

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

**Методические указания для проведения практических занятий  
по дисциплине**

**"Физика"**

Для направлений подготовки:

*09.03.01 Информатика и вычислительная техника*

*09.03.02 Информационные системы и технологии*

*09.03.03 Прикладная информатика*

*10.03.01 Информационная безопасность*

*10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем*

Форма обучения *очная*

Тула - 2020

Методические указания для проведения практических занятий подготовлены проф. Ю.Н. Колмаковым, обсуждены на заседании кафедры физики естественно-научного института  
протокол № 1 от « 30 » августа 2019 г.

Зав. кафедрой физики \_\_\_\_\_ Р.Н. Ростовцев

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	стр.4
---------------	-------

## Семестр 2.

1. Кинематика поступательного движения.....	6
2. Кинематика криволинейного поступательного и вращательного движения.....	8
3. Динамика поступательного и вращательного движения.....	11
4. Закон сохранения импульса.....	13
5. Закон сохранения момента импульса.....	14
6. Закон сохранения механической энергии.....	16
7. Незатухающие механические колебания. Сложение колебаний.....	19
8. Физический маятник.....	21
9. Собственные механические затухающие колебания.....	23
10. Вынужденные механические колебания. Резонанс.....	24
11. Первое начало термодинамики. Работа идеального газа.....	26
12. Теплоёмкость термодинамических процессов.....	28
13. Изменение энтропии термодинамической системы.....	29
14. КПД циклических процессов в термодинамике.....	31
15. Распределение Максвелла.....	33
16. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.....	35
17. Частота соударений и средняя длина свободного пробега молекул газа.....	37
18. Явления переноса (теплопроводность).....	39

## Семестр 3.

19. Расчет электростатических полей точечных зарядов.....	41
20. Расчет электростатических полей распределенных зарядов.....	42
21. Использование теоремы Гаусса для расчета электрических полей.....	44
22. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы.....	46
23. Законы квазистационарного тока.....	49
24. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа.....	51
25. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами.....	54
26. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции.....	56
27. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.....	58
28. Явления электромагнитной индукции и самоиндукции.....	61
29. Собственные электрические колебания.....	63
30. Вынужденные электрические колебания.....	65

## Семестр 4.

31. Условия интерференции. Интерференционная схема Юнга.....	67
32. Интерференция в тонких пленках.....	69
33. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка.....	71
34. Дифракция на круглом отверстии и на узкой щели.....	73
35. Поляризованный свет.....	76
36. Законы теплового излучения.....	78
37. Фотоэффект. Эффект Комптона.....	79
38. Волна де Бройля. Постулат Бора и боровские орбиты.....	81
39. Спектральные серии излучения одноэлектронного атома.....	83
40. Вероятностный смысл и нормировка волновой функции.....	85
41. Стационарное уравнение Шредингера.....	87
42. Микрочастица в одномерной потенциальной яме.....	89
43. Формулы квантования. Заполнение электронных оболочек.....	92
44. Закон радиоактивного распада. Энергетический выход реакции распада атомного ядра.....	94
45. Распределение Ферми-Дирака и функция Ферми. Свойства электронного газа при нулевой и ненулевой температуре.....	96
46. Проводимость полупроводника. Свойства полупроводникового p-n-перехода.....	99

## ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с рабочей программой в течение каждого семестра обучения студент должен выполнить две контрольные работы, включающие 5-6 задач в каждой работе по общим для разных направлений подготовки темам. Образцы решения таких задач, рекомендуемые для проведения практических занятий по физике, приводятся ниже. Выбор тем практических занятий и разделов задач контрольных работ соответствует конкретной рабочей программе направления (специальности) подготовки.

Для самостоятельной подготовки к контрольным работам примеры практических задач приведены в пособиях:

--- Колмаков Ю. Н., Кажарская С.Е., Якунова Е.В. Механика. Молекулярная физика: руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебн. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2020.— 222 с. — ISBN 978–5–7679–4250–3.

--- Колмаков Ю. Н., Кажарская С.Е. Физика. Электромагнетизм: руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебн. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2017.— 156 с. — ISBN 978–5–7679–33915–2.

--- Колмаков Ю. Н., Кажарская С.Е., Якунова Е.В. Оптика. Основы квантовой физики: руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебн. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2019.— 208 с. — ISBN 978–5–7679–4250–3.

Примеры задач и их решений, рекомендуемые для проведения практических занятий и самостоятельной подготовки студентов можно также найти на сайте кафедры физики ТулГУ <http://physics.tsu.tula.ru/>.

Примерное содержание тем практических занятий в соответствии с рабочими программами приведено в следующей таблице:

Семестр 2	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Кинематика поступательного движения. Кинематика криволинейного поступательного движения. Кинематика вращательного движения. Связь кинематических характеристик поступательного и вращательного движения
2	Законы динамики. Динамика поступательного и вращательного движений. Применение законов сохранения импульса и момента импульса.
3	Применение законов сохранения момента импульса и полной механической энергии.
4	Гармонические колебания и их сложение. Физический маятник. Собственные затухающие колебания и вынужденные колебания в механике.
5	Методы решения термодинамических задач. Использование уравнения состояния системы, уравнений термодинамических процессов и первого начала термодинамики в применении к расчету процессов в идеальном газе. Вычисление работы газа.
6	Вычисление теплоемкости термодинамических процессов. Вычисление изменения энтропии термодинамической системы. Второе начало термодинамики.
7	Циклические процессы и вычисление к.п.д. тепловых машин. Цикл Карно. Функция распределения Максвелла молекул газа по величинам скоростей и её применение к расчету средних величин. Функция распределения Больцмана и барометрическая формула.
8	Частота столкновения молекул газа со стенкой. Средняя длина свободного пробега молекул газа. Явления переноса (теплопроводность).

Семестр 3	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Принцип суперпозиции и расчет электростатического поля для системы точечных зарядов и для заряда, распределенного непрерывно. Вычисление напряженности и потенциала электростатического поля.
2	Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей. Связь напряженности и потенциала. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Энергия системы заряженных частиц и электрического поля. Емкость и энергия заряженных конденсаторов.
3	Законы постоянного тока. Вычисление электрического заряда, протекающего по цепи и выделяющегося в электрической цепи джоулевого тепла. Закон Джоуля-Ленца. Квазистационарные токи (задачи с электрическими цепями, содержащими конденсатор).
4	Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Использование закона Ома в локальной форме.
5	Расчет магнитных полей с помощью закона Био-Савара и с помощью теоремы о циркуляции.
6	Силы Лоренца и Ампера. Движение заряженной частицы в стационарных электрическом и магнитном полях. Силы, действующие на электрический и магнитный диполь (контур с током).
7	Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Вычисление индуктивности. Энергия магнитного поля.
8	Собственные электрические колебания в цепях. Электрический колебательный контур и его параметры. Вынужденные электрические колебания.

Семестр 4	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Интерференция световых (электромагнитных) волн. Интерференционные схемы. Интерференция в тонких плёнках.
2	Многолучевая интерференция (дифракционная решетка). Разрешающая способность дифракционной решетки. Дифракция света (электромагнитных волн) на узкой щели. Дифракция света (электромагнитных волн) на круглом препятствии.
3	Законы теплового излучения. Использование закона Стефана-Больцмана и закона смещения Вина для теплового излучения абсолютно черного тела. Коэффициент поглощения.
4	Явление фотоэффекта. Применение уравнения Эйнштейна для фотоэффекта. Красная граница фотоэффекта. Эффект Комптона.
5	Волны де Бройля. Квантовые постулаты Бора и боровская модель одноэлектронного атома. Спектральные серии излучения одноэлектронного атома.
6	Волновая функция квантовой микросистемы и её свойства. Квантовый принцип суперпозиции и плотность вероятности обнаружения частицы. Использование стационарного уравнения Шредингера для расчета характеристик квантовых систем. Частица в одномерной потенциальной яме. Спектр разрешенных значений энергий и излучение микросистем. Квантовый гармонический осциллятор и спектр его энергий.
7	Принцип Паули. Система четырех квантовых чисел. Заполнение электронных оболочек и подоболочек в многоэлектронных атомах. Квантование орбитального и собственного момента импульса и магнитного момента электрона (атома). Радиоактивность и закон радиоактивного распада. Закон радиоактивного распада ядер. Энергетический выход реакции радиоактивного распада.
8	Распределение Ферми-Дирака и функция Ферми. Свойства электронного газа при нулевой и ненулевой температуре. Проводимость полупроводника и p-n-переход.

## Семестр 2

### 1. Кинематика поступательного движения

При поступательном движении все точки физического тела движутся одинаково. Описать такое движение можно задавая зависимость от времени радиус-вектора любой из точек, например – центра масс  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Конец такого вектора, проведенного из начала координат, описывает траекторию данной точки или частицы, совершающей поступательное движение (рис.1.1).

Положение точки (частицы) в любой момент времени можно задать ее координатами  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , зависящими от времени. Они являются проекциями радиус-вектора

на оси координат:  $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$ , где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы, или орты декартовой системы координат.

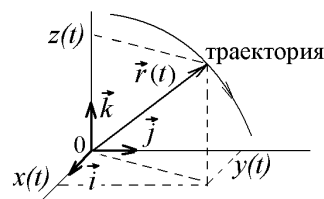


Рис.1.1

При этом скорость и ускорение точки также являются векторными величинами:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ .



Движение точки в пространстве удобно рассматривать как сумму независимых движений вдоль координатных осей. Тогда проекции скорости и ускорения вычисляются как производные от скалярных функций:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}; a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Величинами (модулями) скорости и ускорения будут  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ ,  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

Наоборот, зная временную зависимость проекций скорости и ускорения, можно с помощью интегралов вычислить

координаты точки:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt, v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y dt, v_z(t) = v_{0z} + \int_0^t a_z dt,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt, y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) dt, z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t) dt.$$



При решении всех задач контрольных работ необходимо знать выражения производных и интегралов от самых простых функций времени, которые приведены в следующей таблице, где  $A$ ,  $B$ ,  $n$  – постоянные величины:

Производная	Интеграл
$\frac{d}{dt}(At^n) = An t^{n-1}$	$\int_0^{\tau} At^n dt = A \frac{\tau^{n+1}}{n+1}, \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{A}{t} dt = A \ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)$
$\frac{d}{dt}(A \sin(Bt)) = AB \cos(Bt)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A \sin(Bt) dt = -A \frac{\cos(B\tau_2) - \cos(B\tau_1)}{B}$
$\frac{d}{dt}(A \cos(Bt)) = -AB \sin(Bt)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A \cos(Bt) dt = A \frac{\sin(B\tau_2) - \sin(B\tau_1)}{B}$
$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A \exp(Bt) dt = A \frac{\exp(B\tau_2) - \exp(B\tau_1)}{B}$

Примеры решения задач:

**1.1.** Материальная точка движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону  $\vec{r} = At^3\vec{i} + (Bt^2 - Ct^3)\vec{j}$ , где  $A = 1 \text{ м/с}^3$ ,  $B = 3 \text{ м/с}^2$ ,  $C = 2 \text{ м/с}^3$ . Определить ускорение точки в момент  $t = 0,5 \text{ с}$ .

Решение.

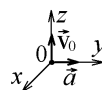
В данной задаче  $x(t) = At^3$ ,  $y(t) = Bt^2 - Ct^3$ ,  $z(t) = 0$ . Ненулевые проекции скорости точки определены производными  $v_x = dx/dt = 3At^2$ ,  $v_y = dy/dt = 2Bt - 3Ct^2$ , а проекции её ускорения находим, вычисляя производные по  $t$  ещё раз:

$$a_x = dv_x/dt = 6At, a_y = dv_y/dt = 2B - 6Ct. \text{ Величина ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6At)^2 + (2B - 6Ct)^2} = 3 \text{ м/с}^2.$$

**1.2.** В начальный момент  $t_0 = 0$  материальная точка находилась в точке начала координат и двигалась со скоростью  $v_0 = 4 \text{ м/с}$  вдоль оси  $z$ . Ускорение точки все время направлено вдоль оси  $y$  и возрастает со временем  $t$  по закону  $a = kt^4$ , где  $k = 1 \text{ м/с}^6$ . Найти величину скорости данной точки в момент времени  $t = 2 \text{ с}$ .

Решение.

В этой задаче заданы проекции ускорения и начальной скорости точки:  $a_x = a_z = 0$ ,  $a_y = kt^4$ ;  $v_{0x} = v_{0y} = 0$ ,  $v_{0z} = v_0$ . Проекции скорости в любой момент времени  $t$  находим с помощью интегралов:



$$v_x(t) = 0, \quad v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y dt = k \int_0^t t^4 dt = \frac{kt^5}{5}, \quad v_z(t) = v_{0z} + \int_0^t a_z dt = v_0.$$

Величина (модуль) скорости  $v = \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(kt^5/5)^2 + v_0^2} = 7,547 \text{ м/с}$ .

**1.3.** Начальная скорость точки  $\vec{v}_0 = A\vec{i} - B\vec{j}$ , где  $A = 4 \text{ м/с}$ ,  $B = 2 \text{ м/с}$ . Ускорение точки зависит от времени по закону  $\vec{a} = Ct\vec{i} + Dt^2\vec{j}$ , где  $C = 2 \text{ м/с}^3$ ,  $D = 6 \text{ м/с}^4$ . На каком расстоянии от начала координат  $O$  окажется точка в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ , если в начальный момент  $t_0 = 0$  она находилась в точке  $O$ ? Определить также тангенс угла наклона вектора скорости точки к оси  $y$  в момент времени  $t = 3 \text{ с}$ .

*Решение.*

Заданы проекции начальной скорости  $v_{0x} = A$ ,  $v_{0y} = -B$ ,  $v_{0z} = 0$  и ускорения точки  $a_x = Ct$ ,  $a_y = Dt^2$ ,  $a_z = 0$ . Движение происходит на плоскости  $xy$ . Необходимо сначала найти зависимость проекций скорости точки от времени:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt = A + C \int_0^t t dt = A + \frac{Ct^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y dt = -B + D \int_0^t t^2 dt = -B + \frac{Dt^3}{3}.$$



Внимательно следите за знаками подставляемых в интегралы проекций векторов. Ошибка в знаке приводит к неправильному направлению движения частицы.

Затем с помощью полученных функций вычисляем проекции координат движущейся точки, имевшей по условию нулевые начальные координаты  $x_0 = y_0 = 0$ . После подстановки числовых данных находим:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t) dt = \int_0^t \left( A + \frac{Ct^2}{2} \right) dt = At + \frac{Ct^3}{6} = 21 \text{ м}, \quad y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = \int_0^t \left( -B + \frac{Dt^3}{3} \right) dt = -Bt + \frac{Dt^4}{12} = 34,5 \text{ м}.$$

Расстоянием точки от начала координат  $O$  будет величина радиус-вектора (см. рис.1.2):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{21^2 + 34,5^2} = 40,4 \text{ м}.$$

При  $t = 3 \text{ с}$  найденные ранее проекции скорости частицы равны  $v_x(t) = A + Ct^2/2 = 13 \text{ м/с}$  и  $v_y(t) = -B + Dt^3/3 = 52 \text{ м/с}$ .

Как видно из рис.1.2, тангенс угла наклона вектора скорости к оси  $y$  в этот момент времени равен  $\tan \alpha = v_x/v_y = 0,25$ .

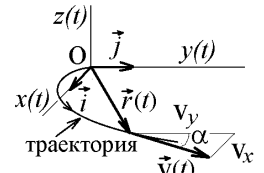


Рис.1.2

**1.4.** Материальная точка движется так, что её радиус-вектор меняется по закону  $\vec{r} = A \sin(bt)\vec{i} + A \cos(bt)\vec{j}$ , где  $A = 2 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ рад/с}$ . Определить путь, пройденный точкой за время  $t = 2 \text{ с}$ .

*Решение.*

Путь  $s(t) = \int_0^t v(t) dt$  будет длиной траектории, вдоль которой точка движется со скоростью  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Согласно условию задачи,  $v_x = \frac{dx}{dt} = A \frac{d \sin(bt)}{dt} = Ab \cos(bt)$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = A \frac{d \cos(bt)}{dt} = -Ab \sin(bt)$ . При этом величина скорости точки оказывается постоянной, не зависящей от времени:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = Ab \sqrt{\cos^2(bt) + \sin^2(bt)} = Ab$ .

Пройденный за время  $t = 2 \text{ с}$  путь равен  $s(t) = Ab \int_0^t dt = Abt = 12 \text{ м}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**1.5.** Точка движется по оси  $x$  так, что её координата меняется со временем по закону  $x = A \sin(2\pi t/T)$ , где  $T = 6 \text{ с}$ ,  $A = 0,3 \text{ м}$ . Определить минимальное время, через которое ускорение точки достигнет максимального значения.

*Ответ:* 1,5 с

**1.6.** Материальная точка движется так, что её координата зависит от времени по закону  $x = At^4 - Bt^5$ , где  $A = 5 \text{ м/с}^4$ ,  $B = 2 \text{ м/с}^5$ . Определить координату точки, в которой изменится направление движения. *Ответ:* 16 м

**1.7.** Материальная точка движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону  $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt^3\vec{j}$ , где  $A = 4 \text{ м/с}^2$ ,  $B = 2 \text{ м/с}^3$ . В какой момент времени  $t$  скорость точки будет направлена под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси  $x$ ?

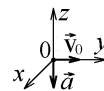
*Ответ:* 1,33 с

**1.8.** Начальная скорость точки  $\vec{v}_0 = A\vec{i} - B\vec{j}$ , где  $A = 4 \text{ м/с}$ ,  $B = 2 \text{ м/с}$ . Ускорение точки зависит от времени по закону  $\vec{a} = Ct\vec{i} + Dt^2\vec{j}$ , где  $C = 2 \text{ м/с}^3$ ,  $D = 6 \text{ м/с}^4$ . Определить величину скорости точки в момент  $t = 2 \text{ с}$ .

*Ответ:* 16,1 м/с

**1.9.** В начальный момент  $t_0 = 0$  материальная точка находилась в точке 0 начала координат и двигалась со скоростью  $v_0 = 3$  м/с вдоль оси  $y$ . Ускорение точки все время направлено против оси  $z$  и возрастает со временем  $t$  по закону  $a = kt^2$ , где  $k = 3$  м/с<sup>4</sup>. Найти расстояние от данной точки до начала координат 0 в момент  $t = 2$  с.

Ответ:  $r = 7,21$  м



**1.10.** Начальная скорость точки  $\vec{v}_0 = A\vec{i} - B\vec{j}$ , где  $A = 4$  м/с,  $B = 2$  м/с. Ускорение точки зависит от времени по закону  $\vec{a} = C\vec{i} + Dt^2\vec{j}$ , где  $C = 2$  м/с<sup>3</sup>,  $D = 6$  м/с<sup>4</sup>. В какой момент времени  $t$  скорость будет направлена перпендикулярно оси  $y$ ?

Ответ: 1 с

**1.11.** Точка движется по оси  $x$  так, что её координата меняется со временем по закону  $x = A \exp(bt)$ , где  $A = 2$  м,  $b = 0,5$  с<sup>-1</sup>. Через некоторое время координата точки становится равной  $x = 14,8$  м. Определить величину ускорения точки в этот момент.

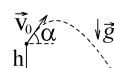
Ответ: 3,7 м/с<sup>2</sup>

**1.12.** Точка движется так, что её радиус-вектор меняется по закону  $\vec{r} = A \sin(bt)\vec{i} + A \cos(bt)\vec{j}$ , где  $A = 2$  м,  $b = 3,14$  рад/с. Найти длину радиус-вектора точки в момент, когда направление её скорости будет перпендикулярно оси  $x$ .

Ответ: 2 м

**1.13.** Тело малых размеров брошено с башни высотой  $h = 25$  м под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту со скоростью  $v_0 = 40$  м/с. На каком расстоянии от основания башни тело упадёт на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ: 173,2 м



## 2. Кинематика криволинейного поступательного и вращательного движения

При движении точки (физического тела) по кривой траектории удобнее использовать не декартову систему координат  $x, y, z$ , а вводить единичные векторы  $\vec{\tau}$  (по касательной к траектории) и  $\vec{n}$  (перпендикулярно траектории, рис.1.3).

Вектор скорости  $\vec{v}$  всегда направлен по касательной к траектории:  $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ , а вектор полного ускорения точки  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$  будет суммой двух перпендикулярных составляющих: тангенциального у-

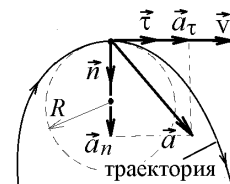


Рис.1.3

скорения  $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$  и нормального ускорения  $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$ . Здесь  $R$  – радиус кривизны траектории (радиус окружности, которую можно вписать в кривую линию траектории, рис.1.3). Величина полного ускорения точки  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ .

