МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
_________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Численные методы»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Толоконников Л.А., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 13
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ЯЧЕЕК

Лабораторная работа № 14
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Лабораторная работа № 15
РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ – КУТТА

Лабораторная работа № 16
ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Лабораторная работа № 17
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Лабораторная работа № 18
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Лабораторная работа № 19
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

Лабораторная работа № 20
РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Лабораторная работа № 21
РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ЯДРА НА ВЫРОЖДЕННОЕ

Лабораторная работа № 22
РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа № 23
РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА С ВЫБОРОМ ГЛАВНОГО ЭЛЕМЕНТА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод Гаусса для произвольной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad , \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

основан на приведении матрицы системы к треугольной. Вычтем из второго уравнения системы (1) первое, умноженное на такое число, чтобы уничтожился коэффициент при x_1. Затем таким же образом вычтем первое уравнение из третьего, четвертого и т.д. Тогда исключатся все коэффициенты первого столбца, лежащие ниже главной диагонали. Затем при помощи второго уравнения исключим из третьего, четвертого и т.д. уравнений коэффициенты второго столбца. Последовательно продолжая этот процесс, исключим из матрицы все коэффициенты, лежащие ниже главной диагонали.

Запишем общие формулы процесса. Пусть проведено исключение коэффициентов из $k-1$ столбца. Тогда остались такие уравнения с ненулевыми коэффициентами ниже главной диагонали:

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)} \quad , \qquad k \le i \le n. \tag{2}$$

Умножим k-ю строку на число

$$c_{mk} = a_{mk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad , \qquad m > k, \tag{3}$$

и вычтем из m-той строки. Первый элемент этой строки обратится в нуль, а остальные изменятся по формулам

$$\begin{aligned} a_{ml}^{(k+1)} &= a_{ml}^{(k)} - c_{mk} a_{kl}^{(k)} \ ; \\ b_m^{(k+1)} &= b_m^{(k)} - c_{mk} b_{kl}^{(k)} \ , \quad k < m,l \le n. \end{aligned} \tag{4}$$

Производя вычисления по этим формулам при всех указанных индексах, исключим элементы k-го столбца. Будем называть такое исключение циклом процесса. Выполнение всех циклов называется прямым ходом исключения.

После выполнения прямого хода получим треугольную систему

$$\sum_{k=i}^{n} a_{ik}^{(i)} x_k = b_i^{(i)} \qquad , \qquad 1 \le i \le n. \qquad (5)$$

с матрицей

$$\begin{matrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{matrix} \qquad (6)$$

Треугольная система (5) легко решается обратным ходом по формулам

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} \left(b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k)} x_i \right) \qquad , \qquad k = n, n-1, \dots, 1.$$

Замечания:

1. Исключение по формулам (3)-(4) нельзя проводить, если в ходе расчета на главной диагонали оказался нулевой элемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Тогда в промежуточной системе (2) перестановкой строк необходимо переместить ненулевой элемент на главную диагональ и продолжить расчет.

2. Если элемент на главной диагонали $a_{kk}^{(k)}$ мал, то эта строка умножается на большие числа c_{mk}, что приводит к значительным ошибкам при вычитаниях. Чтобы избежать этого, каждый цикл всегда начинают с перестановки строк. Среди элементов столбца $a_{mk}^{(k)}$, $m \ge k$, находят главный, т.е. наибольший по модулю в k-том столбце, и перестановкой строк переводят его на главную диагональ, после чего выполняют исключения. В методе Гаусса с выбором главного элемента погрешность округления обычно невелика. Только для плохо обусловленных систем ($det A \approx 0$) устойчивость этого метода оказывается недостаточной.

3. Для контроля расчета полезно найти невязки:

$$r_k = b_k - \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \qquad , \qquad 1 \le k \le n.$$

Если они велики, то это означает грубую ошибку в расчете. Если они малы, а система хорошо обусловлена, то решение найдено достаточно точно. Для плохо обусловленных систем малость невязок не гарантирует хорошей точности решения.

III. ЗАДАНИЕ

Найти решение системы линейных уравнений с матричными элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j - \dfrac{N}{3} - k \;\;, \; \text{если} \;\; i < j; \\ i + j + \dfrac{N}{4} + k \;\;, \; \text{если} \;\; i = j; \\ i + j - \dfrac{N}{5} - k \;\;, \; \text{если} \;\; i > j, \end{cases}$$

и свободными членами

$$b_i = 3i + \frac{N}{2} + k,$$

где $i, j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5;$ N - номер фамилии студента в журнале группы; k - последняя цифра номера группы.

Допустимая погрешность 10^{-5}. При решении системы использовать метод Гаусса с выбором главного элемента.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа №2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Рассмотрим метод простой итерации.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

с неособенной матрицей ($det A \neq 0$). Согласно методу простой итерации ее предварительно приводят к виду

$$X = Bx + \beta ,$$

где $B = -C^{-1}D;\ \beta = C^{-1}b;\ C + D = A;\ det C \neq 0$, т.е. первое уравнение системы разрешили относительно x_1, второе - относительно x_2 и т.д.

Предположим, что известно начальное приближение

$$X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$$

к точному решению $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ системы. Тогда все следующие приближения найдем по формуле

$$X^{k+1} = BX^k + \beta \qquad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Если последовательность X^k сходится к некоторому предельному вектору X', то он будет решением системы. Действительно, считая $X^k \to X'$ при $k \to \infty$, получаем из выражения

$$\lim_{k\to\infty} X^{k+1} = \lim_{k\to\infty} BX^k + \beta$$

равенство $X' = BX' + \beta$.

Последовательность X^k в методе простой итерации сходится, если для матрицы B выполняется одно из неравенств

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right);$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right).$

III. ЗАДАНИЕ

Найти решение системы линейных уравнений, приведенной в лабораторной работе №1. При решении системы использовать метод простой итерации.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1. - М.: Наука, 1976. 350 с.

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Рассмотрим метод Зейделя.

Пусть система $Ax = b$ приведена к канонической форме

$$X = Bx + \beta. \qquad (1)$$

В методе простой итерации следующее приближение X^{k+1} находится по предыдущему $X^k = \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$ путем подстановки X^k в правую часть (1). При этом порядок выбора уравнений значения не имеет.

Согласно методу Зейделя осуществляется разумный выбор порядка уравнений для подстановок и немедленный ввод в вычисления каждого из полученных приближений для неизвестных.

Предположим, что для перехода от приближения X^k к X^{k+1} выбран какой-то порядок привлечения уравнений для подстановок. Изменяя, если необходимо, нумерацию уравнений и неизвестных, можно считать, что уравнения для подстановок берутся в порядке роста их номеров. Для каждого шага порядок привлечения уравнений может быть своим. Перестановка уравнений и изменение нумераций влекут изменение матрицы B и вектора β. Чтобы отметить это, обозначим B и β для рассматриваемого шага через B^k и β^k.

Итерация в методе Зейделя выполняется в следующем порядке:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{k+1} = b_{11}^k x_1^k + b_{12}^k x_2^k + b_{13}^k x_3^k + \ldots + b_{1n}^k x_n^k + \beta_1^k; \\
x_2^{k+1} = b_{21}^k x_1^k + b_{22}^k x_2^k + b_{23}^k x_3^k + \ldots + b_{2n}^k x_n^k + \beta_2^k; \\
x_3^{k+1} = b_{31}^k x_1^k + b_{32}^k x_2^k + b_{33}^k x_3^k + \ldots + b_{3n}^k x_n^k + \beta_3^k; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{k+1} = b_{n1}^k x_1^k + b_{n2}^k x_2^k + b_{n3}^k x_3^k + \ldots + b_{nn}^k x_n^k + \beta_n^k.
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

После нахождения вектора X^{k+1} устанавливается порядок подстановок в уравнения значений x_i^{k+1} $\left(i=\overline{1,n}\right)$ и переходят к вычислению вектора X^{k+2} и т.д.

Приведем теперь принцип установления порядка привлечения уравнений для подстановок x_i^k $(i=1,2,\ldots,n)$. Можно пытаться улучшить ту составляющую решения, которая найдена наименее точно, чтобы при нахождении всех других составляющих употребить улучшенное ее значение.

О точности X^k можно судить по вектору поправки на шаге k: $\delta^k=\left(\delta_1^k,\delta_2^k,\ldots,\delta_n^k\right)$, где $\delta_i^k=x_i^k-x_i^{k-1}$. Величины поправок составляющих нумеруют в порядке убывания их модулей, и в том же порядке вычисляют составляющие следующего приближения X^{k+1}, сначала ту составляющую, которая отвечает наибольшей по модулю поправке, и т.д.

Рассмотрим более подробно стационарный метод Зейделя, когда при итерациях порядок уравнений сохраняется, а следовательно, сохраняются B и β. Вычисления по-прежнему проводят по формуле (2).

Разложим матрицу B на сумму двух матриц H и F, где

$$H=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad F=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Тогда равенства (2) можно записать в матричной форме в виде

$$X^{k+1}=HX^{k+1}+FX^k+\beta.$$

Отсюда следует, что

$$(E-H)X^{k+1}=FX^k+\beta,$$

а так как определитель матрицы $E-H$ равен единице и она имеет обратную матрицу, то равенство (2) равносильно

$$X^{k+1}=(E-H)^{-1}FX^k+(E-H)^{-1}\beta. \qquad (3)$$

Поэтому стационарный метод Зейделя равносилен методу простой итерации, примененному к системе

$$X=(E-H)^{-1}FX+(E-H)^{-1}\beta.$$

Последовательность X^k в стационарном методе Зейделя сходится, если для матрицы B выполняется одно из неравенств

2) $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|<1 \qquad \left(i=\overline{1,n}\right);$

3) $\sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1 \qquad \left(j = \overline{1,n} \right).$

IV. ЗАДАНИЕ

Найти решение системы линейных уравнений, приведенной в лабораторной работе №1. При решении системы использовать стационарный метод Зейделя.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1. - М.: Наука, 1976. 350 с.

Лабораторная работа № 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения систем с трехдиагональной матрицей.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Наиболее важным частным случаем метода Гаусса является метод прогонки, применяемый к системам с трехдиагональной матрицей.

Трехдиагональной называется матрица, у которой ненулевые элементы имеются только на главной диагонали и на примыкающих к ней диагоналях, т.е. $a_{ik} = 0$ при $|i-k| > 1$. Такие системы часто встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

Системы с трехдиагональной матрицей обычно записываются в каноническом виде:

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \ , \qquad a_1 = c_n = 0 \ , \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется разностным уравнением второго порядка или трехточечным уравнением. В этом случае прямой ход без выбора главного элемента сводится к исключению элементов a_i. Получается треугольная система, содержащая в каждом уравнении только два неизвестных x_i и x_{i+1}. Поэтому формулы обратного хода имеют следующий вид:

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1} \qquad , \qquad i = n, n-1, \ldots, 1. \qquad (2)$$

Уменьшим в (2) индекс на единицу и подставим в уравнение (1). Получим

$$a_i(\xi_i x_i + \eta_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i .$$

Отсюда имеем

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i} x_{i+1} + \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i}. \qquad (3)$$

Сравнивая выражения (2) и (3), получаем

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i} \qquad ; \qquad \eta_{i+1} = \frac{a_i \eta_i - d_i}{b_i - a_i \xi_i} \qquad , \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Формулы (4) - это формулы прямого хода.

