sqrt{\frac{p}{a}} \right)^3 + \dots}{p \cdot \left[ R \cdot \sqrt{\frac{p}{a}} + \frac{1}{3!} \left( R \cdot \sqrt{\frac{p}{a}} \right)^3 + \dots \right]} = \frac{r + \frac{1}{3!} \cdot \frac{r^3}{a} \cdot p + \dots}{p \cdot \left[ R + \frac{1}{3!} \cdot \frac{R^3}{a} \cdot p + \dots \right]}. \quad (12)$$

Найдем корни функции  $\psi(p)$ , для чего необходимо положить

$$\psi(p) = p \cdot r \cdot \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} \cdot R \right) = 0.$$

Отсюда получим следующие корни:

1)  $p = 0$ .

$$2) \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) = \frac{1}{i} \sin \left( i \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) = 0,$$

откуда

$$i \sqrt{\frac{p}{a}} R = n\pi = \mu_n \quad \text{или} \quad P_n = -\frac{a \cdot \mu_n^2}{R^2}.$$

Для нулевого корня воспользуемся отношением (12):

$$\varphi(p) = (T_0 - T_c) \cdot R \cdot \left[ r + \frac{1}{3!} \cdot \frac{r^3}{a} \cdot p + \dots \right],$$

$$\psi(p) = r \cdot p \cdot \left[ R + \frac{1}{3!} \cdot \frac{R^3}{a} \cdot p + \dots \right].$$

$$\text{Тогда} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(p)}{\psi'(p)} \right) = T_0 - T_c.$$

Для корней  $P_n$  будем иметь:

$$\varphi(P_n) = (T_0 - T_c) R \frac{1}{i} \sin \left( \mu_n \frac{r}{R} \right);$$

$$\psi'(P_n) = \left[ r \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) + \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{p}{a}} R \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{p}{a}} R \right) \right]_{p=P_n} = \frac{1}{2i} r \mu_n \cos \mu_n.$$

В результате обратное преобразование Лапласа равенства (10) с помощью теоремы разложения дает окончательное решение задачи:

$$\theta = \frac{T(r, t) - T_c}{T_0 - T_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{R \cdot \sin \left( \mu_n \cdot \frac{r}{R} \right)}{r \cdot \mu_n} \cdot \exp \left( -\mu_n^2 \cdot \frac{a \cdot t}{R^2} \right). \quad (13)$$

Необходимые графики построим в математическом пакете Maple

Кривые распределения относительной избыточной температуры  $\theta$  в шаре по относительному радиусу  $\frac{r}{R}$  при постоянном числе Фурье  $F = \frac{a \cdot t}{R^2}$ , равном

$$\frac{10}{10}, \frac{10}{20}, \frac{10}{30}.$$

Графики зависимости функции  $\theta$  от числа Фурье, изменяющегося от 0,05 до 1 с шагом 0,05 для следующих значений отношения  $\frac{r}{R} : \frac{10}{25}, \frac{10}{50}, \frac{10}{100}$ .

#### IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА.

В отчете должны быть представлены: цель работы, задание, выполнение, решение задачи в математическом пакете.

Лабораторная работа № 3  
*Рассеяние звуковых волн на сфере.*

**I. Цель работы**

Построение математической модели процесса рассеяния звуковых волн на сфере; получение аналитического решения поставленной задачи; проведения численных исследований.

**II. Задание**

1. Построить математическую модель процесса рассеяния плоской звуковой волны на сфере в идеальной жидкости.
2. Методом разделения переменных получить аналитическое решение задачи.
3. Рассчитать и построить диаграммы направленности рассеяния волны, представляющие собой зависимости функции  $|F(\theta)|$  от полярного угла  $\theta$  при следующих значениях параметра

№вар	ka
1	0.1
2	0.5
3	2.0
4	4.0
5	10.0
6	20.0
7	0.1
8	0.5
9	2.0
10	3.0
11	10.0
12	15.0
13	6.0
14	3.0
15	10.0

**III. Выполнение**

**1. Теоретические сведения**

Для математического моделирования процесса распространения звука в идеальной среде воспользуемся полной системой уравнений гидромеханики идеальной жидкости, описывающей любое движение идеальной жидкости. Эта система включает уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера), уравнение неразрывности и уравнение физического состояния.

Математическое описание движения жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости  $\bar{V}$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Величины  $\bar{V}$ ,  $p$  и  $\rho$  есть функции времени  $t$  и координат точек пространства. Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (1)$$

где  $\bar{F}$  - массовая сила, отнесенная к единице массы.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{V}) = 0. \quad (2)$$

Будем считать, что движение сжимаемой жидкости происходит адиабатически. В этом случае уравнение физического состояния принимает вид

$$p = p_0 \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (3)$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ;  $p_0$  и  $\rho_0$  - давление и плотность невозмущенной жидкости;  $C_p$  и  $C_v$

- теплоемкость при постоянном давлении и постоянном объеме.

Процесс распространения звука представляет собой малые колебания жидкости, так что в уравнении (1) можно пренебречь конвективными членами.

Полагая, что внешние силы отсутствуют, получим

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение величину  $S$ , называемую сжатием и равную относительному изменению плотности

$$S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \cdot (1 + S). \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) перепишем в виде

$$p = p_0 \cdot (1 + S)^\gamma. \quad (6)$$

При малых колебаниях жидкости сжатие  $S$  настолько мало, что высшими степенями  $S$  можно пренебречь. В результате из выражения (6) получим

$$p = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot S). \quad (7)$$

Подставим выражение (5) в уравнение неразрывности. Так как

$$\text{div}(\rho \cdot \bar{V}) = \rho \cdot \text{div}(\bar{V}) + \bar{V} \cdot \text{grad } \rho = \rho_0 \cdot \text{div}(\bar{V}) + \rho_0 \cdot S \cdot \text{div}(\bar{V}) + \bar{V} \cdot \text{grad } \rho,$$

причем последними двумя слагаемыми можно пренебречь, то вместо уравнения (2) будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \bar{V}) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (4) в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -c^2 \cdot \text{grad } S, \quad (9)$$

где  $c = \left( \gamma \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$  - скорость звука.



Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скоростей  $\tilde{\phi}_0$ , т.е.

$$\bar{V}|_{t=0} = \text{grad } \tilde{\phi}_0. \quad (10)$$

Из уравнения (9) имеем

$$\bar{V} = \bar{V}|_{t=0} - c^2 \cdot \text{grad} \left( \int_0^t S dt \right).$$

С учетом (10) получаем

$$\bar{V} = \text{grad} \left( \tilde{\phi}_0 - c^2 \cdot \int_0^t S dt \right) = \text{grad } \tilde{\phi}. \quad (11)$$

Это означает, что существует потенциал скоростей  $\tilde{\phi}$  в любой момент времени  $t$ :

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 - c^2 \cdot \int_0^t S dt.$$

Дифференцируя последнее выражение два раза по  $t$ , получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = -c^2 \cdot \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (12)$$

С другой стороны, подставляя выражение (11) в уравнение (8), будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\text{div grad } \tilde{\phi} = -\Delta \tilde{\phi}. \quad (13)$$

Из уравнения (12) и (13) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta \tilde{\phi}, \quad (14)$$

которое описывает процесс распространения звука в идеальной жидкости.

