МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«НИР (специальные семинары)»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Толоконников Л.А., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Предлагаемые ниже задачи предназначены для решения на практических занятиях и закрепления материала, изучаемого самостоятельно по соответствующим темам.

На практических занятиях могут обсуждаться и рассматриваться также задачи и примеры из других литературных источников.

ТЕМА
«БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ»

Задача 1. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух объектов. За предшествующий период исполнение баланса характеризуется данными, представленными в табл. 1. При этом в системе использованы следующие факторы: труд (в человеко–часах) и капиталовложения (в тысячах рублей). Требуется составить матрицы прямых и полных затрат экономической системы.

Таблица 1

Исполнение баланса производства

Фактор	Номер объекта и фактора	Потребление		Валовый выпуск
		1	2	
Производство	1	100	160	500
	2	275	40	400
Труд	1	250	80	–
Капиталовложения	2	750	800	–

Решение.

Используя формулу определения коэффициентов прямых затрат $a_{ij} = \dfrac{x'_{ij}}{x'_j}$, вычисляем

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0,2; \qquad a_{12} = \frac{160}{400} = 0,4;$$

$$a_{21} = \frac{275}{500} = 0,55; \qquad a_{22} = \frac{40}{400} = 0,1.$$

Аналогично определяем коэффициенты прямых затрат факторов, исходя из того, что коэффициент b_{kj} прямых затрат k–го фактора для j–го объекта равен отношению затрат этого фактора объектом к полному выпуску продукции этим объектом, взятым за прошедший период:

$$b_{11} = \frac{250}{500} = 0{,}5; \qquad b_{12} = \frac{80}{400} = 0{,}2;$$

$$b_{21} = \frac{750}{500} = 1{,}5; \qquad b_{22} = \frac{800}{400} = 2.$$

Таким образом, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицу S.

Так как $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}55 & 0{,}9 \end{pmatrix}$; $\det(E - A) = 0{,}5,$ то

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу коэффициентов полных затрат факторов:

$$BS = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}12 & 0{,}72 \\ 4{,}9 & 4{,}4 \end{pmatrix}.$$

Задавая значение вектора конечной продукции Y, по формулам (2.5) и (2.8) можем найти показатели плана: валовую продукцию и суммарную потребность системы в факторах.

Пусть, например, задан вектор

$$Y = \begin{pmatrix} 480 \\ 170 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}8 \\ 1{,}1 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 480 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1{,}12 & 0{,}72 \\ 4{,}9 & 4{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 480 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 3100 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что запланированный выпуск конечного продукта может быть достигнут при валовом выпуске объектов $X_1 = 1000$ и $X_2 = 800$ при суммарных затратах труда $Z_1 = 660$ и при затратах капиталовложений $Z_2 = 3100$.

Задача 2.

Завод состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции.

Таблица 2.

Исходные данные задачи

Цеха	Прямые затраты a_{ij}			Конечный продукт y_i
	I	II	III	
I	0	0,2	0	200
II	0,2	0	0,1	100
III	0	0,1	0,2	300

Известны (табл.2) расходные коэффициенты (прямые затраты) a_{ij} единиц продукции i–го цеха, используемые как "сырье" ("промежуточный продукт") для выпуска единицы продукции j–го цеха, а также количество единиц y_i продукции i–го цеха, предназначенных для реализации (конечный продукт).

Определить:

1) коэффициенты полных затрат;
2) валовой выпуск (план) для каждого цеха;
3) производственную программу цехов;
4) коэффициенты косвенных затрат.

Решение.

Обозначим производственную программу завода через $X = (x_1, x_2, x_3)$, где x_i есть валовой выпуск продукции i–го цеха, а план выпуска товарной продукции – через $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

Кроме того, введем матрицу $A = \|a_{ij}\|$ расходных коэффициентов, указанных в таблице.

Тогда производственные взаимосвязи завода могут быть представлены следующей системой трех уравнений:

$$x_i - (a_{i1}x_i + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3) = y_i\ ;\ \ (i = 1, 2, 3),$$

или в матричной форме

$$X - AX = Y.$$

Решение этого уравнения запишется через обратную матрицу:

$$X = (E–A)^{-1}Y,$$

где E – единичная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы $(E - A)^{-1} = \|s_{ij}\|$ представляют собой искомые **коэффициенты полных внутрипроизводственных затрат**.

Выполнив необходимые расчеты, получим

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, для выпуска единицы продукции I, II и III цехов необходимо затратить продукции 1–го цеха соответственно 1,04; 0,21 и 0,03 единиц.

Для определения валового выпуска продукции цехов воспользуемся равенством

$$X=(E-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix}1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03\\ 0{,}21 & 1{,}06 & 0{,}13\\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}238\\ 187\\ 400\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_1 = 238,\ x_2 = 187 \text{ и } x_3 = 400.$$

Производственную программу каждого из цехов можно определить из соотношения

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (j = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3).$$

В результате получим следующую таблицу (с округлением):

Цеха	Внутрипроизводственное потребление x_{ij}			Итого $\sum x_{ij}$	Конечный продукт y_i	Валовой выпуск x_i
	I	II	III			
I	0	38	0	38	200	238
II	47	0	40	87	100	187
III	0	19	80	99	300	400

Коэффициенты косвенных затрат найдем как разность между s_{ij} и a_{ij} или в матричной форме

$$(E-A)^{-1}-A=\begin{pmatrix}1{,}04 & 0{,}01 & 0{,}03\\ 0{,}01 & 1{,}06 & 0{,}03\\ 0{,}03 & 0{,}03 & 1{,}07\end{pmatrix}.$$

Задача 3.

Дополнительно к данным примера 2 в следующей таблице указаны расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующего цеха, трудоемкость продукции в человеко–часах на единицу продукции, стоимость единицы соответствующего материала и оплата за 1чел.–час.

	Нормы расхода			Стоимость, руб.
	I	II	III	
Сырье «*а*»	1,4	2,4	0,8	5
Сырье «*б*»	–	0,6	1,6	12
Топливо	2,0	1,8	2,2	2
Трудоемкость	10	20	20	1,2

Определить:

1) суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы;

2) коэффициенты прямых затрат сырья топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;

3) расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;

4) производственные затраты в рублях по цехам и на всю производственную программу завода;

5) производственные затраты на единицу конечной продукции.

Решение.

Суммарный расход сырья «*а*» можно получить, умножив соответствующую 1–ю строку исходной таблицы на вектор X , т.е.

$$b_1 X = (1{,}4;\ 2{,}4;\ 08)\begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix} = 1102 .$$

Аналогично можно получить расход сырья «*б*» и т.д.

Все это удобно записать в виде произведения

$$\begin{pmatrix} 1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6 \\ 2{,}0 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 238 \\ 187 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1102 \\ 752 \\ 1692 \\ 14120 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{сырье } a \\ \text{сырье } б \\ \text{топливо} \\ \text{человеко} - \text{часов}. \end{array} \end{array}$$

Расход сырья «*а*» на единицу конечной продукции I цеха найдем из выражения $1{,}4s_{11} + 2{,}4s_{21} + 0{,}8s_{31}$.

Следовательно, соответствующие коэффициенты полных затрат сырья, топлива и труда на каждую единицу конечного продукта получим из произведения матриц:

$$\begin{pmatrix} 1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6 \\ 2{,}0 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1{,}98 & 2{,}94 & 1{,}37 \\ 0{,}17 & 0{,}84 & 2{,}11 \\ 2{,}52 & 2{,}61 & 3{,}09 \\ 15{,}20 & 24{,}80 & 28{,}30 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{сырье } a \\ \text{сырье } б \\ \text{топливо} \\ \text{труд}. \end{array} \end{array}$$

Таким образом, например, для изготовления $y_1 = 1$ необходимо затратить 1,98 ед. сырья «*а*», 0,17 ед. сырья «*б*», 2,52 ед. топлива и 15,2 чел.–ч.

Расход сырья, топлива и т.д. по каждому из цехов получим из умножения их расходных норм на соответствующие валовые выпуски по цехам.

В результате получим матрицу полных расходов:

$$\begin{pmatrix} 1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6 \\ 2{,}0 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238 & 0 & 0 \\ 0 & 187 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3740 & 8000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \textit{сырье а} \\ \textit{сырье б} \\ \textit{топливо} \\ \textit{труд}. \end{array}$$

Производственные расходы по цехам можно получить путем умножения слева строки стоимостей (5; 12; 2; 1,2) на последнюю матрицу:

$$\begin{pmatrix} 5; & 12; & 2; & 1{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3740 & 8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5473, & 8751, & 20640 \end{pmatrix}.$$

Наконец, производственные затраты на единицу конечной продукции, необходимые для определения себестоимости продукции, можем найти путем умножения строки цен на матрицу коэффициентов полных затрат:

$$\begin{pmatrix} 5; & 12; & 2; & 1{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}98 & 2{,}94 & 1{,}37 \\ 0{,}17 & 0{,}84 & 2{,}11 \\ 2{,}52 & 2{,}61 & 3{,}09 \\ 15{,}2 & 24{,}8 & 28{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35{,}2; & 59{,}6; & 72{,}3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом внутрипроизводственные затраты на единицу товарной продукции I, II и III цехов соответственно составляют: 35,2 руб., 59,6 руб. и 72,3 руб.