Для проведения расчета формально требуется задать величины ξ_1, η_1 и x_{n+1}, которые неизвестны. Однако перед величинами ξ_1 и η_1 в формуле (4) стоит коэффициент $a_1 = 0$. Поэтому можно начать вычисления, полагая, например, $\xi_1 = \eta_1 = 0$. В формуле (2) перед x_{n+1} стоит множитель ξ_{n+1}, который на основании первой из формул (4) равен нулю, т.к. $c_n = 0$. Поэтому можем положить, например, $x_{n+1} = 0$.

Таким образом, для решения системы (1) выполняется сначала прямой, а затем обратный ход по формулам (4) и (2). Если выполнено условие преобладания диагональных элементов:

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i| \;, \qquad (5)$$

причем хотя бы для одного i имеет место неравенство, то в формулах прямого хода (4) не возникает деления на нуль, и тем самым система (1) имеет единственное решение.

При выполнении условия (5) формулы прогонки устойчивы относительно ошибок округления и позволяют успешно решать системы уравнений с несколькими сотнями неизвестных.

Условие (5) является достаточным, но не необходимым условием устойчивости прогонки. На практике для хорошо обусловленных систем типа (1) прогонка часто оказывается достаточно устойчивой даже при нарушении условия преобладания диагональных элементов.

III ЗАДАНИЕ

Найти решение системы методом прогонки

$$\left.\begin{aligned}
&(N+k)x_1 - kx_2 = N; \\
&-\frac{N}{2}x_1 + 2Nx_2 + kx_3 = \frac{N}{2}; \\
&-\frac{N}{5}x_2 + Nx_3 - \frac{k}{2}x_4 = N - k; \\
&-\frac{N}{3}x_3 + Nx_4 = 2N,
\end{aligned}\right\}$$

где N - номер фамилии студента в журнале группы;
k - последняя цифра индекс номера группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

Лабораторная работа № 5

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ МЕТОДОМ КРЫЛОВА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков отыскания собственных значений матрицы.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Рассмотрим один из методов развертывания характеристических определителей – метод Крылова.

Характеристический многочлен матрицы А имеет вид

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n. \qquad (1)$$

Согласно теореме Гамильтона-Кели матрица А обращает в ноль свой характеристический многочлен

$$A^n - p_1A^{n-1} - p_2A^{n-2} - \ldots - p_nE = 0. \qquad (2)$$

Возьмем произвольный ненулевой вектор $y^0 = (y_1{}^0, y_2{}^0, \ldots, y_n{}^0)^T$. Умножая равенство (2) на этот вектор, получим

$$A^ny^0 - p_1A^{n-1}y^0 - p_2A^{n-2}y^0 - \ldots - p_nEy^0 = 0. \qquad (3)$$

Положим

$$A^ky^0 = y^k \qquad (k = 0,1,\ldots,n). \qquad (4)$$

Тогда равенство (3) приобретает вид

$$y^n - p_1y^{n-1} - p_2y^{n-2} - \ldots - p_ny^0 = 0, \qquad (5)$$

где $y^k = (y_1{}^k, y_2{}^k, \ldots, y_n{}^k)^T \qquad (k = 0,1,\ldots,n)$.

Векторное равенство (5) эквивалентно системе уравнений

$$p_1y_j{}^{n-1} + p_2y_j{}^{n-2} + \ldots + p_ny_j{}^0 = y_j{}^n \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \quad (6)$$

На основании формулы (4) имеем

$$y^1 = Ay^0; \quad y^2 = A^2y^0 - AAy^0 = Ay^1; \ldots; y^n = Ay^{n-1}.$$

Поэтому

$$y_i{}^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j{}^{k-1} \qquad (i = 1,2,\ldots,n; \quad k = 1,2,\ldots,n). \qquad (7)$$

Таким образом, коэффициенты системы (6) вычисляются по формулам (7). Из системы линейных алгебраических уравнений (6) определяем неизвестные p_j $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Определив коэффициенты p_j $(j = 1,2,\ldots,n)$, получим выражение для характеристического многочлена матрицы А. Теперь можем найти корни характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = 0,$$

которые являются собственными значениями матрицы А.

III. ЗАДАНИЕ

Построить характеристический многочлен матрицы А. Найти его корни.

Матрица А имеет элементы

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j - \dfrac{N}{3} - k \quad, \text{ } \textit{если} \quad i < j; \\ i + j + \dfrac{N}{4} + k \quad, \text{ } \textit{если} \quad i = j; \\ i + j - \dfrac{N}{5} - k \quad, \text{ } \textit{если} \quad i > j, \end{cases}$$

где $i, j = 1,2,3,4,5;$ N - номер фамилии студента в журнале группы; k - последняя цифра номера группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Физматгиз, 1966. 632 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

Лабораторная работа № 6

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ДИХОТОМИИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков нахождения с заданной погрешностью корней нелинейного уравнения.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Требуется найти корни уравнения

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция.

Пусть нашли такие точки x_0 и x_1, что $f(x_0)f(x_1)<0$, то есть на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит по меньшей мере один корень. Найдем середину отрезка $[x_0, x_1]$ $x_2=(x_0+x_1)/2$ и вычислим $f(x_2)$. Если $f(x_2)$=0, то x_2 есть корень ξ. Если $f(x_2)\neq 0$, то из двух половин отрезка $[x_0, x_1]$ выберем ту, для которой $f(x_2)f(x_{граничн.})<0$, так как один корень лежит на этой половине. Затем новый отрезок делим пополам и выбираем ту половину, на концах которой функция $f(x)$ имеет разные знаки. И так далее.

Деление продолжаем до тех пор, пока длина очередного отрезка, где лежит корень, не станет меньше 2ε, где ε - заданная погрешность. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

III. ЗАДАНИЕ

Найти методом дихотомии один из действительных корней уравнения $f(x)=0$ с погрешностью 10^{-5}.

Варианты задания:

№	Уравнение
1	$k\sqrt{x}-\cos 0{,}387x=0$
2	$ke^{x}+x^{2}-3=0$
3	$kx-3\cos^{2}1{,}04x=0$
4	$(4+x^{2})(e^{x}-ke^{-x})-18=0$
5	$15x-8\ln(k+x)-8=0$
6	$x^{5}-3x^{2}-9x+7+k=0$
7	$e^{x}-2(x-k)^{2}=0$
8	$x^{x}+2kx-6=0$

9	$x^2 arctgx = k$
10	$x^3 - 2x - 8 + k = 0$
11	$x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3k = 0$
12	$(x-k)^2 - 2sin x = 0$
13	$2^x - 4(x-k) = 0$
14	$x ln x = k$
15	$x^3 - x - 2 - k = 0$
16	$3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + k = 0$
17	$e^x - 2(k-x)^2 = 0$
18	$2 ln x - k/x = 0$
19	$x = 0{,}538 sin x + k$
20	$x^3 - 5x + 0{,}1 - k = 0$
21	$e^x + x^2 - 2 - k = 0$
22	$\sqrt{x} - 2cos \frac{\pi}{k} x = 0$
23	$2^x - 2x^2 - k = 0$
24	$(x-k)^2 - 0{,}5e^x = 0$
25	$4x - 5ln(x+k) - 5 = 0$

Здесь k - последняя цифра номера группы, N - номер фамилии студента в журнале группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 7

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ

II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков нахождения с заданной погрешностью корней нелинейного уравнения.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Требуется найти корни уравнения

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ - непрерывная функция.

Заменим исходное уравнение эквивалентным ему уравнением $x=\varphi(x)$.

Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие приближения по формуле

$$x_{n+1}=\varphi(x_n) \quad (n=0,1,\dots). \tag{2}$$

Если x_n стремится к некоторому пределу ξ, то этот предел есть корень исходного уравнения, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi.$$

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, тогда (по теореме Лагранжа)

$$x_{n+1}-\xi=\varphi(x_n)-\varphi(\xi)=(x_n-\xi)\varphi'(\eta), \tag{3}$$

где точка η лежит между точками x_n и ξ. Поэтому, если всюду на $[\alpha,\beta]$ $|\varphi'(x)|\le q<1$, то отрезок $|x_n-\xi|$ убывает не медленней членов геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ и последовательность x_n сходится при любом начальном приближении $x_0\in[\alpha,\beta]$.

Действительно, это видно из соотношений

$$|x_{n+1}-\xi|\le|x_n-\xi|q\le|x_{n-1}-\xi|q^2\le\ldots\le|x_0-\xi|q^{n+1}.$$

Очевидно, чем меньше q, тем быстрее сходимость. Успех метода зависит от того, насколько удачно выбрано $\varphi(x)$.

Из выражения (3) видно, что, если $\varphi'(x)<0$, то итерации попеременно оказываются то с одной, то с другой стороны ξ, так что корень заключен в интервале $[x_{n+1},x_n]$. Это надежная, хотя несколько грубая оценка. Но она неприменима, когда $\varphi'(x)>0$, когда итерации сходятся к корню монотонно, т.е. с одной стороны.

Можно показать, что итерации следует прекращать, если выполняется условие

$$\left| q\frac{x_{n+1}-x_n}{1-q} \right| = \frac{\left(x_{n+1}-x_n\right)^2}{2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}} < \varepsilon, \qquad (4)$$

где ε - заданная точность.

Метод итераций имеет важное достоинство самоисправляемости. Ошибки вычислений в методе не накапливаются. Метод итераций устойчив даже к грубым ошибкам (сбоям ЭВМ), если только ошибка не выбрасывает очередное приближение за пределы области сходимости. Ошибочное приближение рассматривается как некоторое новое начальное.

IV. ЗАДАНИЕ

Найти методом итераций один из действительных корней уравнения $f(x)=0$ с допустимой погрешностью 10^{-5}.

Варианты задания приведены в лабораторной работе № 6.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1. - М.: Наука, 1976. 350 с.

Лабораторная работа № 8

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков отыскания приближенных значений действительных корней уравнения методом Ньютона.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Требуется найти корни уравнения

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ - дифференцируемая функция.

Если x_n есть некоторое приближение к корню ξ, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (1) можно преобразовать следующим образом:

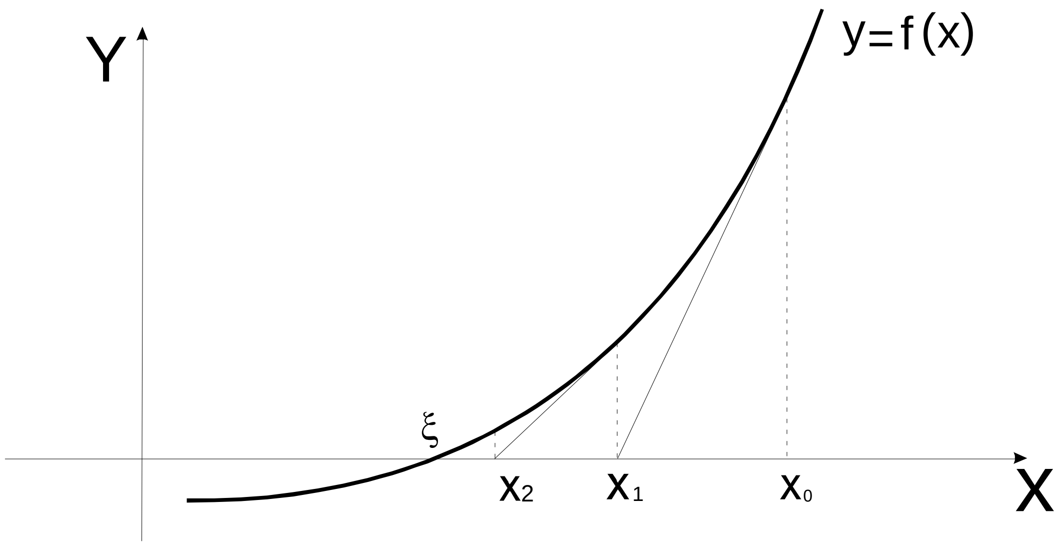
$$0=f(\xi)=f[x_n+(\xi-x_n)]=f(x_n)+(\xi-x_n)f'(\eta),$$

где η - точка, лежащая между x_n и ξ.

