

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт Прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры  
«Прикладная математика и информатика»  
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 М.В. Грязев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Функциональный анализ»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

с направленностью (профилем)  
**Прикладная математика и информатика**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

## Разработчик методических указаний

Иванов В.И., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

---

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*



---

*(подпись)*

## I. Цели и задачи практических занятий

Целью освоения дисциплины «Функциональный анализ» является овладение методами функционального анализа при моделировании с использованием современных математических методов.

Задачами освоения дисциплины являются выработка умений:

- использовать теорию линейных функционалов и операторов,
- использовать теорию Рисса-Шаудера и Гильберта-Шмидта,
- решать простейшие интегральные уравнения второго рода.

Целями и задачами практических занятий по функциональному анализу являются приобретение навыков решения практических задач по теории линейных функционалов и операторов, теории Рисса-Шаудера и теории Гильберта-Шмидта, теории интегральных уравнений и закрепление основных понятий, определений и свойств объектов функционального анализа.

№ ПЗ	№№ разделов дисциплины	Тема практического занятия	Кол-во академических часов
<b>Очная форма обучения</b>			
<i>5 семестр</i>			
1.	1.1	Норма в линейном пространстве. Основные примеры банаховых пространств.	2
2.	1.4	Компактность.	2
3.	1.4	Норма линейного функционала. Линейные функционалы в основных банаховых пространствах.	2
4.	3.1	Норма линейного оператора. Сильная и равномерная сходимости линейных операторов.	2
5.	3.5	Обратный линейный оператор. Спектр, спектральный радиус и резольвенты линейного оператора	2
6.	4.1	Вполне непрерывный линейный оператор и его спектр	2
7.	4.4	Линейные интегральные уравнения 2-го рода. Теория Рисса-Шаудера	2
8.	4.5	Приложение теоремы Гильберта-Шмидта к решению линейных интегральных уравнений 2-го рода	2
<b>Итого</b>			<b>16</b>

## II. Методические указания к проведению практических занятий

### Практическое занятие №1

Тема. Норма в линейном пространстве. Основные примеры банаховых пространств.

Цель. Изучить способы задания норм в различных линейных пространствах. Изучить основные примеры банаховых пространств.

#### План проведения занятия

1. Информация о способах задания нормы в линейных пространствах.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №1,22(а,б)

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №1.22(в); 1.30(а,б); 1.33; 1.37

указания: при проверке выполнения аксиом нормы пользоваться неравенствами

Коши-Буняковского, Минковского, неравенством треугольника для вещественных чисел, сохранением нестрогих неравенств в предельных переходах.

4. Подведение итогов, выставление оценок.

5. Домашнее задание.

[3] №1,22(д,е); 1,23(в,г); 1,30(в-д); 1,38

1. Информация об основных банаховых пространствах.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №1.22(г,ж).

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №1.22(з,и,к); №1.23(а,б,д,е).

указание: при выяснении вопроса о полноте конкретных пространств надо выяснить характер сходимости фундаментальной последовательности элементов в этом пространстве и воспользоваться известными теоремами анализа о сохранении предельной функцией свойства элементов функциональной последовательности.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №1.31; 1.32; 1.67; 1.68; 1.69.

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## **Практическое занятие №2**

Тема. Компактность.

Цель. Изучить критерии компактности в различных нормированных пространствах.

## **План проведения занятия**

1. Информация о критериях компактности.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №15.31; 15.32.

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №1.22(з,и,к); №1.23(а,б,д,е).

указание: при доказательстве компактности множеств в функциональных пространствах пользоваться критериями Арцепа, Рисса, Колмотирова.

[3] №15.44(а-в); 15.50

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №15.33; 15.34; 15.44(г-ж); 15.51.

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## Практическое занятие №3

Тема. Норма линейного функционала. Линейные функционалы в основных банаховых пространствах.

Цель. Изучить методы нахождения нормы функционала. Изучить вид функционалов в основных банаховых пространствах.

### План проведения занятия

1. Информация о способах нахождения нормы линейного функционала.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №11.3(а,б)

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №11.3(б,г); 11.5(а-е).

указание: при нахождении нормы линейного функционала сначала делается оценка нормы, а затем отыскивается либо элемент, на котором норма достигается, либо последовательность на которой значения функционала стремятся к предполагаемой норме. Последовательность элементов входит в единичный шар.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №11.3(д-з); 11.4; 11.5(ж-м).

1. Информация о виде функционалов в основных банаховых пространствах.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №12.15

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №12.21. (консультация преподавателя).

указание: при рассмотрении результата действия линейного функционала на элемент банахова пространства обращать внимание порождающий элемент. Его вид определяет структуру линейного функционала.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №12.14; 12.17.

1. Информация о сопряженных пространствах.

## 2. Самостоятельная работа студентов.

[3] №12.22; 12.24.

указание: при нахождении сопряженного пространства необходимо рассматривать структуру порождающего элемента, его принадлежность к конкретному банахову пространству. Затем установить метрический и алгебраический изоморфизм между множеством линейных функционалов и множеством порождающих элементов, являющихся банаховым пространством.

## 3. Подведение итогов, выставление оценок.

## 4. О задании

[3] №12.19; 12.20; 12.23.

## Библиография

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## Практическое занятие № 4

Тема. Норма линейного оператора. Сильная и равномерная сходимость линейных операторов.