ТЕМА «МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ»

Задача 1.

Рассмотрим решение задачи расчета равновесной цены P^* на конкретном примере.

Исходные данные имеют следующий вид:

$\left.\begin{array}{l} a = 36 \\ A = 0{,}9 \end{array}\right\}$ для спроса D;

$\left.\begin{array}{l} b = 4 \\ B = 0{,}5 \end{array}\right\}$ для предложения S;

$P_0 = 4$ первоначальная цена.

Решение.

Расчет равновесной цены P^* представлен в табл. 1.

Таблица 1

Расчёт равновесной цены

t	P_{t-1}	$S_t = b + BP_{t-1}$	$D_t = S_t$	P_t
1	P_0	$S_1 = b + BP_0 =$ = 4 + 0,5·4 = 6	$D_1 = S_1$	$P_1 = \frac{a - D_1}{A} = \frac{36-6}{9} = 33{,}33$
2	P_1	$S_2 = b + BP_1 =$ = 4 + 0,5·33,33 = 20,67	$D_2 = S_2$	$P_2 = \frac{a - D_2}{A} = \frac{36-20{,}67}{0{,}9} = 17{,}03$
3	P_2	$S_3 = b + BP_2 =$ = 4 + 0,5·17,03 = 12,52	$D_3 = S_3$	$P_3 = \frac{a - D_3}{A} = \frac{36-12{,}52}{0{,}9} = 26{,}09$
4	P_3	$S_4 = b + BP_3 =$ = 4 + 0,5·26,09 = 17,05	$D_4 = S_4$	$P_4 = \frac{a - D_4}{A} = \frac{36-17{,}05}{0{,}9} = 21{,}06$
5	P_4	$S_5 = b + BP_4 =$ = 4 + 0,5·21,06 = 14,53	$D_5 = S_5$	$P_5 = \frac{a - D_5}{A} = \frac{36-14{,}53}{0{,}9} = 23{,}86$
6	P_5	$S_6 = b + BP_5 =$ = 4 + 0,5·23,86 = 15,93	$D_6 = S_6$	$P_6 = \frac{a - D_6}{A} = \frac{36-15{,}93}{0{,}9} = 22{,}30$
7	P_6	$S_7 = b + BP_6 =$ = 4 + 0,5·22,30 = 15,15	$D_7 = S_7$	$P_7 = \frac{a - D_7}{A} = \frac{36-15{,}15}{0{,}9} = 23{,}17$
8	P_7	$S_8 = b + BP_7 =$ = 4 + 0,5·23,17 = 15,59	$D_8 = S_8$	$P_8 = \frac{a - D_8}{A} = \frac{36-15{,}59}{0{,}9} = 22{,}68$
9	P_8	$S_9 = b + BP_8 =$ = 4 + 0,5·22,68 = 15,34	$D_9 = S_9$	$P_9 = \frac{a - D_9}{A} = \frac{36-15{,}34}{0{,}9} = 22{,}96$
10	P_9	$S_{10} = b + BP_9 =$ = 4 + 0,5·22,96 = 15,48	$D_{10} = S_{10}$	$P_{10} = \frac{a - D_{10}}{A} = \frac{36-15{,}48}{0{,}9} = 22{,}80$
11	P_{10}	$S_{11} = b + BP_{10} =$ = 4 + 0,5·22,80 = 15,40	$D_{11} = S_{11}$	$P_{11} = \frac{a - D_{11}}{A} = \frac{36-15{,}40}{0{,}9} = 22{,}89$
12	P_{11}	$S_{12} = b + BP_{11} =$ = 4 + 0,5·22,89 = 15,45	$D_{12} = S_{12}$	$P_{12} = \frac{a - D_{12}}{A} = \frac{36-15{,}45}{0{,}9} = 22{,}83$
13	P_{12}	$S_{13} = b + BP_{12} =$ = 4 + 0,5·22,83 = 15,42	$D_{13} = S_{13}$	$P_{13} = \frac{a - D_{13}}{A} = \frac{36-15{,}42}{0{,}9} = 22{,}87$
14	P_{13}	$S_{14} = b + BP_{13} =$ = 4 + 0,5·22,87 = 15,44	$D_{14} = S_{14}$	$P_{14} = \frac{a - D_{14}}{A} = \frac{36-15{,}44}{0{,}9} = 22{,}84$
15	P_{14}	$S_{15} = b + BP_{14} =$ = 4 + 0,5·22,84 = 15,42	$D_{15} = S_{15}$	$P_{15} = \frac{a - D_{15}}{A} = \frac{36-15{,}42}{0{,}9} = 22{,}87$

Расчет равновесной цены можно закончить на 14–й итерации:

$$P^* = P_{13} = P_{14} \approx \frac{22{,}84 + 22{,}87}{2} \approx 22{,}86.$$

Аналогичное значение получаем и по соотношению

$$P^* = \frac{a-b}{A+B} = \frac{36-4}{0{,}9+0{,}5} = 22{,}86.$$

Равновесное количество сделок (предложений)

$$S^* = 15,4.$$

ТЕМА
«СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

Задача 1. В магазин приходят покупатели (табл. 1). Определить степень приближения входного потока к простейшему.

Решение.

Весь период времени наблюдения в 200 мин. разделен на 100 двухминутных интервалов.

В каждом интервале определяется число покупателей, приходящих в магазин.

Потом группируются интервалы, в которых было одинаковое число пришедших покупателей.

Результаты наблюдений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты исследования потока покупателей в магазин

Число покупателей в интервале времени $\Delta t = 2$ мин. a_i	Число интервалов с одинаковым числом покупателей n_i	Вероятность числа покупателей в интервале p_i^T	Математическое ожидание интервалов с заданным числом покупателей $n_i^T = n \cdot p_i^T$
0	0	0,010	1
1	5	0,046	4,6
2	11	0,106	10,6
3	13	0,163	16,3
4	22	0,187	18,7
5	18	0,172	17,2
6	14	0,132	13,2
7	9	0,087	8,7
8	4	0,050	5,0
9	2	0,026	2,6
10	1	0,012	1,2
11	1	0,005	0,5
12	0	0,002	0,2
13	0	0,002	0,2

Определим математическое ожидание числа покупателей в течение принятого интервала $\Delta t = 2$ мин:

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{13} a_i n_i}{\sum_{i=0}^{13} n_i} = 4{,}6 \text{ покупателя.}$$

По значению $\bar{a} = 4{,}6$ в третий столбец таблицы вносятся величины вероятностей числа покупателей при пуассоновском распределении, а в четвертый столбец – математическое ожидание числа интервалов, в течение которых пришло одинаковое число покупателей.

Для получения вывода о том, что принятый процесс с достаточной вероятностью описывается полученным пуассоновским распределением, определяем величину

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{13} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T} = 3{,}84 .$$

По числу степеней свободы (число интервалов минус два) 12 и значению $\chi^2 = 3{,}84$ по таблице χ^2 – распределения определяем вероятность того, что экспериментальное распределение является пуассоновским: $P = 0{,}99$.

Значение этой вероятности велико, что говорит о весьма хорошем соответствии экспериментального распределения распределению Пуассона.

Задача 2. На станцию текущего ремонта автомашин поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0{,}5$ машины в час.

Имеется одно помещение для ремонта.

Во дворе станции могут одновременно находиться, ожидая в очереди, не более трех машин.

Среднее время ремонта одной машины 2 ч.

Для улучшения обслуживания были сделаны два предложения:

1) дополнительно построить одно помещение для ремонта;

2) дополнительно построить два помещения для ремонта.

Строительство одного помещения для ремонта автомашин стоит 200 тыс. руб.

Потери от отказа в своевременном обслуживании одной машины составляют 400 руб./год.

Потери от простоя одного помещения (канала) составляют 20 руб./ч.

Из трех возможных вариантов системы (одно, два, три помещения) необходимо выбрать лучший по критерию минимальных приведенных затрат ($E_H = 0{,}2$).

Решение. Все величины приведем к годовому периоду времени. Имеем 0,5 поступлений (заявок) в час, следовательно, за сутки их будет 24·0,5 = 12, а за год 12·365 = 4380.

Имеем СМО смешанного типа с ограничением по длине очереди.

Её характеристики: $\lambda = 0{,}5; \mu = 0{,}5; \alpha = 1; m = 1; n = 1$.