*Примеры решения задач:*

**2.1.** Маленькое тело брошено горизонтально со скоростью  $v_0 = 15$  м/с с высоты  $H = 100$  м. Определить отношение величин тангенциального и нормального ускорений тела через  $t = 3$  с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



*Решение.*

Если тело брошено с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту (рис.1.4), то его полное ускорение постоянно и равно ускорению свободного падения  $g$ . Угол  $\varphi$  между вектором скорости  $\vec{v}$  и горизонтальной осью  $x$  во время полёта уменьшается и, как видно из рис.1.4, определяется соотношением  $\cos \varphi = v_x/v$  или  $\sin \varphi = v_y/v$ . При этом  $a_\tau = g \sin \varphi = g v_y/v$ ,  $a_n = g \cos \varphi = g v_x/v$ .

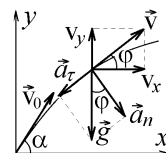


Рис.1.4

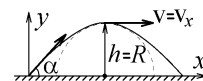
Эти формулы справедливы как при подъёме, так и при падении тела, когда проекция  $v_y$  меняет знак. Искомое отношение  $\frac{a_\tau}{a_n} = \tan \varphi = \left| \frac{v_y}{v_x} \right| = \left| \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha} \right| = \frac{gt}{v_0} = 2$ , так как по условию  $\alpha = 0$ .

**2.2.** Под каким углом  $\alpha$  к горизонту надо бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы центр кривизны в верхней точке траектории находился на этой поверхности?

Выражение для радиуса кривизны траектории  $R$  всегда можно определить с помощью формулы для нормального ускорения  $a_n = v^2/R$ .



*Решение.*



Как показано в решении задачи 2.1,  $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{g v_x}{v}$ , откуда  $R = \frac{v^3}{g v_x}$ . В верхней точке траектории вертикальная проекция скорости становится равной нулю,  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0$ . В этот момент  $t = v_0 \sin \alpha / g$  в верхней точке траектории  $v = v_x = v_0 \cos \alpha$ , и радиус кривизны траектории становится равным  $R = (v_0 \cos \alpha)^2 / g$ .

По условию он равен максимальной высоте подъёма  $h = v_0 \sin \alpha t - gt^2/2 = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g$ . Из равенства  $R = h$  найдем  $\sin^2 \alpha / \cos^2 \alpha = \tan^2 \alpha = 2$ , откуда  $\alpha = \arctg \sqrt{2} = 54,7^\circ$ .

\*\*\*\*\*



При вращении точки по окружности радиуса  $R$ , или при повороте тела радиуса  $R$  на угол  $\varphi$ , вращательное движение задается вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ , направленным вдоль оси вращения по правилу винта (рис.1.5). Ускоренное вращение характеризуется вектором углового ускорения  $\vec{\epsilon}$ . При этом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \epsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Интегрируя эти величины по времени, можно найти зависимость от времени угла поворо-



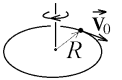
Рис.1.5

та: 
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t) dt, \quad \text{где} \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \epsilon(t) dt.$$

С помощью угловой скорости и углового ускорения можно определить величины линейной скорости точки и её тангенциального и нормального ускорений:  $v = \omega R$ ,  $a_\tau = \epsilon R$ ,  $a_n = \omega^2 R = v^2/R$ .

*Примеры решения задач:*

**2.3.** Точка равнозамедленно вращается по окружности радиуса  $R = 2$  м с постоянным угловым ускорением  $\epsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup>. В начальный момент  $t_0 = 0$  величина её скорости  $v_0 = 2$  м/с. Во сколько раз полное ускорение этой точки будет больше её нормального ускорения в момент времени  $t = 1$  с? Чему будет равен в этот момент угол между вектором скорости и вектором полного ускорения точки?



*Решение.*

В случае равнозамедленного вращения с постоянным угловым ускорением  $\omega = \omega_0 - \epsilon t$ , где  $\omega_0 = v_0/R$ . Величина тангенциального ускорения точки  $a_\tau = \epsilon R$ , нормальное ускорение  $a_n = \omega^2 R$ . Полное ускорение  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ . Отсюда

$$\frac{a}{a_n} = \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2}{a_n^2}} = \sqrt{1 + \epsilon^2 / \left( \frac{v_0}{R} - \epsilon t \right)^4} = 1,25.$$

Из рис.1.6,А видно, что при равноускоренном вращении угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$  будет расти с ростом  $\omega$ . При равнозамедленном вращении (рис.1.6,Б) в момент времени  $t = 1$  с вращение поменяет направление, но угол  $\varphi$  по-прежнему будет определяться соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2 R}{\epsilon R} = \frac{(v_0/R - \epsilon t)^2}{\epsilon} = \frac{4}{3}. \quad \text{Поэтому} \quad \varphi = \arctg(4/3) = 53,1^\circ.$$

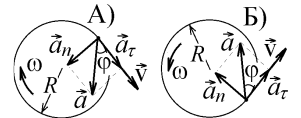


Рис.1.6

**2.4.** Частица вращается по окружности радиуса  $R = 2$  м так, что угол поворота изменяется со временем  $t$  по закону  $\varphi(t) = \alpha t^4 + \beta t^2 + \gamma t$ , где  $\alpha = 0,02$  рад/с<sup>4</sup>,  $\beta = 0,02$  рад/с<sup>2</sup>,  $\gamma = 0,02$  рад/с. Во сколько раз величина полного ускорения частицы превышает величину её нормального (центростремительного) ускорения в момент времени  $t = 2$  с?



*Решение.*

Угловая скорость и угловое ускорение вращения частицы определяются производными

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t^4 + \beta t^2 + \gamma t) = 4\alpha t^3 + 2\beta t + \gamma \quad \text{и} \quad \epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(4\alpha t^3 + 2\beta t + \gamma) = 12\alpha t^2 + 2\beta.$$

Подставляя числовые данные из условий задачи, находим их значения в момент времени  $t = 2$  с:  $\omega = 0,74$  рад/с,  $\epsilon = 1$  рад/с<sup>2</sup>.

Используя формулы для нормальной и тангенциальной проекции ускорения частицы  $a_n = \omega^2 R$  и  $a_\tau = \epsilon R$ , находим

$$\text{искомое отношение} \quad \frac{a}{a_n} = \frac{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}{a_n} = \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}{\omega^2} = 2,082.$$

**2.5.** В момент времени  $t_0 = 0$  диск радиуса  $R = 1$  м начинает так вращаться вокруг оси симметрии, что путь пройденный точкой на ободе диска, меняется со временем по закону  $s = A(1 - \exp(-bt^2))$ , где  $A = 2$  м,  $b = 0,5$  с<sup>-2</sup>. Найти максимальную величину угловой скорости этой точки в последующий момент времени.

*Решение.*

Пройденный точкой путь будет длиной дуги на ободе диска, которая равна  $s = R\varphi$ , где  $\varphi$  – угол поворота диска в радианах. Тогда угловая скорость диска  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{R} \frac{d}{dt}(1 - \exp(-bt^2)) = 2 \frac{A}{R} b t \exp(-bt^2)$ . Максимум функции определяется условием равенства нулю её первой производной:  $\frac{d\omega}{dt} = 2 \frac{A}{R} b \frac{d}{dt}(t \exp(-bt^2)) = 2 \frac{Ab}{R} (1 - t \cdot 2bt) \exp(-bt^2) = 0$ .

Максимум величины  $\omega$  достигается в момент времени  $t = 1/\sqrt{2b} = 1$  с. Подставляя это значение в найденную формулу для угловой скорости, получаем  $\omega_{\max} = \frac{A}{R} \sqrt{2b} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,21$  рад/с.

При  $t \rightarrow 0$  или  $t \rightarrow \infty$  эта формула приводит к результату  $\omega \rightarrow 0$ , т.е. найденное значение будет максимальным.

**2.6.** Первоначально покоившийся диск начал вращаться вокруг оси симметрии  $OO'$  так, что величина центростремительного ускорения точки на его ободе изменяется со временем  $t$  по закону  $a_n = kt^8$ , где  $k = 8$  м/с<sup>10</sup>. Найти радиус  $R$  диска, если в момент  $t = 1$  с тангенциальное ускорение этой точки  $a_\tau = 16$  м/с<sup>2</sup>. Найти также угол



поворота диска к этому моменту времени.

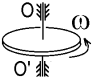
*Решение.*

Так как  $a_n = \omega^2 R = kt^8$ , то угловая скорость вращения диска меняется со временем по закону  $\omega = \sqrt{kt^8/R}$ . Тангенциальное ускорение  $a_t = \varepsilon R = R d\omega/dt = \sqrt{kR} \cdot dt^4/dt = 4\sqrt{kR} \cdot t^3$ . Отсюда  $R = a_t^2 / (16k\tau^6) = 2$  м.

Угол поворота диска определяется интегрированием его угловой скорости по времени:

$$\varphi = \int_0^\tau \omega(t) dt = \sqrt{\frac{k}{R}} \int_0^\tau t^4 dt = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{\tau^5}{5} = 0,4 \text{ рад}.$$

**2.7.** В начальный момент времени  $t_0 = 0$  диск вращался вокруг оси симметрии  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega_0 = 3$  рад/с. Затем его вращение замедляется, причем величина углового ускорения изменяется со временем  $t$  по закону  $\varepsilon = kt^3$ , где  $k=0,5$  рад/с<sup>5</sup>. На какой угол  $\Delta\varphi$  повернется диск к моменту времени  $\tau = 2$  с?



*Решение.*

Сначала определим зависимость от времени угловой скорости диска:  $\omega(t) = \omega_0 - \int_0^t \varepsilon(t) dt = \omega_0 - k \int_0^t t^3 dt = \omega_0 - kt^4/4$  (с учетом замедления вращения). Интегрируя это выражение по времени, находим угол поворота:

$$\Delta\varphi = \int_0^\tau \omega(t) dt = \int_0^\tau \omega_0 dt - (k/4) \int_0^\tau t^4 dt = \omega_0 \tau - k\tau^5/20 = 5,2 \text{ рад}.$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

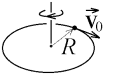
**2.8.** Под каким углом к горизонту надо бросить камень с ровной горизонтальной поверхности, чтобы радиус кривизны траектории в начальной точке траектории был в 8 раз больше, чем радиус кривизны в верхней точке траектории?

*Ответ:* 60°

**2.9.** Колесо радиуса  $R = 0,4$  м вращалось с угловой скоростью  $\omega_0 = 10$  рад/с. В момент  $t = 0$  на него начинает действовать тормозящий момент сил, и через некоторое время угловая скорость вращения уменьшается в 5 раз. Сколько оборотов сделает колесо за это время, если его угловое ускорение  $\varepsilon = 4$  рад/с<sup>2</sup>?

*Ответ:* 1,91

**2.10.** Частица вращается по окружности радиуса  $R = 2$  м равноускоренно с угловым ускорением  $\varepsilon = 3$  рад/с<sup>2</sup>. Найти величину начальной скорости  $v_0$  частицы в момент времени  $t_0 = 0$ , если момент  $t = 0,4$  с величина полного ускорения частицы больше величины её тангенциального ускорения в  $k = 1,25$  раз.



*Ответ:* 0,6 м/с

**2.11.** Колесо радиуса  $R = 20$  см начинает вращаться так, что угол его поворота зависит от времени по закону  $\varphi = At^3$ , где  $A = 18$  рад/с<sup>3</sup>. В какой момент времени угол между векторами скорости и полного ускорения точки на ободе колеса станет равным 45°?

*Ответ:* 0,333 с

**2.12.** Точка вращается по окружности радиуса  $R = 2$  м так, что угол поворота изменяется со временем  $t$  по закону  $\varphi(t) = \alpha t^4 - \beta t^3 + \gamma t^2$ , где  $\alpha = 0,1$  рад/с<sup>4</sup>,  $\beta = 0,1$  рад/с<sup>3</sup>,  $\gamma = 0,1$  рад/с<sup>2</sup>. Во сколько раз величина полного ускорения точки превышает величину её тангенциального ускорения в момент времени  $t = 2$  с?

*Ответ:* в 1,82 раз

**2.13.** Колесо радиуса  $R = 20$  см начинает вращаться так, что угол его поворота меняется со временем по закону  $\varphi = At^3 - Bt^2$ , где  $A = 0,5$  рад/с<sup>3</sup>,  $B = 2$  рад/с<sup>2</sup>. Найти величину полного ускорения точки на ободе колеса в тот момент, когда оно вернется в исходное положение.

*Ответ:* 12,9 м/с<sup>2</sup>

**2.14.** Точка вращается по окружности так, что угол поворота изменяется со временем  $t$  по закону  $\varphi(t) = A \cos \alpha t$ , где  $\alpha = \pi/4$  с<sup>-1</sup>,  $A = 2$  рад. Найти величину радиуса  $R$  окружности, если в момент времени  $t = 2$  с ускорение точки равно  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>.



*Ответ:*  $R = 1,216$  м

**2.15.** Первоначально покоившийся диск радиуса  $R = 1$  м начал вращаться вокруг оси симметрии  $OO'$  так, что величина тангенциального ускорения точки на его ободе изменяется со временем  $t$  по закону  $a_t = \beta t^4$ , где  $\beta = 5$  м/с<sup>6</sup>. Найти величину полного ускорения  $a$  этой точки в момент времени  $t = 1$  с.



*Ответ:*  $a = 5,10$  м/с<sup>2</sup>

**2.16.** В начальный момент  $t_0 = 0$  диск вращался вокруг оси симметрии  $OO'$  с угловой скоростью  $\omega_0 = 2$  рад/с. Затем его вращение ускоряется, причем величина углового ускорения растет со временем  $t$  по закону  $\varepsilon = \gamma t^2$ , где  $\gamma = 0,6$  рад/с<sup>4</sup>. Найти величину отношения  $a_n/a_t$  нормального и тангенциального ускорения точки на ободе диска в момент времени  $t = 2$  с.



*Ответ:*  $a_n/a_t = 5,4$

### 3. Динамика поступательного и вращательного движения

В задачах, в которых физическое тело вращается с угловым ускорением  $\varepsilon$  вокруг **закрепленной** оси  $C$ , можно записать только уравнение динамики вращательного движения  $I_C \varepsilon = \sum M_{\text{внеш}}$ , где  $I_C$  – момент инерции тела относительно этой оси,  $M_{\text{внеш}}$  – проекция момента внешней силы на эту ось. Для используемых в задачах симметричных тел, вращающихся вокруг оси, проходящей через их центр масс, моменты инерции приведены на следующем рисунке 1.7.

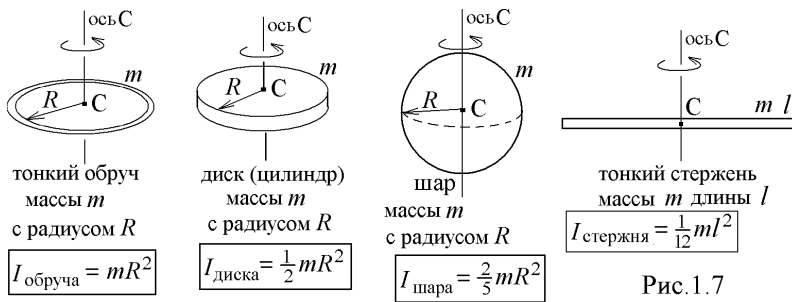


Рис. 1.7

Если ось вращения не закреплена и перемещается вместе с вращающимся телом, надо совместно решать систему уравнений динамики поступательного и вращательного движений:

$$\begin{cases} m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}; \\ I_C \varepsilon = \sum M_{\text{внеш}}. \end{cases}$$

Здесь  $\vec{a}_c$  – ускорение центра масс тела.

Например, на рис.1.8 показан цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$ , катящийся вверх по на-

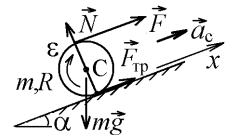


Рис. 1.8

клонной плоскости под действием силы  $\vec{F}$ , с которой тянут намотанную на обод нить. Внешними силами кроме силы  $\vec{F}$ , будут сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}$ .

**Совет:** Если центр масс катящегося тела движется вдоль прямой оси  $x$ , то записывайте уравнение динамики поступательного движения в проекции на эту ось. Для цилиндра на рис.1.8 оно примет вид

$$ma_c = \sum F_{\text{внеш}x} = F + F_{\text{тр}} - mg \sin \alpha.$$

Величина момента силы, вращающей тело, определяется как произведение силы на плечо – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения. Так как линии сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$  на рис.1.8 проходят через ось  $C$ , их моменты равны нулю, и вращать цилиндр они не могут.

Для сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  плечом будет радиус  $R$ , но они стремятся вращать цилиндр в противоположных направлениях.

**Совет:** Следите за тем, чтобы знак момента силы соответствовал направлению вращения (качения)! Оно должно соответствовать направлению поступательного движения.

Так цилиндр на рис.1.8 вращается по часовой стрелке. Момент силы  $\vec{F}$  будет ускорять это вращение, а момент силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – тормозить его. Уравнение динамики вращательного движения примет вид

$$I_C \varepsilon = \sum M_{\text{внеш}} = FR - F_{\text{тр}}R.$$

В случае качения **без проскальзывания** скорость точки  $A$  касания тела и плоскости равна нулю. А так как качение тела является суммой поступательного движения со скоростью  $v$  и вращательного движения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг центра масс  $C$ , то, как видно из рис.1.9, будет выполнена кинематическая связь  $v_c = \omega R$  и  $a_c = \varepsilon R$ .

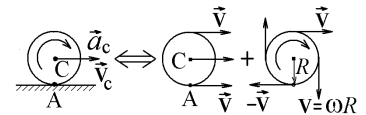


Рис. 1.9

**Примеры решения задач:**

**3.1.** Тонкую нить, намотанную на обод колеса массы  $m = 1,5$  кг и радиуса  $R = 10$  см, имеющего момент инерции  $I = 0,01$  кг·м<sup>2</sup> относительно оси симметрии, тянут с силой  $F = 9$  Н под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Найти ускорение  $a$  колеса и величину постоянной силы трения в точке опоры.

**Решение.**

**Совет:** Если Вы не знаете, как направлена сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  в точке опоры, направьте её в любую сторону и запишите уравнения динамики с учетом выбранного направления. Если направление  $F_{\text{тр}}$  выбрано неверно, то при решении получится правильная величина этой силы, но со знаком “минус”.

Направим силу трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  в точке опоры  $A$  в сторону движения колеса (рис.1.10), чтобы её момент относительно оси колеса тормозил вращение. Решаем систему из уравнения динамики поступательного движения вдоль оси  $x$   $ma_c = F \cos \alpha + F_{\text{тр}}$  и уравнения динамики вращательного движения вокруг оси колеса  $I\varepsilon = FR - F_{\text{тр}}R$ . Выразим из первого уравнения неизвестную силу  $F_{\text{тр}}$  и подставим вместе со связью  $\varepsilon = a_c/R$

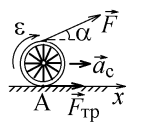


Рис. 1.10

во второе уравнение. Получим  $I \frac{a_c}{R} = FR - (ma_c - F \cos \alpha)R$ , откуда  $a_c = \frac{F(1 + \cos \alpha)}{m + I/R^2} = 6,72$  м/с<sup>2</sup>.

Наоборот, устраняя из системы ускорение  $a_c$ , находим величину силы трения  $F_{\text{тр}} = \frac{mR^2 - I \cos \alpha}{mR^2 + I} F = 2,28$  Н.

Если изменить направление силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  на рис.1.10, то уравнения динамики примут вид  $ma_c = F \cos \alpha - F_{\text{тр}}$  и  $I\varepsilon = I a_c/R = FR + F_{\text{тр}}R$ . Это не изменит полученной выше формулы для  $a_c$ . Но формула для  $F_{\text{тр}}$  поменяет знак, т.е. на-

правление силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  на рис.1.10 было выбрано верно.

**3.2.** Сплошной шар с радиусом  $R$  катится без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. В точке опоры на шар действует сила трения  $F_{\text{тр}} = 3$  Н, направленная вдоль плоскости. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, определите массу шара  $m$ .

