МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студента
по дисциплине (модулю)
«Функциональный анализ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Иванов В.И., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Виды и объемы самостоятельной работы студента по дисциплине «Функциональный анализ» приведены в следующей таблице:

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоемкость (час.)	Методические материалы
1.	Подготовка к практическим занятиям	32	[1-6]
2.	Подготовка к дифференцированному зачету	27,75	[1-6]
3.	**Итого:**	**59,75**	

Практическое занятие №1

Тема. Норма в линейном пространстве. Основные примеры банаховыхх пространств. Задачи для самостоятельного решения: [3] №1.22(в); 1.30(а,б); 1.33; 1.37. [3] №1.22(з,и,к); №1.23(а,б,д,е).

Практическое занятие №2

Тема. Компактность. Задачи для самостоятельного решения: [3] №15.31; 15.32.

Практическое занятие №3

Тема. Норма линейного функционала. Линейные функционалы в основных банаховых пространствах. Задачи для самостоятельного решения: [3] №11.3(б,г); 11.5(а-е). [3] №12.21, 12.22, 12.24.

Практическое занятие №4

Тема. Норма линейного оператора. Сильная и равномерная сходимость линейных операторов. Задачи для самостоятельного решения: [3] № 7.12.(в); № 7.12 (д,е,к). [3] № 8.22;

Практическое занятие №5

Тема. Обратный линейный оператор. Спектр, спектральный радиус и резольвента линейного оператора. Задачи для самостоятельного решения: [3] № 9.14; 9.16. [3] №19.14; 19.16, №19.20; 19.22 (б); 19.29.

Практическое занятие №6

Тема. Вполне непрерывный линейный оператор и его спектр. Задачи для самостоятельного решения: [3] №16.3; 16.5 (а, б); 16.6, №16.8 (а); 16.10; 16.39; 16.43.

Практическое занятие №7

Тема. Линейные интегральные уравнения 2-го рода. Теория Рисса-Шаудера. Задачи для самостоятельного решения: [3] №21.1 (в, г); 21.2 (а, б), №21.4 (а,б); 21.5.

Практическое занятие №8

Тема. Приложение теоремы Гильберта-Шмидта к решению линейных интегральных уравнений 2-го рода. Задачи для самостоятельного решения: [3] №21.3; 21.6 (а, б).

Список вопросов для подготовки к дифференцированному зачету:

1. Сходящиеся и фундаментальные последовательности в нормированных пространствах. Банаховы пространства. Свойства предела последовательности.
2. Определение нормированного пространства. Пространства $C[a,b], C^k[a,b]$. Сходимость в них.
3. Определение нормированного пространства. Пространства l_p^n. Неравенство треугольника в l_p^n.
4. Определение нормированного пространства. Пространства l_p. Неравенство треугольника в l_p.
5. Определение нормированного пространства. Пространства $L_p[a,b]$. Неравенство треугольника в $L_p[a,b]$.
6. Нормированное пространство как топологическое пространство. Открытые и замкнутые множества в нормированном пространстве. Их свойства.
7. Гильбертово пространство. Его строгая нормированность и строгая выпуклость.
8. Критерий элемента наилучшего приближения подпространством в гильбертовом пространстве.
9. Ортогональное дополнение к подпространству в гильбертовом пространстве. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств.
10. Базисные, замкнутые и полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.
11. Определение компактного множества в нормированном пространстве. Критерий компактности, использующий последовательности.
12. Некомпактность замкнутого единичного шара в бесконечномерном

пространстве.
13. Критерий Хаусдорфа относительной компактности множества в банаховом пространстве.
14. Относительно компактные множества в $C[a,b]$. Критерий Арцела.
15. Непрерывные и ограниченные линейные функционалы в нормированном пространстве. Норма линейного функционала.
16. Геометрический смысл линейного непрерывного функционала.
17. Сопряженное нормированное пространство. Понятие рефлексивного пространства. Примеры рефлексивных пространств. Нерефлексивность c_0 - пространства бесконечно малых последовательностей.
18. Линейные непрерывные функционалы и их нормы в гильбертовом пространстве.
19. Линейные непрерывные функционалы и их нормы в l_p^n.
20. Линейные непрерывные функционалы и их нормы в l_p.
22. Линейные непрерывные функционалы и их нормы в $L_p[a,b]$.
23. Линейные непрерывные функционалы и их нормы в $C[a,b]$.
24. Продолжение линейных непрерывных функционалов. Теорема Хана-Банаха. Условие замкнутости системы.
25. Непрерывные и ограниченные линейные операторы. Норма линейного оператора. Нормированное пространство линейных операторов
26. Равномерная и сильная сходимость последовательности линейных непрерывных операторов. Принцип равномерной ограниченности.
27. Теорема Банаха-Штейнгауза.
28. Исследование сильной сходимости частичных сумм тригонометрического ряда Фурье в пространствах $L_2[0,2\pi]$ и $C[0,2\pi]$.
29. Исследование сильной сходимости сумм Фейера тригонометрического ряда Фурье в пространстве $C[0,2\pi]$.
30. Равномерно сходящиеся операторные ряды. Определение экспоненты e^A линейного непрерывного оператора A.
31. Обратный оператор для линейного оператора. Его линейность. Условие существования и непрерывности.
32. Непрерывная обратимость линейного оператора. Теорема Банаха.
33. Непрерывная обратимость линейного оператора $E-A$, если $\|A\|<1$.
34. Оценка нормы обратного оператора для оператора, определяемого системой линейных уравнений с доминирующей главной диагональю.
35. Спектральная теория линейных операторов. Регулярное множество и спектр линейного оператора.
36. Открытость регулярного множества и замкнутость спектра линейного оператора. Ограниченность спектра линейного непрерывного оператора. Спектральный радиус. об обратном операторе. Пример.
37. Вполне непрерывные операторы. Их свойства.
38. Интегральные операторы в пространствах $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$. Оценка их норм.
39. Вполне непрерывность интегрального оператора в пространстве $C[a,b]$.

40. Вполне непрерывность интегрального оператора в пространстве $L_2[a,b]$.
41. Спектр вполне непрерывного оператора.
42. Вполне непрерывность и спектр оператора Вольтерра в пространстве $C[a,b]$.
43. Теория Рисса-Шаудера и ее применение к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода.
44. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Норма сопряженного оператора. Сопряженный оператор для интегрального оператора.
45. Теорема Гильберта-Шмидта и ее применения.

Библиографический список

1. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Функциональный анализ». (Ресурс кафедры).
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.— 488 с.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.— 240 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.— 572 с.
5. Асташова И.В. Функциональный анализ.— М.: Евразийский открытый институт, 2011.— 112 с.
6. Золотухин А.Я. Задачи и упражнения по теории операторов.— Тула: Изд-во ТулГУ, 2015.— 86 с.