1. Определим вероятности отказов в рассматриваемых случаях:

а) $n = 1$: $P_{отк} = P_{n+m} = \dfrac{\alpha^n}{n!}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m \left[\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{m}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^s\right]^{-1} = \dfrac{1}{1+1+3} = 0{,}2;$

б) $n = 2$: $P_{отк} = P_{2+3} = \dfrac{1/16}{1+1+1/2+1/4+1/8+1/16} = \dfrac{1}{47} = 0{,}021;$

в) $n = 3$: $P_{отк} = P_{3+3} = \dfrac{1/162}{1+1+1/2+1/6+1/6(1/3+1/9+1/27)} = \dfrac{1}{445} = 0{,}0022.$

2. Определим простои системы:

а) $n = 1$:

$$P_{пр} = P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s\right]^{-1} = 0{,}2.$$

Простои за год составят 8760·0,2 = 1752 ч.

б) $n = 2.$

Здесь простои помещений за год будут складываться следующим образом:

$$T_{пр} = (2P_0 + P_1)T_ч.$$

Имеем $P_0 = \dfrac{16}{47} = 0{,}34;\ P_1 = \dfrac{\alpha}{1!}P_0 = 0{,}34;\ T_ч = 365 \cdot 24 = 8760$ ч.

Потери за год составят

8760·(2·0,34 + 0,34) = 8760·1,02 = 8935 ч.

в) $n = 3.$

Простои за год в этом случае будут равны

$$T_{пр} = (3P_0 + 2P_1 + P_2)8760 \text{ ч.}$$

Имеем

$$P_0 = \frac{162}{445}; \quad P_1 = \frac{\alpha}{1!}P_0 = \frac{162}{445};$$

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{2!}P_0 = \frac{81}{445}; \quad T_{пр} = 8760 \cdot \left(\frac{3 \cdot 162}{445} + \frac{2 \cdot 162}{445} + \frac{81}{445}\right) = \frac{891 \cdot 8760}{445} = 17540.$$

Конечные результаты расчётов сведём в табл. 2.

Таблица 2

Результаты решения задачи

Кол–во помещений для ремонта	Вероятность отказа в обсл.	Простои помещений за год, ч.	Количество отказов за год	Потери от отказов за год, руб.	Потери от простоев, руб.	Дополнительные затраты, руб.	Приведенные затраты, руб.
1	0,20	1752	876	350400	35040	0	385440
2	0,021	8935	93	37200	178700	200000	255900
3	0,0022	17540	9,64	3856	350800	400000	434656

Вывод: целесообразно иметь два помещения для ремонта.

Пример 3. Железнодорожная касса по продаже билетов с двумя окошками представляет собой двухканальную СМО с неограниченной очередью, устанавливаемой сразу к двум окошкам (если одно окошко освобождается, ближайший в очереди пассажир его занимает). Касса продаёт билеты в два пункта: А и В. Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билет) для обоих пунктов А и В одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}45$ (пассажиров в минуту), а в сумме они образуют общий поток заявок с интенсивностью $\lambda_A + \lambda_B = 0{,}9$. Кассир тратит на обслуживание пассажира в среднем 2 минуты.

Опыт показывает, что когда у кассы образуется очередь, пассажиры жалуются на медлительность обслуживания. Поступило рационализаторское предложение: вместо одной кассы, подающей билеты и в А, и в В, создать две специализированные кассы (по одному окошку в каждый), продающие билеты одна – только в пункт А, а другая – только в пункт В. Проверить эффективность предложения расчётом.

Решение. 1. Для существующей системы имеем следующие параметры:

$$\lambda = 0{,}9; \quad \mu = 0{,}5; \quad \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}8; \quad n = 2;$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]^{-1} = 0{,}0525;$$

$$N_{\text{оч}} = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2} = 7{,}68; \qquad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{N_{\text{оч}}}{\lambda} = 8{,}54 \text{ мин}.$$

2. Для предлагаемого варианта надо рассмотреть две одноканальные СМО (два специализированных окошка).

Для каждой имеем параметры $\lambda = 0{,}45;\quad \mu = 0{,}5;\quad \alpha = 0{,}9$.

Средняя длина очереди к одному окошку $N_{\text{оч}} = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha} = 8{,}1$.

Среднее время ожидания в очереди $\bar{t}_{\text{оч}} = \dfrac{N_{\text{оч}}}{\lambda} = \dfrac{8{,}1}{0{,}45} = 18$ мин.

Таким образом, средняя длина очереди и среднее время ожидания в ней значительно увеличились, то есть предлагаемый вариант хуже первоначального. Произошло это потому, что в первом варианте меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый из двух кассиров: если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт А, то он может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт В, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет.

ТЕМА
«МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА И ПОТРЕБЛЕНИЯ»

Задача 1.

Пусть имеются три конкурирующих изделия X_1, X_2, X_3. С целью определения спроса на эти изделия произведен опрос 100 человек. Оказалось, что изделие X_1 покупает 50 человек, изделие X_2 – 20 человек, а X_3 – 30 человек. Предположим, что поведение покупателей в каждый следующий месяц обусловлено только их поведением в предыдущий месяц (таким образом, исследуется простая цепь Маркова).

По истечении месяца оказалось, что из 50 человек, покупавших изделие X_1, 45 человек продолжают его покупать, 4 человека стали покупать изделие X_2 и 1 – изделие X_3. Из 20 человек, покупавших изделие X_2, 6 человек продолжают его покупать, 8 стали покупать изделие X_1, 6 – изделие X_3. Из 30 человек, покупавших изделие X_3, 6 человек продолжают его покупать, 21 человек стал покупать изделие X_1, 3 – изделие X_2.

Требуется определить, какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом по истечении месяца? Через 2 месяца? Через год?

Решение.

Если $P_k(t_0)$ – вероятность потребности в изделии X_k в момент t_0, то $P_0(t_0) = (0{,}5;\ 02;\ 0{,}3)$.

Переходные вероятности определяются из условия задачи:

$$P_{11} = \frac{45}{50} = 0{,}9;\quad P_{12} = \frac{4}{50} = 0{,}08;\quad P_{13} = \frac{1}{50} = 0{,}02;$$

$$P_{21} = \frac{8}{20} = 0{,}4;\quad P_{22} = \frac{6}{20} = 0{,}3;\quad P_{23} = \frac{6}{20} = 0{,}3;$$

$$P_{31} = \frac{21}{30} = 0{,}7; \quad P_{32} = \frac{3}{30} = 0{,}1; \quad P_{33} = \frac{6}{30} = 0{,}2.$$

Искомые вероятности получаются умножением вектора вероятностей состояния цепи Маркова на переходную матрицу вероятностей (рис.5.1):

$$P_j(k) = \sum_{i=1}^{n} P_i(k-1) P_{ij}^k ,$$

где P_{ij}^k – вероятность перехода системы из i–го состояния в j–е на k–м шаге.

Получаем вероятности спроса изделий для первого месяца:

$$P(t_1) = P(t_0)\left\|P_{ij}\right\| = (0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}3)\begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}08 & 0{,}02 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix} = (0{,}74;\ 0{,}13;\ 0{,}13).$$

Таким образом, через месяц наибольшим спросом будет пользоваться изделие X_1.

Если предположить, что поведение покупателей со временем не меняется, т.е. что цепь однородна по времени, то аналогично можно определить, какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом по истечении двух, трех т.д. месяцев.

Вероятности спроса изделий через два месяца:

$$P(t_2) = P(t_1)\left\|P_{ij}\right\| = (0{,}74;\ 0{,}13;\ 0{,}13)\begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}08 & 0{,}02 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix} = (0{,}809;\ 0{,}111;\ 0{,}080).$$

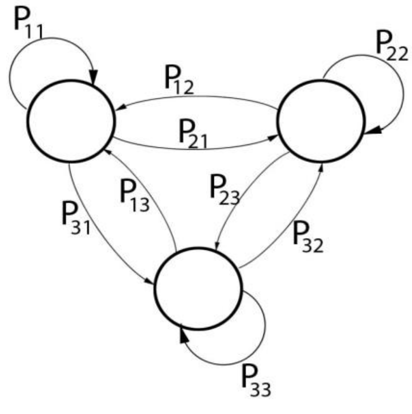

Рис. 1. Граф переходов и состояний системы

Определим, какое изделие будет пользоваться наибольшим спросом по истечении достаточно продолжительного периода (год).

Все элементы матрицы перехода положительны, т.е. условие эргодичности выполняется, следовательно, предельные вероятности P_1, P_2, P_3 потребления изделий X_1, X_2, X_3 существуют.

Система уравнений в данном случае имеет вид

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i P_{ij}\ , \text{ т.е. } \begin{cases} P_1 = 0,9P_1 + 0,4P_2 + 0,7P_3 \\ P_2 = 0,08P_1 + 0,3P_2 + 0,1P_3 \\ P_3 = 0,02P_1 + 0,3P_2 + 0,2P_3 \end{cases}$$

Система линейно зависима.

Заменяя третье уравнение системы уравнением $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} P_1 = 0,9P_1 + 0,4P_2 + 0,7P_3 \\ P_2 = 0,08P_1 + 0,3P_2 + 0,1P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases}$$

Решение системы: $P_1 = 0{,}84;\ P_2 = 0{,}10;\ P_3 = 0{,}06$.