Отметим, что знание потенциала  $\tilde{\phi}$  достаточно для определения всего процесса движения жидкости в случае малых возмущений, так как

$$\bar{V} = \text{grad } \tilde{\phi}; \quad S = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}.$$

В случае установившегося режима колебаний

$$\tilde{\phi} = \phi \cdot e^{-i\omega t} \quad (15)$$

уравнение (14) переходит в уравнение Гельмгольца

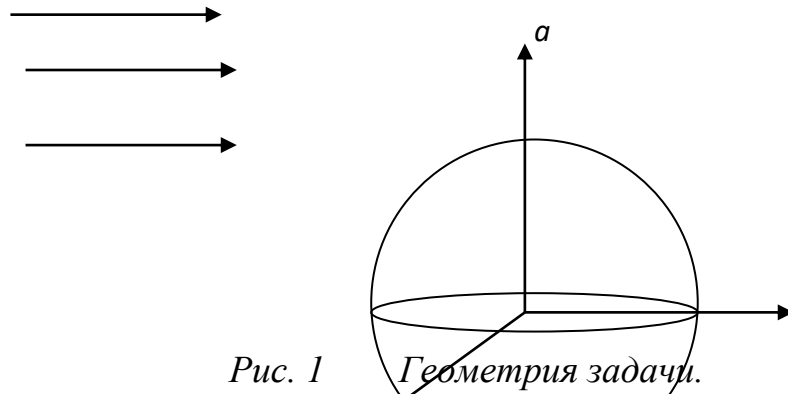
$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0, \quad (16)$$

где  $\omega$  - круговая частота;  $k = \frac{\omega}{c}$  - волновое число. При этом  $p = i\rho\omega\tilde{\phi}$ .

Рассмотрим задачу о рассеянии плоской звуковой волны на сфере. Пусть на абсолютно жесткую неподвижную сферу радиуса  $a$  падает плоская волна, распространяющаяся по направлению оси  $z$  (рис.1). Потенциал скоростей падающей волны имеет вид

$$\tilde{\phi}_p = \phi_p \cdot e^{-i\omega t}, \text{ где } \phi_p = e^{i \cdot k \cdot z}. \quad (17)$$

Требуется определить акустическое поле, рассеянное сферой.



Для решения задачи введем систему сферических координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре сферы.

Граничное условие на поверхности жесткой сферы, помещенной в идеальную среду, заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости  $V_n$  и имеет вид

$$V_n|_{r=a} = \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=a} = 0. \quad (18)$$

В силу линейной постановки задачи потенциал скоростей полного акустического поля

$$\phi = \phi_p + \phi_s, \quad (19)$$

где  $\phi_s$  - искомый потенциал скоростей рассеянной волны.

Потенциал скоростей  $\phi_s$  должен, помимо граничного условия (18), удовлетворять условию излучения на бесконечности:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_s = 0$ .

С учетом выражения (19) из уравнения (16) и (18) получаем

$$\Delta \phi_s + k^2 \phi_s = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r}|_{r=a} = -\frac{\partial \phi_p}{\partial r}|_{r=a}. \quad (21)$$

Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решения волнового уравнения (20), удовлетворяющего граничному условию (21) и условию излучения на бесконечности. Заметим, что поставленная задача является осесимметричной. Поэтому  $\phi_s$  не зависит от сферической координаты  $\varphi$ .

Решив уравнение Гельмгольца методом разделения переменных в сферической системе координат, получим общее решение в виде

$$\phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot Z_n(k \cdot r) \cdot P_n(\cos \theta),$$

где  $Z_n(k \cdot r)$  - одна из сферических бesselевых функций порядка  $n$  ;  
 $P_n(\cos \theta)$  - полином Лежандра порядка  $n$  ;  
 $A_n$  - постоянные.

Для того, чтобы потенциал  $\phi_s$  удовлетворял условию излучения на бесконечности, необходимо в качестве сферической функции Бесселя выбрать сферическую функцию Хэнкеля первого рода  $h_n(k \cdot r)$ . В этом случае  $\phi_s$  соответствует расходящейся волне с учетом того, что временный множитель выбран в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Итак, решение уравнения (20) будем искать в виде

$$\phi_s = \sum_{n=0}^{\omega} A_n \cdot h_n(k \cdot r) \cdot P_n(\cos \theta). \quad (22)$$

Падающую волну представим в виде разложения в ряд

$$\phi_p = e^{i \cdot k \cdot r \cdot \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\omega} i^n \cdot (2n+1) \cdot J_n(k \cdot r) \cdot P_n(\cos \theta), \quad (23)$$

где  $J_n(k \cdot r)$  - сферическая функция Бесселя порядка  $n$ .

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_n$  подставим разложения (22) и (23) в граничное условие (21). В результате получим

$$A_n = -i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{J'_n(ka)}{h'_n(ka)}, \text{ где } z'(x) = \frac{d}{dx} z(x).$$

Таким образом, находим решение задачи

$$\phi_s = - \sum_{n=0}^{\omega} i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{J'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot h_n(kr) \cdot P_n(\cos \theta). \quad (24)$$

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ( $kr \gg 1$ ). На больших расстояниях от сферы функцию  $h_n(k \cdot r)$  заменим асимптотической формулой

$$h_n(k \cdot r) \sim (-i)^{n+1} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot r}}{kr}.$$

Будем иметь  $\phi_s = \frac{e^{i \cdot k \cdot r}}{kr} \cdot F(\theta)$ , где

$$F(\theta) = i \sum_{n=0}^{\omega} (2n+1) \cdot \frac{J'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot P_n(\cos \theta). \quad (25)$$

В дальней зоне поля для давления и составляющих скорости частиц среды в рассеянной волне получим следующие выражения:

$$P_s = i \cdot \rho \cdot \omega \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot r}}{kr} \cdot F(\theta);$$

$$V_{rs} \approx i \cdot k \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot r}}{kr} \cdot F(\theta); \quad V_{\theta s} \approx 0; \quad V_{\varphi s} = 0. \quad (26)$$

Причем в формулах (26) пренебрегли членами порядка  $\frac{1}{r^2}$ .

Интенсивность рассеянной волны определяется по формуле  $I_s = \frac{1}{2} |V_{rs}| \cdot |P_s|$ . В дальней зоне поля

$$I_s = \frac{1}{2} \rho_0 \cdot c \cdot r^{-2} |F(\theta)|^2.$$

Сходимость рядов (24) и (25) существенным образом зависит от параметра  $k \cdot a$ . Сходимость ухудшается с ростом  $k \cdot a$ .