Приближенно заменяя $f'(\eta)$ на значение в известной точке x_n, получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2)$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика $y=f(x)$ касательной к нему.



Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода итераций, если положить

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Тогда

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$

При произвольном начальном приближении итерации сходятся, если всюду на рассматриваемом интервале (α,β) $|ff''| < (f')^2$ (чтобы $|\varphi'(x)| < 1$, причем $x_0 \in [\alpha,\beta]$). В противном случае сходимость будет не при любом начальном приближении, а только в некоторой окрестности корня.

Отметим еще достаточное условие сходимости итераций: если $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки на $[\alpha,\beta]$, то исходя из начального приближения $x_0 \in [\alpha,\beta]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, получим методом Ньютона значение корня с любой степенью точности. Т.о., в качестве исходной точки x_0 следует выбирать тот конец $[\alpha,\beta]$, для которого $f(x)$ и $f''(x)$ имеют одинаковые знаки. Если взять такое x_0, что $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то мы можем не прийти к корню ξ, если только x_0 не очень хорошее.

Оценим скорость сходимости метода Ньютона. Справедлива оценка

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2,$$

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на $[\alpha,\beta]$, $M_2 = \max\limits_{[\alpha,\beta]}|f''(x)|$; m_1 - наименьшее значение $|f'(x)|$ на $[\alpha,\beta]$, $m_1 = \min\limits_{[\alpha,\beta]}|f'(x)|$. Отсюда видно, что погрешность очередного приближения примерно равна квадрату погрешности предыдущего приближения. Самый неблагоприятный случай для метода Ньютона, когда $f'(x)$ становится малой вблизи корня. Чтобы не было потери точности, отношение $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ надо вычислять достаточно аккуратно. К остальным погрешностям расчета метод Ньютона хорошо устойчив.

IV. ЗАДАНИЕ

Найти методом Ньютона один из действительных корней уравнения $f(x) = 0$ с точностью 10^{-5}. Варианты заданий приведены в лабораторной работе № 6.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.

4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1. - М.: Наука, 1976. 350 с.

Лабораторная работа № 9

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ ЛАГРАНЖА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков использования интерполяционных многочленов.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть функция $y(x)$ задана таблично, т.е. известны ее значения в $n+1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$

$$y(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,...,n). \qquad (1)$$

Построим многочлен $L_n(x)$ степени n такой, чтобы выполнялись интерполяционные условия

$$L_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,...,n). \qquad (2)$$

Сначала построим полином степени n $p_k(x)$, такой, что

$$p_k(x_i) = \delta_{ki}, \qquad (3)$$

где $\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$ - символ Кронекера.

Так как $p_k(x)$ обращается в нуль в n точках $x_0,\ x_1,\ldots,x_{k-1},\ x_{k+1},\ldots,x_n$, то он имеет вид

$$p_k(x) = c_k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n), \quad (4)$$

где c_k - постоянный коэффициент.

Полагая в формуле (4) $x = x_k$ и учитывая, что $p_k(x_k) = 1$, получим

$$c_k = [(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)]^{-1}.$$

Подставив этот коэффициент в (4), находим

$$p_k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}. \qquad (5)$$

Теперь построим многочлен $L_n(x)$, который имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y_k . \qquad (6)$$

Степень $L_n(x)$, как видно из (5) и (6), не выше n. Кроме того, на основании (2)

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x_i) y_k = p_i(x_i) y_i = y_i,$$

что согласуется с (2)

Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ называется многочленом Лагранжа и имеет вид

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Теперь считаем $y(x)\approx L_n(x)$.

Для абсолютной погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа справедлива оценка

$$|y(x)-L_n(x)|\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[a,b]}\left|y^{(n+1)}(x)\right|$;

$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

III. ЗАДАНИЕ

Дана таблица значений функции $y=y(x)$

x	3,5	4,1	4,3	5
y	N+k	N+2k	N-k	N

Здесь N - номер фамилии студента в журнале группы; k - последняя цифра номера группы.

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить с его помощью значения $y(3{,}6)$; $y(4{,}18)$; $y(4{,}9)$.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

Лабораторная работа № 10

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

II. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков использования интерполяционных сплайнов.

III. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть на $[a,b]$ в узлах сетки $\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения некоторой функции $f(x)$

$$f(x_i) = f_i \qquad \left(i = \overline{0,N}\right).$$

Для интерполирования функций воспользуемся кубическими сплайнами дефекта 1, которые обозначим $S(x)$. На каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S(x)$ записывается в виде

$$S(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3. \qquad (1)$$

Причем $S(x) \in C^2[a,b]$.

Рассмотрим два алгоритма построения интерполяционных кубических сплайнов, удовлетворяющих условиям $S(x_i) = f_i \quad \left(i = \overline{0,N}\right)$.

Введем обозначение $S'(x_i) = m_i \quad \left(i = \overline{o,N}\right)$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} S(x_i) = f_i; \quad S(x_{i+1}) = f_{i+1}; \\ S'(x_i) = m_i; \quad S'(x_{i+1}) = m_{i+1}. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты $a_{i0}, \ a_{i1}, \ a_{i2}, \ a_{i3}$.

В результате выражение (1) примет вид

$$S(x) = f_i(1-t)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) + m_i h_i t(1-t)^2 - m_{i+1}h_i t^2(1-t), \qquad (2)$$

где

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \ h_i = x_{i+1} - x_i; \ t = \frac{x - x_i}{h_i}; \ i = \overline{0,N-1}.$$

Кубический сплайн (2), записанный в терминах m_i, на каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ непрерывен вместе со своей первой производной всюду на $[a,b]$. Выберем величины m_i так, чтобы была непрерывна и вторая производная сплайна. Условие

$$S''(x_i + 0) = S''(x_i - 0) \qquad (i = 1,2,\ldots,N-1)$$

дает $N-1$ уравнений для нахождения $m_i \quad \left(i = \overline{0,N}\right)$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \qquad \left(i = \overline{1,N-1}\right), \qquad (3)$$

где

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}; \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i};$$

$$c_i = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

К уравнениям (3) следует присоединить еще два уравнения, являющихся краевыми условиями. Из полученной системы уравнений находятся значения величин $m_i \quad \left(i = \overline{0,N}\right)$, которые подставляются в выражение для

интерполяционного сплайна (2).

Если ввести обозначение $S''(x_i) = M_i \quad \left(i = \overline{0,N}\right)$ и коэффициенты

a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} найти как решение системы уравнений

$$\begin{cases} S(x_i) = f_i; & S(x_{i+1}) = f_{i+1}; \\ S''(x_i) = M_i; & S''(x_{i+1}) = M_{i+1}, \end{cases}$$

то на каждом $[x_i, x_{i+1}]$ интерполяционный кубический сплайн в терминах M_i будет представляться выражением

$$S(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}],$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1}. \qquad (4)$$

При этом сплайн $S(x)$ и его вторая производная будут непрерывны на $[a,b]$. Выберем величины M_i так, чтобы была непрерывна и первая производная сплайна. Условие

$$S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0) \quad \left(i = \overline{1, N-1}\right)$$

дает $N-1$ уравнений

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad \left(i = \overline{1, N-1}\right), \qquad (5)$$

где

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right).$$

К уравнениям (5) следует присоединить два краевых условия. Из полученной системы уравнений находятся значения $M_i \quad \left(i = \overline{0,N}\right)$,

которые подставляются в выражение (4).

На практике наиболее употребительными являются краевые условия следующих типов:

I. $S'(a) = f'(a);\ S'(b) = f'(b).$

II. $S''(a) = f''(a);\ S''(b) = f''(b).$

III. $S^{(r)}(a)=S^{(r)}(b), \; r=1,2.$

IV. $S'''(x_p+0)=S'''(x_p-0); \; p=1,N-1.$

IV. ЗАДАНИЕ

С помощью интерполяционных кубических сплайнов, записанных в терминах m_i и M_i, вычислить значения функции $y=f(x)$ в точках $x=3{,}6;\; 3{,}9;\; 4{,}2.$ Таблица значений функции $y=f(x)$ приведена в лабораторной работе № 9.

Использовать следующие краевые условия

$$S''(a)=S''(b)=0.$$

Указания:

1. При использовании сплайнов, записанных в терминах m_i, к уравнениям (3) присоединить следующие уравнения:

$$2m_0+m_1=c_0;$$

$$m_{N-1}+2m_N=c_1,$$

где

$$c_0=3\frac{f_1-f_0}{h_0}-\frac{h_0}{2}f''(a);\; c_N=3\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}+\frac{h_{N-1}}{2}f''(b).$$

2. При использовании сплайнов, записанных в терминах M_i, к уравнениям (5) присоединить следующие уравнения:

$$M_0=0;\; M_N=0.$$

3. Системы (3) и (5) являются системами с трехдиагональной матрицей. Осуществить их решение методом прогонки.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функции. - М.: Наука, 1980. 248 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

Лабораторная работа № 11

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ФОРМУЛЕ ТРАПЕЦИЙ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного вычисления интегралов с помощью квадратурных формул.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \quad x_n = b$$

на n равных частей. Шаг $h = \frac{b-a}{n}$.

Пусть $y_i = f(x_i)$.

Заменяя функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i,$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$,

получаем квадратурную формулу

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i\,. \qquad (1)$$

где

$$A_i = h\frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-1)!}\int\limits_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}dt \qquad (i = 0, 1, ..., n).$$

При этом $t = \frac{x-x_0}{h}$.

Полагая $A_i = (b-a)H_i$, будем иметь

$$\mathrm{H}_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i\,!(n-1)!}\int\limits_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}dt. \qquad (2)$$

Тогда квадратурная формула (1) принимает вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i y_i\,. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) называются формулами Ньютона – Котеса.

Полагая в формуле (2) n =1, находим

$$\mathrm{H}_0 = -\int\limits_0^1 \frac{t(t-1)}{t}dt = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathrm{H}_1 = \int\limits_0^1 \frac{t(t-1)}{t-1}dt = \frac{1}{2}.$$

В результате получаем формулу трапеций

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 - y_1) \ . \qquad (4)$$

Для повышения точности на отрезке [a,b] вводится достаточно густая сетка

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b \, .$$

Интеграл разбивается на сумму интегралов по шагам сетки и к каждому шагу применяют формулу (4).

Обобщенная формула трапеций на равномерной сетке с шагом h имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(y_i + y_{i+1}) \, . \qquad (5)$$

Для равномерной сетки справедлива следующая мажорантная оценка погрешности формулы трапеций:

$$|R| \le \frac{(b-a)h^2}{12} \mathrm{M}_2 \ ,$$

где $\mathrm{M}_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

III. ЗАДАНИЕ

Вычислить с помощью формулы трапеций определенный интеграл от заданной функции.