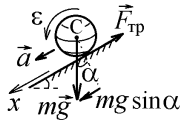
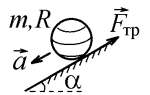


Рис.1.11

*Решение.*

Единственная сила, создающая относительно оси  $C$  шара ненулевой момент, заставляющий шар вращаться с ускорением  $\epsilon$ , это сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Как видно из рис.1.11, она должна быть направлена против оси  $x$ , вдоль которой шар движется под действием проекции силы тяжести  $mg \sin \alpha$ . Уравнения динамики поступательного и вращательного движения имеют вид  $ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$ ;  $I_C \epsilon = F_{\text{тр}} \cdot R$ . Подставляя сюда момент инерции шара  $I_C = 2mR^2/5$  и связь  $\epsilon = a/R$ , исключаем неизвестное ускорение  $a$ . Получим  $m = 7F_{\text{тр}}/g = 2,143$  кг.

**3.3.** Сплошной диск массы  $m_1 = 1$  кг и радиуса  $R$  вращается без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии  $O$ . Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая по ободу нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup> грузы. Правый груз с массой  $m_2 = 3$  кг скользит по горизонтальной поверхности и на него действует сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = 4,7$  Н. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти массу  $m_3$  левого груза, опускающегося вниз под действием силы тяжести.

*Решение.*

Укажем направление и точки приложения всех сил (рис.1.12). Уравнения динамики надо записать для каждого из движущихся тел.

Грузы  $m_2$  и  $m_3$  движутся поступательно, а диск с моментом инерции  $I = m_1 R^2/2$  совершает вращательное движение под действием моментов сил натяжения нитей  $\vec{T}_2$  и  $\vec{T}_1$ , направленных в разные стороны. Сила реакции  $\vec{N}$  и сила тяжести  $m_1 \vec{g}$  приложены к оси диска  $O$  и не создают вращающих моментов.

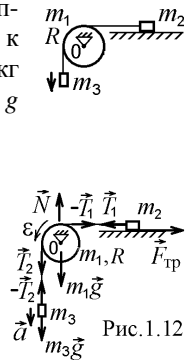


Рис.1.12

Выражаем неизвестные величины сил натяжения  $T_1$  и  $T_2$  из двух первых уравнений поступательного движения

$$\begin{cases} m_2 a = T_1 - F_{\text{тр}}, \\ m_3 a = m_3 g - T_2, \end{cases} \text{ и подставляем в третье уравнение динамики вращательного движения диска. Получим}$$

$$I \epsilon = I a/R = T_2 R - T_1 R$$

$$m_3 = \frac{(m_2 + m_1/2)a + F_{\text{тр}}}{g - a} = 1,5 \text{ кг.}$$

**3.4.** Сплошной диск массы  $m = 1$  кг прикреплен за намотанную на его обод нить к потолку и падает вниз под действием силы тяжести. При разматывании нити диск вращается с угловым ускорением  $\epsilon = 40$  рад/с<sup>2</sup>. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти радиус диска  $R$ .

*Решение.*

Диск движется поступательно вниз и одновременно вращается вокруг оси  $C$  по часовой стрелке под действием момента силы натяжения нити  $\vec{T}$ , плечо которой равно радиусу диска  $R$  (рис.1.13). Выражая силу  $T$  из уравнения динамики поступательного движения  $ma = mg - T$ , подставляем её в уравнение динамики вращательного движения диска  $I \epsilon = T \cdot R$ .

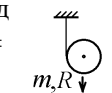


Рис.1.13

С учетом связи  $a = \epsilon R$  и формулы для момента инерции диска  $I = mR^2/2$ , находим  $\frac{mR^2}{2} \epsilon = m(g - \epsilon R)R$ ,

$$\text{откуда } R = \frac{2g}{3\epsilon} = 0,163 \text{ м.}$$

**3.5.** Диск массы  $m_1 = 2$  кг и радиуса  $R = 1$  м вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии  $O$ , причем из-за трения в оси диска возникает тормозящий вращение момент сил  $M_{\text{тр}} = 4$  Н·м. Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая по ободу нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением грузы с массами  $m_2 = 1,5$  кг и  $m_3 = 2$  кг. Во сколько раз ускорение свободного падения, равное  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, больше ускорения грузов  $m_2$  и  $m_3$ ?

*Решение.*

Действующие на тела силы показаны на рис.1.14. Уравнения динамики поступательного движения грузов  $m_2$  и  $m_3$  с учетом направления их движения имеют вид  $m_2 a = T_1 - m_2 g$ ;  $m_3 a = m_3 g - T_2$ . Суммарный момент сил натяжения нитей  $\vec{T}_2$  и  $\vec{T}_1$  будет вращать диск по часовой стрелке в сторону движения грузов. Уравнение динамики вращательного движения диска  $I \epsilon = T_2 \cdot R - T_1 \cdot R - M_{\text{тр}}$ , где  $I = m_1 R^2/2$  (момент сил трения в оси всегда тормозит вращение).

Подставим в это уравнение выражения сил  $T_2$  и  $T_1$ , выраженные из двух уравнений поступательного движения, а также учтем связь  $\epsilon = \frac{a}{R}$ . Отсюда ускорение  $a = \frac{(m_3 - m_2)g - M_{\text{тр}}/R}{m_3 + m_2 + m_1/2} = 0,2$  м/с<sup>2</sup>. Поэтому  $g/a = 49$ .

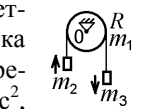
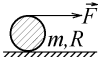


Рис.1.14

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

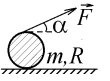
**3.6.** Тонкую нить, намотанную на обод цилиндра массы  $m = 2$  кг и радиуса  $R$ , тянут в горизонтальном направлении. Цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания с ускорением  $a = 8$  м/с<sup>2</sup>. Сила трения в точке опоры постоянна. Найти силу  $F$ , с которой тянут нить.

Ответ: 12 Н



**3.7.** Тонкую нить, намотанную на обод цилиндра радиуса  $R$ , тянут с силой  $F$  под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Цилиндр катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с ускорением  $a = 4$  м/с<sup>2</sup>. Величина горизонтально направленной силы трения в точке опоры равна  $F_{\text{тр}} = 3$  Н. Найти массу  $m$  цилиндра.

Ответ: 2,47 кг



**3.8.** Колесо с массой  $m = 2$  кг и радиусом  $R = 10$  см, имеющее момент инерции  $I = 0,015$  кг·м<sup>2</sup> относительно оси симметрии, катится без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, определите величину действующей на него силы трения  $F_{\text{тр}}$ , направленной вдоль плоскости.

Ответ: 4,2 Н



**3.9.** Диск массы  $m_1$  с радиусом  $R$  вращается без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. К намотанной на обод диска нити прикреплен груз массы  $m_2$ , падающий вниз с ускорением  $4,8$  м/с<sup>2</sup>. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти отношение  $m_2/m_1$  массы груза к массе диска.

Ответ: 0,48



**3.10.** Диск радиуса  $R = 8$  см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. К намотанной на его обод нити прикреплен падающий вниз груз с массой  $m_2 = 1$  кг. При этом диск вращается с угловым ускорением  $30$  рад/с<sup>2</sup>, а из-за трения в его оси возникает постоянный тормозящий вращение момент сил  $M_{\text{тр}} = 0,2$  Н·м. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти массу диска  $m_1$ .

Ответ: 4,08 кг



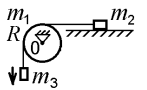
**3.11.** Сплошной диск массы  $m_1 = 3$  кг и радиуса  $R = 10$  см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. Из-за трения в оси диска возникает постоянный тормозящий вращение момент сил  $M_{\text{тр}} = 0,28$  Н·м. Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением  $3,6$  м/с<sup>2</sup> грузы с массами  $m_2$  и  $m_3 = 3$  кг. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти массу  $m_2$  левого груза.

Ответ: 0,776 кг



**3.12.** Цилиндр массы  $m_1 = 2$  кг и радиуса  $R = 10$  см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. В его оси возникает постоянный тормозящий момент сил  $M_{\text{тр}} = 1,3$  Н·м. Через обод диска перекинута невесомая нить с прикрепленными к её концам грузами. Груз с массой  $m_2 = 3$  кг скользит без трения по горизонтальной поверхности, а с массой  $m_3 = 2$  кг движется вертикально вниз под действием силы тяжести. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти величину силы натяжения правого конца нити, к которой привязан груз  $m_2$ .

Ответ: 3,3 Н



#### 4. Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса всегда выполняется для быстрых взаимодействий тел (столкновение, взрыв). При этом импульсы тел  $\vec{p} = m\vec{v}$  надо складывать векторно.



Сложение векторов проще выполнить, не записывая их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны  $a$ ,  $b$  треугольника и угол  $\theta$  между ними, то квадрат противоположной стороны  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$  (рис.1.15)

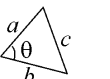


Рис.1.15

Примеры решения задач:

**4.1.** Два тела с массами  $m_1 = 3$  кг и  $m_2$ , летевшие со скоростями  $v_1 = 6$  м/с и  $v_2$  под углом  $\alpha = 120^\circ$  друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти массу  $m_2$ , если после столкновения слипшиеся тела летят со скоростью  $v = 2$  м/с под углом  $\beta = 60^\circ$  к направлению движения первого тела.

Решение.

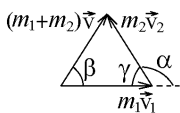


Рис.1.16

На рис.1.16 изображен векторный закон сохранения импульса  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$  в данной задаче. Так как в условии не заданы две величины  $m_2$  и  $v_2$ , то согласно теореме косинусов можно записать два уравнения для нахождения сторон, лежащих против углов  $\beta$  и  $\gamma$ :

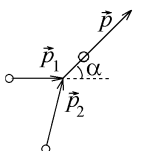
$$(m_2 v_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 v^2 + (m_1 v_1)^2 - 2(m_1 + m_2) v \cdot m_1 v_1 \cdot \cos \beta,$$

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2m_1 v_1 \cdot m_2 v_2 \cdot \cos \gamma.$$

В данном случае решение сильно упрощается: так как  $\beta = \gamma = 60^\circ$ , то треугольник на рис.1.16 равносторонний, и

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \text{ Тогда } m_2 = \frac{m_1 v_1}{v} - m_1 = 6 \text{ кг.}$$

**4.2.** Два тела с импульсами  $p_1 = 6$  кг·м/с и  $p_2$ , летевшие под углом друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти величину импульса  $p_2$  второго тела до столкновения, если после столкновения величина импульса



слипшихся тел  $p = 2p_1 = 12 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ , а летят они под углом  $\alpha = 45^\circ$  к направлению движения первого тела (см. рисунок).

*Решение.*



Закон сохранения импульса  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$  представлен на рис.1.17, из которого, согласно теореме косинусов, следует  $p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2p_1p \cos \alpha$ . Подставляя  $p = 2p_1$  и  $\cos \alpha = 1/\sqrt{2}$ , находим  $p_2 = p_1\sqrt{5-4\cos 45^\circ} = 8,84 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ .

Рис.1.17

**4.3.** Снаряд с массой  $m$ , летевший со скоростью  $v = 30 \text{ м/с}$ , разорвался на два неравных осколка. Масса второго осколка, который летит под углом  $\alpha = 150^\circ$  к первоначальному направлению движения снаряда со скоростью  $v_2 = 20 \text{ м/с}$ , в 2 раза больше массы первого осколка. Найти величину скорости  $v_1$  первого осколка.

*Решение.*

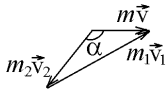


Рис.1.18

Сложение векторов импульса, соответствующее закону его сохранения  $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$  при разрыве снаряда, показано на рис.1.18. Согласно теореме косинусов  $(m_1v_1)^2 = (mv)^2 + (m_2v_2)^2 - 2mv \cdot m_2v_2 \cdot \cos \alpha$ .

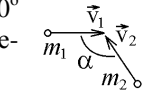
Учитывая, что  $m_1 = m/3$  и  $m_2 = 2m/3$  по условию задачи, находим из этого уравнения

$$v_1 = \sqrt{9v^2 + 4v_2^2 - 12vv_2 \cos \alpha} = 126,2 \text{ м/с}.$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

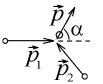
**4.4.** Два тела с одинаковыми массами  $m_1 = m_2$ , летевшие со скоростями  $v_1 = 2 \text{ м/с}$  и  $v_2$  под углом  $\alpha = 120^\circ$  друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти величину скорости  $v_2$  второго тела до удара, если после столкновения слипшиеся тела летят со скоростью  $v = 2 \text{ м/с}$ .

*Ответ:* 4,606 м/с



**4.5.** Два тела с импульсами  $p_1$  и  $p_2 = 6 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$ , летевшие под углом друг к другу, столкнулись и слиплись. Слипшиеся тела летят под углом  $\alpha = 60^\circ$  к направлению движения первого тела. Найти величину импульса  $p$  слипшихся тел, если она в два раза меньше величины импульса  $p_1$  первого тела до столкновения.

*Ответ:* 3,46 кг·м/с



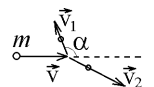
**4.6.** Снаряд с массой  $m$  разорвался на два осколка. Масса второго осколка в 2 раза больше массы первого осколка ( $m_2 = 2m_1$ ). Сразу после разрыва осколки разлетаются под углом  $\alpha = 150^\circ$  друг к другу с одинаковыми по величине скоростями  $v_1 = v_2 = 60 \text{ м/с}$ . Найти величину скорости  $v$  снаряда до разрыва.

*Ответ:* 24,8 м/с



**4.7.** Летевший со скоростью  $v = 40 \text{ м/с}$  снаряд разорвался на два равных осколка, один из которых летит под углом  $\alpha = 150^\circ$  к первоначальному направлению движения снаряда со скоростью  $v_1 = 20 \text{ м/с}$ . Найти величину скорости  $v_2$  второго осколка.

*Ответ:* 97,8 м/с



## 5. Закон сохранения момента импульса

При вращении тел вокруг оси симметрии или параллельной ей оси  $z$  закон сохранения момента импульса можно использовать не в векторной форме, а в проекции на ось вращения  $\sum L_{z \text{ начальн}} = \sum L_{z \text{ конечн}}$ . При этом важно учитывать знаки проекций (вращение “по” или “против” часовой стрелки).

Момент импульса физического тела, вращающегося относительно закрепленной оси  $z$ , равен произведению его момента инерции на угловую скорость вращения:  $L_z = I\omega$ . Момент импульса тела с пренебрежимо малыми размерами (материальной точки), равен произведению его импульса на плечо

$$L_z = p \cdot r = mv \cdot r \quad (\text{рис.1.19}), \text{ а его момент инерции } I_{\text{мат точки}} = mr^2.$$

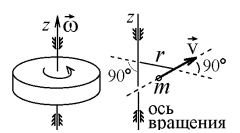


Рис.1.19

Моменты инерции симметричных тел, используемых в задачах, приведены на рис.1.7. Если ось вращения  $z$  не совпадает с осью симметрии вращающегося тела, то момент инерции вычисляется с помощью теоремы Штейнера  $I_z = I_c + md^2$ , где  $I_c$  – момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс (рис.1.7),  $d$  – расстояние между осями. Например, момент инерции тонкого стержня длины  $l$  относительно оси, проходящей через его край, равен  $I_z = ml^2/12 + ml^2/4 = ml^2/3$  (рис.1.20).

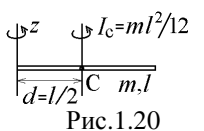


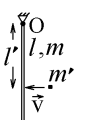
Рис.1.20

*Примеры решения задач:*

**5.1.** Предмет, размерами которого можно пренебречь, летел горизонтально со скоростью  $v = 3 \text{ м/с}$  и прилип к неподвижно висевшему тонкому стержню массы  $m = 5 \text{ кг}$  и длины  $l = 2 \text{ м}$  на расстоянии  $l' = 1 \text{ м}$  от оси подвеса О. Сразу после удара стержень с прилипшим предметом начал вращаться с угловой скоростью  $\omega = 0,5 \text{ рад/с}$ . Найти массу  $m'$  предмета.

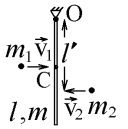
*Решение.*

Моменты инерции складываются, и стержень вместе с прилипшим к нему предметом имеет относительно оси вращения О общий момент инерции  $I = I_{\text{стерж}} + I_{\text{предм}} = ml^2/3 + m'l'^2$ . Приравнивая величины момента импульса  $L_{\text{после}} = I\omega$  после удара и момента импульса  $L_{\text{до}} = m'v \cdot l'$  летевшего предмета до удара (при столкновении момент импульса сохраняет-



ся), находим  $m' = \frac{ml^2\omega}{3l'(v-l'\omega)} = 1,33 \text{ кг}$ .

**5.2.** Два шарика, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в противоположных направлениях перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса О висевшего неподвижно тонкого стержня массы  $m = 6 \text{ кг}$  и длины  $l = 3 \text{ м}$ , и одновременно прилипли к стержню (см. рисунок). Шарик с массой  $m_1 = 0,4 \text{ кг}$  и скоростью  $v_1 = 6 \text{ м/с}$  прилип в центре стержня, а шарик с массой  $m_2 = 0,3 \text{ кг}$  и скоростью  $v_2 = 12 \text{ м/с}$  – на расстоянии  $l' = 2 \text{ м}$  от оси подвеса. Найти величину угловой скорости, с которой начал вращаться по часовой стрелке стержень с прилипшими шариками сразу после удара.



*Решение.*



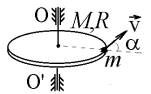
Внимательно следите за направлениями движения и вращения тел, чтобы учесть проекции их моментов импульса на ось вращения с правильными знаками.

Следите за тем, чтобы используемые моменты инерции соответствовали заданной оси вращения.

Так как стержень начнет вращаться по часовой стрелке, то момент импульса нижнего шарика до удара больше, чем момент импульса верхнего шарика. Его надо записать в уравнении закона сохранения импульса со знаком “+”:

$$L_{\text{до}} = m_2 v_2 \cdot l' - m_1 v_1 \cdot l/2 = L_{\text{после}} = I\omega. \text{ Здесь } I - \text{сумма моментов инерции стержня и прилипших к нему шариков (материальных точек): } I = ml^2/3 + m_1(l/2)^2 + m_2 l'^2. \text{ Из этого равенства находим } \omega = \frac{m_2 v_2 \cdot l' - m_1 v_1 \cdot l/2}{ml^2/3 + m_1(l/2)^2 + m_2 l'^2} = 0,179 \text{ рад/с}.$$

**5.3.** Тонкий сплошной диск с массой  $M = 50 \text{ г}$  и с радиусом  $R = 16 \text{ см}$  может вращаться без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии  $OO'$ , проходящей через центр диска. Вначале диск покоился, а затем жук, сидевший на ободе диска, улетает со скоростью  $v = 15 \text{ м/с}$  в горизонтальном направлении под углом  $\alpha = 60^\circ$  к радиальной линии (см. рисунок). После этого диск начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ . Найти величину массы  $m$  жука.



*Решение.*

Жук летит в одну сторону приобретая момент импульса  $L_{\text{ж}} = mv \cdot l$ , где плечо  $l = R \sin \alpha$  (это кратчайшее расстояние от оси О до линии скорости, см. рис.1.21). Диск начинает вращаться в противоположную сторону с моментом импульса  $L_{\text{д}} = I_{\text{диска}} \omega = MR^2 \omega / 2$ . Момент импульса системы, равный нулю до начала движения, не изменится:

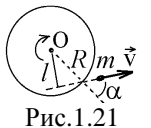
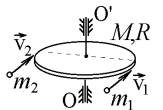


Рис.1.21

$$L_{\text{ж}} - L_{\text{д}} = mv \cdot l - MR^2 \omega / 2 = 0. \text{ Отсюда } m = \frac{MR\omega}{2v \sin \alpha} = 3,08 \text{ г}.$$

**5.4.** Диск массы  $M = 160 \text{ г}$  и радиуса  $R = 20 \text{ см}$  может вращаться без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии  $OO'$ , и вначале покоится. К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами  $m_1$  и  $m_2 = 20 \text{ г}$ , размерами которых можно пренебречь, летевшие в одном направлении с горизонтально направленными скоростями  $v_1 = 5 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 17 \text{ м/с}$  соответственно. Шарика одновременно прилипают к ободу диска, который начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega = 10 \text{ рад/с}$  по часовой стрелке. Найти величину массы  $m_1$  первого шарика.