Приведем некоторые формулы для специальных функций, необходимые при проведении расчетов:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [x(n+1) \cdot P_n(x) - nP_{n-1}(x)], \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$J_0(x) = x^{-1} \sin x; \quad J_1(x) = x^{-1} (x^{-1} \sin x - \cos x);$$

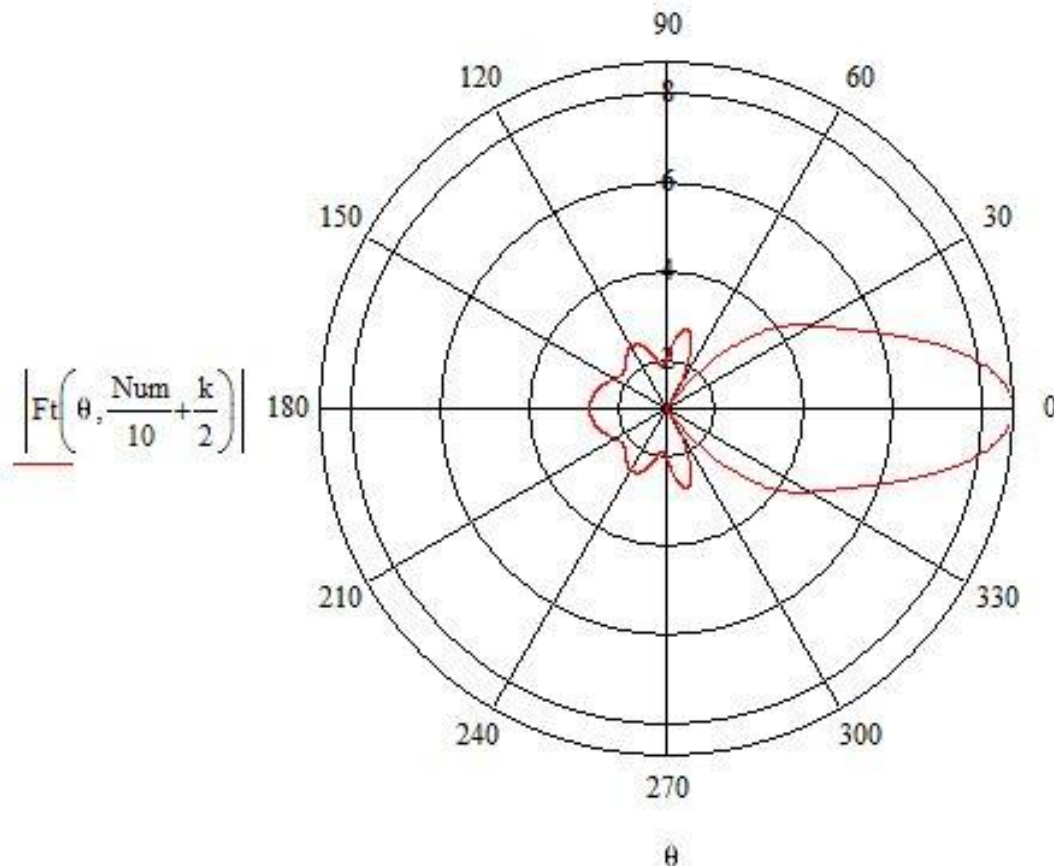
$$h_0(x) = -i \cdot x^{-1} \cdot e^{ix}; \quad h_1(x) = -x^{-1} \cdot e^{ix} \cdot (1 + i \cdot x^{-1});$$

$$z_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} z_n(x) - z_{n-1}(x);$$

$$z'_n(x) = \frac{1}{2n+1} [nz_{n-1}(x) - (n+1)z_{n+1}(x)].$$

## 2. Варианты расчёта (Mathcad 14)

Пример графика



## IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА.

В отчете должны быть представлены: цель работы, задание, выполнение, решение задачи в математическом пакете.

### Лабораторная работа №5

На тему: «Решение плоской задачи теории упругости»

#### I. Цель работы.

Решение плоской задачи теории упругости о напряженном состоянии в плоской пластине методом конечных разностей с применением ЭВМ.

#### II. Задание.

1. Получить конечно-разностное уравнение (5)
2. Методом конечных разностей решить задачу о напряжённом состоянии в плоской пластине, применяя ЭВМ

3. Определить нормальные и касательные напряжения на границе пластины, а также вдоль оси  $y$ .

4. При расчётах положить  $a=1$ ,  $p=n+k=11+4=15$ .

### III. Выполнение.

В случае двумерных задач теории упругости, при отсутствии объемных сил и при заданных усилиях на границе, напряжения определяются функцией напряжения  $\varphi$ , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям

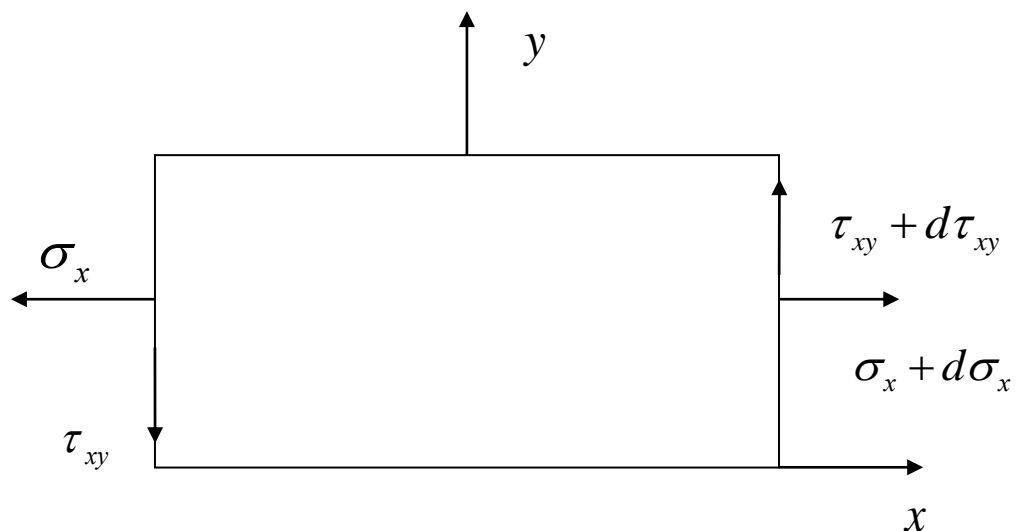
$$l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} = \bar{x}; \quad m \cdot \sigma_y + l \cdot \tau_{xy} = \bar{y}, \quad (2)$$

где  $l, m$  – направляющие косинусы нормали к границе;

$\bar{x}, \bar{y}$  – компоненты поверхностных сил, отнесенных к единице площади в данной точке границы;

$\sigma_x, \sigma_y$  – нормальные напряжения;

$\tau_{xy}$  – касательное напряжение.



$$(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})dy + (\tau_{xy} + d\tau_{xy})dx - \sigma_{xx}dy - \tau_{xy}dx + \rho F_1 dS = 0$$

$$(\sigma_{yy} + d\sigma_{yy})dx + (\tau_{xy} + d\tau_{xy})dy - \sigma_{yy}dx - \tau_{xy}dy + \rho F_2 dS = 0$$

Уравнения равновесия:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \rho F_1 = 0$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \rho F_2 = 0$$

Массовые силы отсутствуют:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0$$

$$\frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{xy}}{dx} = 0$$

Первое уравнение показывает, что выражение  $\sigma_{xx}dy - \tau_{xy}dx$

является полным дифференциалом некоторой функции  $Q(x, y)$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \sigma_{xx} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Аналогично

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Последнее показывает, что выражение  $Qdy - Pdx$

является полным дифференциалом некоторой функции  $\varphi(x, y)$  – напряжение Эри

$$d\varphi = Qdy + Pdx$$

Откуда

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Следовательно:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Подставляя полученные результаты в условие совместимости:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \Delta\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) = \Delta\Delta\varphi = 0$$

где

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Спроецируем силы, действующие на грани на ось  $x$  и на ось  $y$ . Получим:

$$-\sigma_x dy \cdot l - \tau_{xy} dy \cdot m + \bar{x} dy = 0$$

$$-\sigma_y dx \cdot m - \tau_{xy} dx \cdot l + \bar{y} dx = 0$$

В итоге получим граничные условия  $l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} = \bar{x}$ ;  $m \cdot \sigma_y + l \cdot \tau_{xy} = \bar{y}$

Величины  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  выражаются через функцию напряжения по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Поэтому граничные условия (2) принимают вид

$$l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \bar{x} \quad m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \bar{y}. \quad (4)$$

Зная усилия, распределенные вдоль границы, можем с помощью интегрирования уравнений (4) найти функцию  $\varphi$  на границе.