Варианты заданий

№	f(x)	Пределы интегрирования	
		a	b
1.	$k\Big/\sqrt{(1+x^2)(4+x^2)}$	0,1	k
2.	$ke^{-x}\cos\dfrac{\pi x}{4}$	k	$k+1$
3.	$k\ln tg\,\dfrac{x}{\pi}$	k	3
4.	$k\arcsin\ e^{-\frac{x}{7}}$	$k+5$	13
5.	$k\sqrt[3]{sh\,\dfrac{x}{\sqrt{e}}}$	k	$k+4$
6.	$k\sqrt{ch\,(x\ln 10)}$	k	3,2
7.	$k\ln(1+\sqrt{x})/\sqrt[3]{x}$	k	3
8.	$k\sin\ x/(x^2+1)$	k	3
9.	$ke^{-x^2}\ \sin\ kx/(k+x^2)$	0	1
10.	$k\sqrt{k+x^2}\ /\ (1+\cos kx)$	0	1
11.	$k\Big/(1+\sqrt{\ln\ x})$	k	3
12.	$k\ /\ln(1+x^2)\ /(1+x^2)$	0	k

13.	$k \lg kx / x$	k	$k+2$
14.	$kx \ln(1+x^3)$	k	$k+1$
15.	$kx \ln / \sqrt{(x^2-1)^3}$	$k+1$	4
16.	$kx^2 e^x \cos x$	$k-1$	$k+1$
17.	$kxe^x / \sqrt{1+e^x}$	k	$k+1$
18.	$k \ln(x+1) / \sqrt{x+1}$	k	$k+2$
19.	$karctg(1+\sqrt{x})$	k	$k+1$
20.	$k / x\sqrt{k-(\ln x)^2}$	k	$k+0{,}7$
21.	$k / x\sqrt{k+\ln x}$	k	$k+1$
22.	$kx^3 \sin x$	k	$k+1$
23.	$karctgx / x$	k	$k+1$
24.	$k / (1+\sin^3 x)$	k	$k+1$
25.	ke^{-4x^2+2x+1}	0	k

Здесь k–последняя цифра номера группы.

Указание: При вычислении интеграла положить h=0.1

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 12

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ФОРМУЛЕ СИМПСОНА

IV. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного вычисления интегралов с помощью квадратурных формул.

II.ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \quad x_n = b$$

на n равных частей. Шаг $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Пусть $y_i = f(x_i)$.

Полагая в формулах Ньютона – Котеса

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \text{H}_i y_i\,; \quad \text{H}_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-1}}{i\,!(n-1)!}\int\limits_0^n \frac{t(t-1)...(t-n)}{t-i}dt$$

$n = 2$, получаем

$$H_0 = 1/2; \quad H_1 = 2/3; \quad H_2 = 1/6\,.$$

Так как $x_2 - x_0 = 2h$, то

$$\int\limits_{ч_0}^{ч_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\,. \qquad (1)$$

Это формула Симпсона.

Для повышения точности отрезок [a,b] разбивается на четное число частей $N = 2m$. Тогда $h = \dfrac{b-a}{2m}$.

Интеграл разбивается на сумму интегралов. К каждому удвоенному промежутку $[x_0, x_2], [x_2, x_4], ..., [x_{2m-2}, x_{2m}]$ длины $2h$ применим формулу (1).

Получим обобщенную формулу Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2})\,. \qquad (2)$$

Для погрешности формулы Симпсона (2) справедлива оценка

$$|R| \le \frac{(b-a)h^4}{180}M_4,$$

где $M_4 = \max\limits_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$.

III.ЗАДАНИЕ

Вычислить с помощью формулы Симпсона определенный интеграл от заданной функции. Варианты заданий приведены в лабораторной работе № 11.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 13

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ЯЧЕЕК

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного вычисления кратных интегралов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Построим кубатурную формулу, предназначенную для приближенного вычисления двойных интегралов

$$I = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Рассмотрим метод ячеек.

Пусть область интегрирования G представляет собой прямоугольник $(a < x < b,\ \alpha \le y \le \beta)$. Разобьем область G на прямоугольные ячейки (рис. 1).

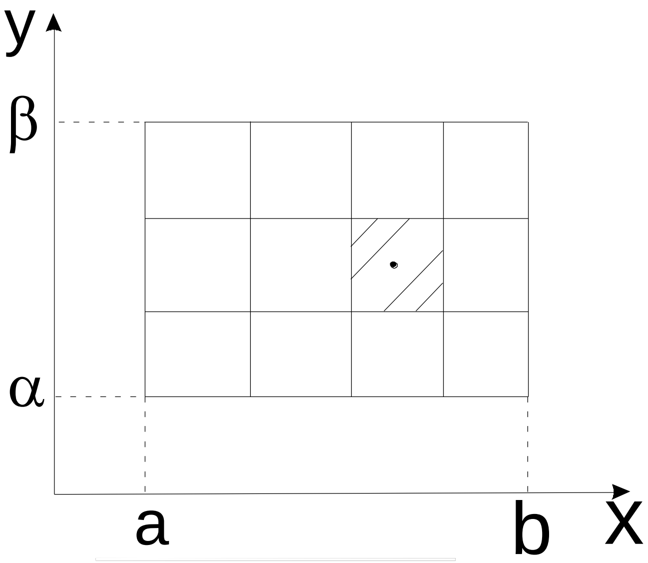


Рис. 1.

Используя формулу средних для вычисления интеграла по каждой ячейке и обозначая через S_i, $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ соответственно площадь i ячейки и координаты ее центра, получим

$$I \approx \sum_i S_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \tag{2}$$

Для любой непрерывной функции $f(x,y)$ интегральная сумма сходится к значению интеграла, когда периметры всех ячеек стремятся к нулю.

Если стороны прямоугольника разбиты соответственно на M и N равных частей, то погрешность обобщенной формулы (2)

$$R = O\left(M^{-2} + N^{-2}\right).$$

В случае, когда область G не является прямоугольником, на нее следует наложить прямоугольную сетку (рис. 2).

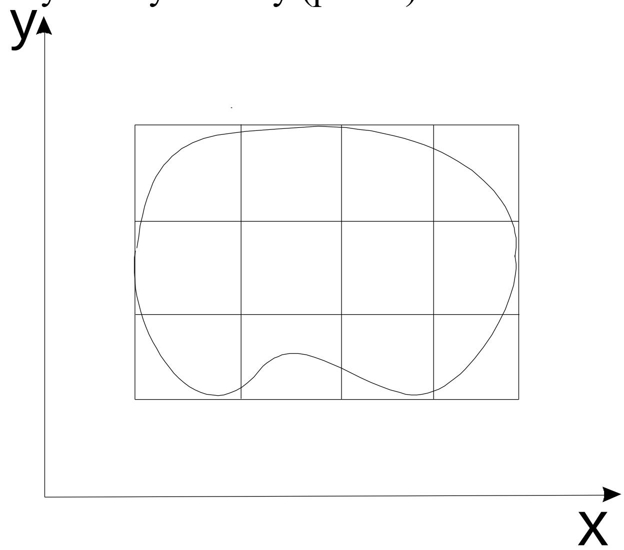


Рис. 2

Ячейки, которые полностью лежат в области G, называются внутренними. Ячейка называется граничной, если часть ее принадлежит G, а часть находится вне G. Площадь внутренней ячейки равна произведению ее сторон. Площадью граничной ячейки будем считать площадь той ее части, которая принадлежит G. Эту площадь вычислим приближенно, заменяя истинную границу на хорду. Указанные выше площади подставим в формулу (2) и найдем приближенное значение интеграла.

ЗАДАНИЕ

Методом ячеек вычислить интеграл (1) по области G, изображенной на рис. 3.

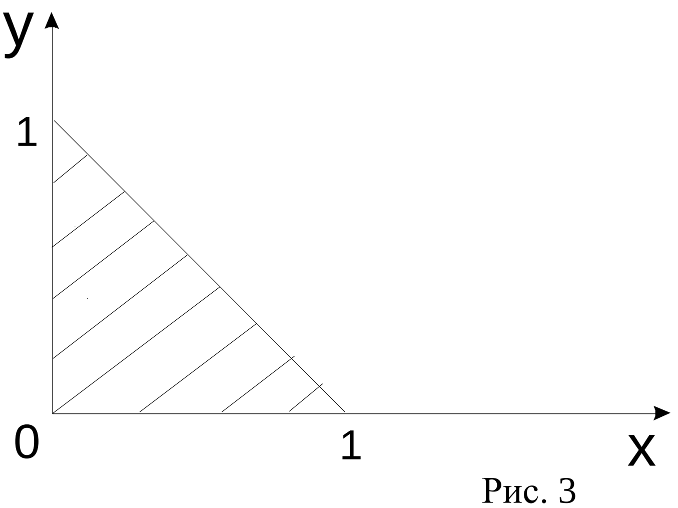


Рис. 3

Варианты заданий

Номер варианта	$f(x,y)$

1	$e^{-x}\cos\frac{\pi y}{4k}$
2	$1\Big/\sqrt{\left(k+x^2\right)\left(2k+y^2\right)}$
3	$x^3\sin(x+ky)$
4	$e^x\sqrt{kx+y}$
5	$x^2e^{ky}\sin x$
6	$y\Big/\sqrt{k+e^x}$
7	$\sin kx\Big/\left(y^2+k\right)$
8	$e^y\cos kx$
9	$y^2\cos(kx+y)$
10	$\sqrt{x}e^{x+ky}$
1	2
11	$e^{-y}\sin\frac{\pi x}{4k}$
12	$y^2\sqrt{2k+x^3}$
13	$y^3\sin(x+ky)$
14	$\sqrt{\left(kx^3+y\right)(k+x)}$
15	$e^{2y}\sqrt{kx+y}$
16	$\sqrt{y}\cos(kx+2y)$
17	$y^2e^x\cos(k+x)$
18	$x\Big/e^y\sqrt{k+x}$
19	$xe^{-x}\Big/\left(kx^2+ky^2+1\right)$
20	$\sqrt{kx}\sin(x+ky)$
21	$e^{x+y}\sqrt{kx^2+y^3}$
22	$\sin(x+k)\cos\left(y^2+k\right)$
23	$e^{-y}\sqrt{kx^2+y^3}$
24	$y^2\Big/\sqrt{ke^x+y}$
25	$x^2\Big/\sqrt{ky+e^{-x}}$

Здесь k - последняя цифра номера группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 14

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного вычисления кратных интегралов.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Построим кубатурную формулу, предназначенную для приближенного вычисления двойных интегралов

$$I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy. \qquad (1)$$

Рассмотрим метод последовательного интегрирования.

Пусть область интегрирования G представляет собой прямоугольник $(a < x < b,\ \ \alpha \le y \le \beta)$. Разобьем область G на прямоугольные ячейки (рис. 1).

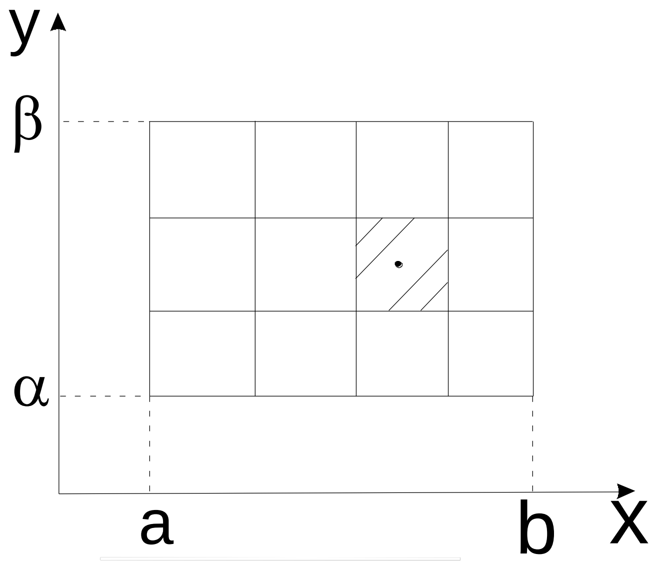


Рис. 1.