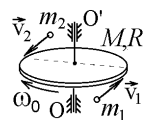


*Решение.*

Так как диск начинает вращаться по часовой стрелке, то момент импульса второго шарика  $L_2 = m_2 v_2 \cdot R$  относительно оси  $OO'$  больше, чем момент импульса первого шарика  $L_1 = m_1 v_1 \cdot R$ , направленный противоположно вращению диска. Подставляя в закон сохранения момента импульса  $L_2 - L_1 = I\omega$  общий момент инерции диска с прилипшими шариками

$$(материальными точками) I = MR^2/2 + m_1 R^2 + m_2 R^2, \text{ находим из этого уравнения } m_1 = \frac{m_2 v_2 - (m_2 + M/2) \omega R}{v_1 + \omega R} = 20 \text{ г}.$$

**5.5.** Диск с массой  $M = 100 \text{ г}$  вращался с угловой скоростью  $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$  по часовой стрелке без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии  $OO'$ . К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами  $m_1 = 20 \text{ г}$  и  $m_2 = 30 \text{ г}$ , с пренебрежимо малыми размерами, летевшие в противоположных направлениях с горизонтально направленными скоростями  $v_1 = 10 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 5 \text{ м/с}$  соответственно. Шарика одновременно прилипли к ободу диска, после чего он начал вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega = 15 \text{ рад/с}$ . Найти величину радиуса  $R$  диска.



*Решение.*

В отличие от предыдущей задачи, оба шарика стремятся повернуть диск против часовой стрелки, и направления их моментов импульса  $L_1 = m_1 v_1 \cdot R$  и  $L_2 = m_2 v_2 \cdot R$  совпадают. Но первоначально диск вращался в другую сторону, и с учётом этого вращения с угловой скоростью  $\omega_0$  закон сохранения момента импульса запишется в виде  $L_1 + L_2 - I_{\text{диска}} \omega_0 = I\omega$ .

Подставляя сюда момент инерции диска  $I_{\text{диска}} = MR^2/2$  до столкновения и суммарный момент инерции диска с прилипшими шариками  $I = I_{\text{диска}} + m_1 R^2 + m_2 R^2$  после столкновения, находим из записанного уравнения

$$R = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2) \omega + M(\omega + \omega_0)/2} = 0,175 \text{ м}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**5.6.** Тонкий стержень с массой  $m = 6$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси подвеса  $O$ , проходящей через его центр, и первоначально неподвижен в вертикальном положении. В его нижний конец врезается и застревает тяжёлая пуля с массой  $m' = 500$  г, размерами которой можно пренебречь, летевшая горизонтально со скоростью  $v = 15$  м/с. Найти длину стержня  $l$ , если сразу после удара стержень с застрявшей в нём пулей начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega = 4$  рад/с.

Ответ: 1,5 м



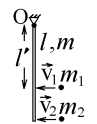
**5.7.** Два шарика, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в противоположных направлениях перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса  $O$  висевшего неподвижно тонкого стержня массы  $m = 3$  кг и длины  $l = 2$  м (см. рисунок). Шарик с массой  $m_1 = 0,8$  кг и скоростью  $v_1 = 6$  м/с прилип к центру  $C$  стержня, а шарик с массой  $m_2 = 0,2$  кг одновременно прилип к его нижней точке. Найти скорость  $v_2$  нижнего шарика до удара, если сразу после удара стержень начал вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega = 0,6$  рад/с.

Ответ: 3,6 м/с



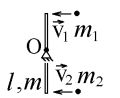
**5.8.** Две пули, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в одном направлении перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса  $O$  неподвижно висевшего тонкого стержня массы  $m = 3$  кг и длины  $l = 2$  м, и одновременно врезались и застряли в стержне (см. рисунок). Пуля с массой  $m_1 = 0,4$  кг и скоростью  $v_1 = 2$  м/с застряла на расстоянии  $l' = 1,5$  м от оси подвеса, а пуля с массой  $m_2$  и скоростью  $v_2 = 4$  м/с – в нижней точке стержня. Найти массу  $m_2$  нижней пули, если после удара стержень начал вращаться с угловой скоростью  $\omega = 0,5$  рад/с.

Ответ: 0,208 кг



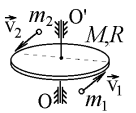
**5.9.** Тонкий стержень массы  $m = 3$  кг и длины  $l = 2$  м может вращаться вокруг горизонтальной оси подвеса  $O$ , проходящей через его центр, и первоначально неподвижен в вертикальном положении. К его нижнему и верхнему краю одновременно прилипают два шарика с массами  $m_1 = 0,8$  кг и  $m_2 = 0,3$  кг, размерами которых можно пренебречь. Шарики летели горизонтально в одном направлении перпендикулярно к оси  $O$  со скоростями  $v_1 = 3$  м/с и  $v_2$  (см. рисунок). Найти скорость  $v_2$  нижнего шарика до удара, если сразу после удара стержень с прилипшими к нему шариками начал вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega = 0,6$  рад/с.

Ответ: 12,2 м/с



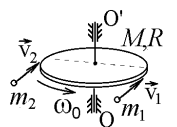
**5.10.** Первоначально покоящийся диск с радиусом  $R = 16$  см может вращаться без трения вокруг своей вертикальной закрепленной оси симметрии  $OO'$ . К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами  $m_1 = 8$  г и  $m_2 = 12$  г, размерами которых можно пренебречь, летевшие в противоположных направлениях с горизонтально направленными скоростями  $v_1 = 15$  м/с и  $v_2 = 10$  м/с. Шарики одновременно прилипают к ободу диска, после чего он начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega = 15$  рад/с. Найти величину массы  $M$  диска.

Ответ: 160 г



**5.11.** Диск с массой  $M = 90$  г и радиусом  $R = 20$  см, вращался с угловой скоростью  $\omega_0$  против часовой стрелки вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии  $OO'$ . К ободу диска по касательным подлетели два маленьких шарика с массами  $m_1 = 6$  г и  $m_2 = 9$  г с горизонтально направленными скоростями  $v_1 = 3$  м/с и  $v_2 = 4$  м/с (см. рисунок). Шарики одновременно прилипли к ободу диска, после чего он продолжил вращаться в прежнем направлении с угловой скоростью  $\omega = 3$  рад/с. Найти начальную угловую скорость диска  $\omega_0$ .

Ответ: 6 рад/с



## 6. Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия физического тела складывается из его кинетической энергии поступательного и вращатель-

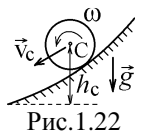
ного движений и потенциальной энергии в поле внешних сил:

$$E_{\text{мех}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + E_{\text{пот}}.$$


В задачах проще и удобнее представить движение вращающегося тела как сумму поступательного движения со скоростью  $v_c$  центра масс и вращения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей че-

рез центр масс (рис.1.22). Тогда  $E_{\text{кинетич}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$ , где  $I_c$  – момент инерции тела относительно

этой оси.



Потенциальную энергию тела в поле силы тяжести определяют по высоте подъёма  $h_c$  его центра масс:

$$E_{\text{пот}} = mgh_c.$$

Механическая энергия сохраняется в том случае, когда все действующие в системе силы консервативны, и их работа равна изменению (убыли) потенциальной энергии. Например,  $E_{\text{мех}} = \text{const}$  при абсолютно упругом соударении тел.

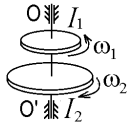
Если соударение неупругое или в системе действует неконсервативная сила (в задачах механики это сила трения скольжения), то часть механической энергии превращается в тепло:

$$\Delta E_{\text{мех}} = E_{\text{мех}} \text{ начальн} - E_{\text{мех}} \text{ конечн} = Q.$$



Примеры решения задач:

**6.1.** Два тонких диска могут вращаться без трения вокруг общей вертикальной оси симметрии  $OO'$ . Верхний диск с моментом инерции  $I_1 = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , вращавшийся с угловой скоростью  $\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$ , упал на нижний диск с моментом инерции  $I_2 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , вращавшийся в противоположном направлении с угловой скоростью  $\omega_2 = 4 \text{ рад/с}$ . Диски слиплись и стали вращаться вместе. Во сколько раз уменьшилась после этого кинетическая энергия вращательного движения системы?



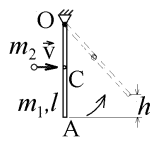
Решение.

**Совет:** В задачах, в которых происходит столкновение или разлетание тел недостаточно использовать только уравнение закона сохранения или изменения механической энергии. В таких задачах его надо решать вместе с уравнением закона сохранения импульса или момента импульса.

Начальная кинетическая энергия складывалась из кинетической энергии вращательного движения дисков:  $E_{\text{нач}} = I_1 \omega_1^2 / 2 + I_2 \omega_2^2 / 2$ . После слипания диски имеют общий момент инерции  $I = I_1 + I_2$  и вращаются с общей угловой скоростью  $\omega$ , которую можно найти из закона сохранения момента импульса  $I_2 \omega_2 - I_1 \omega_1 = I \omega$  (знак “-” указывает на то, что диски вращались в разные стороны). Конечная кинетическая энергия слипшихся дисков будет равна  $E_{\text{кон}} = (I_1 + I_2) \omega^2 / 2$ .

Подставляя записанные соотношения, видим, что она уменьшается в  $\frac{E_{\text{нач}}}{E_{\text{кон}}} = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{(I_1 + I_2) \omega^2} = \frac{(I_1 + I_2)(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2)}{(I_2 \omega_2 - I_1 \omega_1)^2} = 55$  раз.

**6.2.** Тонкий стержень массы  $m_1$  и длины  $l = 1 \text{ м}$  висит неподвижно и способен вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси  $O$  подвеса на его краю. В центр стержня  $C$  врезается и прилипает летящий со скоростью  $v = 2,1 \text{ м/с}$  горизонтально и перпендикулярно к оси  $O$  маленький пластилиновый шарик той же массы  $m_2 = m_1$ . На какую максимальную высоту  $h$  поднимется нижний край стержня  $A$  после удара?



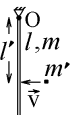
Решение.

Так как массы тел одинаковы,  $m_1 = m_2 = m$ , то после столкновения стержень с прилипшим шариком имеет суммарный момент инерции  $I = m_1 l^2 / 3 + m_2 (l/2)^2 = 7ml^2 / 12$  и начинает вращаться вокруг оси  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , которую определяют из закона сохранения момента импульса  $L_{\text{до}} = m_2 v \cdot l/2 = L_{\text{после}} = I \omega$ . Отсюда  $\omega = \frac{mvl}{2I} = \frac{6v}{7l}$ .

Кинетическая энергия такого вращательного движения перейдет в потенциальную энергию подъема центра масс  $C$  системы на максимальную высоту:  $\frac{I \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7ml^2}{12} \cdot \left(\frac{6v}{7l}\right)^2 = \frac{3mv^2}{14} = 2mgh_c$  (масса системы равна  $m_1 + m_2 = 2m$ ).

Точка  $A$  находится на вдвое большем расстоянии от оси  $O$ , чем точка  $C$ . Поэтому максимальная высота её подъема будет в 2 раза больше. Если принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , то  $h_A = 2h_c = 3v^2 / 14g = 9,45 \text{ см}$ .

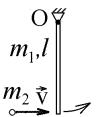
**6.3.** Маленькое тело с массой  $m' = 0,5 \text{ кг}$ , размерами которого можно пренебречь, летело горизонтально со скоростью  $v = 14 \text{ м/с}$  и застряло в неподвижно висевшем тонком стержне массы  $m = 1 \text{ кг}$  на расстоянии  $l' = 4 \text{ м}$  от оси подвеса  $O$ . Найти длину стержня  $l$ , если при ударе выделяется теплота  $Q = 25 \text{ Дж}$ .



Решение.

Начальная энергия системы была равна кинетической энергии летящего шарика:  $E_{\text{нач}} = m'v^2 / 2$ , а после удара стержень начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , имея кинетическую энергию  $E_{\text{кон}} = I \omega^2 / 2$ . Выделившееся при ударе тепло равно разности этих энергий  $Q = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = I \omega^2 / 2 - m'v^2 / 2$ . Угловую скорость  $\omega$  выражаем из закона сохранения момента импульса, выполняющегося в момент удара:  $m'v \cdot l' = I \omega$ . После подстановки получим величину момента инерции стержня с застрявшим телом  $I = \frac{(m'vl')^2}{m'v^2 - 2Q} = 16,333 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , который должен быть суммой моментов инерции стержня и маленького тела относительно оси  $O$ :  $I = \frac{ml^2}{3} + m'l'^2$ . Отсюда  $l = \sqrt{\frac{3(I - m'l'^2)}{m}} = 5 \text{ м}$ .

**6.4.** Тонкий стержень массы  $m_1 = 60 \text{ г}$  и длины  $l$ , висит неподвижно и может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси  $O$ , проходящей через точку подвеса на его краю. В противоположный конец стержня врезается летящий со скоростью  $v = 28 \text{ м/с}$  горизонтально и перпендикулярно к оси  $O$  маленький стальной шарик с массой  $m_2 = m_1 / 4 = 15 \text{ г}$ , который испытывает абсолютно упругий удар со стержнем. Найти величину и направление скорости шарика после удара.



Решение.

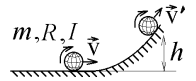
Стержень сразу после удара начнет вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , а шарик продолжит движение с новой скоростью  $u$ . При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения механической энергии  $\frac{m_2 v^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2} + \frac{m_2 u^2}{2}$ , где

$I = \frac{1}{3} m_1 l^2$  – момент инерции стержня относительно оси О. Это уравнение надо решать совместно с уравнением закона сохранения момента импульса  $m_2 v \cdot l = I\omega + m_2 u \cdot l$  (предположили, что шарик продолжает двигаться в прежнем направлении).

Выражая переменную  $\omega$  из второго уравнения и подставляя её в первое уравнение, находим  $\frac{m_2(v^2 - u^2)}{2} = \frac{3m_2^2(v - u)^2}{2m_1}$ . Т.к.  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$ , то  $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u) = 3(v - u)^2/4$ , что даёт  $v + u = 3(v - u)/4$ .

Отсюда  $u = -\frac{v}{7} = -4$  м/с. Знак “-” указывает на то, что шарик изменит направление движения и полетит налево.

**6.5.** Тонкостенная сфера массы  $m$  и радиуса  $R$ , момент инерции которой относительно горизонтальной оси симметрии равен  $I = 2mR^2/3$ , катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью  $v = 4$  м/с. На какую высоту  $h$  вверх по склону она должна закатиться, чтобы её скорость уменьшилась в 4 раза? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



*Решение.*

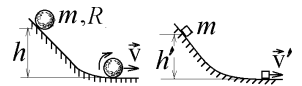
Соприкасающаяся с поверхностью точка сферы не смещается, и работа действующей на неё силы трения равна нулю. Поэтому при качении без проскальзывания механическая энергия тела сохраняется. С учетом связи линейной и угловой скорости катящегося тела  $v = \omega R$  его кинетическая энергия  $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) \frac{v^2}{2}$  будет равна  $E_{\text{кин}} = 5mv^2/6$  для катящейся сферы.



Следите за тем, какое катящееся тело (шар, диск, ...) задано в условии задачи. Учитывайте его момент инерции.

При подъёме на высоту  $h$  эта энергия уменьшается на величину  $mgh = \Delta E_{\text{кин}} = 5m(v^2 - v'^2)/6$ , где по условию  $v' = v/4$ . Отсюда  $h = 5(v^2 - v'^2)/6g = 25v^2/32g = 1,25$  м.

**6.6.** Шар массы  $m$  и радиуса  $R$  скатывается без проскальзывания и без начальной скорости по наклонной поверхности с высоты  $h = 14$  м и имеет внизу скорость  $v$ . С какой высоты  $h'$  должно соскользнуть вниз **без трения** и без начальной скорости маленькое тело с той же массой  $m$ , чтобы его скорость внизу была равна  $v' = v/5$ ?



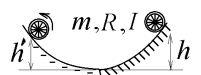
*Решение.*

Закон сохранения механической энергии при скатывании без начальной скорости шара

$$mgh = E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_{\text{шара}}\omega^2}{2} = \frac{7mv^2}{10}, \text{ так как } I_{\text{шара}} = 2mR^2/5 \text{ (рис.1.7) и } \omega = v/R. \text{ Для скользящего тела этот закон имеет}$$

вид  $mgh' = mv'^2/2$ . Поделив левые и правые части этих уравнений, получим  $\frac{h'}{h} = \frac{5v'^2}{7v^2} = \frac{1}{35}$ , откуда  $h' = 0,4$  м.

**6.7.** Колесо массы  $m = 2$  кг и радиуса  $R$ , момент инерции которого относительно горизонтальной оси симметрии равен  $I = mR^2/3$ , скатывается без проскальзывания и без начальной скорости с высоты  $h = 3$  м по правому шершавому склону ямы и продолжает скользить без трения по левому идеально гладкому склону ямы, вращаясь вокруг своей оси (см. рисунок). Чему равна величина кинетической энергии колеса в верхней точке подъёма  $h'$ ? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



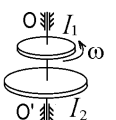
*Решение.*

При качении без проскальзывания  $v = \omega R$ . Кинетическая энергия вращательного движения колеса с учетом заданного в условии момента инерции равна  $E_{\text{кинвр}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} mR^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{mv^2}{6}$ . Скатываясь по правому склону, колесо приобретает кинетическую энергию  $E_{\text{кин}} = mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2 = 2mv^2/3$ . Отсюда в нижней точке ямы скорость движения колеса  $v = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$ , а  $E_{\text{кинвр}} = \frac{mgh}{4} = 15$  Дж.

При подъёме по левому склону кинетическая энергия поступательного движения переходит в потенциальную энергию  $mv^2/2 = mgh'$ , и на высоте  $h'$  центр масс колеса останавливается. Но сила трения отсутствует. Нет момента сил, который затормозил бы вращение колеса вокруг оси симметрии, проходящей через его центр. В верхней точке подъёма колесо продолжает вращаться и имеет ту же, что и внизу, кинетическую энергию вращательного движения  $E_{\text{кинвр}} = 15$  Дж.

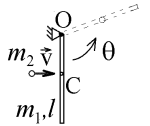
*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**6.8.** Два диска могут вращаться без трения вокруг общей вертикальной оси симметрии  $OO'$ . Верхний диск с моментом инерции  $I_1 = 3$  кг·м<sup>2</sup> относительно этой оси, вращавшийся с угловой скоростью  $\omega$ , упал на нижний покоившийся диск. Диски слиплись и вращаются вместе, а кинетическая энергия вращательного движения данной системы уменьшилась при этом в  $k = 4$  раза. Найти величину момента инерции  $I_2$  нижнего диска.



Ответ: 9 кг·м<sup>2</sup>

**6.9.** Тонкий стержень массы  $m_1$  и длины  $l = 40$  см, висит неподвижно и может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси  $O$  подвеса проходящей через его край. К центру стержня  $C$  прилипает летевший горизонтально и перпендикулярно к оси  $O$  маленький пластилиновый шарик той же массы  $m_2 = m_1$ . При какой величине скорости шарика  $v$  стержень с прилипшим к нему шариком отклонится от первоначального положения на максимальный угол  $\theta = 180^\circ$ ? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. *Ответ: 6,11 м/с*

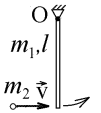


**6.10.** Тонкий стержень массы  $m_1 = 160$  г и длины  $l$  может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси  $O$ , проходящей через его середину. Первоначально стержень расположен вертикально и неподвижен. В его нижний край врезается и прилипает летящий перпендикулярно к оси  $O$  горизонтально со скоростью  $v = 7$  м/с маленький пластилиновый шарик массы  $m_2 = 40$  г. Сколько тепла выделится при неупругом ударе?

*Ответ: 0,56 Дж*

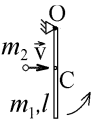
**6.11.** Тонкий стержень массы  $m_1 = 45$  г и длины  $l$ , висит неподвижно и может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси подвеса  $O$ , проходящей через его край. В противоположный конец стержня врезается летящий горизонтально и перпендикулярно к оси  $O$  со скоростью  $v = 8$  м/с маленький стальной шарик той же массы  $m_2 = m_1$ . Удар абсолютно упругий. Какая часть кинетической энергии налетающего шарика (в %) превращается сразу после удара в кинетическую энергию стержня?

*Ответ: 75 %*



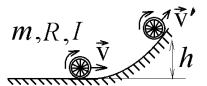
**6.12.** Тонкий стержень массы  $m_1 = 30$  г и длины  $l$  висит неподвижно и может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси подвеса  $O$ , проходящей через его край. В центр стержня  $C$  врезается летящий со скоростью  $v = 10$  м/с горизонтально и перпендикулярно к оси  $O$  маленький стальной шарик с массой  $m_2$ . Удар абсолютно упругий. При какой величине массы  $m_2$  скорость шарика после удара будет равна нулю?