Таким образом, задача о напряженном состоянии в плоской пластинке сводится к определению функции  $\varphi$ , которая удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке внутри области, а на границе принимает вместе со своими первыми производными заданные значения.

Используя метод конечных разностей, запишем бигармоническое уравнение (1) для случая квадратной сетки с шагом  $h$  в конечно-разностной форме.

Производные можно заменить по формулам

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h}; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h};$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{h} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j} - \varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2};$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i+1,j} \approx \frac{\varphi_{i+2,j} - 2\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{h^2}; \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i-1,j} \approx \frac{\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}}{h^2};$$

$$\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j+1} \approx \frac{\varphi_{i+1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1}}{h^2}; \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j-1} \approx \frac{\varphi_{i+1,j-1} - 2\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i+1,j} - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{i-1,j}}{h^2} = \\ &= \frac{\varphi_{i+2,j} - 2\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j} - 2\varphi_{i+1,j} + 4\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}}{h^4} = \\ &= \frac{\varphi_{i+2,j} - 4\varphi_{i+1,j} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j}}{h^4}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом



$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_{i,j} \approx \frac{\varphi_{i,j+2} - 4\varphi_{i,j+1} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j-2}}{h^4}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j+1} - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j-1}}{h^2} = \\ &= \frac{\varphi_{i+1,j+1} - 2\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j+1} - 2\varphi_{i+1,j} + 4\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j-1} - 2\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}}{h^4}. \end{aligned}$$

Используя полученные формулы численного дифференцирования, преобразуем выражение (1) к виду

$$20\varphi_{i,j} - 8(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}) + 2(\varphi_{i-1,j-1} + \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i+1,j+1}) + \varphi_{i-2,j} + \varphi_{i+2,j} + \varphi_{i,j-2} + \varphi_{i,j+2} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение должно удовлетворяться в каждой узловой точке сетки внутри пластинки.

Чтобы найти граничные значения функции  $\varphi$ , проинтегрируем уравнение (4).

Учитывая, что

$$l = \frac{dy}{ds}; \quad m = -\frac{dx}{ds};$$

где  $ds$  – элемент дуги границы, запишем уравнение (4) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \bar{x}; \\ -\frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \bar{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

После интегрирования этих равенств получим

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \bar{y} ds \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \bar{x} ds \quad (7)$$

Теперь воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds},$$

которое после интегрирования по частям дает

$$\varphi = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \int \left( x \cdot \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{d}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds. \quad (8)$$

Подставляя в равенство (8) значения производных, определяемых формулами (6) и (7), можем найти граничные значения  $\varphi$ . Следует заметить, что при определении первых производных по формулам (7) появятся две постоянные интегрирования  $A$  и  $B$ , а интегрирование в равенстве (8) введет третью постоянную  $C$ , в силу чего окончательное выражение для  $\varphi$  будет содержать линейную функцию  $Ax + By + C$ . Поскольку компоненты напряжений представляются вторыми производными от функции  $\varphi$ , эта

Отыскав приближенные значения  $\varphi$  в узловых точках границы (или вблизи границы) и выписав для остальных узловых точек, расположенных внутри области, уравнения в форме (5), получим систему линейных уравнений, достаточную для определения всех узловых значений функции  $\varphi$ . Затем для приближенного вычисления напряжений по формулам (3) можно использовать разностные отношения

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_{i,j} &= \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} &= \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4h^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