ТЕМА «МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА»

Задача 1.

Пусть целевая функция потребителя зависит от двух благ x_1 и x_2 следующим образом:

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \to \max .$$

Пусть цены благ равны, соответственно, 10 и 2, а доход потребителя – 60.

Тогда, согласно полученной формуле функции спроса,

$$x_1 = \frac{60}{2 \cdot 10} = 3; \quad x_2 = \frac{60}{2 \cdot 2} = 15; \quad U' = 45 .$$

Пусть теперь p_2 меняется с 2 до 7. Каков необходимый размер компенсации?

Решение.

Чтобы приобрести прежний оптимальный набор, потребителю необходимо дополнительно (7 – 2) · 15 = 75 денежных единиц.

Однако прежняя структура потребления не будет оптимальной при новых ценах, и минимальная необходимая компенсация будет меньше, чем 75.

Пусть потребитель получает дополнительно количество денег *M.* Тогда при новых ценах его спрос на первое и второе блага будет равен:

$$x_1 = \frac{60 + M}{2 \cdot 10}\ ; \qquad x_2 = \frac{60 + M}{7 \cdot 2} .$$

Целевая функция ($x_1 x_2$) будет равна $\dfrac{(60+M)^2}{10\cdot 7\cdot 4}$, и это выражение должно равняться начальному $U' = 45$.

Отсюда $M = 52{,}25$, что существенно меньше, чем 75.

Теперь решим задачу в более общем виде.

Пусть по–прежнему $U(x_1, x_2) = x_1 x_2 \to \max$; цены благ равны p_1, и p_2, а доход D. Очевидно, что

$$x_i = \frac{D}{2p_i}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{D}{2p_i^2}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial D} = \frac{1}{2p_i}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0.$$

Пусть теперь цена p_1 выросла в *K* раз (*K* > 1), и при этом потребитель получает необходимую компенсацию.

Новый размер дохода обозначим через $\overline{D}$, спрос – $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$.

Очевидно, $\overline{x}_1 = \dfrac{\overline{D}}{2Kp_1}$; $\overline{x}_2 = \dfrac{\overline{D}}{2p_2}$ и условие компенсации:

$$\frac{\overline{D}^2}{4Kp_1p_2} = \frac{D^2}{4p_1p_2}.$$

Отсюда $\overline{D} = D\sqrt{K}$; $\overline{x}_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{K}}$; $\overline{x}_2 = x_2\sqrt{K}$.

Итак, спрос на первый товар в случае с компенсацией сократится в $\sqrt{K}$ раз (а не в *K* раз, как без нее), а спрос на второй товар в $\sqrt{K}$ раз вырастет.

В случае роста цены второго товара ситуация будет полностью симметричной.

Таким образом, $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ при $i=1$, $j=2$ или $j=1$, $i=2$.

Индекс *comp* означает, что перекрестная частная производная спроса рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния компенсации дохода.

Условие компенсации снимает "эффект дохода", оставляя лишь "эффект замены", что позволяет более точно определить понятие взаимозаменяемости и взаимодополняемости благ и оценивать эти характеристики.

Блага *i* и *j* называются взаимозаменяемыми, если

$\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ и $\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$ (эти два условия равносильны),

и взаимодополняемыми, если

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0 \text{ и } \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0.$$

Рассчитаем теперь эти частные производные для рассматриваемой задачи, когда p_1 растет в K раз.

В этом случае приращение

$$\Delta x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{K}} - x_1; \qquad \Delta x_2 = \sqrt{K} x_2 - x_2; \qquad \Delta p_1 = K p_1 - p_1.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{K \to 1} \frac{x_1\left(\sqrt{K}-1\right)}{p_1 \sqrt{K}(K-1)} = \lim_{K \to 1}\left[-\frac{x_1}{p_1\sqrt{K}\left(\sqrt{K}+1\right)}\right] = -\frac{x_1}{2p_1} = -\frac{D}{4p_1^2};$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{K \to 1} \frac{x_2\left(\sqrt{K}-1\right)}{p_1 \sqrt{K}(K-1)} = \lim_{K \to 1} \frac{x_2}{p_1\sqrt{K}(K+1)} = \frac{x_2}{2p_2} = \frac{D}{4p_1 p_2}.$$

Последняя величина положительна, что свидетельствует о взаимозаменяемости благ в рассматриваемой задаче.

Задача 2. На основании данных о потреблении взаимозаменяемых и взаимодополняемых продуктов x_1 и x_2 в различном сочетании i, их цене P_1 и P_2, полезности U и бюджете (доходах) потребителя D построить кривую безразличия и определить оптимальный план потребления названных продуктов.

Исходные данные имеют вид:

i	x_{1i}	i	x_{2i}
1	2,9	1	13,5
2	3,0	2	12,0
3	5,0	3	7,5
4	7,0	4	6,0
5	10,0	5	5,0
6	12,0	6	4,5
7	12,3	7	4,6

$U = 18$; $P_1 = 5$; $P_2 = 10{,}3$; $D = 100$.

Решение.

В нашей задаче продукты x_1 и x_2 являются взаимозаменяемыми и взаимодополняемыми, т.е. функция смешанная.

Поэтому можно воспользоваться моделью неоклассической функции полезности, которая имеет вид

$$U = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}, \text{ где } b_1 \le 1;\ b_2 \le 1.$$

Чтобы убедиться в правильности предположения о форме связи, следует графически изобразить изучаемую зависимость в системе координат по данным о потреблении продуктов x_1 и x_2.

По виду графика можно предположить, что зависимость между x_1 и x_2 имеет вид $U = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ при $b_1 \le 1;\ b_2 \le 1.$

Решение задачи по построению кривой безразличия заключается в определении параметров функции b_1 и b_2.

Параметры кривой безразличия b_1 и b_2 отражают степень полезности каждого из продуктов x_1 и x_2.

Определив параметры b_1 и b_2, зная одну из переменных – количество потребления продукта x_1, всегда можно определить вторую переменную x_2 так, чтобы обеспечить максимум полезности от потребления продуктов

$$x_2 = \left(\frac{U}{x_1^{b_1}} \right)^{\frac{1}{b_2}}.$$

Для расчета параметров функции $U = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ целесообразно ее линеаризовать посредством логарифмирования.

Имеем $\ln U = b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2$.

Обозначим $\ln x_1 = y_1;\quad \ln x_2 = y_2$ и запишем

$$\ln U = b_1 y_1 + b_2 y_2.$$

Отсюда $y_1 = \dfrac{\ln U}{b_1} - \dfrac{b_2}{b_1} y_2$.

Обозначив $\dfrac{\ln U}{b_1} = A;\quad \dfrac{b_2}{b_1} = B$, можно записать $y_1 = A - B y_2$.

Для определения коэффициентов A и B обычно применяют метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{1i} = An - B \sum_{i=1}^{n} y_{2i}; \qquad \sum_{i=1}^{n} y_{1i} y_{2i} = An \sum_{i=1}^{n} y_{2i} - B \sum_{i=1}^{n} y_{2i}^2;$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i}}{n} + B \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{2i}}{n} = \bar{y}_1 + B y_2; \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{1i} y_{2i} - \bar{y}_1 \sum_{i=1}^{n} y_{2i}}{\bar{y}_2 \sum_{i=1}^{n} y_{2i} - \sum_{i=1}^{n} y_{2i}^2}.$$

Учитывая, что $A = \dfrac{\ln U}{b_1};\quad B = \dfrac{b_2}{b_1}$ определяют

$$b_1 = \frac{\ln U}{A} \text{ и } b_2 = b_1 B.$$

Проверяют правильность расчетов исследуемых зависимостей

$$U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}; \quad \ln U = b_1 \ln x_2 + b_2 \ln x_2$$

и определяют расчетную кривую безразличия

$$x_2^{расч} = \left(\frac{U}{x_1^{\,b_1}}\right)^{\frac{1}{b_2}},$$

отражающую отношения предпочтения, характерные для отдельного индивидуума.

На графике оптимальный план потребления соответствует точке касания бюджетной прямой и кривой безразличия.

Ее координаты, т.е. значения (x_1^0, x_2^0), определяются путем нахождения частных производных функций

$$U = x_1^{\,b_1} x_2^{\,b_2}; \qquad D = x_1 P_1 + x_2 P_2.$$

После несложных преобразований имеем

$$x_1^0 = \frac{D}{P_1} \cdot \frac{b_1}{b_1 + b_2}; \qquad x_2^0 = \frac{D}{P_2} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2}.$$

Полученные функции (x_1^0, x_2^0) и есть функции спроса.

Они отражают оптимальный размер потребления продуктов, обеспечивающий максимум полезности в рамках бюджетного ограничения при заданных ценах.

При расчете величин *А* и *В* можно воспользоваться таблицей вспомогательных расчетов.

Ниже приводятся расчеты для имеющихся данных.