*Ответ: 40 г*



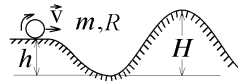
**6.13.** Колесо радиуса  $R = 10$  см, момент инерции которого относительно горизонтальной оси симметрии равен  $I = 1$  кг·м<sup>2</sup>, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с первоначальной скоростью  $v = 2$  м/с. Закатившись на высоту  $h = 1$  м вверх по склону, оно имеет скорость  $v' = 1$  м/с. Чему равна масса  $m$  колеса? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ: 17,6 кг*



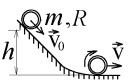
**6.14.** Цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$  катится без проскальзывания со скоростью  $v$ , скатывается в яму глубиной  $h = 2$  м и закатывается на её противоположный склон высоты  $H = 3$  м (см. рисунок). При какой наименьшей величине скорости  $v$  диск поднимется на вершину горба высоты  $H$ ? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ: 3,65 м/с*



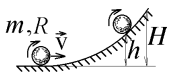
**6.15.** Тонкий обруч массы  $m$  и радиуса  $R$  скатывается без проскальзывания с начальной скоростью  $v_0 = 3$  м/с по наклонной поверхности с высоты  $h = 2$  м и имеет внизу скорость  $v$ . Во сколько раз возросла бы эта скорость, если бы обруч соскальзывал с той же высоты  $h$  и с той же начальной скоростью  $v_0$  без трения, не вращаясь? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ: в 1,30 раз*



**6.16.** Шар массы  $m = 3$  кг и радиуса  $R$  катится без проскальзывания со скоростью  $v$  по горизонтальной поверхности, а затем закатывается вверх по склону. Поднявшись на высоту  $h = 2$  м, он имеет кинетическую энергию поступательного движения, равную  $E_{\text{кин}} = 15$  Дж. На какую максимальную высоту  $H$  может подняться шар по склону? Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:  $H = 2,7$  м*



## 7. Незатухающие механические колебания. Сложение колебаний

Обычно в простых задачах незатухающие механические колебания рассматриваются на примере пружинного маятника – груза массы  $m$  на пружинке с коэффициентом жёсткости  $k$ , который совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  с циклической частотой  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и с периодом  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$  (рис.1.23,а).

Амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\alpha$  колебаний можно найти из начальных условий для смещения  $x_0 = x|_{t=0} = A \cos \alpha$  и для начальной скорости  $v_0 = dx/dt|_{t=0} = -A\omega_0 \sin \alpha$  маятника.

Аналогично будут решаться задачи в случае колебаний физического или математического маятника, в которых по гармоническому закону будет изменяться не смещение  $x$ , а угол отклонения от положения равновесия  $\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  (рис.1.23,б).

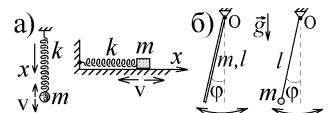


Рис.1.23

*Совет:* Если в условии задачи сказано, что в начальный момент  $t = 0$  маятник покоится, то он находится в точке максимального смещения  $x|_{t=0} = A$ , и его координата в дальнейшем меняется по закону  $x = A \cos(\omega_0 t)$ . Если же сказано, что при  $t = 0$  скорость маятника максимальна, то удобнее выразить изменение его координаты формулой  $x = A \sin(\omega_0 t)$ . Тогда  $v|_{t=0} = A\omega_0 \cos 0 = \max$ .

*Примеры решения задач:*

**7.1.** Грузик на пружинке с жёсткостью  $k = 0,8$  Н/м совершает вертикальные незатухающие колебания. В начальный момент  $t = 0$  смещение грузика относительно положения равновесия равно  $x_0 = 2$  см, а величина его скорости в этот момент времени  $v_0 = 0,1$  м/с. Найти массу грузика  $m$ , если максимальное смещение грузика относительно



положения равновесия равно  $x_{\max} = 3$  см.

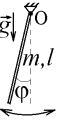
*Решение.*

Запишем уравнение гармонических колебаний груза в виде  $x = x_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Тогда начальное смещение и скорость груза в момент  $t = 0$  равны  $x_0 = x_{\max} \sin \alpha$  и  $v_0 = dx/dt|_{t=0} = x_{\max} \omega_0 \cos \alpha$ .

Исключаем из этих равенств начальную фазу  $\alpha$  с помощью соотношения  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ , т.е.  $\frac{v_0^2}{x_{\max}^2 \omega_0^2} = 1 - \frac{x_0^2}{x_{\max}^2}$ .

Отсюда  $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{v_0^2}{x_{\max}^2 - x_0^2}$  и  $m = k(x_{\max}^2 - x_0^2)/v_0^2 = 40$  г.

**7.2.** Тонкий стержень совершает незатухающие гармонические колебания вокруг горизонтальной оси подвеса О, проходящей через его край. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  угловая скорость вращения стержня относительно оси О равна нулю. В момент времени  $t = 0,4$  с величина угла отклонения стержня  $\varphi$  от положения равновесия в первый раз уменьшилась в три раза. Найти длину стержня  $l$ . Принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.



*Решение.*

Циклическая частота колебания такого физического маятника равна  $\omega_0 = \sqrt{mgd/I_0}$ , где  $d = l/2$ ,  $I_0 = ml^2/3$  - момент инерции стержня относительно оси О. Т.е.  $\omega_0 = \sqrt{mgd/I_0} = \sqrt{3g/2l}$ . По условию при  $t = 0$  стержень покоится и угол отклонения  $\varphi$  максимален. Поэтому зависимость угла  $\varphi$  от  $t$  можно записать в виде  $\varphi = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t)$ . А так как при  $t = 0,4$  с  $\varphi/\varphi_{\max} = \cos(\omega_0 t) = 1/3$ , то  $\omega_0 = \frac{\sqrt{3g}}{2l} = \frac{\arccos(1/3)}{t}$ . Отсюда  $l = \frac{3gt^2}{2 \arccos^2(1/3)} = 1,55$  м.

*Не забывайте, что угол  $\omega_0 t$  надо вычислять в радианах.*

**7.3.** Грузик на пружинке с жёсткостью  $k = 0,8$  Н/м совершает незатухающие колебания, скользя по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент  $t_0 = 0$  скорость груза была максимальной и равной  $v_0 = 9$  см/с. За последующий интервал времени  $t = T/3$ , где  $T$  - период колебаний, грузик проделал путь  $s = 1,8$  см. Найти массу  $m$  груза (в г).

*Решение.*

Согласно условию, координату груза можно записать в виде  $x = A \sin(\omega_0 t)$ . Тогда в начальный момент он находится в точке  $x_0 = 0$  и имеет максимальную скорость  $v_0 = dx/dt|_{t=0} = A\omega_0 = \max$ . В момент  $t = T/3 = 2\pi/3\omega_0$  координата груза равна  $x' = A \sin(2\pi/3) = A\sqrt{3}/2$ .

Но из рис.1.24 видно, что за время  $T/4$  грузик дойдёт до точки максимального смещения, а потом, совершая колебания, вернётся в точку с координатой  $x'$ . Прделанный за время  $T/3$  путь будет равен  $s = A + (A - x') = A(2 - \sqrt{3}/2)$ , откуда амплитуда колебаний  $A = s/(2 - \sqrt{3}/2) = 1,587$  см.

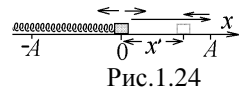


Рис.1.24

Подставляя её в формулу начальной скорости  $v_0 = A\omega_0$ , где  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , находим  $m = A^2 k / v_0^2 = 24,9$  г.

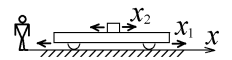
**7.4.** Грузик массы  $m = 15$  г, подвешенный на пружинке с жёсткостью  $k = 0,96$  Н/м, совершает незатухающие колебания. В начальный момент  $t_0 = 0$  скорость груза была равна нулю. За последующий интервал времени  $t = 3T/8$ , где  $T$  - период колебаний, грузик проделал путь  $s = 3$  см. Найти величину максимальной скорости, которую грузик может иметь в процессе движения.

*Решение.*

В отличие от предыдущей задачи, в момент  $t = 0$  смещение груза от положения равновесия было максимальным и равным амплитуде колебаний,  $x|_{t=0} = A$ . Затем грузик начнет двигаться к точке  $x = 0$ , и его координата будет меняться по закону  $x = A \cos(\omega_0 t)$ .

В момент  $t = \frac{3T}{8} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$  грузик окажется в точке  $x = A \cos \frac{3\pi}{4} = -A \frac{\sqrt{2}}{2}$ , т.е. проделает путь  $s = A + A \cdot \sqrt{2}/2$  (см.рис.1.24). Полученное отсюда выражение для амплитуды подставляем в формулу для максимальной величины скорости, которую грузик будет иметь в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = T/4$ :  $v_0 = A\omega_0 = \frac{s}{1 + \sqrt{2}/2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,141$  м/с.

**7.5.** Тележка совершает колебания в горизонтальном направлении относительно неподвижного наблюдателя по закону  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ . Лежащий на тележке груз одновременно совершает колебания с той же частотой относительно горизонтальной поверхности тележки по закону  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ . Относительно наблюдателя груз движется по закону  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\alpha = \pi/4$ . Найдите величину амплитуды  $A$  результирующего колебания, если  $A_1 = 10$  см,  $\alpha_1 = \pi/6$ ,  $\alpha_2 = \pi/3$ .



*Решение.*

Сумму однонаправленных колебаний, имеющих одну частоту  $\omega$ , удобно сложить методом векторной диаграммы. На рис.1.25,а векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  направлены под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  к оси  $x$  в момент  $t = 0$ . Эти векторы вращаются вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , и указанные углы возрастают со временем на величину  $\omega t$ . Сумма проекции таких векторов на ось  $x$  будет искомой суммой колебаний  $A \cos(\omega t + \alpha) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ .

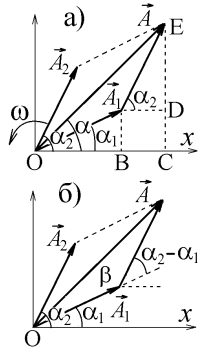


Рис.1.25

Из треугольников на рис.1.25, а видно, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CE}{OC} = \frac{CD+DE}{OB+BC} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} = 1$  при

$$\alpha = \pi/4. \text{ Подставляя сюда заданные в условии величины } \alpha_1 \text{ и } \alpha_2, \text{ находим } A_2 = \frac{\cos(\pi/6) - \sin(\pi/6)}{\sin(\pi/3) - \cos(\pi/3)} A_1 = A_1.$$

Углы между векторами не меняются, и, как видно из рис.1.25,б, амплитуду  $A$  результирующего колебания можно найти с помощью теоремы косинусов, зная две стороны треугольника  $A_1$  и  $A_2$  и угол

$$\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1) = 5\pi/6 \text{ между ними: } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta} = A_1 \sqrt{2 - 2\cos(5\pi/6)} = 19,3 \text{ см.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**7.6.** Чашка весов с гирей, подвешенная на пружине с коэффициентом жёсткости  $k = 20$  Н/м, совершала вертикальные незатухающие колебания с периодом  $T_0 = 2$  с. После того как на чашку добавили ещё одну гирию, период колебаний возрос на величину  $\Delta T = 0,5$  с. Найти массу  $\Delta m$  добавленной гири. Принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:* 1,14 кг

**7.7.** Грузик массы  $m = 40$  г на пружинке совершает вертикальные незатухающие колебания. В начальный момент времени  $t = 0$  смещение грузика относительно положения равновесия равно  $x_0 = 1,5$  см, а величина его скорости в этот момент времени равна  $v_0 = 0,2$  м/с. Найти коэффициент жёсткости пружинки, если максимальная величина скорости, которую будет иметь грузик, окажется равной  $v_{\max} = 0,25$  м/с.

*Ответ:* 4 Н/м

**7.8.** Тонкий стержень массы  $m$  совершает незатухающие гармонические колебания вокруг горизонтальной оси подвеса  $O$ , проходящей через его край. В начальный момент времени  $t = 0$  величина угловой скорости вращения стержня вокруг оси  $O$  равна  $\omega_0 = 0,3$  рад/с, а угол отклонения стержня от положения равновесия равен  $\phi_0 = 0,05$  рад. В дальнейшем максимальная величина угла отклонения окажется равной  $\phi_{\max} = 0,1$  рад. Найти длину стержня  $l$ . Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:* 1,25 м

**7.9.** Грузик массы  $m = 20$  г совершает вертикальные незатухающие колебания на пружинке с жёсткостью  $k = 1,6$  Н/м. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  грузик имеет максимальную величину скорости. Найти величину скорости грузика в момент времени  $t = 0,1$  с, если максимальное смещение грузика относительно положения равновесия равно  $x_{\max} = 2$  см.

*Ответ:* 0,112 м/с

**7.10.** Грузик массы  $m = 80$  г на пружинке совершает незатухающие колебания, скользя по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  скорость грузика была равна нулю. За последующий интервал времени  $t = 5T/12$ , где  $T$  – период колебаний, грузик проделал путь  $s = 1,2$  см. Найти величину коэффициента жёсткости  $k$  пружинки, если максимальная величина скорости грузика равна  $v_{\max} = 2,4$  см/с.

*Ответ:* 1,11 Н/м

**7.11.** Тележка совершает колебания в горизонтальном направлении относительно неподвижного наблюдателя по закону  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ . Лежащий на тележке груз одновременно колеблется относительно горизонтальной поверхности тележки с той же частотой по закону  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ . Относительно наблюдателя груз движется по закону  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ . Найти амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\alpha$  результирующего колебания, если  $A_1 = 20$  см,  $A_2 = 10$  см,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/4$ .

*Ответ:* 28,0 см; 0,255 рад

## 8. Физический маятник

Любое массивное тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса  $O$ , не проходящей через центр масс  $C$ , будет физическим маятником (рис.1.26). Циклическая частота незатухающих колебаний и период такого маятника определяются, как  $\omega = \sqrt{mgd/I_0}$ ,  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I_0/mgd}$ , где  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса  $O$ , который вычисляется по теореме Штейнера  $I_0 = I_c + md^2$ ,  $d = CO$  – расстояние от центра масс до оси подвеса.

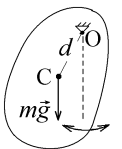


Рис.1.26

*Совет:* Если физический маятник сделан из нескольких прикрепленных друг к другу тел, то расстояние  $d$  отсчитывается от их общего центра масс, а в формулы надо подставлять сумму масс и сумму моментов инерций таких тел:  $T = 2\pi\sqrt{\sum I_0 / \sum m \cdot gd}$ .

*Примеры решения задач:*

**8.1.** Тонкий стержень длины  $l = 1$  м с массой  $m = 1$  кг подвешен за край и совершает незатухающие гармонические

колебания вокруг оси подвеса с периодом  $T = 1,6$  с, причем в центре  $O$  стержня закреплен груз с массой  $m_1$ , размером которого можно пренебречь. Определить массу  $m_1$ . Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.*

Центр масс маятника совпадает с центром стержня  $O$ , в котором находится масса  $m_1$ . Расстояние до оси подвеса  $d = l/2$ . Момент инерции относительно оси подвеса складывается из момента инерции стержня, вычисляемого по теореме Штейнера, и момента инерции точечной массы  $m_1$ :  $I = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 + m_1d^2 = \left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{4}m_1\right)l^2$ .

Из формулы для периода  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m+m_1)gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m/3+m_1/4)l^2}{(m+m_1)gl/2}}$  находим  $m_1 = \frac{8\pi^2l/3 - T^2g}{T^2g - 2\pi^2l} = 0,123$  кг.

**8.2.** Горизонтальная ось подвеса  $O$  проходит на расстоянии  $a = l/4$  от центра  $C$  тонкого стержня длины  $l$ , имеющего массу  $m$ , который совершает незатухающие гармонические колебания с циклической частотой  $\omega = 4$  с<sup>-1</sup> относительно этой оси. С другой стороны от центра  $C$  на том же расстоянии  $a$  на стержне закреплен груз той же массы  $m$ , размером которого можно пренебречь. Найти длину стержня  $l$ , принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.*

Так как массы стержня и прикрепленного точечного груза одинаковы, то общий центр масс маятника находится точно посередине отрезка между грузом и центром стержня на расстоянии  $d = 3a/2$  от оси подвеса (рис.1.27). Момент инерции относительно этой оси складывается из момента инерции стержня, вычисляемого по теореме Штейнера, и момента инерции точечной массы  $m$ :  $I = \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 + m(2a)^2 = \frac{19}{48}ml^2$ , так как  $a = l/4$ .

Из формулы для частоты колебаний физического маятника  $\omega = \sqrt{(m+m)gd/I} = \sqrt{36g/19l}$  находим  $l = 36g/19\omega^2 = 1,16$  м.

**8.3.** Тонкий диск с массой  $m$  и с радиусом  $R = 30$  см совершает незатухающие колебания относительно оси подвеса  $O$ , проходящей перпендикулярно плоскости диска на расстоянии  $a = 15$  см от его центра. В нижней точке диска закреплен груз той же массы  $m$ , размером которого можно пренебречь. Определить циклическую частоту колебаний, принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.*

Так как массы диска и груза одинаковы и  $a = R/2$ , то общий центр масс маятника находится посередине между центром диска и точечной массой  $m$  на расстоянии  $d = a + R/2 = R$  от оси подвеса. Общий момент инерции маятника относительно оси  $O$  складывается из момента инерции диска  $I_{\text{диска}} = mR^2/2 + ma^2 = 3mR^2/4$  (по теореме Штейнера) и момента инерции груза  $I_{\text{груза}} = m(R+a)^2 = 9mR^2/4$ . Подставляя эти соотношения в формулу для циклической частоты колебаний маятника, находим  $\omega = \sqrt{\frac{(m+m)gd}{I_{\text{диска}} + I_{\text{груза}}}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = 4,67$  с<sup>-1</sup>.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**8.4.** Тонкий стержень с массой  $m$  подвешен за край и совершает незатухающие гармонические колебания с периодом  $T = 2$  с, причем на его противоположном конце закреплен груз той же массы  $m$ , размером которого можно пренебречь. Найти длину  $l$  стержня. Принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:* 1,12 м

**8.5.** Два одинаковых тонких стержня длины  $l = 90$  см совершают незатухающие гармонические колебания. У одного из них горизонтальная ось подвеса  $O$  проходит через край, а у другого находится на расстоянии  $a$  от центра  $C$  стержня (см. рисунок). Определить расстояние  $a$ , если периоды колебаний обоих стержней одинаковы.

*Ответ:* 15 см

**8.6.** Тонкий диск с массой  $m = 100$  г подвешен за край и совершает незатухающие гармонические колебания с циклической частотой  $\omega = 4$  с<sup>-1</sup> в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. В центре диска закреплен груз массы  $m_1 = 300$  г, размером которого можно пренебречь. Принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найти радиус диска  $R$ .

*Ответ:* 0,544 м

**8.7.** Горизонтальная ось подвеса  $O$  проходит на расстоянии  $a = R/2$  от центра тонкого диска, имеющего массу  $m$ , который совершает незатухающие гармонические колебания с периодом  $T = 1$  с в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. С другой стороны от центра диска на расстоянии  $a$  закреплен груз той же массы  $m$ , размером которого можно пренебречь. Найти радиус диска  $R$ , принимая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

*Ответ:* 0,213 м

**8.8.** Два одинаковых тонких диска с радиусом  $R = 1$  м совершают незатухающие гармонические колебания в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. У одного из них горизонтальная ось подвеса  $O$  проходит через край, а у другого находится на расстоянии  $a$  от центра диска (см. рисунок). Определить расстояние  $a$ , если период колебания левого диска в 2 раза меньше периода колебаний правого диска.

*Ответ:* 8,45 см

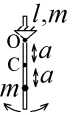
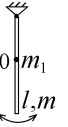
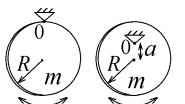
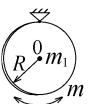
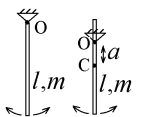
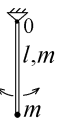


Рис.1.27



## 9. Собственные механические затухающие колебания

На колеблющийся в вязкой среде пружинный маятник действует тормозящая сила вязкого трения. Если на пружинке подвешен шарик радиуса  $r$ , движущийся со скоростью  $v$  (рис.1.28), то эта сила имеет вид  $\vec{F}_{\text{тр}} = -6\pi\eta r\vec{v}$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкости среды. В результате колебания затухают по закону

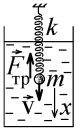


Рис.1.28

$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда колебаний, убывающая по экспоненциальному закону,  $\beta$  – коэффициент затухания колебаний, пропорциональный вязкости  $\eta$ .