Интеграл (1) вычислим последовательным интегрированием:

$$I = \int_\alpha^\beta F(y)dy,$$

где

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Каждый однократный интеграл вычисляется на выбранной сетке по какой-либо квадратурной формуле типа

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i).$$

Последовательное интегрирование по обоим направлениям приводит к кубатурным формулам, которые являются прямым произведением одномерных квадратурных формул

$$F(y_j) \approx \sum_i C_i f(x_i, y_j); \quad I = \sum_j \overline{C}_j F(y_j),$$

или

$$I \approx \sum_{i,j} C_{ij} f(x_i, y_j),$$

где $C_{ij} = C_i C_j$.

Для разных направлений можно использовать квадратурные формулы одного или разных порядков точности.

Если область G имеет произвольную форму, то в G следует провести хорды, параллельные оси x (рис. 2).

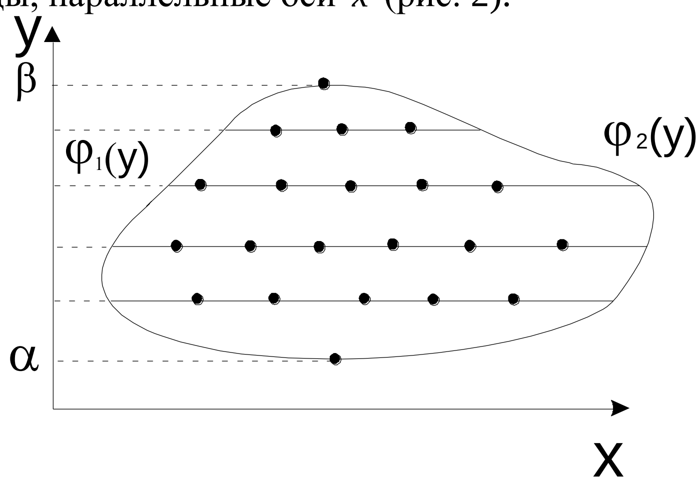


Рис. 2

На каждой хорде выбираются узлы так, как нам требуется. Интеграл (1) представим в виде

$$I = \int\limits_\alpha^\beta F(y)dy;$$

$$F(y) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Сначала вычислим интеграл по x вдоль каждой хорды по какой-либо квадратурной формуле, используя введенные узлы. Затем вычислим интеграл по y, используя какую-либо квадратурную формулу. При этом узлами будут служить проекции хорд на ось ординат.

III. ЗАДАНИЕ

Методом последовательного интегрирования вычислить интеграл (1) по области G, изображенной на рис. 3.

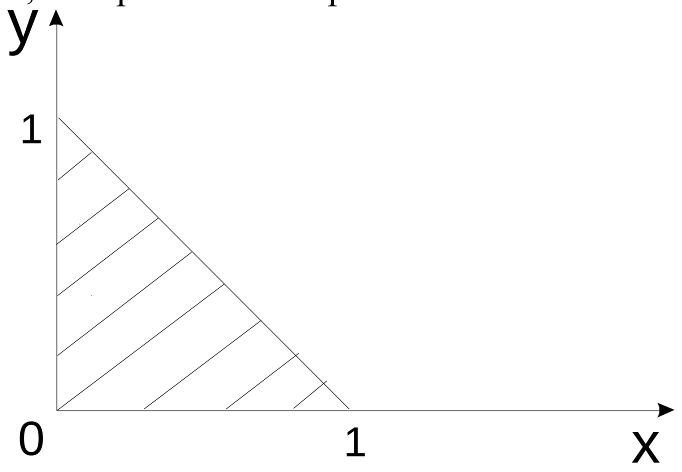


Рис. 3

Варианты заданий приведены в лабораторной работе №13.

Указание: При построении кубатурной формулы методом последовательного интегрирования использовать квадратурную формулу трапеций при интегрировании по обоим направлениям. Указать погрешность вычисления интеграла (1).

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 15

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ – КУТТА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутта.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(x) = f(x,u(x)) \quad (a \le x \le b);$$
$$u(x_0) = u_0 \quad (x_0 = a).$$

Выберем на отрезке $[a,b]$ сетку $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. В отличии от точного решения $u(x)$ приближенное решение задачи Коши будем обозначать через $y(x)$. $y_n = y(x_n)$.

Методом Рунге – Кутта можно строить схемы различного порядка точности.

Наиболее употребительны схемы четвертого порядка точности, образующие семейство четырехчленных схем.

Приведем без вывода наиболее используемую схему, которая записана в большинстве стандартных программ ЭВМ:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$
$$k_1 = f(x_n, y_n); \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1);$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2); \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

При величинах $k_m (m = 1,2,3,4)$ и h следует ставить индекс сетки n, но для простоты его опускаем.

Погрешность схемы на каждом $[x_n, x_{n+1}]$ есть величина порядка h^5.

III. ЗАДАНИЕ

Найти методом Рунге–Кутта численное решение дифференциального уравнения

$$u'(x) = f(x,u(x)) \quad (a \le x \le b)$$

с начальным условием

$$u(x_0) = u_0 \quad (x_0 = a).$$

Варианты заданий

№	Функция $f(x,u(x))$	a	b	u_0
1	$e^{ku}+(x+k)^2$	1	2	0
2	$kx+u\cos kx$	0	1	0
3	$ku\sin kx+x$	0	1	0
4	$1+ku\sin x-ku^2$	0	1	0
5	$e^{-kx}(x^2+k)$	0	1	0
6	$\cos x+kux$	0	1	0
7	$1-\sin(kx+u)$	1	2	1
8	$\cos(kx+u)-ku$	1	2	0
9	$u^2e^{kx}-kxu$	0	1	1
10	$-2u^3\sin(k+x^2)$	1	2	1
11	$\cos^2(u+kx)-2$	1	1	1
12	$ku^2\sin kx-x^3$	0	1	0
13	$ku-\sin(kx+u)$	0	1	0
14	$e^{ku}+(u-kx)^2$	0	1	0
15	$-2u^3\cos(k+x^2)$	0	1	2
16	$\sin^2(u+kx)-2x$	1	2	1
17	$\cos x+ku^2x$	1	2	1
18	$kx\sin kx+u^2$	0	1	0
19	$ku^2\cos kx-x^3$	0	1	0
20	$e^{kx}+(u^2-kx)^2$	0	1	0
21	$e^{-ku}(x^2+ku^2)$	1	2	1
22	$\cos^2(u+kx)-2ux$	1	2	0
23	$\sin^2(u^2+kx)-4x^3$	0	1	0
24	$e^{-ku}+(u^2-kx^3)^2$	1	2	1
25	$xe^{ku}+(ku-x^3)^2$	0	1	1

Здесь k - последняя цифра номера группы.
Указание: Использовать равномерную сетку с шагом $h=0{,}1$.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. 512 с.

2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Лань, 2009. 672 с.

Лабораторная работа № 16

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x) \qquad (1)$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)=A;$$
$$\beta_0 u(b)+\beta_1 u'(b)=B, \qquad (2)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - известные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции; α_0, α_1, β_0, β_1, A, B - заданные постоянные, причем $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$ и $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Согласно методу конечных разностей введем на $[a,b]$ равномерную сетку с шагом $h=\dfrac{b-a}{N}$:

$$x_0=a;\ \ x_i=x_0+ih;\ \ (i=1,2,\ldots,N-1);\ \ x_N=b.$$

Заменим приближенно в каждом внутреннем узле производные $u'(x_i)$ и $u''(x_i)$ конечно-разностными отношениями

$$u'(x_i)=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h};\ \ u''(x_i)=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}, \qquad (3)$$

а на концах отрезка положим

$$u'(x_0)=\frac{u_1-u_0}{h};\ \ u'(x_N)=\frac{y_N-y_{N-1}}{h}, \qquad (4)$$

где $u_i=u(x_i)$.

Погрешность формул (3) есть $O(h^2)$, а формул $(4)-O(h)$.

Используя формулы (3) и (4), приближенно заменим уравнение (1) и краевые условия (2) системой разностных уравнений

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+p(x_i)\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+q(x_i)u_i=f(x_i), \qquad (5)$$

$$i=1,2,\ldots,N-1$$

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = A; \ \ \beta_0 u_N + \beta_1 \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = B. \qquad (6)$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, получим таблицу значений u_i искомой функции $u(x)$.

Система $(5)-(6)$ может быть решена различными методами. Однако замечаем, что она имеет трехдиагональную матрицу. Поэтому для решения системы воспользуемся методом прогонки.

Уравнение (5) запишем в виде

$$u_i = \frac{\tilde{f}_i}{m_i} - \frac{1}{m_i} u_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} u_{i-1}, \qquad (7)$$

где $m_i = -\dfrac{2 - q(x_i)h^2}{1 + \dfrac{p(x_i)}{2}h}; \ \ n_i = \dfrac{1 - \dfrac{p(x_i)}{2}h}{1 + \dfrac{p(x_i)}{2}h}; \ \ \tilde{f}_i = \dfrac{f(x_i)h^2}{1 + \dfrac{p(x_i)}{2}h}.$

Положим, что

$$u_i = c_i(d_i - u_{i+1}), \qquad (8)$$

где c_i, d_i - некоторые коэффициенты.

Отсюда находим

$$u_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - u_i). \qquad (9)$$

Подставим (9) в уравнение (7). Получим

$$u_i = \frac{\left(\tilde{f}_i - n_i c_{i-1} d_{i-1}\right) - u_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \qquad (10)$$

Сравнивая формулы (8) и (10), получаем рекуррентные формулы для определения c_i и d_i:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}; \ \ d_i = \tilde{f}_i - n_i c_{i-1} d_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1). \qquad (11)$$

Определим теперь c_i и d_i. Из первого равенства (6) получаем

$$u_0 = \frac{Ah - \alpha_1 u_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (8) имеем

$$u_0 = c_0(d_0 - u_1).$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}; \ \ d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \qquad (12)$$

По формулам (12) и (11) осуществляется прямой ход. При этом находятся коэффициенты c_i, d_i $\quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Обратный ход начинается с определения u_N.

Используя второе равенство (6) и формулу (8) при $i = N-1$, получим систему двух уравнений, решая которую найдем

$$u_N = \frac{Bh + \beta_1 c_{N-1} d_{N-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{N-1} + 1)}.$$

Теперь по формуле (8) определим y_{N-1}, $y_{N-1}, \ldots, y_0$.

Метод прогонки обладает устойчивым вычислительным алгоритмом.

III. ЗАДАНИЕ

Методом конечных разностей решить следующую краевую задачу:

$$ku'' - (2 + N)xu' - ku = \frac{N}{k} x^2,$$

$$u(0) - u'(0) = 0; \; u(1) = 1.$$

Здесь k - последняя цифра номера группы; N - номер фамилии студента в журнале.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. -512 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967 .368 с.

Лабораторная работа № 17

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения уравнений эллиптического типа методом сеток.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Требуется найти решение уравнение

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x, y) \qquad (1)$$

в области D,если

$$U_{\Gamma} = \varphi(x, y), \qquad (2)$$

где Γ-граница области D; $\varphi(x, y)$-заданная непрерывная функция.