Таблица 2.1

Расчет функции безразличия

i	x_{1i}	$\ln x_{1i} = y_{1i}$	x_{2i}	$\ln x_{2i} = y_{2i}$	$y_{1i}y_{2i}$	y_{2i}^2
1	2,9	1,065	13,5	2,603	2,772	6,776
2	3,0	1,099	12,0	2,485	2,731	6,175
3	5,0	1,609	7,5	2,015	3,242	4,060
4	7,0	1,946	6,0	1,792	3,487	3,211
5	10,0	2,303	5,0	1,609	3,706	2,589
6	12,0	2,485	4,5	1,504	3,737	2,262
7	12,3	2,509	4,6	1,526	3,829	2,329
		$\sum y_1 = 13{,}016$		$\sum y_2 = 13{,}534$	$\sum y_1 y_2 = 23{,}504$	$\sum y_2^{\,2} = 27{,}402$

Определим коэффициенты *А* и В с использованием МНК:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum y_1}{n} = \frac{13{,}016}{7} = 1{,}859; \qquad \bar{y}_2 = \frac{\sum y_2}{n} = \frac{13{,}534}{7} = 1{,}933;$$

$$A = \bar{y}_1 + B \cdot \bar{y}_2; \qquad B = \frac{\sum y_1 y_2 - \bar{y}_1 \sum y_2}{\bar{y}_2 \sum y_2 - \sum {y_2}^2} = \frac{23{,}504 - 1{,}859 \cdot 13{,}534}{1{,}933 \cdot 13{,}534 - 27{,}402} = 1{,}334;$$

$$A = 1{,}859 + 1{,}334 \cdot 1{,}933 = 4{,}438; \quad b_1 = \frac{\ln U}{A} = \frac{\ln 18}{4{,}438} = 0{,}651;$$

$$b_2 = b_1 B = 0{,}651 \cdot 1{,}334 = 0{,}868.$$

$$\ln U = \ln 18 = 2{,}890; \qquad \frac{\ln U}{b_2} = 3{,}329; \qquad \frac{b_1}{b_2} = 0{,}75.$$

Таблица 2.2

Определение расчетной кривой безразличия

i	$\frac{b_1}{b_2} x_{1i}$	$y_{2i}^{расч} = \frac{\ln U}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} y_{1i}$	$x_{2i}^{расч}$	x_{1i}
1	0,799	2,53	12,569	2,9
2	0,824	2,505	12,253	3,0
3	1,207	2,122	8,354	5,0
4	1,459	1,87	6,491	7,0
5	1,727	1,602	4,967	10,0
6	1,864	1,465	4,333	12,0
7	1,882	1,447	4,253	12,3

Окончательно получаем:

$$x_1^0 = \frac{D}{P_1} \cdot \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{100}{5} \cdot \frac{0,651}{0,651 + 0,868} = 8,571;$$

$$x_2^0 = \frac{D}{P_2} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{100}{10,3} \cdot \frac{0,868}{0,651 + 0,868} = 5,548.$$

ТЕМА
«ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Задача 1. Известны расходы на конечное потребление и совокупный доход (усл. ед.) семей за 9 лет.

Расходы на потребление: y_t : 34; 35; 35; 37; 38; 39; 41; 43; 44.

Совокупный доход x_t : 37; 39; 38; 39; 41; 42; 44; 47; 45.

Требуется исследовать тесноту и силу связи между этими временными рядами.

Решение.

Корреляционно–регрессионный анализ, проведенный по исходным данным рядов, приводит к следующим результатам:

$$\overline{y}_t = -3,62 + 1,02 x_t; \quad r_{xy} = 0,967; \quad r_{xy}^2 = 0,934.$$

Коэффициент автокорреляции первого порядка по ряду расходов на конечное потребление $r_{yy[1]} = 0,932$.

Аналогичный коэффициент ряда совокупного дохода $r_{xx[1]} = 0,938$.

Можно предположить, что полученные результаты содержат ложную корреляцию ввиду наличия в каждом из рядов линейной (или близкой к линейной) тенденции.

Применим метод устранения тенденции ряда по отклонениям от тренда. Результаты расчета линейных трендов по каждому ряду дают уравнения:

$$\overline{y}_t = 31,94 + 1,3\,t; \quad r_{yt}^2 = 0,973;$$

$$\overline{x}_t = 35,42 + 1,18\,t; \quad r_{xt}^2 = 0,894.$$

По этим трендам определим расчетные значения и отклонения от трендов (табл.7.1).

Проверим полученные отклонения от трендов на автокорреляцию.

Коэффициенты автокорреляции первого порядка по отклонениям от трендов составляют:

$$r_{\Delta x \Delta x[1]} = -0,082; \quad r_{\Delta y \Delta y[1]} = 0,275.$$

Следовательно, временные ряды отклонений от трендов можно использовать для получения количественной характеристики тесноты связи исходных временных рядов расходов на конечное потребление и общего дохода.

Коэффициент корреляции по отклонениям от трендов $r_{\Delta x \Delta y} = 0,34$ (коэффициент корреляции по исходным уровням рядов $r_{xy} = 0,967$),

Заключаем, что связь между расходами на потребление и совокупным доходом прямая и тесная.

Таблица 1

Трендовая компонента и ошибка временных рядов

Время, t	y_t	x_t	$\overline{y}_t$	$\overline{x}_t$	$y_t - \overline{y}_t$	$x_t - \overline{x}_t$
1	34	37	33,24	36,60	0,76	0,40
2	35	39	34,54	37,78	0,46	1,22
3	35	38	35,84	38,97	–0,84	–0,97
4	37	39	37,14	40,15	–0,14	–1,15
5	38	41	38,44	41,33	–0,44	–0,33

6	39	42	39,74	42,52	–0,74	–0,52
7	41	44	41,04	43,70	–0,04	0,30
8	43	47	42,34	44,88	0,66	2,12
9	44	45	43,64	46,07	0,36	–1,07

Результаты построения модели регрессии по отклонениям от трендов следующие:

$$\left(y_t - \overline{y}_t\right) = -5{,}19 \cdot 10^{-7} + 0{,}3372\left(x_t - \overline{x}_t\right); \quad r^2_{\Delta x \Delta y} = 0{,}402.$$

Содержательная интерпретация параметров этой модели затруднительна, однако модель можно использовать для прогнозирования,

Для этого необходимо определить трендовое значение факторного признака $\overline{x}_t$ и с помощью одного из методов оценить величину предполагаемого отклонения фактического значения от трендового $\left(x_t - \overline{x}_t\right)$.

Далее по уравнению тренда для результативного признака определяют трендовое значение $\overline{y}_t$, а по уравнению регрессии по отклонениям от трендов находят величину отклонения $\left(y_t - \overline{y}_t\right)$.

Точечный прогноз фактического значения y_t^{np} по формуле

$$y_t^{np} = \overline{y}_t + \left(y_t - \overline{y}_t\right).$$

Задача 2.

Проанализировать зависимость между рядами из примера 1, используя для этого первые разности.

Решение.

Вычислим первые разности временных рядов (табл.7.2).

Полученные ряды Δy_t и Δx_t не содержат автокорреляции.

Их будем использовать вместо исходных данных для измерения зависимости между расходами на конечное потребление и совокупным доходом.

Коэффициент корреляции этих рядов по первым разностям составляет величину $r_{\Delta x \Delta y} = 0{,}598$.

Это подтверждает вывод о наличии тесной прямой связи между расходами на потребление и совокупным доходом.

Таблица 2

Первые разности временных рядов
расходов на конечное потребление и совокупного дохода

Время, t	y_t	x_t	Δy_t	Δx_t
1	34	37	–	–

2	35	39	1	2
3	35	38	0	– 1
4	37	39	2	1
5	38	41	1	2
6	39	42	1	1
7	41	44	2	2
8	43	47	2	3
9	44	45	1	–2
Коэффициент автокорреляции первого порядка			– 0,167	– 0,412

Построение уравнения регрессии зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода по первыми разностям приводит к следующему уравнению регрессии:

$$\bar{\Delta} y_t = 1 + 0,25\,\Delta x_t; \quad R^2 = 0,357.$$

Параметрам данного уравнения (в отличие от уравнения регрессии по отклонениям от тренда) легко дать интерпретацию.

При изменении прироста дохода на 1 д.е. прирост потребления изменяется в среднем на 0,25 д.е.

Метод последовательных разностей имеет два существенных недостатка:

1) применение метода связано с сокращением числа пар наблюдений, по которым строится уравнение регрессии, и, следовательно, с потерей числа степеней свободы;

2) использование вместо исходных уровней рядов их приростов или ускорений приводит к потере информации, содержащейся в исходных данных.

Задача 3. Построить уравнение регрессии, описывающее зависимость расходов на конечное потребление y_t от совокупного дохода x_t и фактора времени из примера 1.

Решение.

Для расчета параметров уравнения регрессии можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов и решить соответствующую систему линейных уравнений.