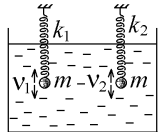
Такие колебания происходят с циклической частотой  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  и с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ .

С ростом коэффициента затухания  $\beta$  период растёт, и колебания прекращаются, когда  $\beta \geq \omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Затухание колебаний характеризуют также величиной логарифмического декремента затухания, который в задачах можно вычислить по формуле  $\theta = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ .

*Примеры решения задач:*

**9.1.** Два одинаковых шарика подвешены на пружинках с разной жёсткостью  $k_1 = 0,02$  Н/м и  $k_2 = 0,04$  Н/м и совершают колебания в вязкой жидкости, причем отношение частот колебаний правого и левого шариков равно  $v_2/v_1 = 2$ , а коэффициент затухания колебаний этих маятников  $\beta = 0,8$  с<sup>-1</sup>. Найти массу шарика  $m$  (в г).



*Решение.*

Отношение  $\frac{v_2/v_1}{\omega_2/\omega_1}$  равно отношению циклических частот данных пружинных маятников  $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{k_2/m - \beta^2} / \sqrt{k_1/m - \beta^2} = 2$ , откуда легко получить формулу  $m = (4k_1 - k_2) / 3\beta^2 = 20,8$  г.

**9.2.** Период собственных незатухающих колебаний шарика с массой  $m$ , висющего на пружинке с жёсткостью  $k$ , был равен  $T_0 = 2$  с. Этот маятник погрузили в вязкую жидкость, где период его колебаний стал равным  $T = 2,5$  с. Во сколько раз надо увеличить коэффициент вязкости этой жидкости, чтобы колебания маятника в ней прекратились?

*Решение.*

Заданные в условии периоды колебаний определяются формулами

$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - \beta^2}}$ , откуда  $\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$ ,  $\beta^2 = \frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}$ . Колебания прекратятся, если  $\beta'^2 = k/m = 4\pi^2/T_0^2$ , т.е.

вязкость жидкости надо увеличить в  $\frac{\beta'}{\beta} = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} / \left( \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2} \right)} = \sqrt{\frac{T^2}{T^2 - T_0^2}} = 1,67$  раз.

**9.3.** Шарик на пружинке с жёсткостью  $k = 0,08$  Н/м совершает колебания в вязкой жидкости, причем его координата меняется со временем по закону  $x = A \exp(-at) \cos(bt + \alpha)$ , где  $A$ ,  $a$  и  $\alpha$  – постоянные,  $b = 2$  с<sup>-1</sup>, а логарифмический декремент затухания этих колебаний равен  $\theta = 4$ . Чему равна масса  $m$  шарика?

*Решение.*

Постоянные  $a$  и  $b$  в уравнении затухающих колебаний должны быть равны коэффициенту затухания и циклической частоте колебаний:  $a = \beta$ ,  $b = \omega$ . При этом не заданную в условии постоянную  $a$  можно определить через известный логарифмический декремент затухания  $\theta = \beta T = 2\pi\beta/\omega = 2\pi a/b$  или  $a = b\theta/2\pi$ .

Подставляя это выражение в формулу для циклической частоты  $b = \omega = \sqrt{k/m - a^2}$ , находим

$$m = k / \left( \frac{\theta^2}{4\pi^2} + 1 \right) b^2 = 14,2 \text{ г}$$

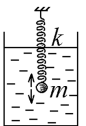
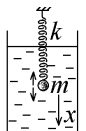
**9.4.** Шарик массы  $m = 50$  г на пружинке совершал вертикальные колебания в жидкости, причем за время  $\Delta t = 0,5$  с амплитуда его колебаний уменьшалась в  $\exp(1) = 2,72$  раз. Затем жидкость заменили, увеличив коэффициент её вязкости в два раза. При этом период колебаний груза увеличился в два раза. Найти величину жёсткости  $k$  пружинки.

*Решение.*

Так как амплитуда  $A_0 e^{-\beta t}$  убывает со временем экспоненциально, то по условию  $\beta \Delta t = 1$  и  $\beta = (\Delta t)^{-1} = 2$  с<sup>-1</sup>.

Подставляя эту величину в заданное по условию отношение периодов  $\frac{T'}{T} = \frac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\frac{k/m - \beta^2}{k/m - \beta'^2}} = 2$ , где  $\beta' = 2\beta$ , нахо-

дим  $\frac{k}{m} = 5\beta^2$ , откуда  $k = 5\beta^2 m = 1$  Н/м.



**9.5.** Шарик с массой  $m$  на пружинке с жёсткостью  $k$  совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости. Жидкость заменили, увеличив коэффициент её вязкости в два раза. Чему стал равен после этого логарифмический декремент затухания колебаний такого пружинного маятника, если первоначально он был равен  $\theta = 1$ ?

*Решение.*

При увеличении вязкости жидкости во столько же раз увеличивается коэффициент затухания  $\beta$ , пропорциональный вязкости  $\eta$ :  $\beta' = 2\beta$ .

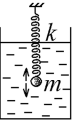
Выражая неизвестное отношение  $k/m$  из формулы для начальной величины логарифмического декремента затухания

$$\theta = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{k/m - \beta^2}}, \quad \frac{k}{m} = \beta^2 \left( 1 + \frac{4\pi^2}{\theta^2} \right), \text{ подставляем его в формулу для } \theta' = \frac{2\pi\beta'}{\sqrt{k/m - \beta'^2}}, \text{ что даёт } \theta' = 4\pi / \sqrt{\frac{4\pi^2}{\theta^2} - 3} = 2,081.$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

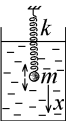
**9.6.** Шарик массы  $m$  на пружинке с жёсткостью  $k$  совершал вертикальные колебания с периодом  $T_1 = 1$  с в вязкой жидкости. Если жидкость заменить, уменьшив коэффициент её вязкости в 2 раза, то период колебаний также уменьшится в 2 раза. Чему равен период  $T_0$  незатухающих колебаний такого пружинного маятника в воздухе?

*Ответ:* 0,447 с



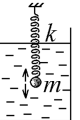
**9.7.** Шарик на пружинке с жёсткостью  $k = 0,04$  Н/м совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости, причем за время  $\Delta t = 1$  с амплитуда колебаний уменьшалась в  $\exp(1) = 2,72$  раз, а координата шарика менялась со временем по закону  $x = A \exp(-at) \cos(bt + \alpha)$ , где  $A$ ,  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  – постоянные. Жидкость разбавили водой, уменьшив при этом коэффициент её вязкости в два раза. После этого величина  $b$  увеличилась в полтора раза. Чему равна масса  $m$  шарика?

*Ответ:* 25 г



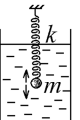
**9.8.** Шарик массы  $m = 5$  г на пружинке с жёсткостью  $k = 0,02$  Н/м совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости, причем за время  $\Delta t = 2$  с амплитуда его колебаний уменьшалась в  $\exp(1) = 2,72$  раз. Грузик заменили, подвесив на пружинку шарик того же размера, но с массой  $m' = 10$  г. Во сколько раз изменился при этом логарифмический декремент затухания колебаний такого пружинного маятника?

*Ответ:* увеличился в 1,464 раза



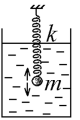
**9.9.** Шарик с массой  $m = 10$  г на пружинке совершает вертикальные колебания в вязкой жидкости. Колебания на пружинке с жёсткостью  $k = 0,2$  Н/м происходят с циклической частотой  $\omega = 2$  с<sup>-1</sup>. Во сколько раз надо уменьшить жёсткость пружинки, чтобы колебания прекратились?

*Ответ:* уменьшить в 1,25 раз



**9.10.** Шарик с массой  $m$  на пружинке с жёсткостью  $k$  совершал в воздухе незатухающие вертикальные колебания. Когда такой маятник поместили в вязкую жидкость, он стал колебаться с периодом  $T = 1$  с, причем логарифмический декремент затухания таких колебаний оказался равным  $\theta = 4$ . С каким периодом маятник колебался в воздухе?

*Ответ:* 0,844 с



## 10. Вынужденные механические колебания. Резонанс

Вынужденные колебания возникают при действии на маятник внешней периодической силы, изменяющейся, например, по гармоническому закону с амплитудой  $F_0$  и частотой  $\omega_{\text{вн}}$ :  $F_{\text{вн}} = F_0 \cos \omega_{\text{вн}} t$ .

В случае пружинного маятника массы  $m$ , подвешенного на пружинке с жесткостью  $k$  и движущегося в вязкой среде с коэффициентом вязкости  $\eta$ , эта сила добавляется к силам упругости и вязкого трения (рис.1.29).

Вынужденные колебания происходят по закону  $x(t) = A \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi)$  с постоянной амплитудой  $A = \text{const}$  и с частотой  $\omega_{\text{вн}}$  внешней силы. Чтобы найти амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi$ , надо подставить это

решение в уравнение динамики  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega_{\text{вн}} t$ .

При этом амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты внешней силы (рис.1.30):

$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{вн}}^2}}$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\beta$  – коэффициент затухания. Максимум этого выражения (резонанс амплитуды смещения) получается при частоте внешней силы  $\omega_{\text{вн}} = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .



Рис.1.29

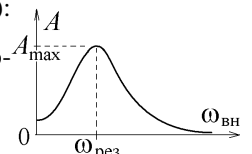


Рис.1.30

Из определения  $v = dx/dt$  можно найти амплитуду скорости  $v_0 = A\omega_{\text{вн}}$  маятника при вынужденных колебаниях. Она также зависит от частоты  $\omega_{\text{вн}}$  (рис.1.31) и достигает максимума (резонанс амплитуды скорости) при другом значении частоты внешней силы  $\omega_{\text{рез} v} = \omega_0 = k/m$ .

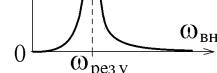
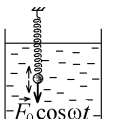


Рис.1.31

*Примеры решения задач:*

**10.1.** Грузик на пружинке совершает вертикальные колебания с постоянной амплитудой в вязкой жидкости под действием внешней силы  $F_0 \cos \omega t$ . При частоте внешней силы, равной  $\omega = \omega_1$ , максимальна амплитуда смещения грузика, а при частоте  $\omega = \omega_2$  максимальна амплитуда его скорости. Если





действие внешней силы убрать, то грузик начнет совершать затухающие колебания с циклической частотой  $\omega_3$ . Найти величину отношения частот  $\omega_1/\omega_3$ , если  $\omega_2/\omega_1 = 3$ .

*Решение.*

Так как  $\omega_1 = \omega_{\text{рез}A} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ ,  $\omega_2 = \omega_{\text{рез}v} = \omega_0$  (резонансные частоты амплитуд смещения и скорости) и  $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  (собственная частота затухающих колебаний), то из заданного отношения  $\omega_2/\omega_1 = \omega_0/\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 3$  находим  $\beta^2 = 4\omega_0^2/9$ . Подставляя это выражение, находим отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{1-8/9}}{\sqrt{1-4/9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = 0,447$ .

**10.2.** Маленький грузик прикреплен за пружинку с жёсткостью  $k = 5$  Н/м к вертикальной стенке и совершает колебания по горизонтальной поверхности под действием внешней силы  $F = F_0 \cos \omega t$ , меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup> и амплитудой  $F_0 = 0,08$  Н. Трение отсутствует. Найти массу  $m$  грузика, если амплитуда его колебаний равна  $A = 2$  см.

*Решение.*

Подставим решение, соответствующее вынужденным колебаниям с постоянной амплитудой  $x = A \cos \omega t$  в уравнение динамики (2-й закон Ньютона)  $m \cdot d^2 x / dt^2 = -kx + F_0 \cos \omega t$  (в случае отсутствия вязких сил трения смещение  $x = A \cos \omega t$  происходит в одной фазе с изменением внешней силы  $F_0 \cos \omega t$ ). После подстановки получим  $-m\omega^2 A \cos \omega t = -kA \cos \omega t + F_0 \cos \omega t$ . Сокращая на  $\cos \omega t$ , имеем  $m\omega^2 A = kA - F_0$ , откуда  $m = \frac{kA - F_0}{\omega^2 A} = 40$  г.

**10.3.** Грузик массы  $m = 30$  г на пружинке совершал вертикальные незатухающие колебания с циклической частотой  $\omega_0 = 6$  с<sup>-1</sup>. Когда на грузик начала действовать вертикально направленная внешняя сила  $F = F_0 \cos \omega t$  с амплитудой  $F_0 = 0,012$  Н, он стал колебаться относительно положения равновесия с амплитудой  $A = 2$  см. Вязкое трение отсутствует. Найти максимальную величину скорости вынужденных колебаний грузика.

*Решение.*

Как и в предыдущей задаче, подставляем решение  $x = A \cos \omega t$  в уравнение динамики  $m \cdot d^2 x / dt^2 = -kx + F_0 \cos \omega t$  (сила тяжести уравновешена силой упругости пружинки в положении равновесия). Вычисляя производную и сокращая на  $\cos \omega t$ , получим  $m\omega^2 A = kA - F_0$ . Из этого соотношения можно найти неизвестную частоту внешней силы, если выразить коэффициент жёсткости пружинки  $k$  через частоту собственных незатухающих колебаний  $k = m\omega_0^2$ . Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{kA - F_0}{mA}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{F_0}{mA}} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость грузика  $v = dx/dt = -A\omega \sin \omega t$  имеет максимальную величину  $v_{\text{max}} = A\omega = 0,08$  м/с.

**10.4.** Шарик массы  $m = 60$  г на пружинке совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости под действием внешней силы  $F_0 \cos \omega t$ , меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega$ , причем при частоте  $\omega = \omega_1 = 8$  с<sup>-1</sup> наблюдалось максимальное увеличение амплитуды колебаний. Если вязкость жидкости увеличить в два раза, то амплитуда смещения шарика снова окажется максимальной при другом значении циклической частоты внешней силы  $\omega = \omega_2 = 6$  с<sup>-1</sup>. Найти величину коэффициента жёсткости  $k$  пружинки.

*Решение.*

Резонанс амплитуды достигался при частоте  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_1^2}$ . Изменив вязкость жидкости  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ , изменили резонансную частоту амплитуды смещения  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}$ . Из этих формул можно получить заданное в условии отношение коэффициентов затухания колебаний, пропорциональных вязкости жидкости:  $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_2^2}} = 2$ . Из этого отношения находим

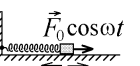
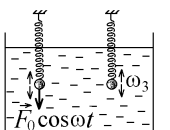
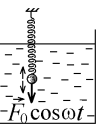
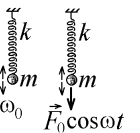
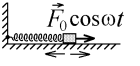
$$\omega_0^2 = \frac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{3} \text{ и } k = m\omega_0^2 = m \frac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{3} = 4,4 \text{ Н/м.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**10.5.** Два одинаковых грузика на одинаковых пружинках совершают вертикальные колебания в вязкой жидкости. Левый грузик колеблется с постоянной амплитудой под действием внешней силы  $F_0 \cos \omega t$ , меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega$ . При частоте внешней силы, равной  $\omega = \omega_1$  максимальна амплитуда смещения левого грузика, а при частоте  $\omega = \omega_2$  максимальна амплитуда его скорости. Правый грузик совершает свободные затухающие колебания с циклической частотой  $\omega_3$ . Найти величину отношения частот  $\omega_1/\omega_3$ , если  $\omega_2/\omega_3 = 1,4$ .

*Ответ:* 0,2

**10.6.** Один конец пружинки с жёсткостью  $k = 6$  Н/м прикреплен к стене, а на другом конце закреплен маленький грузик, который совершает незатухающие колебания по горизонтальной абсолютно гладкой поверхности с циклической частотой  $\omega_0 = 6$  с<sup>-1</sup>. Когда на грузик начала действовать внешняя сила  $F = F_0 \cos \omega t$ , ме-

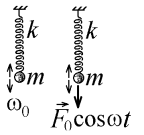


няющаяся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ , он стал колебаться с амплитудой  $A = 2,4 \text{ см}$ . Найти величину амплитуды  $F_0$  этой силы.

Ответ: 0,08 Н

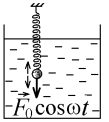
**10.7.** Грузик на пружинке с жёсткостью  $k = 5 \text{ Н/м}$  совершал вертикальные незатухающие колебания с циклической частотой  $\omega_0$ . Когда на грузик начала действовать вертикально направленная внешняя сила  $F = F_0 \cos \omega t$  с амплитудой  $F_0 = 0,084 \text{ Н}$ , меняющаяся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega$ , он стал колебаться относительно положения равновесия с амплитудой  $A = 2 \text{ см}$ . Вязкое трение отсутствует. Найти величину отношения частот  $\omega/\omega_0$ .

Ответ: 2,5



**10.8.** Шарик массы  $m = 40 \text{ г}$  на пружинке с жёсткостью  $k = 4,8 \text{ Н/м}$  совершает вертикальные колебания в вязкой жидкости под действием внешней силы  $F_0 \cos \omega t$ , меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega$ , причем при частоте  $\omega = \omega_1 = 6 \text{ с}^{-1}$  наблюдается максимальное увеличение амплитуды колебаний. Во сколько раз надо уменьшить коэффициент вязкости жидкости, чтобы максимум амплитуды смещения шарика наблюдался при новом значении частоты внешней силы  $\omega = \omega_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ ?

Ответ: в 2,05 раз



## 11. Первое начало термодинамики. Работа идеального газа



Чтобы решить любую термодинамическую задачу надо записать и решить систему из следующих уравнений:

1) Уравнения состояния; 2) Уравнения всех заданных по условию равновесных термодинамических процессов; 3) Уравнение первого начала термодинамики.

Для используемого при решении задач контрольной работы идеального газа такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} pV = \frac{m}{\mu} RT & (\text{уравнение состояния идеального газа}); \\ f(p, V, T) = 0 & (\text{уравнение процесса}); \\ Q = \Delta U + A_{\text{газа}} & (\text{первое начало термодинамики}). \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Здесь  $p$  – давление,  $V$  – объём,  $T$  – термодинамическая температура газа (в К),  $m$  – его масса,  $\mu$  – молярная масса,  $Q$  – теплота, получаемая (при  $Q > 0$ ) или отдаваемая (при  $Q < 0$ ) газом.

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется изменением его температуры

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T,$$

где  $i$  – число степеней свободы молекул газа,  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$  – универсальная газовая постоянная. Работа идеального газа вычисляется по формуле  $A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ . Она различна для разных газовых процессов, положительна, если газ расширяется, и отрицательна, если газ сжимается.



Если работа совершается внешними телами над газом, то она меняет знак:  $A_{\text{над газом}} = -A_{\text{газа}}$ . Следите за этим условием. Следите за тем, принимает или отдаёт газ теплоту  $Q$ . От этого зависят знаки величин в уравнении 1-го начала термодинамики.

Примеры решения задач:

**11.1.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление растёт с изменением объёма по закону  $p = \alpha V^6$ , где  $\alpha = 1400 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-20}$ . Объём газа возрастает от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 2 \text{ м}^3$ . При этом газу сообщается теплота  $Q = 292,1 \text{ кДж}$ . Найти приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$  (в кДж).

Решение.

Вычисляем работу газа. Так как  $V_2 = 2V_1$ , то

$$A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \alpha \int_{V_1}^{2V_1} V^6 dV = \alpha \frac{(2V_1)^7 - V_1^7}{7} = \alpha \frac{2^7 - 1}{7} V_1^7 = \frac{127}{7} \alpha V_1^7 = 25,4 \text{ кДж}.$$

Из уравнения 1-го начала термодинамики:  $\Delta U = Q - A_{\text{газа}} = 266,7 \text{ кДж}$ .

**11.2.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением объёма по закону  $T = \frac{\alpha}{R} V^{1/4}$ , где  $\alpha = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}^{1/4} / \text{моль}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 16 \text{ м}^3$ . При этом газу сообщается теплота  $Q = 700 \text{ Дж}$ . Найти приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$  (в Дж).

Решение.



Чтобы вычислить работу газа по формуле  $A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  надо выразить все переменные под знаком интеграла через одну переменную, пределы изменения которой заданы в условии задачи. Это можно сделать, используя уравнение состояния и уравнение процесса.