The diagram shows a rectangular plate with a grid of points. The grid is 5 rows by 3 columns. The points are numbered 1 through 15. The dimensions are given as  $0.8a$  for the width and  $a$  for the height. The grid is divided into three vertical sections by lines labeled  $\varphi_3$ ,  $\varphi_2$ , and  $\varphi_1$ . The points are numbered 1, 2, 3 in the first column; 4, 5, 6 in the second column; and 7, 8, 9 in the third column. The points are numbered 10, 11, 12 in the first column; 13, 14, 15 in the second column; and 16, 17, 18 in the third column. The points are numbered 19, 20, 21 in the first column; 22, 23, 24 in the second column; and 25, 26, 27 in the third column. The points are numbered 28, 29, 30 in the first column; 31, 32, 33 in the second column; and 34, 35, 36 in the third column. The points are numbered 37, 38, 39 in the first column; 40, 41, 42 in the second column; and 43, 44, 45 in the third column. The points are numbered 46, 47, 48 in the first column; 49, 50, 51 in the second column; and 52, 53, 54 in the third column. The points are numbered 55, 56, 57 in the first column; 58, 59, 60 in the second column; and 61, 62, 63 in the third column. The points are numbered 64, 65, 66 in the first column; 67, 68, 69 in the second column; and 70, 71, 72 in the third column. The points are numbered 73, 74, 75 in the first column; 76, 77, 78 in the second column; and 79, 80, 81 in the third column. The points are numbered 82, 83, 84 in the first column; 85, 86, 87 in the second column; and 88, 89, 90 in the third column. The points are numbered 91, 92, 93 in the first column; 94, 95, 96 in the second column; and 97, 98, 99 in the third column. The points are numbered 100, 101, 102 in the first column; 103, 104, 105 in the second column; and 106, 107, 108 in the third column. The points are numbered 109, 110, 111 in the first column; 112, 113, 114 in the second column; and 115, 116, 117 in the third column. The points are numbered 118, 119, 120 in the first column; 121, 122, 123 in the second column; and 124, 125, 126 in the third column. The points are numbered 127, 128, 129 in the first column; 130, 131, 132 in the second column; and 133, 134, 135 in the third column. The points are numbered 136, 137, 138 in the first column; 139, 140, 141 in the second column; and 142, 143, 144 in the third column. The points are numbered 145, 146, 147 in the first column; 148, 149, 150 in the second column; and 151, 152, 153 in the third column. The points are numbered 154, 155, 156 in the first column; 157, 158, 159 in the second column; and 160, 161, 162 in the third column. The points are numbered 163, 164, 165 in the first column; 166, 167, 168 in the second column; and 169, 170, 171 in the third column. The points are numbered 172, 173, 174 in the first column; 175, 176, 177 in the second column; and 178, 179, 180 in the third column. The points are numbered 181, 182, 183 in the first column; 184, 185, 186 in the second column; and 187, 188, 189 in the third column. The points are numbered 190, 191, 192 in the first column; 193, 194, 195 in the second column; and 196, 197, 198 in the third column. The points are numbered 199, 200, 201 in the first column; 202, 203, 204 in the second column; and 205, 206, 207 in the third column. The points are numbered 208, 209, 210 in the first column; 211, 212, 213 in the second column; and 214, 215, 216 in the third column. The points are numbered 217, 218, 219 in the first column; 220, 221, 222 in the second column; and 223, 224, 225 in the third column. The points are numbered 226, 227, 228 in the first column; 229, 230, 231 in the second column; and 232, 233, 234 in the third column. The points are numbered 235, 236, 237 in the first column; 238, 239, 240 in the second column; and 241, 242, 243 in the third column. The points are numbered 244, 245, 246 in the first column; 247, 248, 249 in the second column; and 250, 251, 252 in the third column. The points are numbered 253, 254, 255 in the first column; 256, 257, 258 in the second column; and 259, 260, 261 in the third column. The points are numbered 262, 263, 264 in the first column; 265, 266, 267 in the second column; and 268, 269, 270 in the third column. The points are numbered 271, 272, 273 in the first column; 274, 275, 276 in the second column; and 277, 278, 279 in the third column. The points are numbered 280, 281, 282 in the first column; 283, 284, 285 in the second column; and 286, 287, 288 in the third column. The points are numbered 289, 290, 291 in the first column; 292, 293, 294 in the second column; and 295, 296, 297 in the third column. The points are numbered 298, 299, 300 in the first column; 301, 302, 303 in the second column; and 304, 305, 306 in the third column. The points are numbered 307, 308, 309 in the first column; 310, 311, 312 in the second column; and 313, 314, 315 in the third column. The points are numbered 316, 317, 318 in the first column; 319, 320, 321 in the second column; and 322, 323, 324 in the third column. The points are numbered 325, 326, 327 in the first column; 328, 329, 330 in the second column; and 331, 332, 333 in the third column. The points are numbered 334, 335, 336 in the first column; 337, 338, 339 in the second column; and 340, 341, 342 in the third column. The points are numbered 343, 344, 345 in the first column; 346, 347, 348 in the second column; and 349, 350, 351 in the third column. The points are numbered 352, 353, 354 in the first column; 355, 356, 357 in the second column; and 358, 359, 360 in the third column. The points are numbered 361, 362, 363 in the first column; 364, 365, 366 in the second column; and 367, 368, 369 in the third column. The points are numbered 370, 371, 372 in the first column; 373, 374, 375 in the second column; and 376, 377, 378 in the third column. The points are numbered 379, 380, 381 in the first column; 382, 383, 384 in the second column; and 385, 386, 387 in the third column. The points are numbered 388, 389, 390 in the first column; 391, 392, 393 in the second column; and 394, 395, 396 in the third column. The points are numbered 397, 398, 399 in the first column; 400, 401, 402 in the second column; and 403, 404, 405 in the third column. The points are numbered 406, 407, 408 in the first column; 409, 410, 411 in the second column; and 412, 413, 414 in the third column. The points are numbered 415, 416, 417 in the first column; 418, 419, 420 in the second column; and 421, 422, 423 in the third column. The points are numbered 424, 425, 426 in the first column; 427, 428, 429 in the second column; and 430, 431, 432 in the third column. The points are numbered 433, 434, 435 in the first column; 436, 437, 438 in the second column; and 439, 440, 441 in the third column. The points are numbered 442, 443, 444 in the first column; 445, 446, 447 in the second column; and 448, 449, 450 in the third column. The points are numbered 451, 452, 453 in the first column; 454, 455, 456 in the second column; and 457, 458, 459 in the third column. The points are numbered 460, 461, 462 in the first column; 463, 464, 465 in the second column; and 466, 467, 468 in the third column. The points are numbered 469, 470, 471 in the first column; 472, 473, 474 in the second column; and 475, 476, 477 in the third column. The points are numbered 478, 479, 480 in the first column; 481, 482, 483 in the second column; and 484, 485, 486 in the third column. The points are numbered 487, 488, 489 in the first column; 490, 491, 492 in the second column; and 493, 494, 495 in the third column. The points are numbered 496, 497, 498 in the first column; 499, 500, 501 in the second column; and 502, 503, 504 in the third column. The points are numbered 505, 506, 507 in the first column; 508, 509, 510 in the second column; and 511, 512, 513 in the third column. The points are numbered 514, 515, 516 in the first column; 517, 518, 519 in the second column; and 520, 521, 522 in the third column. The points are numbered 523, 524, 525 in the first column; 526, 527, 528 in the second column; and 529, 530, 531 in the third column. The points are numbered 532, 533, 534 in the first column; 535, 536, 537 in the second column; and 538, 539, 540 in the third column. The points are numbered 541, 542, 543 in the first column; 544, 545, 546 in the second column; and 547, 548, 549 in the third column. The points are numbered 550, 551, 552 in the first column; 553, 554, 555 in the second column; and 556, 557, 558 in the third column. The points are numbered 559, 560, 561 in the first column; 562, 563, 564 in the second column; and 565, 566, 567 in the third column. The points are numbered 568, 569, 570 in the first column; 571, 572, 573 in the second column; and 574, 575, 576 in the third column. The points are numbered 577, 578, 579 in the first column; 580, 581, 582 in the second column; and 583, 584, 585 in the third column. The points are numbered 586, 587, 588 in the first column; 589, 590, 591 in the second column; and 592,

От  $x=0$  до  $x=0.4a$  к границе пластинки не приложено усилий. Отсюда  $\sigma_y=0$  и  $\tau_{xy}=0$ , т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A, \quad \varphi = Ax + B, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C.$$

Здесь  $A, B, C$  – постоянные вдоль оси  $x$  и, как отмечалось ранее, их можно выбирать произвольно. Положим

$$A = B = C = 0.$$

Тогда функция  $\varphi$  вдоль ненагруженной части стороны пластинки обращается в нуль, что обеспечивает симметрию функции  $\varphi$  относительно оси  $y$ .

От  $x = 0.4a$  и до  $x = 0.5a$  на нижней стороне пластинки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $4p$ , и уравнения (7) дают

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int 4p dx = -4px + C_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Повторное интегрирование дает

$$\varphi = -2px^2 + C_1x + C_2.$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что для точки  $(0.4a; 0)$ , общей для обеих частей границы, значения  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , вычисленные слева и справа, должны совпадать. Отсюда

$$(-4px + C_1)_{x=0.4a} = 0; \quad (-2px^2 + C_1x + C_2)_{x=0.4a} = 0,$$

и получаем  $C_1 = 1.6pa$ ,  $C_2 = -0.32pa^2$ .

На участке нижней границы от  $x = 0.4a$  до  $x = 0.5a$  имеем

$$\varphi = -2px^2 + 1.6pax - 0.32pa^2. \quad (10)$$

В углу пластинки получаем

$$\varphi_{x=0.5a} = -0.02pa^2, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0.5a} = -0.4pa.$$

Вдоль вертикальной стороны пластинки  $x = 0.5a$  усилий не приложено, и, исходя из уравнений (7), заключаем, что вдоль этой стороны значения  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  должны быть такими, как и в нижнем левом углу, т.е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -0.4pa, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что вдоль вертикальной стороны пластинки функция  $\varphi$  остается постоянной. Эта постоянная должна быть равна  $-0.02pa^2$ , как было найдено выше для нижнего угла.