В результате расчетов уравнение регрессии примет вид

$$y_t = 20 + 0,4\,x_t + 0,90\,t + \varepsilon_t.$$

Интерпретация параметров этого уравнения следующая.

Параметр b_1 = 0,34 указывает на то, что при увеличении совокупного дохода на 1 д.е. расходы на конечное потребление возрастут в среднем на 0,34 д.е. в условиях существования неизменной тенденции.

Параметр b_2 = 0,90 означает, что воздействие всех факторов (кроме совокупного дохода) на расходы на конечное потребление приведет к его среднегодовому абсолютному приросту на 0,90 д.е.

Задача 4.

Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках для модели зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода, построенной по первым разностям исходных показателей в примере 2.

Решение.

В примере 7.2 было получено следующее уравнение регрессии:

$$\bar{\Delta} y_t = 1 + 0,25\,\Delta x_t.$$

Расчет критерия Дарбина – Уотсона для модели зависимости потребления от дохода представлены в табл.7.2.

Фактическое значение критерия Дарбина – Уотсона для этой модели составляет величину: D_H = 4,625/2,25 = 2,06.

Сформулируем гипотезы:

H_0 – в остатках нет автокорреляции;

H_1 – в остатках есть положительная автокорреляция;

H_1^* – в остатках есть отрицательная автокорреляция.

Зададим уровень значимости α = 0,05.

По таблицам значений критерия Дарбина – Уотсона определим (для числа наблюдений n = 8 и числа независимых переменных модели m = 1) критические значения: $D_{кр1}$ = 0,700 и $D_{кр2}$ = 1,356.

Таблица 4

Расчет критерия Дарбина – Уотсона

Время, t	Δy_t	Δx_t	$\bar{\Delta} y_t$	ε_t	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	–	–	–		–	–	–
2	1	2	1,50	–0,50	–	–	0,2500
3	0	–1	0,75	–0,75	–0,25	0,0625	0,5625
4	2	1	1,25	0,75	1,50	2,2500	0,5625
5	1	2	1,50	–0,5	–1,25	1,5625	0,2500
6	1	1	1,25	–0,25	0,25	0,0625	0,0625
7	2	2	1,50	0,50	0,75	0,5625	0,2500
8	2	3	1,75	0,25	–0,25	0,0625	0,0625
9	1	–2	0,50	0,50	0,25	0,0625	0,2500
Сумма	10	8	10	0	1	4,6250	2,2500

Фактическое значение D_H = 2,06 попадает в промежуток от $D_{кр2}$ до $4 - D_{кр2}$.

Следовательно, нет оснований отклонять гипотезу H_0 об отсутствии автокорреляции в остатках.

Существуют следующие **ограничения** на применение критерия Дарбина – Уотсона.

1. Критерий Дарбина – Уотсона неприменим к моделям, включающим в качестве независимых переменных лаговые значения результативного признака (то есть к моделям авторегрессии). Для тестирования на автокорреляцию остатков моделей авторегрессии используется критерий h Дарбина.

2. Методика расчета и использования критерия Дарбина – Уотсона направлена только на выявление автокорреляции остатков первого порядка. При проверке остатков на автокорреляцию более высоких порядков следует применять другие методы.

3. Критерий Дарбина – Уотсона дает достоверные результаты только для больших выборок.

В этом смысле результаты примера 4 нельзя считать достоверными ввиду малого числа наблюдений n = 8, по которым построена модель регрессии.

Задача 5.

Имеются два временных ряда x_t и y_t ($t = \overline{1, n}$).

Исследовать взаимосвязь этих рядов. Необходимо:

1. Исключить тенденцию временных рядов, используя: метод отклонения от тренда; метод последовательных разностей; метод включения в модель регрессии фактора времени.

2. Оценить автокорреляцию в остатках.

3. Проверить гипотезу о коинтеграции исследуемых рядов.

4. Выполнить прогноз ряда y_t при уровне ряда $x_t^{пр} = 1{,}2x_n$.

Исходные данные задачи приведены ниже в таблице:

y_t	37	38	40	41	44	47	49	52	54	57	60	61	69	73	74	76
x_t	10,3	10,8	11,3	11,4	12,3	12,4	12,9	13,1	13,6	13,8	14,3	15,4	15,5	15,8	18	18,5

Решение.

Корреляционно–регрессионный анализ, проведенный по исходным данным рядов, приводит к следующим результатам:

$$y_t = -18{,}67 + 5{,}34x_t; \quad r_{xy} = 0{,}973; \quad r_{xy}{}^2 = 0{,}948.$$

1. Исключим тенденцию временных рядов, используя метод отклонения от тренда (табл.5.1).

Получим уравнения регрессии от времени:

$$\bar{y}_t = 31{,}03 + 2{,}76t. \quad r_{yt}^2 = 0{,}979.$$

$$\bar{x}_t = 9{,}5 + 0{,}5t. \quad r_{yt}^2 = 0{,}95.$$

Рассчитанные по уравнениям значения занесем в табл.7.5.1

Коэффициенты автокорреляции в остатках первого порядка

$$r_{\varepsilon x\varepsilon x[1]} = 0{,}46\ . \qquad r_{\varepsilon y\varepsilon y[1]} = 0{,}55\ .$$

Автокорреляция в остатках первого порядка предполагает, что каждый следующий уровень остатков ε_t зависит от предыдущего уровня ε_{t-1} (табл.5.1)

Найдем уравнение регрессии между отклонениями:

$$\varepsilon_{yt} = 0{,}014 + 0{,}972\varepsilon_{xt}\ ; \quad r^2_{\varepsilon x\varepsilon y} = 0{,}076\ ; \quad r_{\varepsilon x\varepsilon y} = 0{,}276\ .$$

Это свидетельствует о том, связь значимая, без ложной корреляции (не учитываем фактор времени).

Таблица 5.1

Расчет уравнения регрессии методом отклонении от тренда.

t	x_t	y_t	$\bar{y}_t$	$\bar{x}_t$	$\varepsilon_{yt} = y_t - \bar{y}_t$	$\varepsilon_{xt} = x_t - \bar{x}_t$
1	10,3	37	33,79	10	3,21	0,3
2	10,8	38	36,55	10,5	1,45	0,3
3	11,3	40	39,31	11	0,69	0,3
4	11,4	41	42,07	11,5	–1,07	–0,1
5	12,3	44	44,83	12	–0,83	0,3
6	12,4	47	47,59	12,5	–0,59	–0,1
7	12,9	49	50,35	13	–1,35	–0,1
8	13,1	52	53,11	13,5	–1,11	–0,4
9	13,6	54	55,87	14	–1,87	–0,4
10	13,8	57	58,63	14,5	–1,63	–0,7
11	14,3	60	61,39	15	–1,39	–0,7
12	15,4	61	64,15	15,5	–3,15	–0,1
13	15,5	69	66,91	16	2,09	–0,5
14	15,8	73	69,67	16,5	3,33	–0,7
15	18	74	72,43	17	1,57	1
16	18,5	76	75,19	17,5	0,81	1

Исключим тенденцию временных рядов, используя метод последовательных разностей.

Если ряд содержит линейную тенденцию, то ее можно устранить, взяв первые разности ряда (табл.5.2):

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}.$$

Тогда ложная корреляция будет устранена, если в регрессии рассматривать эти разности.

Автокорреляция первых разностей рядов составит величину:

$$r_{\Delta y\Delta y[1]} = -0{,}058\ ; \quad r_{\Delta x\Delta x[1]} = -0{,}21\ .$$

Это означает, что автокорреляция практически отсутствует.

Получаем уравнение регрессии:

$$\Delta\bar{y}_t = 3{,}37 - 1{,}4\Delta x_t .$$

В данном уравнении коэффициент – 1,4 показывает изменение Δy_t за счет Δx_t, а коэффициент 3,37 показывает изменение Δy за счет прочих факторов.

Коэффициент детерминации данного уравнения равен 0,2.

Исключим тенденцию временных рядов, используя метод включения в модель регрессии фактора времени.

По данным трех столбцов значений: t, x_t, y_t получим следующее уравнение множественной линейной регрессии:

$$y_t = 21{,}79 + 0{,}97 x_t + 2{,}28 t .$$

Таблица 5.2

Расчет первых разностей рядов

t	x_t	y_t	Δy_t	Δx_t
1	10,3	37	–	–
2	10,8	38	1	0,5
3	11,3	40	2	0,5
4	11,4	41	1	0,1
5	12,3	44	3	0,9
6	12,4	47	3	0,1
7	12,9	49	2	0,5
8	13,1	52	3	0,2
9	13,6	54	2	0,5
10	13,8	57	3	0,2
11	14,3	60	3	0,5
12	15,4	61	1	1,1
13	15,5	69	8	0,1
14	15,8	73	4	0,3
15	18	74	1	2,2
16	18,5	76	2	0,5

Можем сделать вывод, что зависимость значений y_t от значений x_t, характеризуется коэффициентом 0,97, а от значений t – коэффициентом 2,28.