Чтобы найти решение данной задачи методом сеток покроем область D прямоугольной сеткой D^*:

$$x_i = x_0 + ih;\ y_i = y_0 + jl,$$

где (x_0, y_0)-точка, лежащая внутри области; h и l - шаги сетки по x и y соответственно; $i, j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Заменим в узлах (x_i, y_j) производные U_{xx} и U_{yy} конечно- разностными соотношениями

$$(U_{xx})_{ij} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2};$$

$$(U_{yy})_{ij} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{l^2};$$

Тогда для каждого внутреннего узла сетки уравнение (1) заменится конечно-разностным уравнением вида

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{I-1,J}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2} = f_{i,j}, \qquad (3)$$

где $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

Границу данной области Γ заменим границей Γ^* сеточной области. Если узел сетки A_h лежит на границе области Γ, то значение U в этом узле совпадает со значением $\varphi(x, y)$ в данной точке. Если же граничный узел не лежит на границе, то можно выполнить одну из следующих процедур:

1. Положить, что в данном узле A_h функция U равна значению функции φ в ближайшей точке A границы, отстоящей от данного узла A_h на расстояние δ по оси x или y

$$U(A_h) \approx \varphi(A).$$

2. Для определения значения функции в граничном узле A_h использовать линейную интерполяцию

$$U(A_h) = U(A) + \frac{U(B) - U(A)}{h+\delta}\delta,$$

где B-соседний внутренний узел, причем $\delta > 0$, если A_h лежит внутри области, и $\delta < 0$,если A_h есть внешняя точка для области D.

Выбор шагов h, l производится в зависимости от конкретной задачи, но таким образом, чтобы при этом контур Γ^* сеточной области D^* как можно лучше аппроксимировал контур Γ данной области D.

От выбора h, l зависит также величина остаточного члена при замене дифференциального уравнения (1) конечно-разностным уравнением (3). Следовательно, h, l должны быть выбраны таким образом ,чтобы этот остаточный член был меньше погрешности, допустимой при решении.

Особенно простой вид примет система (3) при $h = l$:

$$U_{i+1,j} + U_{i1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{ij} = h^2 f_{ij} \qquad (4)$$

Следовательно, чтобы решить задачу ,надо выбрать шаг сетки, построить сеточную область, найти значения в граничных узлах сетки, записать систему алгебраических уравнений для внутренних и граничных узлов сетки, решить полученную полную систему любым методом (метод Гаусса, метод Зейделя и т.д.). При этом погрешность приближенного решения задачи Дирихле будет складываться из трех погрешностей: погрешности замены дифференциального уравнения разностным, погрешности аппроксимации граничных условий, погрешности решения системы уравнений.

При большом числе внутренних узлов решение системы уравнений затруднительно. Чтобы решить задачу Дирихле в данном случае, применяют процесс Либмана.

Для этого выбирают начальные приближения $U_{ij}^{(0)}$. Теоретически в качестве этих значений можно выбрать любую систему чисел. Практически, чтобы найти значения $U_{ij}^{(0)}$, решают задачу Дирихле с большим шагом, обычно с шагом $2h$, чтобы получить систему меньшего числа уравнений, принимая значения U в граничных узлах равными значениям функции в ближайших точках границы. Значения функции во всех остальных внутренних узлах находят по формуле

$$U_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}\left[U_{i+1,j}^{(0)} + U_{i-1,j}^{(0)} + U_{i,j-1}^{(0)} + U_{i,j+1}^{(0)} - h^2 f_{ij}\right].$$

Затем значения функции в граничных узлах A_h исправляют по формулам линейной интерполяции, а значения функции во внутренних узлах исправляют по формулам

$$U_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4}\left[U_{i-1,j}^{(k-1)} + U_{i+1,j}^{(k-1)} + U_{i,j-1}^{(k-1)} + U_{i,j+1}^{(k-1)} - h^2 f_{ij}\right].$$

Процесс продолжается до тех пор , пока не совпадут значения функций в двух последовательных приближениях.

III. ЗАДАНИЕ

Найти решение уравнения

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x,y)$$

в области D, если на границе области Γ

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x,y)$$

Варианты заданий.

№	Г	$\varphi(x,y)$	$f(x,y)$
1.	$x^2/9 + y^2/16 = 1$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$-xy$
2.	$(\lvert x\rvert + 2)(\lvert y\rvert + 2) = 12$	$2\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$x^2 - y^2$
3.	$\lvert y\rvert = 4 - x^2, x \in [-2,2]$	$\lvert x\rvert\lvert y\rvert$	$-2xy$
4.	$x^2 + y^2 = 16$	$\lvert x\rvert + 2\lvert y\rvert$	$-xy$
5.	$x^2/16 + y^2/9 = 1$	$\lvert x\rvert\lvert y\rvert$	$x^2 - y^2$
6.	$\lvert x\rvert = 4 - y^2, x \in [-4,4]$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$-2xy$
7.	$(\lvert x\rvert + 2)(\lvert y\rvert + 2) = 12$	$\lvert x\rvert\lvert y\rvert$	$-3xy$
8.	$x^2/9 + y^2/16 = 1$	$2\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$x^2 - y^2$
9.	$x^2/16 + y^2/25 = 1$	$\lvert x\rvert\lvert y\rvert$	$-xy$
10.	$\lvert y\rvert = 4 - x^2, x \in [-2,2]$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$-2xy$
11.	$x^2 + y^2 = 16$	$\frac{1}{2}\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$12(x^2 - y^2)$
12.	$x^2/16 + y^2/9 = 1$	$\lvert x\rvert + \frac{1}{2}\lvert y\rvert$	$-4xy$
13.	$\lvert x\rvert = 4 - y^2, x \in [-4,4]$	$\lvert x\rvert + y^2/2$	$-xy$

14.	$(\|x\|+2)(\|y\|+2)=12$	$2\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$	x^2-y^2
15.	$x^2/25+y^2/9=1$	$\|x\|+\|y\|$	$-2xy$
16.	$x^2/9+y^2/16=1$	$2\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$	x^2-y^2
17.	$\|y\|=9-x^2, x\in[-3,3]$	$\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$	$12(x^2-y^2)$
18.	$x^2+y^2=16$	$\frac{1}{2}\|x\|+2\|y\|$	$-xy$
19.	$x^2/16+y^2/9=1$	$\frac{1}{2}\|x\|+\|y\|$	$-4xy$
20.	$\|x\|=9-y^2, x\in[-9,9]$	$\frac{1}{2}\|x\|+\|y\|$	$-xy$
21.	$x^2/9+y^2/25=1$	$\frac{1}{2}\|x\|+2\|y\|$	x^2-y^2
22.	$x^2/25+y^2/16=1$	$\frac{1}{2}\|x\|\|y\|$	$-2xy$
23.	$(\|x\|+3)(\|y\|+2)=18$	$\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$	$-4xy$
24.	$\|y\|=9-x^2, x\in[-3,3]$	$2\|x\|+\frac{1}{2}\|y\|$	$12(x^2-y^2)$
25.	$x^2+y^2=16$	$\frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)$	$-xy$

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.

4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.

3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967 368 с.

Лабораторная работа № 18

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения уравнений параболического типа методом сеток.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Требуется найти решение уравнения

$$U_f = U_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D[0 < x < l, \quad 0 < t < T]$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} U(x,0) &= \varphi(x); \\ U(0,t) &= \mu_1(t); \\ U(l,t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Разобьём область D прямыми

$$x_i = ih, \; i = \overline{0,n};$$
$$y_j = j\tau, \; j = 1,2,...,$$

где h – шаг по оси x; τ –шаг по оси t.

Обозначим через $U_{ij} = U(x_i, t_j)$.

Заменив в каждом внутреннем узле производные конечно–разностными отношениями по явной схеме, получим систему вида

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1}}{h^2} + f_{i,j+1}, \tag{3}$$

Преобразовав её, будем иметь

$$U_{i-1,j+1} - (2+S)U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + SU_{i,j} + h^2 f_{i,j+1} = 0, \tag{4}$$

где $i = 1,2,..,n-1; \quad j = 1,2,... ; \quad S = \dfrac{h^2}{\tau}$.

В граничных узлах

$$\begin{aligned} U_{0j} &= \mu_1(t_j); \\ U_{nj} &= \mu_2(t_j), \; j = 0,1,... \end{aligned} \tag{5}$$

В начальный момент времени

$$U_{i0} = \varphi(x_i), \; i = \overline{0,n}. \tag{6}$$

Эта разностная схема устойчива при любом S.

Будем решать систему уравнений (4),(5),(6) методом прогонки.

Для этого положим

$$U_{i,j+1} = a_{i,j+1}(b_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}), \tag{7}$$

где $a_{i,j+1}, b_{i,j+1}$ – пока неизвестные коэффициенты.

Тогда

$$U_{i-1,j+1} = a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + U_{i,j+1})\,. \qquad (8)$$

Подставив значение (7) в (4), получим

$$a_{i-1,j+1}(b_{i-1,j+1} + U_{i,j+1}) - (2+S)U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} + SU_{ij} + h^2 f_{i,j+1} = 0$$

Откуда

$$U_{i,j+1} = \frac{a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + U_{i+1,j+1} + SU_{ij} + h^2 f_{i,j}}{2 + S - a_{i-1,j+1}}. \qquad (9)$$

Из сравнения (7) и (9) видно, что

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2 + S - a_{i-1,j+1}}, \qquad i = \overline{2, n-1} \qquad (10)$$

$$b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + SU_{ij} + h^2 f_{i,j+1} \qquad (i = \overline{2, n-1}) \qquad (11)$$

Для $i = 1$ из (4) имеем

$$U_{0,j+1} - (2+S)U_{1,j+1} + U_{2,j+1} + SU_{1j} + h^2 f_{1,j+1} = 0\,.$$

Откуда

$$U_{1,j+1} = \frac{U_{0,j+1} + SU_{1j} + h^2 f_{1,j+1} + U_{2,j+1}}{2 + S}$$

или

$$U_{1,j+1} = \frac{\mu_1(t_{j+1}) + SU_{1j} + h^2 f_{1,j+1} + U_{2,j+1}}{2 + S}$$

Сравнивая (7) при $i = 1$ с последним выражением, получим

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2 + S}; \qquad (12)$$

$$b_{1,j+1} = \mu_1(t_{j+1}) + SU_{1j} + h^2 f_{1,j+1}\,. \qquad (13)$$

Таким образом, сначала проводим прямой ход, вычисляя коэффициенты $a_{i,j+1}$ и $b_{i,j+1}$ по формулам (12),(13) и (10),(11). Затем осуществляем обратный ход по формуле (7). Последовательно находим

$$U_{n,j+1} = \mu_2(t_{j+1});$$

$$U_{n-1,j+1} = a_{n-1,j+1}(b_{n-1,j+1} + U_{n,j+1});$$

$$U_{n-2,j+1} = a_{n-2,j+1}(b_{n-2,j+1} + U_{n-1,j+1});$$

…………………………………………………..

$$U_{1,j+1} = a_{1,j+1}(b_{1,j+1} + U_{2,j+1})\,.$$

III. ЗАДАНИЕ

Методом сеток (с использованием метода прогонки) найти приближенное решение уравнения

$$U_t = U_{xx} + f(x,t)$$

в области $D[0 \le X \le 1,\, 0 \le T \le 0{,}05]$, удовлетворяющее условиям

$$U(x,0) = \varphi(x);$$

$$U(0,t) = \mu_1(t);$$

$$U(1,t) = \mu_2(t),$$

взяв $h = 0.1$, $\tau = 0.01$.