Исключаем температуру  $T$  из уравнения состояния для  $m/\mu = 1$  моля газа и заданного в условии уравнения процесса,

$T = \frac{pV}{R} = \frac{\alpha}{R} V^{1/4}$ . Отсюда находим связь  $p = \alpha V^{-3/4}$ . С учётом  $V_2 = 2^4 V_1$  работа газа при его расширении

$$A_{\text{газа}} = \alpha \int_{V_1}^{V_2} V^{-3/4} dV = \alpha \frac{(2^4 V_1)^{1/4} - V_1^{1/4}}{1/4} = 4\alpha V_1^{1/4}. \text{ Из уравнения первого начала термодинамики находим}$$

$$\Delta U = Q - A_{\text{газа}} = Q - 4\alpha V_1^{1/4} = 300 \text{ Дж.}$$

**11.3.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его давление изменяется с ростом температуры по закону  $p = \alpha R^3 T^3$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\alpha = 10^{-6} \text{ Н}^{-2} \cdot \text{м}^{-5}$ , а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 16 \text{ м}^3$ . При этом газ отдаёт теплоту  $Q = 500 \text{ Дж}$ . На какую величину  $\Delta U$  изменится внутренняя энергия газа?

*Решение.*

Находя температуру из уравнения состояния для 1 моля газа,  $T = pV/R$ , исключаем её из заданного в условии уравнения процесса:  $p = \alpha R^3 T^3 = \alpha \cdot (pV/R)^3$ , откуда  $p = \alpha^{-1/2} V^{-3/2}$ . Учтём, что газ не получает, а отдаёт теплоту. Тогда уравнение первого начала термодинамики следует записать, как

$$\Delta U = -|Q| - A_{\text{газа}} = -|Q| - \alpha^{-1/2} \int_{V_1}^{V_2} V^{-3/2} dV = -|Q| - \alpha^{-1/2} \frac{V_2^{-1/2} - V_1^{-1/2}}{-1/2} = -|Q| - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{1}{\sqrt{V_1}} - \frac{1}{\sqrt{V_2}} \right) = -|Q| - \frac{2}{\sqrt{\alpha V_1}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{16}} \right) = -2 \text{ кДж.}$$

Внутренняя энергия будет уменьшаться, так как газ охлаждается.

**11.4.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его объём уменьшается с ростом давления по закону  $V = \alpha p^{-1}$ , где  $\alpha = 4 \text{ кДж/моль}$ . Начальное давление газа  $p_1 = 25 \text{ кПа}$ . Найти величину конечного давления после того, как газ отдаст теплоту  $Q = 6 \text{ кДж}$ .

*Решение.*

Так как в условии задана начальная величина давления газа, а не его объёма, то при вычислении работы, совершаемой газом, проще под интегралом оставить переменную  $p$ . Подставляя  $dV = d\left(\frac{\alpha}{p}\right) = -\alpha \frac{dp}{p^2}$ , находим

$$A_{\text{газа}} = \int p dV = -\alpha \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\alpha \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) < 0 \text{ (работа отрицательна, поскольку газ сжимается).}$$

Заданный в условии процесс  $pV = \alpha = \text{const}$  является изотермическим, т.е. внутренняя энергия газа не меняется ( $\Delta U = 0$ ), а уравнение I-го начала термодинамики имеет вид  $-|Q| = A_{\text{газа}} = -\alpha \ln(p_2/p_1)$ . Взяв экспоненту от логарифма, получим  $p_2 = p_1 \exp(|Q|/\alpha) = 112 \text{ кПа}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**11.5.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его давление уменьшается с увеличением объёма по закону  $p = \alpha/V^5$ , где  $\alpha = 6400 \text{ Н} \cdot \text{м}^{13}$ , а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 2 \text{ м}^3$ . При этом газ отдаёт теплоту  $Q = 7,5 \text{ кДж}$ . На какую величину  $\Delta U$  (в кДж) изменится внутренняя энергия газа?

*Ответ:* уменьшится на 9 кДж

**11.6.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его объём изменяется с изменением давления по закону  $V = \alpha p^4$ , где  $\alpha = 6,25 \cdot 10^{-10} \text{ Н}^{-4} \cdot \text{м}^{11}$ , а давление газа увеличивается от начального значения  $p_1 = 200 \text{ Па}$  до  $p_2 = 400 \text{ Па}$ . При этом газу сообщается теплота  $Q = 14,26 \text{ кДж}$ . Найти приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$ .

*Ответ:* 9,3 кДж

**11.6.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением объёма по закону  $T = \alpha V^4$ , где  $\alpha \cdot R = 4000 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-11}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 2 \text{ м}^3$ . Какое тепло (в кДж) получает при этом газ, если его внутренняя энергия возрастает на величину  $\Delta U = 90 \text{ кДж}$ ?

*Ответ:* 105 кДж

**11.6.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) уменьшается с увеличением объёма по закону  $T = \alpha V^{-5}$ , где  $\alpha \cdot R = 8000 \text{ Н} \cdot \text{м}^{16}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 2 \text{ м}^3$ . Какую теплоту (в кДж) отдаёт при этом газ, если его внутренняя энергия уменьшается на величину  $\Delta U = 23,25 \text{ кДж}$ ?

*Ответ:* 21,7 кДж

**11.7.** Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением давления по закону  $T = \frac{\alpha}{R} p^4$ , где  $\alpha = 10^{-6} \text{ м}^9/(\text{Н}^3 \cdot \text{моль})$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения  $V_1 = 1 \text{ м}^3$  до  $V_2 = 8 \text{ м}^3$ . При этом газу сообщается теплота  $Q = 5625 \text{ Дж}$ . Найти приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$ .

Ответ: 4,5 кДж

## 12. Теплоёмкость термодинамических процессов

Молярная теплоёмкость  $C$  любого термодинамического процесса определяется формулой  $\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT}$ . Для процессов идеального газа она примет вид  $\frac{m}{\mu} C_{\text{идгаза}} = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R + \frac{pdV}{dT}$ . С помощью этой формулы можно вычислить количество теплоты, принимаемой или отдаваемой при увеличении или уменьшении температуры от величины  $T_1$  до  $T_2$ :

$$Q = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C dT.$$

Процессы с постоянной теплоёмкостью называются политропическими. Частным случаем политропического процесса будет изохорический  $\left(C_{V=\text{const}} = \frac{i}{2} R\right)$  или изобарический  $\left(C_{p=\text{const}} = C_V + R = \frac{i+2}{2} R\right)$  процесс. Но политропический процесс может иметь любую постоянную теплоёмкость  $C = \text{const}$ .

*Примеры решения задач:*

**12.1.** Метан  $\text{CH}_4$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его давление возрастает с ростом температуры по закону  $p = \alpha T^3$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоёмкости  $C$  этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Решение.*

*Совет:* Чтобы вычислить  $C$ , надо последовательно исключить неизвестные термодинамические переменные из системы  $(\Sigma)$  на стр.26.

Из уравнения состояния идеального газа и заданного в условии уравнения процесса можно исключить давление газа:  $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \alpha T^3$ . Это позволит записать уравнение процесса с помощью других параметров:  $V = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\alpha T^2}$ . Вычислив производную от этой функции,  $\frac{dV}{dT} = -2 \frac{m}{\mu} \frac{R}{\alpha T^3} = -2 \frac{m}{\mu} \frac{R}{p}$ , подставим её в определение теплоёмкости:

$$\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R + \frac{pdV}{dT} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R - 2 \frac{m}{\mu} R.$$

*Совет:* Помните, что для температур, предполагаемых условиями данных задач, число степеней свободы одной молекулы газа равно  $i = 3$  для одноатомного газа;  $i = 5$  для двухатомного газа;  $i = 6$  для газа с тремя и больше атомами в молекуле.

Отсюда  $C = \left(\frac{i}{2} - 2\right) R = R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ , так как для многоатомной молекулы метана  $i = 6$ .

**12.2.** Водород  $\text{H}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его температура возрастает с ростом давления по закону  $T = (\alpha \cdot p)^4$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Решение.*

Как и в задаче 12.1, для нахождения теплоёмкости  $C$  процесса надо найти производную  $dV/dT$ , т.е. с помощью уравнения состояния идеального газа выразить уравнение процесса через переменные  $V$  и  $T$ . Для  $\frac{m}{\mu} = 1$  моля газа  $p = \frac{RT}{V}$  (уравнение состояния) и  $p = (T/\alpha)^{1/4}$  (уравнение процесса). Приравнявая, находим  $V = \alpha^{1/4} RT^{3/4}$ , откуда производная

$$\frac{dV}{dT} = \frac{3}{4} R \left(\frac{\alpha}{T}\right)^{1/4} = \frac{3}{4} \frac{R}{p}.$$

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{i}{2} R + \frac{pdV}{dT} = \frac{5}{2} R + \frac{3}{4} R = \frac{13}{4} R = 27,0 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}.$$

**12.3.** Три моля идеального газа совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в четыре раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Если газ отдаст 99,7 кДж тепла, то его термодинамическая температура уменьшится в два раза. Определить число степеней свободы молекул газа. Начальная температура

газа  $t^{\circ}\text{C} = 227^{\circ}\text{C}$ .  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Решение.*

По условию молярная теплоемкость процесса  $C = 4C_p = 4 \frac{i+2}{2} R$ . При постоянной теплоемкости процесса количество теплоты, отданное  $m/\mu = 3$  молями газа при уменьшении температуры от значения  $T_1 = T = 227 + 273 = 500 \text{ К}$  до значения  $T_2 = T/2$ , будет равно  $|Q| = \left| 3 \int_{T_1}^{T_2} C dT \right| = 3C \left( T - \frac{T}{2} \right) = 3(i+2)RT$ , откуда  $i = \frac{|Q|}{3RT} - 2 = 6$ .

**12.4.** Один моль кислорода  $\text{O}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором молярная теплоемкость меняется с температурой газа по закону  $C = C_0 (T/T_0)^8$ , где  $T_0 = 250 \text{ К}$  – начальная температура газа,  $C_0 = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ . Какую работу совершит газ, нагреваясь до температуры  $T = 500 \text{ К}$ ?  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Решение.*

$$\text{Нагреваясь, } m/\mu = 1 \text{ моль газа получает теплоту } Q = \int_{T_1=T_0}^{T_2=2T_0} C dT = \frac{C_0}{T_0^8} \int_{T_1=T_0}^{T_2=2T_0} T^8 dT = \frac{C_0}{T_0^8} \left( \frac{(2T_0)^9}{9} - \frac{T_0^9}{9} \right) = \frac{511}{9} C_0 T_0.$$

Согласно первому началу термодинамики совершенная им работа будет равна  $A = Q - \Delta U$ , где изменение внутренней энергии одного моля двухатомного ( $i=5$ ) газа равно  $\Delta U = \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R T_0$ . Отсюда  $A = \left( \frac{511}{9} C_0 - \frac{5}{2} R \right) T_0 = 112,8 \text{ кДж}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**12.5.** Кислород  $\text{O}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его объем возрастает с ростом температуры по закону  $V = \alpha T^4$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоемкости этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 54,0 Дж/К·моль

**12.6.** Метан  $\text{CH}_4$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его объем уменьшается с ростом температуры по закону  $V = \alpha T^{-2}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоемкости этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 8,31 Дж/К·моль

**12.7.** Азот  $\text{N}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его давление уменьшается с ростом температуры по закону  $p = \alpha T^{-4}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоемкости этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 62,3 Дж/К·моль

**12.8.** Аммиак  $\text{NH}_3$ , который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его температура уменьшается с ростом давления по закону  $T = (\alpha \cdot p)^{-4}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Найти величину молярной теплоемкости этого процесса.  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 35,3 Дж/К·моль

**12.9.** Гелий  $\text{He}$ , который можно считать идеальным газом, совершает политропический процесс, молярная теплоемкость которого в три раза меньше молярной теплоемкости этого газа при постоянном давлении. Отдавая 3 кДж тепла, газ охлаждается от температуры  $27^{\circ}\text{C}$  до температуры  $-27^{\circ}\text{C}$ . Определить количество гелия (в молях). Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 8,02 моля

**12.10.** Один моль углекислого газа  $\text{CO}_2$ , который можно считать идеальным, совершает процесс, при котором молярная теплоемкость меняется с температурой газа по закону  $C = C_0 (T/T_0)^3$ , где  $T_0 = 300 \text{ К}$  – начальная температура газа,  $C_0 = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ . Какую работу совершит газ, нагреваясь до температуры  $T = 600 \text{ К}$ ?  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 1,87 кДж

**12.11.** Пять молей идеального газа, совершают политропический процесс с молярной теплоемкостью  $C = 49,86 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ , при котором термодинамическая температура газа уменьшается в два раза, а газ сжимается, и над ним совершают работу  $A = 37,4 \text{ кДж}$ . Определить число степеней свободы молекул газа. Начальная температура газа  $t^{\circ}\text{C} = 127^{\circ}\text{C}$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .

*Ответ:* 3

### 13. Изменение энтропии термодинамической системы

Если происходит равновесный процесс, при котором термодинамическая система получает (отдаёт) количество теплоты  $\delta Q$ , то её энтропия изменяется на величину  $dS = \delta Q/T$ .



Не путайте конечную теплоемкость системы  $C = \delta Q/dT$  и бесконечно малое приращение её энтропии  $dS = \delta Q/T$ .

Количество теплоты, принимаемой или отдаваемой при увеличении или уменьшении температуры от величины  $T_1$  до  $T_2$ , можно выразить через приращение её энтропии  $Q = \int_{T_1}^{T_2} T dS$ .

Наоборот, изменение энтропии системы выражается как  $\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}$ . Например, изменение энтропии

идеального газа можно найти с помощью первого начала термодинамики:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{p}{T} dV = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{m}{\mu} R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

*Примеры решения задач:*

**13.1.** Неидеальная термодинамическая система, сжимаясь, нагревается до температуры  $T_1 = 480$  К, совершая процесс, при котором её энтропия изменяется с температурой по закону  $S = S_0 \cdot (T/T_0)^3$ , где  $S_0 = 100$  Дж/К,  $T_0 = 240$  К – начальная температура системы. Найти величину изменения внутренней энергии системы, если внешние силы совершают над ней работу  $A = 100$  кДж.

*Решение.*

Сначала находим теплоту, поглощенную системой при нагревании:

$$Q = \int_{T_0}^{T_1=2T_0} T dS = \frac{S_0}{T_0^3} \int_{T_0}^{2T_0} T \frac{dT^3}{3T^2} = \frac{3S_0}{T_0^3} \int_{T_0}^{2T_0} T^3 dT = \frac{3S_0}{T_0^3} \left( \frac{(2T_0)^4}{4} - \frac{T_0^4}{4} \right) = 45 S_0 T_0 / 4 = 270 \text{ кДж}.$$

Изменение внутренней энергии находим с помощью первого начала термодинамики:  $Q = \Delta U + A_{\text{системы}} = \Delta U - A_{\text{внешнсил}}$  (величина работы внешних сил войдет в это уравнение с отрицательным знаком). Отсюда  $\Delta U = Q + A_{\text{внешнсил}} = 370$  кДж.

**13.2.** Термодинамическая система совершает процесс, при котором величина её теплоёмкости убывает с ростом температуры  $T$  по закону  $C = C_0 \sqrt{T_0/T}$ , где  $C_0 = 100$  Дж/К,  $T_0 = 200$  К – начальная температура системы. На какую величину увеличится энтропии системы при возрастании её температуры до  $T_1 = 400$  К?

*Решение.*

Сравнивая термодинамические определения приращения энтропии и теплоёмкости  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  и  $C = \frac{\delta Q}{dT}$ , исключаем

из этих формул теплоту  $\delta Q$ :  $dS = \frac{CdT}{T}$ . Поэтому приращение энтропии системы при нагревании будет равно

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T_1=2T_0} dS = \int_{T_0}^{2T_0} \frac{CdT}{T} = C_0 \sqrt{T_0} \int_{T_0}^{2T_0} T^{-3/2} dT = C_0 \sqrt{T_0} \frac{(2T_0)^{-1/2} - T_0^{-1/2}}{-1/2} = 2C_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 58,6 \text{ Дж/К}.$$

**13.3.** Два моля гелия He, который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в три раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном объёме. Найти приращение энтропии газа, если его температура  $T$  возрастает в четыре раза.  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

*Решение.*

Молярная теплоёмкость заданного в условии политропического процесса постоянна и равна  $C = 3C_V = 3 \frac{i}{2} R = \frac{9}{2} R$ ,

так как молекулы одноатомного гелия имеют  $i = 3$  степени свободы.

*Совет:* В случае политропических процессов изменение энтропии идеального газа проще вычислить, выражая теплоту  $\delta Q$  с

помощью постоянной молярной теплоёмкости процесса:  $\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT$ . Тогда  $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$ .

В данной задаче для  $m/\mu = 2$  молей газа  $\Delta S = \int_{T_0}^{4T_0} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{4T_0} \frac{m}{\mu} \frac{CdT}{T} = 9R \int_{T_0}^{4T_0} \frac{dT}{T} = 9R (\ln 4T_0 - \ln T_0) = 9R \ln 4 = 103,7 \text{ Дж/К}.$

**13.4.** Четыре моля водорода  $H_2$ , который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в два раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Начальная температура газа  $T_0 = 300$  К. Найти конечную температуру этого газа после того, как его энтропия уменьшится на величину  $\Delta S = 100$  Дж/К.  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

*Решение.*

Молярная теплоёмкость данного политропического процесса равна  $C = 2C_p = 2 \frac{i+2}{2} R = 7R$  (молекулы двухатомного газа имеют  $i = 5$  степеней свободы). Как и в предыдущей задаче, находим изменение энтропии  $m/\mu = 4$  молей газа по формуле

$$\Delta S = \int_{T_0}^T dS = \int_{T_0}^T \frac{m}{\mu} \frac{CdT}{T} = 28R \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = 28R \ln \left( \frac{T}{T_0} \right). \text{ При уменьшении энтропии температура системы уменьшается } (T < T_0).$$

Чтобы вычислить  $T$ , приравняем экспоненты от обеих частей полученного равенства:

$$\exp\left(\ln \frac{T}{T_0}\right) \equiv \frac{T}{T_0} = \exp\left(\frac{-|\Delta S|}{28R}\right), \text{ откуда } T = T_0 \exp\left(\frac{-|\Delta S|}{28R}\right) = 195,2 \text{ К.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**13.5.** Неидеальная термодинамическая система совершает процесс, при котором её энтропия убывает с ростом температуры по закону  $S = S_0 \cdot (T/T_0)^{-5}$ , где  $S_0 = 100 \text{ Дж/К}$ ,  $T_0 = 320 \text{ К}$  – начальная температура системы. Какую работу совершат над системой внешние силы, если она нагревается до температуры  $T_1 = 640 \text{ К}$ , а её внутренняя энергия возрастает при этом на величину  $\Delta U = 22,5 \text{ кДж}$ ?

*Ответ:* 60 кДж

**13.6.** Термодинамическая система совершает процесс, при котором её теплоёмкость возрастает с ростом температуры  $T$  по закону  $C = C_0 \cdot (T/T_0)^7$ , где  $C_0 = 10 \text{ Дж/К}$ ,  $T_0 = 250 \text{ К}$  – начальная температура системы. На какую величину увеличится энтропия системы при возрастании её температуры до  $T_1 = 500 \text{ К}$ ?

*Ответ:* на 181,4 Дж/К

**13.7.** Термодинамическая система совершает процесс, при котором её теплоёмкость убывает с ростом температуры  $T$  по закону  $C = C_0 \cdot (T_0/T)^2$ , где  $C_0 = 100 \text{ Дж/К}$ ,  $T_0 = 300 \text{ К}$  – начальная температура системы. На какую величину изменится энтропия системы при возрастании её температуры в четыре раза?

*Ответ:* увеличится на 46,9 Дж/К

**13.8.** Два моля углекислого газа  $\text{CO}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в четыре раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Найти приращение энтропии газа, если его температура  $T$  возрастает в два раза?  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Ответ:* 184,3 Дж/К

**13.9.** Два моля азота  $\text{N}_2$ , который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в шесть раз меньше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном объёме. Начальная температура газа  $T_0 = 200 \text{ К}$ . Найти конечную температуру этого газа после того, как его энтропия возрастёт на величину  $\Delta S = 10 \text{ Дж/К}$ .  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Ответ:* 847,6 К

**13.10.** Шесть молей идеального газа совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в восемь раз меньше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Газ нагревается от температуры  $T_0 = 300 \text{ К}$  до температуры  $T_1 = 600 \text{ К}$ , причем его энтропия возрастает на  $\Delta S = 15,1 \text{ Дж/К}$ . Найти число степеней свободы молекул этого газа.  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Ответ:* 5

## 14. КПД циклических процессов в термодинамике

Величина КПД циклического процесса в термодинамике определяется формулой  $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} \cdot 100\%$ , где

$Q_H$  – величина теплоты, полученной от “нагревателя” за всё время цикла, а  $Q_X$  – количество теплоты, отданное “холодильнику” за время цикла (рис.1.32). Входящие в эту формулу величины должны быть положительными.