Вдоль ненагруженной части верхней стороны пластинки первые производные от  $\varphi$  остаются постоянными и будут иметь те же значения (11), которые вычислены для верхнего угла. Таким образом, на ненагруженной верхней части пластины имеем

$$\varphi = -0.4pax + C.$$

Поскольку в верхнем левом углу  $\varphi = -0.02pa^2$ , приходим к выводу, что  $C = 0.18pa^2$ , и тогда

$$\varphi = -0.4pax + 0.18pa^2. \quad (12)$$

Рассматривая теперь нагруженную часть верхней стороны пластинки, и учитывая, что для этой части  $\bar{y} = p$ ;  $\bar{x} = 0$ , из уравнения (7) получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -px + C_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C_2.$$

При  $x = 0.4a$  эти величины должны совпадать с величинами, определяемыми по формулам (11). Отсюда  $C_1 = C_2 = 0$  и

$$\varphi = -\frac{1}{2}px^2 + C.$$

При  $x = 0.4a$  функция  $\varphi$  должна принимать значение, равное полученному по формуле (12). Отсюда  $C = 0.1pa^2$  и

$$\varphi = -\frac{1}{2}px^2 + 0.1pa^2.$$

Таким образом, определили значения функции  $\varphi$  и ее первых производных на границе пластинки, так как для правой части границы все эти величины определяются по симметрии.

Так как рассматриваемая задача является осесимметричной относительно оси  $y$ , то достаточно рассмотреть лишь половину пластинки.

Покроем пластинку квадратной сеткой. Далее с помощью экстраполяции найдем значения  $\varphi$  для узловых точек, расположенных вне границы. Начиная вновь с нижней стороны пластинки и учитывая, что вдоль этой стороны  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  обращается в нуль. Примем для внешних точек те же значения  $\varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{15}$ , что и для внутренних точек, смежных с границей. Вдоль вертикальной стороны пластинки имеем значение производной

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0.5a} = -0.4pa$$

и можем в качестве приближенных значений получить величины функции  $\varphi$  для точек вне пластины из формулы

$$\frac{\varphi_{\text{внеш.}} - \varphi_{\text{внутр.}}}{2h} = -0.4pa,$$

которая дает

$$\varphi_{\text{внеш.}} = \varphi_{\text{внутр.}} - 0.4pa \cdot 2 \cdot \frac{a}{6} = \varphi_{\text{внутр.}} - \frac{2}{15}pa^2,$$

где  $\varphi_{\text{внутр.}}$  - значения  $\varphi$  для внутренних точек, смежных с границей.

Теперь можем начать вычисление значений функций  $\varphi$  для внутренних узлов сетки. Для этого необходимо в симметричном случае выписать уравнение (5) для 15 внутренних точек, показанных на рисунке. Решение этих уравнений с использованием значений функции  $\varphi$  в граничных и внешних узлах дает искомое значение  $\varphi$ .

Зная функцию  $\varphi$  внутри рассматриваемой области, напряжения можно определить с помощью формул (3) и (9).

## Лабораторная работа № 4

### *Моделирование риска разорения страховой компании.*

#### **I. Цель работы.**

Познакомиться с классической динамической моделью оценки вероятности разорения страховой компании.

#### **II. Задание.**

1. Построить математическую модель оценки вероятности разорения страховой компании.
2. Провести аналитическое решение поставленной задачи.
3. Провести численное решение поставленной задачи.
3. Для заданных значений величины коэффициента нагрузки  $\theta$  построить кривую для аналитического вида вероятности неразорения как функцию начального капитала компании. Параметры  $\lambda$  и  $\mu$  задать самостоятельно
4. Построить зависимости вероятности неразорения страховой компании от величины начального капитала при различных значениях  $\theta$  в случае численного решения задачи.

№	Величина коэффициента нагрузки $\theta$		
1	0.10	0.15	0.20
2	0.15	0.20	0.25
3	0.20	0.25	0.30
4	0.25	0.30	0.35
5	0.30	0.35	0.40
6	0.35	0.40	0.45
7	0.40	0.45	0.50
8	0.45	0.50	0.55
9	0.50	0.55	0.60
10	0.55	0.60	0.65
11	0.60	0.65	0.70
12	0.65	0.70	0.75
13	0.70	0.75	0.80
14	0.75	0.80	0.85
15	0.80	0.85	0.90
16	0.85	0.90	0.95
17	0.10	0.20	0.30
18	0.20	0.40	0.60
19	0.30	0.60	0.90
20	0.15	0.45	0.60
21	0.55	0.80	0.95
22	0.70	0.75	0.80
23	0.75	0.80	0.85
24	0.80	0.85	0.90
25	0.85	0.90	0.95

26	0.10	0.20	0.30
27	0.20	0.40	0.60
28	0.30	0.60	0.90
29	0.15	0.45	0.60
30	0.55	0.80	0.95

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке группы

### **III. Выполнение**

#### **1. Экономическая постановка задачи**

Нахождение вероятности разорения страховой компании является одной из важнейших задач страховой математики, так как финансовый риск и связанная с ним опасность разорения объективно присутствуют в деятельности любой страховой компании. Оценка этого риска представляет фундаментальный интерес для компании и служит основой для принятия важнейших решений. В частности знание вероятности разорения позволяет найти оптимальную величину страховой премии.

Проблема обеспечения финансовой устойчивости страховой компании является комплексной; ее изучение и решение предполагают усилия специалистов в разных областях, прежде всего руководства компании, юристов, экономистов. Однако многие важные задачи носят чисто математический характер. В рамках специальной математической теории — теории риска, разработана система понятий, моделей и методов, которые позволяют количественно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании. Имея в виду присутствие факторов случайности, общематематической базой для теории риска служат теория вероятностей и математическая статистика.

#### **2. Математическая постановка задачи. (Модель Крамера-Лундберга)**

Пусть заданы следующие независимые объекты:

- число выплат за временный промежуток  $[0, t)$  - пуассоновский процесс  $N(t)$  с интенсивностью  $\lambda$  ( $EN(t) = \lambda t, N(0) = 0$ );

- размер выплат страховой компании клиентам - последовательность  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием  $\mu$  и функцией распределения  $F(x)$ ,  $F(0)=0$ .

О величинах  $N(t)$ , считающих количество требований, предположим, что

1)  $N(0)=0$ ;

2)  $N(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ;

3)  $N(t) \leq N(t+h)$ .

Таким образом, величина  $N(t+h) - N(t)$  показывает число исков, поступивших в промежутке времени  $(t, t+h)$ .

Кроме того, компания получает страховые взносы от клиентов с интенсивностью  $c$  ( $c$  – некоторая положительная постоянная).

Начальный капитал равен  $x$ .