Варианты заданий

№ вари– анта	$f(x,t)$	$\varphi(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$
1	xt	$(1{,}1x^2+2{,}1)e^{-x}$	$2{,}1+t$	$3{,}2(t+e^{-1})$
2	$2x+t$	$(1{,}3x^2+2{,}2)e^{-x}$	$2{,}2e^t$	$3{,}5(t+1/e)$
3	$t\sin x$	$(1{,}5x^2+2{,}5)e^{-x}$	$2{,}5e^{-t}$	$4e^{t-1}$
4	xt	$(1{,}3x^2+2{,}3)\sin \pi x$	$-1+e^t$	$\sin t$
5	$2x+t$	$(1{,}4x^2+2{,}4)\sin \pi x$	$e^{2t}-1$	$1-\cos t$
6	$t\cos x$	$(1{,}5x^2+2{,}5)\sin \pi x$	$1-\cos t$	e^t-1
7	$x+t$	$e^{-x}\sin\frac{\pi}{2}x$	e^t-1	$-e^{-1}+t$
8	xt	$e^{x}\sin\frac{\pi}{4}x$	$\sin t$	$e(t+\sqrt{2}/2)$
9	$t\sin x$	xe^x	$1-\cos t$	$t+e$
10	$x+2t$	$e^{-x}(1-x)$	$\cos t$	$\sin t$
11	xt	$\ln(1+x)$	$\sin t$	$\ln 2+t$
12	$x\sin t$	$1+\ln(1+x)$	$\cos t$	$e^t+\ln 2$
13	$e^t x$	$x(1-x)$	$\sin t$	$1-\cos t$
14	te^x	x^2+1	$\cos t$	$1+\cos t$
15	$t+e^x$	$1-x^2$	$1+\sin t$	$1-\cos t$
16	$x+e^t$	$1-2x$	$\cos t$	$\sin t-1$
17	xt	x^2-1	$\sin t-1$	$1-\cos t$
18	$t+x$	x^2+1	e^t	$2e^t$
19	t^2+x	$x(1-x)$	$1-e^t$	$\sin t$
20	$t+x^2$	$x(1-x^2)$	$\sin t$	$1-\cos t$
21	$2t+x$	xe^x	$\sin t$	$e-\sin t$
22	$x+t$	$2x-1$	$-1+\sin t$	$\cos t$
23	xt^2	$1-2x$	$\cos t$	$\sin t-1$
24	$x+2t$	$e^{-x}x$	t	$e^{-1}\cos t$
25	$e^t x$	$\cos \pi x$	$1-t$	$-\cos t$

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

5. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.

6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.

3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967. 368 с.

Лабораторная работа № 19

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СЕТОК

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения уравнений гиперболического типа методом сеток.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебаний струны, которая заключается в отыскании функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

начальным условиям

$$u(x,0) = f(x);\ \ u_t(x,0) = \Phi(x)\ \ (0 \le x \le p) \qquad (2)$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \varphi(t);\ \ u(p,t) = \phi(t). \qquad (3)$$

Построим в полуполосе $t \ge 0,\ 0 \le x \le p$ два семейства параллельных прямых $x_i = ih\ \left(i = 0,1,\ldots,n;\ h = \dfrac{p}{n}\right);\ t_j = jl\ \ (j = 0,1,\ldots)$.

Заменяя во всех внутренних узлах сетки производные разностными отношениями, вместо уравнения (1) будем иметь

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

где $u_{ij} = u(x_i, t_j)$.

Обозначив $\alpha = \dfrac{l}{h}$, получим разностное уравнение

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 \left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right). \qquad (4)$$

Уравнение (4) аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O\left(h^2 + l^2\right)$.

Разностная схема (4) является явной, т.к. уравнение (4) позволяет найти значения функции $u(x,t)$ на слое $j+1$, если известны значения на двух предыдущих слоях j и $j-1$.

Доказано, что при $\alpha \le 1$ эта разностная схема устойчива.

При $\alpha = 1$ уравнение (4) имеет наиболее простой вид

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \qquad (5)$$

Краевые условия (3) используются для нахождения значений функции $u(x,t)$ в граничных узлах, лежащих на прямых $x=0$ и $x=p$:

$$u_{0j}=\varphi(t_j);\ u_{nj}=\phi(t_j);\ \ j=0,1,\ldots.$$

Чтобы найти приближенное решение задачи $(1)-(3)$, необходимо знать значения решения на двух начальных слоях. Их можно найти, например, заменив, в начальном условии (2) производную $u_t(x,0)$ разностным отношением

$$\frac{u_{i1}-u_{i0}}{l}=\Phi(x_i)=\Phi_i.$$

Тогда для определения значений $u(x,t)$ на слоях $j=0$ и $j=1$, получаем

$$u_{i0}=f(x_i)=f_i;\ u_{i1}=f_i+l\Phi_i.$$

При этом значения u_{i1} определяются с погрешностью $O(h)$.

Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную, то значения u_{i1} можно определить с помощью формулы Тейлора:

$$u_{i1}\approx u_{i0}+l\frac{\partial u_{i0}}{\partial t}+\frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}.$$

Используя уравнение (1) и начальные условия (2), можем записать

$$u_{i0}=f_i;\ \frac{\partial u_{i0}}{\partial t}=\Phi_i;\ \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial x^2}=f_i''.$$

Тогда будем иметь

$$u_{i1}\approx f_i+l\Phi_i+\frac{l^2}{2}f_i''.$$

Погрешность значений u_{i1}, полученных по этой формуле, имеет порядок $O(l^3)$.

III ЗАДАНИЕ

Методом сеток найти решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u(x,0)=kx(N-x)\sin\pi kx;\ u_t(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,$$

где k - последняя цифра в номере группы; N - номер фамилии студента в журнале группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.

2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

7. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. - М.: Наука, 1967. 368 с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1972. 368 с.

Лабораторная работа № 20

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения интегральных уравнений.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x,\xi,u(\xi))d\xi = F(x,u(x)),\ a \le x \le b. \qquad (1)$$

Введем в квадрате $(a \le x \le b,\ a \le \xi \le b)$ сетку x_n, ξ_m.

Заменим интеграл в уравнении (1) с помощью какой-либо квадратурной формулы типа

$$\int_a^b \Phi(\xi)d\xi \approx \sum_{m=1}^{N} c_m \Phi(\xi_m).$$

Получим систему нелинейных уравнений для определения приближенных значений y_n функции u в узлах типа x_n:

$$\sum_{m=1}^{N} c_m K(x_n, x_m, y_m) = F(x_n, y_n),\ 1 \le n \le N. \qquad (2)$$

Если интегральное уравнение является линейным, то приходим к линейной системе алгебраических уравнений.

Так неоднородное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x),\ a \le x \le b$$

приводит к линейной системе

$$y_n - \lambda \sum_{m=1}^{N} c_m K_{nm} y_m = f(x_n),\ n = 1,2,\ldots,N, \qquad (3)$$

где $K_{nm} = K(x_n, x_m)$.

Если определитель системы (3) отличен от нуля, то система (3) имеет единственное решение, которое можно найти каким-либо методом.

Для уравнения Вольтерра второго рода

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x),\ a \le x \le b$$

получаем систему с треугольной матрицей

$$y_n - \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m K_{nm} y_m = f(x_n), \; n = 1,2,\ldots,N.$$

III. ЗАДАНИЕ

Используя квадратурную формулу Симпсона, найти приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) + \int_0^1 (x+k) e^{x\xi} \sqrt{kx+N}\, d\xi = e^x, \; 0 \le x \le 1.$$

Здесь k - последняя цифра в номере группы; N - номер фамилии студента в журнале группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.

3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.

Лабораторная работа № 21

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ЯДРА НА ВЫРОЖДЕННОЕ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения интегральных уравнений.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) u(\xi) d\xi, \quad a \le x \le b. \qquad (1)$$

Ядро $K(x,\xi)$ называется вырожденным, если оно может быть представлено в виде конечной суммы

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) B_i(\xi), \qquad (2)$$

где функции $A_i(x)$ и $B_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ являются линейно независимыми.

Подставим ядро (2) в уравнение (1). Получим

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i A_i(x), \qquad (3)$$

где

$$c_i = \int_a^b B_i(\xi) u(\xi) d\xi \qquad \left(i = \overline{1,n}\right). \qquad (4)$$

Подставим в формулу (4) вместо $u(\xi)$ выражение (3). Будем иметь

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j = g_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

где $\alpha_{ij} = \int_a^b B_i(\xi) A_j(\xi) d\xi; \;\; g_i = \int_a^b B_i(\xi) f(\xi) d\xi.$

Линейную систему (5) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \lambda \alpha_{ij}\right) c_j = g_i, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

Если определитель системы (6) отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Решая систему (6), найдем коэффициенты c_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Подставляя найденные коэффициенты в выражение (3), получим строгое решение интегрального уравнения (1).

Когда ядро $K(x,\xi)$ не является вырожденным, то можно получить приближенное решение интегрального уравнения (1), если заменить $K(x,\xi)$ близким к нему вырожденным ядром

$$\tilde{K}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{n} A_m(x) B_m(\xi).$$

Существуют различные способы такой приближенной замены $K(x,\xi)$ на $\tilde{K}(x,\xi)$.

Например, в качестве вырожденного ядра $\tilde{K}(x,\xi)$ можно взять конечный отрезок ряда Тейлора, используя одну из следующих формул:

$$\tilde{K}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} K^{(m)}(x_0,\xi)(x - x_0)^m;$$

$$\tilde{K}(x,\xi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} K^{(m)}(x,\xi_0)(\xi - \xi_0)^m;$$

$$\tilde{K}(x,\xi) = \sum \sum \frac{1}{p!\,q!} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial \xi^q} K(x_0,\xi_0)(x - x_0)^p (\xi - \xi_0)^q,$$

$$x_0, \xi_0 \in [a,b].$$

При этом предполагается существование соответствующих непрерывных производных функции $K(x,\xi)$.

Непрерывное ядро $K(x,\xi)$ можно аппроксимировать ядром $\tilde{K}(x,\xi)$, представляющим тригонометрический полином, с помощью конечного ряда Фурье. Кроме того, можно использовать интерполяционные полиномы, а также другие приемы замены ядра $K(x,\xi)$ вырожденным ядром $\tilde{K}(x,\xi)$.

III. ЗАДАНИЕ

Методом замены ядра на вырожденное найти приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_0^1 (k + \xi)\left(e^{\frac{x\xi}{N}} - N\right) u(\xi)\, d\xi = \sqrt{x}, \;\; 0 \le x \le 1.$$

Здесь k - последняя цифра в номере группы; N - номер фамилии студента в журнале группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.

3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. - М.: Наука, 1966. 632 с.

Лабораторная работа № 22

РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений.

$$Ax = b, \qquad (1)$$

где A — квадратная матрица размерностью $n \times n$; b —вектор свободных членов;

x — искомый вектор $(b \in R^n; x \in R^n)$.

Если $\det A \approx 0$, то система (1) называется плохо обусловленной. В этом случае погрешности коэффициентов матрицы и правых частей или погрешности округления при расчетах могут сильно исказить решение.