Фактор времени оказывает большее воздействие на изменение y, чем фактор x.

2. Оценим автокорреляцию в остатках (табл.5.3).

Автокорреляция в остатках первого порядка предполагает, что каждый следующий уровень остатков ε_t зависит от предыдущего уровня ε_{t-1}. Во временных рядах часто наблюдается автокорреляция в остатках, что искажает модель взаимосвязи.

Для определения автокорреляции в остатках используем критерий Дарбина–Уотсона.

$$D_H \approx 2(1 - r_{æ[1]}).$$

$$0 \le D_H \le 4.$$

Выдвинем гипотезу H_0: автокорреляция равна 0.

Проверим гипотезу о наличии автокорреляции в остатках для уравнения $\Delta\bar{y}_t = 3{,}37 - 1{,}4\Delta x_t$.

Таблица 5.3

Расчет критерия автокорреляции в остатках рядов

t	Δy_t	Δx_t	$\Delta\bar{y}_t$	$\varepsilon_t = \Delta y_t - \Delta\bar{y}_t$
1	–	–	–	–
2	1	0,5	2,67	–1,67
3	2	0,5	2,67	–0,67
4	1	0,1	3,23	–2,23
5	3	0,9	2,11	0,89
6	3	0,1	3,23	–0,23
7	2	0,5	2,67	–0,67
8	3	0,2	3,09	–0,09
9	2	0,5	2,67	–0,67
10	3	0,2	3,09	–0,09
11	3	0,5	2,67	0,33
12	1	1,1	1,83	–0,83
13	8	0,1	3,23	4,77
14	4	0,3	2,95	1,05
15	1	2,2	0,29	0,71
16	2	0,5	2,67	–0,67

Вычисленный коэффициент $D_H = 1{,}81 \Rightarrow r_{æ[1]} = 0{,}095$.

По таблицам значений критерия Дарбина–Уотсона определим (для числа наблюдений $n = 16 - 1 = 15$ и числа независимых переменных $m = 1$) критические значения:

$$D_{кр1} = 1{,}08 \text{ и } D_{кр2} = 1{,}36.$$

Фактическое значение $D_н$ попадает в промежуток $D_{кр2}$ до 2.

Следовательно, отклоняем гипотезу H_0 и, следовательно, автокорреляция отсутствует.

3. Проверим гипотезу о коинтеграции исследуемых рядов.

Применим критерий Энгеля–Грангера для проверки гипотезы о коинтеграции временных рядов x_t и y_t (табл. 5.4).

Выдвенем гипотезу H_0: коинтеграции временных рядов x_t и y_t нет.

Рассмотрим уравнение регрессии вида:

$$y_t = -18{,}67 + 5{,}34x_t.$$

Таблица 5.4

Проверка гипотезы о коинтеграции исследуемых рядов

t	x_t	y_t	$\bar{y}_t$	$\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_t$	$\Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
1	10,3	37	36,332	0,668	–
2	10,8	38	39,002	–1,002	–1,67
3	11,3	40	41,672	–1,672	–0,67
4	11,4	41	42,206	–1,206	0,466
5	12,3	44	47,012	–3,012	–1,806
6	12,4	47	47,546	–0,546	2,466
7	12,9	49	50,216	–1,216	–0,67
8	13,1	52	51,284	0,716	1,932
9	13,6	54	53,954	0,046	–0,67
10	13,8	57	55,022	1,978	1,932
11	14,3	60	57,692	2,308	0,33
12	15,4	61	63,566	–2,566	–4,874
13	15,5	69	64,1	4,9	7,466
14	15,8	73	65,702	7,298	2,398
15	18	74	77,45	–3,45	–10,748
16	18,5	76	80,12	–4,12	–0,67

Воспользовавшись результатами данной таблицы, получим уравнение регрессии остатков ε_t:

$$\Delta\varepsilon_t = -0{,}231 + 0{,}86\varepsilon_{t-1}.$$

Фактическое значение T–критерия ($T_н = \dfrac{b}{\sigma_b}$), рассчитанное по данным уравнения регрессии, равно

$$T_н = \frac{0,86}{0,258} = 3,33.$$

Так как полученное фактическое значение по абсолютной величине превышает критическое значение $T_{ЭГ(0,05)} = 1{,}9439$, то с вероятностью 95% можно отклонить гипотезу H_0 и сделать вывод о коинтеграции временных рядов x_t и y_t.

4. Выполним прогноз ряда $y_t^{пр}$ при заданном уровне исходного ряда

$$x_t^{np} = 1{,}2x_n = 1{,}2 \cdot 18{,}5 = 22{,}2.$$

По уравнению, полученному методом включения в модель регрессии фактора времени,

$$y_t = 21{,}79 + 0{,}97x_t + 2{,}28t$$

при t = 17 сделаем прогноз ряда y_t^{np}:

$$y_t^{np} = 21{,}79 + 0{,}97 \cdot 22{,}2 + 2{,}28 \cdot 17 = 82{,}084.$$

Задача 6.

Известны расходы на конечное потребление y_t и совокупный доход x_t (тыс. руб.) семей за 15 дет. Проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках для модели зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода.

Расходы (y_t): 54; 58; 58; 60; 61; 62; 64; 66; 67; 69; 70; 70; 73; 74; 74.

Доходы (x_t): 58; 61; 61; 62; 64; 64; 67; 70; 71; 72; 74; 76; 80; 81; 84.

Решение.

Корреляционно–регрессионный анализ, проведенный по исходным данным рядов, приводит к следующим результатам:

$$\bar{y}_t = 11{,}38 + 0{,}77x_t;\ r_{xy} = 0{,}983;\ r_{xy}^{\ 2} = 0{,}967$$

Коэффициент автокорреляции в остатках первого порядка

$$r_{\varepsilon\varepsilon[1]} = 0{,}63$$

Автокорреляция в остатках первого порядка предполагает, что каждый следующий уровень остатков ε_t зависит от предыдущего уровня ε_{t-1} (табл. 6.1)

Таблица 6.1

Расчеты для оценки автокорреляции в остатках

t	x_t	y_t	$\bar{y}_t$	$\varepsilon_t = y_t - \bar{y}_t$	$\Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
1	58	54	56,04	–2,04	–
2	61	58	58,35	–0,35	1,69
3	61	58	58,35	–0,35	0
4	62	60	59,12	0,88	1,23
5	64	61	60,66	0,34	–0,54
6	65	62	61,43	0,57	0,23
7	67	64	62,97	1,03	0,46
8	70	66	65,28	0,72	–0,31
9	71	67	66,05	0,95	0,23
10	72	69	66,82	2,18	1,23
11	74	70	68,36	1,64	–0,54
12	76	70	69,9	0,1	–1,54

13	80	73	72,98	0,02	–0,08
14	81	74	73,75	0,25	0,23
15	84	74	76,06	–2,06	–2,31

Преобразуем исходные переменные x_t и y_t к виду (табл.6.2):

$$x_t^* = x_t - x_{t-1} \cdot r_{æ[1]};$$

$$y_t^* = y_t - y_{t-1} \cdot r_{æ[1]}.$$

Уравнение регрессии примет вид:

$$y_t^* = a^* + bx_t^* + \varepsilon_t^*.$$

Уравнение не содержит автокорреляции и предполагается, что не содержит трендов.

Следовательно, для новых переменных x_t^* и y_t^* обычным МНК найдем коэффициенты a^* и b.

Таблица 6.2

Значения преобразованных переменных x_t^* и y_t^*.

t	x_t^*	y_t^*
1	–	–
2	24,38388	23,90913
3	22,48995	21,38388
4	23,48995	23,38388
5	24,85863	23,12126
6	24,59601	23,48995
7	25,9647	24,85863
8	27,70207	25,59601
9	26,80813	25,33338
10	27,17682	26,70207
11	28,54551	26,43945
12	29,28288	25,80813
13	32,02026	28,80813
14	30,49501	27,9142
15	32,8637	27,28288

Исходя из данных таблицы, получаем коэффициенты

$$a^* = 8{,}76 \text{ и } b = 0{,}61.$$

Тогда: $$y_t^* = 8{,}76 + 0{,}61x_t^* + \varepsilon_t^*.$$

Пересчитаем коэффициент a по формуле:

$$a = \frac{a^*}{1 - r_{\varepsilon\varepsilon[1]}} = \frac{8,76}{1 - 0,63} = 23,68.$$

Тогда уравнение регрессии примет вид:

$$y_t = 23{,}68 + 0{,}61x_t + \varepsilon_t^*.$$

Коэффициент детерминации для этого уравнения равен 0,863.

Регрессионный анализ зависимости расходов на конечное потребление от дохода позволил получить уравнение регрессии в виде:

$$\bar{y}_t = 11{,}38 + 0{,}77x_t + \varepsilon_t.$$

Применим критерий Энгеля–Грангера для проверки гипотезы о коинтеграции временных рядов x_t и y_t.