При таком описании капитал компании имеет вид

$$Y_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i .$$

Процесс риска в данном случае  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , и в силу независимости  $N_t$  и  $X_i$  имеем, что  $EX(t) = \lambda t \mu$ . Премии, собранные к моменту  $t$   $\Pi(t) = ct$  – линейная функция времени. Выбирая коэффициент нагрузки  $\theta = \frac{\Pi(t)}{EX(t)} - 1 = \frac{c - \lambda \mu}{\lambda \mu}$ , получаем скорость поступления премий  $c = (1 + \theta) \lambda \mu$ .

Найдем вероятность не разорения страховой компании

$$\Phi(x) = P\{Y_t \geq 0, Y_0 = x, t \geq 0\}.$$

Сначала найдем условия дифференцируемости функции  $\Phi(x)$ , предполагая, что  $F(x)$  имеет плотность. Поскольку разорение не может произойти до первого скачка пуассоновского процесса  $T_1$ , то можно записать

$$\Phi(x) = E\Phi(x + cT_1 - x_1) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{x+cs} \Phi(x + cs - y) f(y) dy ds ,$$

где  $f(x)$  – плотность распределения  $F(x)$ .

Заменой переменных  $q = x - y$  последнее выражение приводится к виду:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_{-cs}^x \Phi(q + cs) f(x - q) dq ds .$$

Следовательно, если  $F(y) \in C^n[0, \infty)$ , то  $\Phi(x) \in C^{n-1}[0, \infty)$ .

Далее предполагается, что  $F(y) \in C^3[0, \infty)$ .

По формуле полной вероятности и свойству ординарности пуассоновского процесса

$$\Phi(x) = \Phi(x + c\Delta t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) + \lambda\Delta t \int_0^{x+c\Delta t} \Phi(x + c\Delta t - y) dF(y) + o(\Delta t)$$

Член  $\Phi(x + c\Delta t)$  в первом слагаемом правой части разложим по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (\Phi(x) + c\Phi'(x)\Delta t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) + \lambda\Delta t \int_0^{x+c\Delta t} \Phi(x + c\Delta t - y) dF(y) + o(\Delta t) , \\ \Phi(x)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)) &= c\Phi'(x)\Delta t(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) + \lambda\Delta t \int_0^{x+c\Delta t} \Phi(x + c\Delta t - y) dF(y) + o(\Delta t) . \end{aligned}$$

Разделим обе части последнего равенства на  $\Delta t$ , устремим  $\Delta t$  к нулю и получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\lambda\Phi(x) = c\Phi'(x) + \lambda \int_0^x \Phi(x - y) dF(y) .$$

Зная среднее число исков в некоторый промежуток времени, закон распределения размера выплат клиентам, величину относительной защитной надбавки и начальный капитал, решив уравнение, можно получить значение вероятности не разорения страховой компании.

### 3. Аналитическое решение задачи

Для случая экспоненциально распределенных выплат решение интегро-дифференциального уравнения выписывается в явном виде. Действительно, подстановкой  $F(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y}$  сводим уравнение (1) к следующему

$$\lambda \Phi(x) = c\Phi'(x) + \lambda \int_0^x \Phi(x-y) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}y} dy.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения, затем выполним интегрирование по частям и получим

$$\begin{aligned} \lambda \Phi'(x) &= c\Phi''(x) + \lambda \Phi(0) \frac{1}{\mu} + \lambda \int_0^x \Phi'_x(x-y) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}y} dy = \\ &= c\Phi''(x) + \lambda \Phi(0) \frac{1}{\mu} - \lambda \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}y} d\Phi(x-y) = \\ &= c\Phi''(x) + \lambda \frac{1}{\mu} \Phi(x) + \lambda \cdot \int_0^x \Phi(x-y) \frac{1}{\mu} de^{-\frac{1}{\mu}y} = \\ &= c\Phi''(x) + \lambda \frac{1}{\mu} \Phi(x) - \frac{1}{\mu} \left[ \lambda \int_0^x \Phi(x-y) \frac{1}{\mu} de^{-\frac{1}{\mu}y} dy \right] = \\ &= c\Phi''(x) + \lambda \frac{1}{\mu} \Phi(x) + \frac{c}{\mu} \Phi'(x) - \frac{\lambda}{\mu} \Phi(x) = c\Phi''(x) + \frac{c}{\mu} \Phi'(x), \end{aligned}$$

где вместо интеграла в квадратных скобках поставлено его выражение через исходное интегро-дифференциальное уравнение.

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению

$$\Phi''(x) + \Phi'(x) \left( \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c} \right) = 0,$$

точное решение которого ищется в виде

$$\Phi(x) = B + Ae^{x \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right)},$$

где  $A$  и  $B$  – константы.

Неравенство  $\frac{\lambda}{c} < \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \lambda\mu - c < 0$  отражает положительность коэффициента

нагрузки  $\theta$  ( $\mu = \frac{c}{\lambda(1+\theta)}$ ,  $\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{c}(1+\theta)$ ,  $(1+\theta) > 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{c} < \frac{1}{\mu}$ ), и, следовательно,

$$\Phi(\infty) = B.$$

Неизвестные константы  $A$  и  $B$  можно найти из следующих равенств:

$$\Phi(\infty) = 1 \text{ и } \lambda\Phi(0) = c\Phi'(0).$$

Таким образом, приходим к следующему явному выражению для вероятности неразорения:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{x \left( \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right)} = 1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu}}.$$

В случае произвольного распределения выплат  $F(x)$  получение аналитического выражения для  $\Phi(x)$  затруднительно, и при решении уравнения необходимо использовать численные методы.

Численное решение задачи



Пусть  $L$  достаточное большое значение капитала компании. В этом случае для интегродифференциального уравнения получим следующую краевую задачу.

$$\begin{aligned}\lambda\Phi(x) &= c\Phi'(x) + \lambda \int_0^x \Phi(x-y)f(y)dy; \quad x \in [0; L], \\ \lambda\Phi(0) &= c\Phi'(0), \\ \Phi(L) &= 1.\end{aligned}$$

#### 4. Численное решение задачи.

Введем на отрезке  $[0; L]$  равномерную сетку  $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$ ,

где  $x_i = i \cdot h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $h = \frac{L}{N}$ .

Производную в узле  $x_i$  аппроксимируем односторонней правой производной:

$$\Phi'(x_i) = \frac{\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)}{h} + O(h),$$

$$\text{или } \Phi'(x_i) = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + O(h),$$

где  $\varphi_i = \Phi(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Интеграл  $\int_0^{x_i} \Phi(x_i - y)f(y)dy$  представим в виде суммы интегралов

$$\int_0^{x_i} \Phi(x_i - y)f(y)dy = \sum_{j=1}^i \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y)f(y)dy; \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Интеграл под знаком суммы вычислим с помощью формулы трапеции.

Легко видеть, что отрезок интегрирования имеет длину шага  $h$  сетки  $\Delta$ . ( $x_j - x_{j-1} = jh - (j-1)h = h$ ). Если  $h$  выбрать достаточно мелким, то

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y)f(y)dy = \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})[\Phi(x_i - x_{j-1})f(x_{j-1}) + \Phi(x_i - x_j)f(x_j)] + O(h^3),$$

или

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y)f(y)dy = \frac{h}{2}\{\Phi[(i-j)h+h]f_{j-1} + \Phi[(i-j)h]f_j\} + O(h^3); \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $f_j = f(x_j)$ .