При решении многих задач правая часть системы (1) и коэффициенты матрицы A известны приближенно. При этом вместо точной системы (1) имеем некоторую другую систему

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \qquad (2)$$

такую, что

$$\|\tilde{A} - A\| \le h; \quad \|\tilde{b} - b\| \le \delta \qquad (3)$$

Полагаем, что величины h и δ известны.

Так как вместо системы (1) имеем систему (2), то можем найти лишь приближенное решение системы (1). Метод построения приближенного решения системы (1) должен быть устойчивым к малым изменениям исходных данных.

Псевдорешением системы (1) называется вектор $\bar{x}$, минимизирующий невязку $\|Ax - b\|$ на всем пространстве R^n.

Пусть x^1 –некоторый фиксированный вектор из R^n, определяемый обычно постановкой задачи.

Нормальным относительно вектора x^1 решением системы (1) называется псевдорешение x^0 с минимальной нормой $\|x - x^1\|$, то есть

$$\|x^0 - x^1\| = \inf_{x \in F} \|x - x^1\|,$$

где F—совокупность всех псевдорешений системы (1).

Причем $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$—компоненты вектора x.

Для любой системы вида (1) нормальное решение существует и единственно. Задача нахождения нормального решения плохо обусловленной системы (1) является некорректно поставленной.

Для нахождения приближенного нормального решения системы (1) воспользуемся методом регуляризации.

Согласно указанному методу построим сглаживающий функционал вида

$$M^{\alpha}\left[x, \tilde{b}, \tilde{A}\right] = \left\|\tilde{A}x - \tilde{b}\right\|^2 + \alpha\left\|x - x^1\right\| \qquad (4)$$

и найдем вектор x^{α}, минимизирующий на R^n этот функционал. Причем параметр регуляризации α однозначно определен из условия

$$\left\|\tilde{A}x^{\alpha} - \tilde{b}\right\| = 2\left(h\left\|x^{\alpha}\right\| + \delta\right) + \tilde{\mu}, \qquad (5)$$

где $\tilde{\mu} = \inf\limits_{x \in R^n}\left\|\tilde{A}x - \tilde{b}\right\|$.

Вырожденные и плохо обусловленные системы могут быть неразличимы в рамках заданной точности. Но если имеется информация о разрешимости системы (1), то вместо условия (5) следует использовать следующее условие:

$$\left\|\tilde{A}x^{\alpha} - \tilde{b}\right\| = h\left\|x^{\alpha}\right\| + \delta \qquad (6)$$

Компоненты $x_j^{\alpha}\left(j = 1,2,\ldots,n\right)$ вектора x^{α} являются решениями системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из условия минимума функционала (4)

$$\frac{\partial M^{\alpha}}{\partial x_j^{\alpha}} = 0, \ \ j = 0,1,2,\ldots,n$$

и имеет вид

$$\left(\tilde{A}^H\tilde{A} + \alpha E\right)x^{\alpha} = \tilde{A}^H\tilde{b} + \alpha x^1, \qquad (7)$$

где E—единичная матрица,

$\tilde{A}^H$—эрмитово сопряженная матрица.

На практике для выбора вектора x^1 нужны дополнительные соображения. Если их нет, то полагают x^1=0.

Для x^1=0 систему (7) запишем в виде

$$\alpha x_i^{\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j^1 = \bar{b}_i, \ \ i = 1,2,\ldots,n, \qquad (8)$$

где $\bar{a}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$; $\bar{b}_i = \sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_k$.

Найденный вектор x^{α} будет являться приближенным нормальным решением системы (1).

Остановимся на выборе параметра α. Если α=0, то система (7) переходит в плохо обусловленную систему. Если α велико, то система (7) будет хорошо обусловлена, но регуляризованное решение не будет близким к искомому решению системы (1). Поэтому слишком большое или слишком малое α не пригодны.

Обычно на практике проводят расчеты с рядом значений параметра α. Например, $\alpha = 10^{-1};\ 0{,}5 \cdot 10^{-1};\ 0{,}5 \cdot 10^{-2};\ 10^{-3} \ldots$

Для каждого значения α находят элемент x^{α}, минимизирующий функционал (4). В качестве искомого значения параметра регуляризации берется такое число α, для которого с требуемой точностью выполняется равенство (5) или (6).

III. ЗАДАНИЕ

1. Построить систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными, с определителем, величина которого имеет порядок 10^{-6}.
2. Построить вторую систему, аналогичную первой, но имеющую другие свободные члены, отличающиеся от свободных членов первой системы на величину 0,00006.
3. Решить построенные системы методом регуляризации (полагая $h=0$ и $\delta=10^{-4}$) и каким-либо другим методом (например, методом Гаусса).
4. Сравнить полученные результаты и сделать выводы о применимости использованных методов.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 286 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

Лабораторная работа № 23

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения интегральных уравнений первого рода

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задачи для интегральных уравнений первого рода являются некорректно поставленными.

Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \qquad c \le x \le d, \tag{1}$$

где ядро $K(x,s)$ является непрерывной функцией по переменным x,s; $f(x)$ - известная функция; $u(s)$ - искомая функция.

Будем полагать, что уравнение (1) с точной правой частью $f(x)$ имеет единственное решение.

Если вместо $f(x)$ известно лишь ее приближение $f_\delta(x)$, мало отличающееся (в метрике L_2) от $f(x)$, то можем искать лишь приближенное решение уравнения (1). В качестве приближенного решения уравнения (1) нельзя брать точное решение уравнения

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f_\delta(x). \tag{2}$$

так как такого решения может не существовать. Кроме того, такое решение не обладает свойством устойчивости к малым изменениям правой части уравнения.

Будем искать решение уравнения (2) методом регуляризации. Согласно методу построим сглаживающий функционал $M^\alpha[u, f_\delta]$, выбрав стабилизатор первого порядка $\Omega[u]$:

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \rho^2_{L_2}(Au, f_\delta) + \alpha\Omega[u], \tag{3}$$

где α - параметр регуляризации;

$$\Omega[u] = \int_a^b [q(s)u^2(s) + p(s)\left(\frac{du}{ds}\right)^2]ds;$$

$$Au = \int_a^b K(x,s)u(s)ds;$$

$$\rho_{L_2}(Au, f_\delta) = \left\{\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)u(s)ds - f_\delta(x)\right]^2 dx\right\}^{1/2};$$

$q(s), p(s)$ - заданные неотрицательные непрерывные функции (если нет специальных соображений по выбору функций $q(s), p(s)$, то обычно полагают $q(s) = p(s) \equiv 1$). Затем найдем функцию $u_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3), причем параметр α определим по невязке, т.е. из условия

$$\rho_{L_2}(Au, f_\delta) = \delta, \tag{4}$$

где δ - уклонение правой части интегрального уравнения в метрике пространства L_2, которое считаем известным:

$$\left\{ \int_c^d [\, f_\delta(x) - f(x)] dx \right\}^{1/2} \le \delta$$

Решение $u_\alpha(s)$ будет устойчиво к малым изменениям в метрике L_2 правой части уравнения $f_\delta(x)$.

Функция $u_\alpha(s)$ будет являться приближенным решением уравнения (1).

Для нахождения параметра регуляризации будем проводить расчеты с несколькими значениями параметра α
(например, $\alpha = 10^{-1}; 0{,}5 \cdot 10^{-1}; 10^{-2}; 0{,}5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}, \ldots$).

Для каждого значения α находим функцию $u_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3).

В качестве искомого значения параметра регуляризации возьмем такое число α, для которого с требуемой точностью выполняется условие (4), т.е. невязка, полученная при подстановке найденной функции $u_\alpha(s)$ в уравнение (2), должна быть сравнима с погрешностью правой части интегрального уравнения.

Обратимся теперь к вариационной задаче

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \min.$$

Полагая $q(s) = p(s) \equiv 1$, получим

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)u(s)ds - f_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b [u^2(s) + \left(\frac{du}{ds} \right)^2] ds = \min. \tag{5}$$

Проведем дискретизацию сглаживающего функционала, воспользовавшись разностным методом.

Аппроксимируем входящие в функционал $M^\alpha[u, f_\delta]$ интегралы квадратурными формулами. Для этого введем на прямоугольнике $\{a \le s \le b, c \le x \le d\}$ сетку $\{x_n, s_m\}$ $(n = 0,1,\ldots,N; m = 0,1,\ldots,M)$, так, что

$$x_0 = c, x_N = d, s_0 = a, s_M = b.$$

Для простоты рассмотрим равномерную сетку $x_n = c + nh_x; s_m = a + mh_s$
где

$$h_x = \frac{d-c}{N}; h_s = \frac{b-a}{M}.$$

Вычислим $\int_a^b \left(\frac{du}{ds} \right)^2 ds$ по формуле средних, заменяя производную разностным отношением

$$\int_{s_m}^{s_{m+1}} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds \approx h_s \left(\frac{du}{ds}\right)_{m+1/2} \approx h_s \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h_s}\right)^2,$$

где $u_m = u(s_m)$.

Таким образом,

$$\int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds \approx \frac{1}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (u_{m+1} - u_m)^2. \qquad (6)$$

Остальные интегралы вычислим по формуле трапеций

$$\int_a^b u^2(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m u_m^2, \qquad (7)$$

где

$$c_0 = c_M = \frac{1}{2}; c_1 = c_2 = \ldots = c_{M-1} = 1.$$

$$\int_a^b K(x_n, s) u(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} u_m,$$

где $K_{nm} = K(x_n, s_m)$.

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)u(s)ds - f_\delta(x)\right]^2 dx \approx h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} u_m - f_\delta(x_n)\right]^2, \qquad (8)$$

где

$$b_0 = b_N = \frac{1}{2}; b_1 = b_2 = \ldots = b_{N-1} = 1.$$

Подставляя выражения (6) - (8) в (5), получим

$$h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} u_m - f_\delta(x_n)\right]^2 + \alpha h_s \sum_{m=0}^{M} c_m u_m^2 + \frac{\alpha}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (u_{m+1} - u_m)^2 = \min. \quad (9)$$

Для решения задачи (9) приравняем к нулю производные от левой части (9) по u_m $(m = 0,1,\ldots,M)$. Получим систему уравнений, линейных относительно u_m:

$$\alpha u_m - \frac{\alpha}{c_m} T(u_m^\alpha) + h_s \sum_{k=1}^{M} c_k Q_{mk} u_k^\alpha = \Phi_m, \quad m = 0,1,\ldots,M, \qquad (10)$$

где

$$T(u_m^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(u_{m-1}^\alpha - 2u_m^\alpha + u_{m+1}^\alpha), \quad m = 1,2,\ldots,M-1;$$

$$T(u_0^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(u_1^\alpha - u_0^\alpha);$$

$$T(u_M^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(u_{M-1}^\alpha - u_M^\alpha);$$

$$Q_{mk} = h_x \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} K_{nk};$$

$$\Phi_m = h_x \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} f_\delta(x_n).$$

Систему (10) решим каким-либо методом, например, методом Гаусса.

Параметр α следует подобрать способом, указанным выше. Заметим, что условие (4) в результате дискретизации запишем в виде:

$$\left\{ h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} u_m^{\alpha} - f_{\delta}(x_n) \right]^2 \right\}^{1/2} = \delta.$$

III. ЗАДАНИЕ

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 (k+s)(e^{\frac{xs}{N}} + N) z(s) ds = x^2, \quad 0 \le x \le 1,$$

полагая $\delta = 0,001.$

Здесь k - последняя цифра в номере группы; N - номер фамилии студента в журнале группы.

IV. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 286 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2007 636с.

3. Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.: Наука, 1978. 512 с.