Выдвигаем гипотезу H_0: коинтеграции рядов x_t и y_t нет.

Воспользовавшись результатами расчетов, получим уравнение регрессии остатков ε_t:

$$\Delta\varepsilon_t = -0{,}238 + 0{,}559\varepsilon_{t-1}.$$

Фактическое значение T – критерия, рассчитанное по данным уравнения регрессии, равно

$$T_н = \frac{0,559}{0,257} = 2,175.$$

Так как полученное фактическое значение по абсолютной величине превышает критическое значение $T_{ЭГ(0,05)} = 1{,}9439$, то с вероятностью 95% можно отклонить гипотезу H_0 и сделать вывод о коинтеграции временных рядов дохода и расходов на конечное потребление.

Этот же вывод подтверждается и критерием Дарбина–Уотсона.

Фактическое значение для этого критерия составляет:

$$D_H \approx 2(1 - r_{\varepsilon\varepsilon[1]}) = 2(1 - 0{,}63) = 0{,}74.$$

По таблицам значений критерия Дарбина–Уотсона определим (для числа наблюдений n = 15 – 1 = 14 и числа независимых переменных m = 1) критические значения:

$$D_{кр1} = 1{,}06 \text{ и } D_{кр2} = 1{,}35.$$

Фактическое значение $D_н$ попадает в промежуток от 0 до $D_{кр1}$.

Следовательно, отклоняем гипотезу H_0 и, следовательно, временные ряды дохода и потребления коинтегрируют.

ТЕМА
«МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ»

Задача 1.

Выдана ссуда в 120 тысяч рублей на 30 лет под 9% годовых. Дебитор (должник) обязан ежемесячно выплачивать равными долями долг вместе с процентами. Какова сумма ежемесячного платежа?

Решение.

Месячные проценты составляют 1/12 годовых, т.е. (9/12) = 0,75%. Сумма месячного платежа $S_{мес}$ рассчитывается из условия, что чистая современная величина потока платежей равна нулю, т.е. указанная в договоре ставка должна совпадать с месячной эффективной ставкой потока платежей.

Должно выполняться соотношение

$$S(0) = -120 \quad + \quad S_{мес}\sum_{i=1}^{360}\frac{1}{(1+r_{мес})^i} = 0; \qquad S_{мес}\,\frac{(1-(1{,}0075)^{-360}}{0{,}0075} = 120;$$

$$S_{мес} = 965 \text{ рублей.}$$

Задача 2.

Ссуда в 10 тысяч рублей выдана под 12% годовых. Требуется ежемесячная оплата по 130 руб. и выплата остатка долга S_{∂} в конце срока в 10 лет. Каков остаток долга придется платить через 10 лет?

Решение.

Так как ставка понимается как эффективная, то должно выполняться условие равенства нулю чистой современной величины потока платежей. Должно выполняться соотношение

$$S(0) = -10000 \quad + \quad S_{мес}\sum_{i=1}^{120}\frac{1}{(1+r_{мес})^i} + S_{\partial}\,\frac{1}{(1+r_{мес})^{120}} = 0;$$

Имеем соотношение $130\dfrac{1-(1{,}01)^{-120}}{0{,}01} \quad + S_{\partial}(1{,}01)^{-120} = 10000$.

Через 10 лет придется заплатить S_{∂} = 3099 рублей.

Задача 3.

Рассчитать дюрации потоков платежей со стороны инвестора и дебитора. Проанализировать полученные результаты по следующей информации:

Дни ожидания, t_i	30	60	90	120	160	200	312	365	730	1460
Платежи, тыс. руб., S_i	–120	–85	–98	–95	–75	80	50	120	140	250

Решение. Дюрацию потока платежей находим по формуле:

$$Dur = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i(0) t_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i(0)},$$

где t_i – время ожидания i–го платежа,

$S_i(0)$ – приведенная к нулевому моменту времени величина i–го платежа:

$$S_i(0) = \frac{S_i}{1 + r_n t_i}.$$

Предварительно вычислив значения $S_i(0)$, получим:

1. Дюрация для дебитора:

Dur_1 = (117,84·30 + 81,99·60 + 92,89·90 + 88,51·120 + 68,32·160)/ /(117,84 + 81,99 + 92,89 + 88,51 + 68,32) = 85 дней.

2. Дюрация для инвестора:

Dur_2 = (71,29·200 + 41,99·312 + 98,36·365 + 96,81·730 + 132,12·1460)/ /(71,29 + 41,99 + 98,36 + 96,81 + 132,12) = 741 дней.

Формально это означает, что весь поток платежей, полученных заёмщиком за период с 30–го по 160 день с начала действия контракта, равносилен по своим экономическим последствиям для заёмщика получению им всей суммы единовременно, в 85–й день действия контракта.

Для инвестора возврат кредита и процентов заёмщиком равносилен получению всей суммы в 741–й день от начала действия контракта.

Задача 4.

Суммы 20, 30 и 40 тыс. руб. должны быть выплачены соответственно через 50, 60 и 150 дней. Стороны согласились заменить их одним платежом в размере 100 тыс. руб. с отсрочкой выплаты долга. Каков период отсрочки, если банковская ставка составляет 10% годовых простых?

Решение.

Современная стоимость заменяемых платежей составит

$$S(0) = 20 \cdot \left(1 + \frac{50}{365} \cdot 0,1\right)^{-1} + 30 \cdot \left(1 + \frac{60}{365} \cdot 0,1\right)^{-1} + 40 \cdot \left(1 + \frac{150}{365} \cdot 0,1\right)^{-1} = 87,7 \text{ тыс. руб.}$$

Тогда

$$t_{кон} = \frac{1}{r_n}\left(\frac{S_{кон}}{S(0)} - 1\right) = \frac{1}{0,1}\left(\frac{100}{87,7} - 1\right) = 1,404 \text{ года} = 512 \text{ дней.}$$

Задача 5.

Стоимость оборудования составляет 45000 долларов.

Срок лизинга – 30 месяцев.

Месячная норма доходности – 1%.

Рассматриваются 5 вариантов лизинга.

1. Полное погашение стоимости оборудования осуществляется в конце каждого месяца равными суммами.

2. Предусматривается удвоенный платеж в первом месяце и освобождение от платежа в последнем.

3. В начале срока лизинга производится авансовый платеж в сумме 6000 долларов, остальные платежи – в конце каждого месяца равными суммами.

4. Арендатор имеет право выкупать имущество в конце срока по цене 7000 долларов. Остальные платежи в конце каждого месяца равными суммами.

5. Предусматривается аванс в сумме 6000 долларов и право выкупа в конце срока лизинга по цене 7000 долларов.

Определить размер ежемесячных платежей в каждом варианте.

Решение.

Все платежи – постнумерандо.

Имеем параметры лизинга:

$$S_{общ} = 45000;\ \ n = T = 30;\ \ r = 0{,}01;\ \ A = 6000;\ K_{ост} = 7000/45000 = 0{,}16;\ \ k = 2.$$

1. Вычислим коэффициент рассрочки лизинговых платежей для платежей постнумерандо:

$$K_{рас} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{0{,}01}{1-(1{,}01)^{-30}} = 0{,}03875.$$

Тогда размер ежемесячного платежа постнумерандо

$$S_{ед} = S_{общ} \cdot K_{рас} = 45000 \cdot 0{,}03875 = 1743{,}75 \text{ долл.}$$

Если платежи вносятся вначале каждого месяца (пренумерандо), то:

$$K_{рас} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right) = 0{,}03875 \cdot \frac{1}{1{,}01} = 0{,}038366.$$

$$S_{ед} = 45000 \cdot 0{,}038366 = 1726{,}47 \text{ долл.}$$

2. При удвоенном платеже в первый месяц:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}}{(к-1)V + a_{n-k+1;r}} = \frac{45000}{(2-1)\cdot\frac{1}{1{,}01} + a_{29;1}} = 1727{,}06 \text{ долл.}$$

В первый месяц будет проплачено 3454,12 долларов.

3. При авансе в 6000 долларов:

$$S_{ед} = (S_{общ} - A) \cdot K_{рас} = (45000 - 6000) \cdot 0{,}03875 = 1511{,}25 \text{ долл.}$$

4. Остаточная цена в 7000 долларов соответствует коэффициенту остаточной стоимости $K_{ост} = 0{,}16$.

Тогда ежемесячные платежи составят:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{a_{n;r}} = S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) \cdot K_{рас} =$$

$$= 45000(1 - 0{,}16 \cdot (1{,}01)^{-30}) \cdot 0{,}03875 = 1536{,}75 \text{ долл.}$$

5. При авансе в 6000 долларов и остаточной стоимости в 7000 долларов ежемесячные платежи составят:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) - A}{a_{n;r}} =$$

$$= \left(45000 \cdot \left(1 - 0{,}16 \cdot (1{,}01)^{-30}\right) - 6000\right) \cdot 0{,}03875 = 1304{,}25 \text{ долл.}$$