Уравнение с учетом выражений примет вид:

$$\lambda\varphi_i = \frac{c}{h}\varphi_{i+1} - \frac{c}{h}\varphi_i + \lambda \frac{h}{2} \sum_{j=1}^i \{\Phi[(i-j)h+h]f_{j-1} + \Phi[(i-j)h]f_j\} + O(h); \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Учитывая, что  $\Phi(kh) = \varphi_k$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\lambda \frac{h}{2} f_i \varphi_0 + \lambda h \sum_{j=1}^{i-1} f_{i-j} \varphi_j + \left( \lambda \frac{h}{2} f_0 - \frac{c}{h} - \lambda \right) \varphi_i + \frac{c}{h} \varphi_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Данная система состоит из  $N-1$  уравнений относительно  $N+1$  неизвестных. Недостающие два уравнения получим из граничных условий.

$$\left(-\frac{c}{h}-\lambda\right)\varphi_0+\frac{c}{h}\varphi_1=0,$$

$$\varphi_N=1.$$

Таким образом, получили следующую систему  $N$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N$  неизвестных:

$$\left(-\frac{c}{h}-\lambda\right)\varphi_0+\frac{c}{h}\varphi_1=0,$$

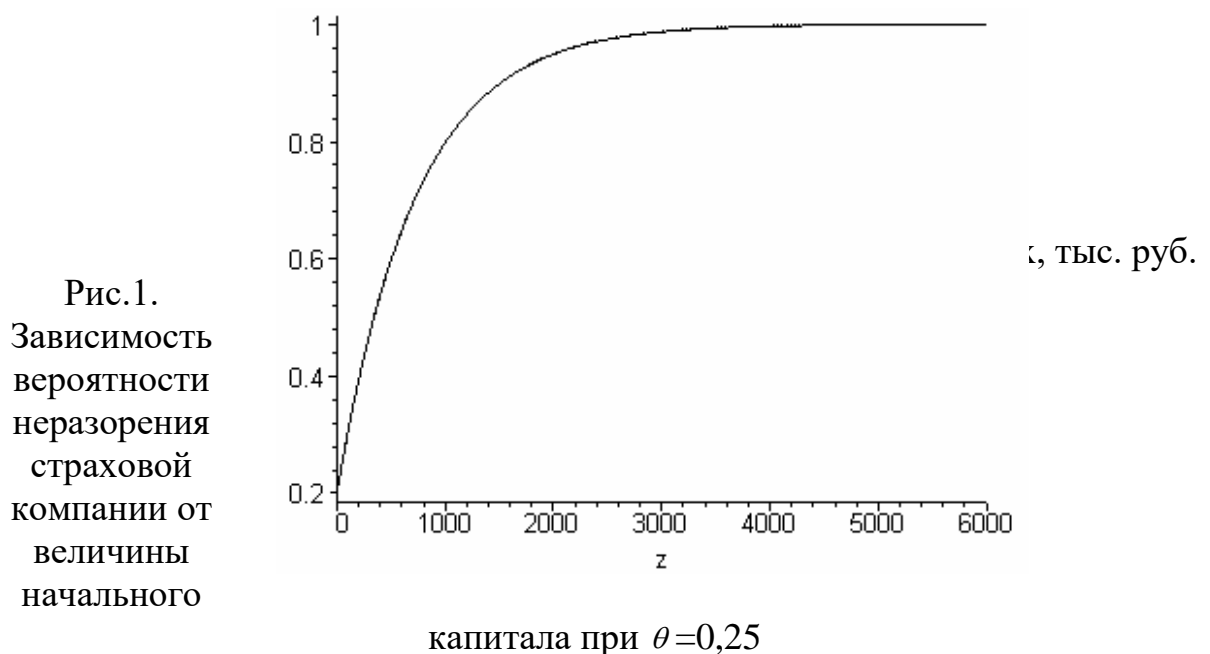
$$\lambda\frac{h}{2}f_i\varphi_0+\lambda h\sum_{j=1}^{i-1}f_{i-j}\varphi_j+\left(\lambda\frac{h}{2}f_0-\frac{c}{h}-\lambda\right)\varphi_i+\frac{c}{h}\varphi_{i+1}=0; \quad i=1,2,\dots,N-1,$$

$$\varphi_N=1.$$

Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, найдем значения функции  $\Phi(x)$  в узлах сетки  $\Delta$ .

#### 4. Численное исследование задачи и анализ результатов

На рисунке 1 построены зависимости вероятности неразорения  $\Phi(x)$  страховой компании от величины начального капитала  $x$ , принадлежащего интервалу  $[0;6000]$  при величине коэффициента нагрузки  $\theta=0,25$ . Сплошная кривая соответствует численному решению задачи, штриховая – аналитическому решению задачи. Из рисунка видно, что уже при значениях  $x=3500$  тыс. руб. вероятность неразорения близка к единице. Кроме того, построенные зависимости показывают, что предложенный численный метод решения краевой задачи дает хорошее совпадение с известным точным решением.



На рисунке 2 построены зависимости вероятности неразорения  $\Phi(x)$  страховой компании от величины начального капитала  $x$ , принадлежащего интервалу  $[0;10000]$  при различных значениях коэффициента нагрузки.

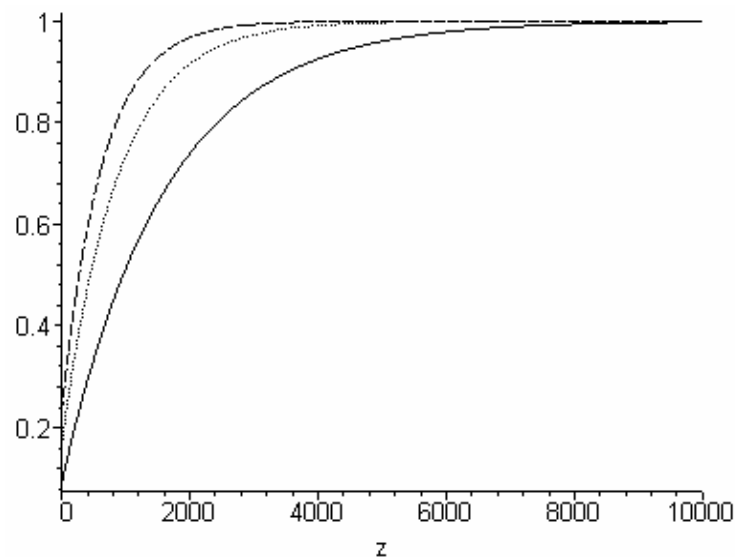


Рис. 2.  
Зависимость  
вероятности  
неразорения  
страховой  
компании от  
величины

начального капитала при различных значениях  $\theta$

Сплошная линия соответствует вероятности неразорения при величине  $\theta=0.1$ , пунктирная линия -  $\theta=0.2$ , штриховая -  $\theta=0.3$ . При  $0 < x \leq 8000$  вероятность неразорения зависит от величины  $\theta$ . Причем с увеличением  $\theta$  вероятность неразорения увеличивается. При  $x > 8000$  вероятность неразорения близка к единице и не зависит от величины коэффициента нагрузки.

#### IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА.

В отчете должны быть представлены: цель работы, задание, выполнение, решение задачи в математическом пакете.