Цель. Изучить методы нахождения нормы линейного оператора. Изучить методы определения в сильной и равномерной сходимости линейных операторов.

## План проведения занятия

1. Информация о методах нахождения нормы линейного оператора.

2. Рассмотрение примеров.

[3] № 7.12 (а,б)

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] № 7.12.(в); № 7.12 (д,е,к).

указание: при нахождении нормы линейного оператора делают оценку нормы, затем, принимая её за норму, находят либо элемент, на котором норма достигается, либо последовательность элементов образы нормы, которых приближают предполагаемую норму. Элементы берутся из единичного шара.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] № 7.12; (2,ж-и, л,м)

1. Информация о видах сходимости линейных операторов.

2. Рассмотрение примеров.

[3] № 8.19; 8.20.

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] № 8.22; 8.30.

указание: при рассмотрении вида сходимости линейных операторов использовать понятие равномерной непрерывности функции на множестве и его аналоги.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №8.21; 8.29; 8.31; 8.32..

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## **Практическое занятие № 5**

Тема. Обратный линейный оператор. Спектр, спектральный радиус и резальвента линейного оператора.

Цель. Изучить условия обратимости линейного оператора и методы нахождения обратного оператора. Изучить методы нахождения спектра, спектрального радиуса и резальвента линейного оператора.

## **План проведения занятия**

1. Информация об обратимости линейного оператора.

2. Рассмотрение примеров.

[3] № 9.11; 9.12.

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] № 9.14; 9.16.

указание: при доказательстве обратимости линейного оператора, действующего на всем банаховом пространстве, надо показать его биективность и замкнутость образа, принадлежащего банаховому пространству.



4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] № 9.13; 9.15; 9.17.

1. Информация о спектре, спектральном радиусе и резальвенты линейного оператора.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №19.4 (б), 19.56 (а,б)

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №19.14; 19.16.

указание: при нахождении спектра линейного оператора, надо пользоваться условиями обратимости оператора  $A^{-1}$ ; при нахождении спектрального радиуса необходимо найти последовательность норм степеней данного оператора, затем использовать степени оператора при построении резальвенты.

4. Подведение итогов, выставление оценок.

5. Домашнее задание

[3] №19.4 (а); 19.5 (в); 19.15; 19.18.

## **Библиография**

1.Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## **Практическое занятие №6**

Тема. Вполне непрерывный линейный оператор и его спектр.

Цель. Изучить свойства вполне непрерывного оператора и его спектра. Изучение методов нахождения спектра вполне непрерывного линейного оператора.

## **План проведения занятия**

1. Информация о вполне непрерывном операторе и его спектре.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №16.1 (а,в).

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №16.3; 16.5 (а, б); 16.6.

указание: при доказательстве вполне непрерывности линейного оператора надо пользоваться критериями относительной компактности множеств в банаховых пространствах.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №16.1 (в-д); 16.2; 16.5 (в).

1. Разбор задач, вызвавших наибольшие затруднения при выполнении домашнего задания.

2. Самостоятельная работа студентов.

[3] №16.8 (а); 16.10; 16.39; 16.43.

указание: при нахождении спектра вполне непрерывного оператора надо пользоваться теоремой, определяющей структуру его спектра.

3. Подведение итогов, выставление оценок

4. Домашнее задание

[3] №16.8 (а, в); 16.12; 16.21; 16.40; 20.2..

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## **Практическое занятие №7**

Тема. Линейные интегральные уравнения 2-го рода. Теория Рисса-Шаудера.

Цель. Изучение приложения теории Рисса-Шаудера к решению линейных интегральных уравнений второго рода.

### **План проведения занятия**

1. Информация о теореме Рисса-Шаудера и её приложениях.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №21.1 (а, в).

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №21.1 (в, г); 21.2 (а, б).

указание: при рассмотрении условий применимости теории Рисса-Шаудера необходимо исследовать ядро интегрального оператора с целью выяснения его вполне непрерывности.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №21.1 (д-з).

1. Разбор задач, вызвавших наибольшее затруднения при выполнении домашнего задания.

2. Самостоятельная работа студентов.

[3] №21.4 (а,б); 21.5.

указание: при решении интегральных уравнений второго рода с вырожденным ядром воспользоваться методом сведения к системе линейных уравнений ненулевым определителем.

3. Подведение итогов, выставление оценок

4. Домашнее задание

[3] №21.2 (в, г); 21.4 (в,г).

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с

## **Практическое занятие №8**

Тема. Приложение теоремы Гильберта-Шмидта к решению линейных интегральных уравнений 2-го рода.

Цель. Изучить приложение теоремы Гильберта-Шмидта к решению интегральных уравнений 2-го рода.

## **План проведения занятия**

1. Информация о теореме Гильберта-Шмидта и её приложениях.

2. Рассмотрение примеров.

[3] №20.1; 20.17.

3. Самостоятельная работа студентов.

[3] №21.3; 21.6 (а, б).

указание: при нахождении решения линейного интегрального уравнения, воспользоваться методами нахождения характеристических чисел и собственных функций, соответствующих данным числам, затем воспользоваться представлением решения в виде ряда Фурье.

4. Подведение итогов, выставление оценок

5. Домашнее задание

[3] №20.3; 20.7; 21.6 (в,г).

## **Библиография**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.

Задачи и упражнения по функциональному анализу. –М.: Физматлит, 2006-240с