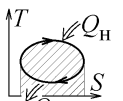


Рис.1.32

Наиболее просто теплоту можно определить через изменение энтропии:  $Q = \int_{S_1}^{S_2} T dS$ . Поэтому циклические процес-

сы удобно изображать на диаграмме “температура-энтропия” (рис.1.32), где интеграл  $Q = \int T dS$  равен площади под кривой процесса  $T = T(S)$ . Теплота поступает, если энтропия  $S$  растёт ( $dS > 0$ ) и отдаётся, если  $S$  уменьшается ( $dS < 0$ ). (На рис.1.32 заштрихована площадь под верхней кривой процесса, при котором  $S$  растёт, равная полученной теплоте  $Q_H$ ).



**Совет:** Следите за направлением циклического процесса! **Прямой термодинамический цикл** на диаграмме состояния соответствует обходу петли цикла по часовой стрелке (рис.1.32). При этом система, совершающая цикл, производит за один цикл работу  $A_{\text{цикла}} = Q_H - Q_X$ , равную площади петли цикла на диаграмме состояния (рис.1.32). КПД цикла мож-

но записать как  $\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_H} \cdot 100\%$ .

В случае **обратного цикла** (обход происходит против часовой стрелки, рис.1.33). Внешние силы совершают над системой за один цикл работу  $A_{\text{внеш}}$  (также равную заштрихованной на рис.1.33 площади петли цикла), за счет которой у “холодильника” забирается теплота  $Q_X$ , а “нагревателю” отдаётся теплота  $Q_H = Q_X + A_{\text{внеш}}$ .

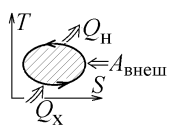
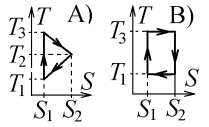


Рис.1.33

Примеры решения задач:

**14.1.** На диаграмме  $T$ - $S$  (температура-энтропия), где  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 400$  К,  $T_3 = 500$  К,  $S_1 = 5$  Дж/К,  $S_2 = 10$  Дж/К, изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Во сколько раз КПД правого процесса  $\eta_B$  больше КПД левого процесса  $\eta_A$ ?

Решение.

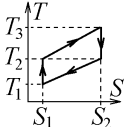


Для левого цикла (A) полученная теплота  $Q_H = \int_{S_1}^{S_2} T dS$  равна площади трапеции под верхней прямой цикла:  $Q_H = \frac{T_3 + T_2}{2} (S_2 - S_1)$ , а отданная теплота равна площади трапеции под нижней прямой цикла:  $Q_X = \frac{T_2 + T_1}{2} (S_2 - S_1)$ . Вертикальная прямая соответствует адиабатическому процессу  $S = S_1 = \text{const}$ , совершаемому без передачи тепла. Поэтому КПД левого цикла  $\eta_A = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} \cdot 100\% = \frac{(T_3 + T_2) - (T_2 + T_1)}{(T_3 + T_2)} \cdot 100\% = \frac{T_3 - T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\%$ .

Правый цикл (B) является циклом Карно, для которого  $\eta_B = \frac{T_3 - T_1}{T_3} \cdot 100\%$ . Искомое отношение  $\frac{\eta_B}{\eta_A} = \frac{T_3 + T_2}{T_3} = 1,8$ .

**14.2.** Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД  $\eta = 50\%$ , изображенный на диаграмме  $T$ - $S$  (температура-энтропия), где  $T_2 = 300$  К,  $T_3 = 700$  К,  $S_1 = 4$  Дж/К,  $S_2 = 8$  Дж/К. Определить температуру  $T_1$ .

Решение.

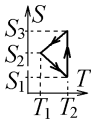


Полученная от нагревателя за цикл теплота  $Q_H$  и отданная холодильнику теплота  $Q_X$  на диаграмме  $T$ - $S$  равны, соответственно, площадям трапеций под верхней прямой цикла  $Q_H = \frac{T_3 + T_2}{2} (S_2 - S_1)$  и под нижней прямой цикла  $Q_X = \frac{T_2 + T_1}{2} (S_2 - S_1)$ . Поэтому КПД  $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} \cdot 100\% = \frac{T_3 - T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\% = 50\%$ . Отсюда  $T_1 = \frac{T_3 - T_2}{2} = 200$  К.

**14.3.** Вычислить в % КПД циклического процесса идеального газа, изображенного на диаграмме  $S$ - $T$  (энтропия-температура), где  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 450$  К,  $S_1 = 10$  Дж/К,  $S_2 = 20$  Дж/К,  $S_3 = 30$  Дж/К.

Решение.

*Совет:* Направление обхода против часовой стрелки на диаграмме  $S$ - $T$ , приведенной в условии задачи, связано с “неправильным” выбором осей координат. Такие диаграммы надо перерисовать аналогично рис.1.32 в осях  $T$ - $S$  “температура-энтропия”.



Получим диаграмму прямого цикла (рис.1.34). Площадь под верхней горизонтальной линией изотермического процесса равна теплу, полученному от “нагревателя”:  $Q_H = \int_{S_1}^{S_3} T dS = T_2 (S_3 - S_1)$ . Площадь треугольной петли цикла равна работе за цикл:  $A_{\text{цикла}} = (T_2 - T_1)(S_3 - S_1)/2$ . Поэтому КПД цикла

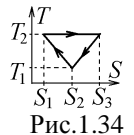


Рис.1.34

$$\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_H} \cdot 100\% = \frac{T_2 - T_1}{2T_2} \cdot 100\% = 16,67\%.$$

**14.4.** Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД  $\eta = 40\%$ , изображенный на диаграмме  $S$ - $T$  (энтропия-температура), где  $T_1 = 350$  К,  $T_2 = 500$  К,  $S_1 = 3$  Дж/К,  $S_2 = 6$  Дж/К. Определить температуру  $T_3$ .

Решение.

Как и в предыдущей задаче, надо перерисовать диаграмму прямого цикла в осях  $T$ - $S$  (температура-энтропия) (рис.1.35). На этом рисунке теплота, полученная от “нагревателя”, равна площади трапеции под верхней прямой  $Q_H = \frac{T_3 + T_2}{2} (S_2 - S_1)$ , а теплота, отданная “холодильнику” – площади под нижней горизонтальной

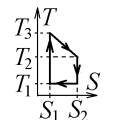


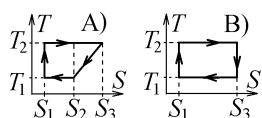
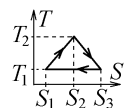
Рис.1.35

прямой изотермического процесса  $Q_X = T_1 (S_2 - S_1)$ . Из определения КПД  $\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} \cdot 100\% = \frac{T_3 + T_2 - 2T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\% = 40\%$  находим  $T_3 = \frac{10}{3} T_1 - T_2 = 666,7$  К.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**14.5.** Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД  $\eta = 20\%$ , изображенный на диаграмме  $T$ - $S$  (температура-энтропия), где  $T_1 = 250$  К,  $S_1 = 2$  Дж/К,  $S_2 = 4$  Дж/К,  $S_3 = 6$  Дж/К. Определить температуру  $T_2$ .

Ответ: 375 К



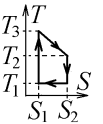
**14.6.** На диаграмме  $T$ - $S$ , где  $T_1 = 200$  К,  $T_2 = 500$  К,  $S_1 = 2$  Дж/К,  $S_2 = 4$  Дж/К,  $S_3 = 6$  Дж/К, изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Найти разность  $\eta_B - \eta_A$  КПД правого и левого процессов (в %).

Ответ:  $\eta_B - \eta_A = 15\%$



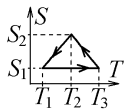
**14.7.** Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД  $\eta = 50\%$ , изображенный на диаграмме  $T$ - $S$ , где  $T_1 = 400$  К,  $T_2 = 600$  К,  $S_1 = 2$  Дж/К,  $S_2 = 4$  Дж/К. Определить температуру  $T_3$ .

Ответ: 1000 К



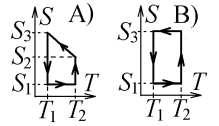
**14.8.** Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД  $\eta = 30\%$ , изображенный на диаграмме  $S$ - $T$  (энтропия- температура), где  $T_2 = 600$  К,  $T_3 = 800$  К,  $S_1 = 3$  Дж/К,  $S_2 = 6$  Дж/К. Определить температуру  $T_1$ .

Ответ: 380 К



**14.9.** На диаграмме  $S$ - $T$  (энтропия- температура), где  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 400$  К,  $S_1 = 4$  Дж/К,  $S_2 = 6$  Дж/К,  $S_3 = 8$  Дж/К изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Найти разность  $\eta_B - \eta_A$  КПД правого и левого процессов (в %).

Ответ:  $\eta_B - \eta_A = 5\%$



## 15. Распределение Максвелла

В сосуде находятся  $N$  одинаковых молекул идеального газа. Число молекул газа, имеющих величины скоростей  $v$  в интервале  $v_1 \leq v \leq v_2$  равно  $\Delta N = N \int_{v_1}^{v_2} f_M(v) dv$ , где  $f_M = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) 4\pi v^2$  – функция распределения Максвелла по величинам скоростей.

Здесь  $m$  – масса одной молекулы,  $T$  – температура газа (в К),  $k_B = R/N_{\text{Авогадро}} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Величину  $\Delta N/N$  называют долей молекул газа со скоростями  $v_1 \leq v \leq v_2$ . Она же будет вероятностью

$P = \int_{v_1}^{v_2} f_M(v) dv$  того, что молекулы имеют величины скоростей в интервале  $v_1 \leq v \leq v_2$ .

Газ характеризуют тремя характерными скоростями, показанными на графике функции распределения Максвелла (рис.1.36):

Наиболее вероятной скоростью  $v_B = \sqrt{2k_B T/m}$  обладает наибольшая доля  $\Delta N/N$  молекул газа  $v_B$ . Она соответствует максимуму функции распределения Максвелла (рис.1.36).

Средняя скорость молекул газа (средняя арифметическая) вычисляется по формуле  $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ .

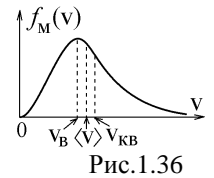


Рис.1.36

Средняя квадратичная скорость молекул  $v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T/m}$  соответствует молекуле со средней кинетической энергией поступательного движения  $\langle E_{\text{кин пост}} \rangle = \frac{mv_{KB}^2}{2}$ . Средняя кинетическая энергия молекулы с числом степеней свободы  $i$ , совершающей как поступательное, так и вращательное движение, равна  $\langle E \rangle = \frac{i}{2} k_B T$ .



Чтобы не искать в задачах массу одной молекулы газа, удобнее использовать связь  $\frac{k_B}{m} = \frac{R}{mN_{\text{Авогадро}}} = \frac{R}{\mu}$ , и выражать записанные формулы через универсальную газовую постоянную  $R$  и известную молярную массу газа  $\mu$ :

$$f_M = \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{\mu v^2}{2RT} \right) 4\pi v^2; \quad v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad v_{KB} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Примеры решения задач:

**15.1.** Аммиак  $\text{NH}_3$ , который можно считать идеальным газом с молярной массой  $\mu = 17$  г/моль, имеет температуру  $27^\circ\text{C}$ . Найти вероятность (в %) того, что молекулы этого газа имеют величины скоростей в интервале  $v_1 \leq v \leq v_1 + \Delta v$ , где  $v_1$  – средняя скорость молекул газа, а  $\Delta v = 0,1$  м/с. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

Решение.

Искомая вероятность или доля молекул, обладающих указанными скоростями, равна  $P = \int_{v_1}^{v_1 + \Delta v} f_M(v) dv$ .



Если интервал изменения скоростей  $\Delta v$  мал, то можно считать, что этот интеграл, практически равен площади заштрихованной узкой полоски под кривой  $f_M(v)$  на рис.1.37:

$$P = \int_{v_1}^{v_1 + \Delta v} f_M(v) dv \approx f_M(v_1) \cdot \Delta v = \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{\mu v_1^2}{2RT} \right) 4\pi v_1^2 \cdot \Delta v.$$

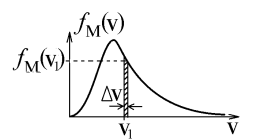


Рис.1.37

Подставляя сюда величину средней скорости  $v_1 = \langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu}$  и учитывая, что  $T = 27 + 273 = 300$  К, получим

$$P = \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu}{2RT} \cdot \frac{8RT}{\pi\mu} \right) 4\pi \frac{8RT}{\pi\mu} \cdot \Delta v = \frac{16}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \exp \left( -\frac{4}{\pi} \right) \cdot \Delta v = 1,485 \cdot 10^{-4} \text{ или } 0,01485 \text{ \%}.$$

**15.2.** Определите величину молярной массы идеального газа, если известно, что при температуре  $T = 600 \text{ К}$  в каждом моле этого газа величины скоростей от  $v_1$  до  $v_1 + \Delta v$  имеют  $\Delta N = 10^{20}$  молекул. Здесь  $v_1$  – величина средней квадратичной скорости молекул газа;  $\Delta v = 0,1 \text{ м/с}$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ ;  $N_{\text{Авогадро}} = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .


*Решение.*

Как и в предыдущей задаче, при малом интервале скоростей  $\Delta v$  можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &\approx f_M(v_1) \cdot \Delta v = \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu v_1^2}{2RT} \right) 4\pi v_1^2 \cdot \Delta v. \text{ Так как в каждом моле газа } N = N_{\text{Авогадро}}, \text{ то, подставив } v_1 = v_{\text{КВ}} = \\ &= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ имеем } \frac{\Delta N}{N_{\text{Авогадро}}} \approx \left( \frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu}{2RT} \cdot \frac{3RT}{\mu} \right) 4\pi \frac{3RT}{\mu} \cdot \Delta v = 3\sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT}} \exp \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot \Delta v, \text{ откуда} \\ \mu &= \frac{\pi RT}{2} \left( \frac{\Delta N}{3\Delta v N_{\text{АВ}}} \right)^2 \exp(3) = 48,18 \text{ г/моль}. \end{aligned}$$

**15.3.** Гелий, который является идеальным газом с молярной массой  $\mu = 4 \text{ г/моль}$ , находится в закрытом сосуде с объёмом  $V = 30 \text{ литров}$ . Найти давление газа, если сумма квадратов скоростей всех его молекул  $\sum v_i^2 = 4 \cdot 10^{29} \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Число Авогадро  $N_{\text{Авогадро}} = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

*Решение.*

 *Вспомните определение среднего значения любой переменной  $x$ , имеющей разные величины  $x_i$ :  $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^N x_i / N$ . Сумму*

*таких величин легко записать с помощью среднего:  $\sum_{i=1}^N x_i = N \langle x \rangle$ .*

Средняя квадратичная скорость  $v_{\text{КВ}}$  определяется средним значением квадрата скорости молекул газа  $v_{\text{КВ}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .

Поэтому в газе из  $N$  молекул  $\sum_{i=1}^N v_i^2 = N v_{\text{КВ}}^2 = N \frac{3RT}{\mu}$ , откуда  $NRT = \mu \sum v_i^2 / 3$ . Давление можно найти из уравнения состоя-

ния идеального газа, число молей которого равно  $\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_{\text{Авогадро}}}$ . Получаем  $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{NRT}{N_{\text{Авог}} V} = \frac{\mu \sum v_i^2}{3N_{\text{Авог}} V} = 29,5 \text{ кПа}$ .

**15.4.** В сосуде с объёмом  $V = 40 \text{ литров}$  находятся  $N = 5 \cdot 10^{22}$  молекул идеального газа. Давление газа  $p = 90 \text{ кПа}$ , а величина средней скорости его молекул равна  $800 \text{ м/с}$ . Найти массу одной молекулы данного газа.

*Решение.*

Отношение массы газа, состоящего из  $N$  молекул, к его молярной массе можно записать в виде  $\frac{m_{\text{газа}}}{\mu} = \frac{Nm}{\mu} = N \frac{k_B}{R}$ ,

где  $m$  – масса одной молекулы. Тогда уравнение состояния идеального газа примет вид  $pV = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} RT = N k_B T$  или

$p = n k_B T$ , где  $n = N/V$  – концентрация или число молекул в единице объёма. Величину  $k_B T$  найдем из формулы для сред-

ней скорости  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ . После подстановки получим  $m = \frac{8pV}{N\pi \langle v \rangle^2} = 2,86 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$ .

**15.5.** В закрытом сосуде под давлением  $p = 162 \text{ кПа}$  находится идеальный газ. Величина скорости, которой обладает наибольшая доля молекул этого газа, равна  $450 \text{ м/с}$ . Найти величину плотности газа  $\rho$ .

*Решение.*

Плотность идеального газа определяется уравнением его состояния:  $\rho = \frac{m_{\text{газа}}}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ . Неизвестную величину  $\frac{RT}{\mu}$  найдем из формулы для заданной в условии наиболее вероятной скорости  $v_B = \sqrt{2RT/\mu} = 450 \text{ м/с}$ , откуда  $\rho = 2p/v_B^2 = 1,6 \text{ кг/м}^3$ .

**15.6.** В первом сосуде с объёмом  $V = 20 \text{ литров}$  находятся  $N = 4 \cdot 10^{22}$  молекул азота  $\text{N}_2$ , у которого средняя энергия одной молекулы равна  $\langle E_N \rangle = 5 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$ , а во втором таком же сосуде находится такое же количество молекул кислорода  $\text{O}_2$ . Давление азота больше давления кислорода на величину  $\Delta p = 24 \text{ кПа}$ . Считая оба газа идеальными, найти величину средней энергии  $\langle E_O \rangle$  одной молекулы кислорода.

*Решение.*

Выразим давление идеального газа с помощью уравнения состояния  $p = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{N}{N_{\text{Авог}}} \frac{RT}{V}$ . Так как и число молекул  $N$  и объём  $V$  газов одинаковы, то разность давлений связана с разностью их температур:

$\Delta p = p_N - p_O = \frac{N}{V} \left( \frac{RT_N}{N_{\text{Авог}}} - \frac{RT_O}{N_{\text{Авог}}} \right)$ . Температура газа пропорциональна средней кинетической энергии его молекулы:

$\langle E \rangle = \frac{i}{2} k_B T = \frac{i}{2} \frac{RT}{N_{\text{Авог}}}$ . Отсюда  $\frac{RT}{N_{\text{Авог}}} = \frac{2\langle E \rangle}{i}$ . Число степеней свободы молекул обоих газов одинаково ( $i=5$ ). Поэтому

$$\Delta p = \frac{N}{V} \frac{2}{i} (\langle E_N \rangle - \langle E_O \rangle), \text{ что даёт } \langle E_O \rangle = \langle E_N \rangle - \frac{iV\Delta p}{2N} = 2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**15.7.**  $\Delta N_1$  и  $\Delta N_2$  – число молекул идеального газа со скоростями от  $v_1$  до  $v_1 + \Delta v$  и от  $v_2$  до  $v_2 + \Delta v$  соответственно. Найти величину отношения  $\Delta N_1/\Delta N_2$ , если  $v_1$  – средняя квадратичная, а  $v_2$  – наиболее вероятная скорость молекул этого газа, а  $\Delta v = 0,1$  м/с. *Ответ: 0,9098*

**15.8.** Метан, имеющий молярную массу  $\mu=16$  г/моль, можно считать идеальным газом. Найти температуру этого газа, если вероятность того, что его молекулы имеют величину скорости в пределах от  $v_1$  до  $v_1 + \Delta v$ , где  $v_1$  – наиболее вероятная скорость молекул, а  $\Delta v = 0,1$  м/с, равна  $P = 0,01\%$ .  $R = 8,31$  Дж/К·моль. *Ответ: 663,5 К*

**15.9.** В закрытом сосуде с объёмом  $V=20$  литров находился при температуре  $T=300$  К углекислый газ, который можно считать идеальным газом с молярной массой  $\mu=44$  г/моль. Концентрация его молекул  $n = 5 \cdot 10^{23}$  м<sup>-3</sup>. На какую величину  $\Delta(\sum |v_i|)$  увеличится сумма величин скоростей всех молекул данного газа, если нагреть его в полтора раза? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

*Ответ: на  $8,54 \cdot 10^{23}$  м/с*

**15.10.** Определить величину скорости, которой обладает наибольшая доля молекул аммиака  $\text{NH}_3$ , который можно считать идеальным газом, имеющим молярную массу  $\mu=17$  г/моль. Известно, что внутренняя энергия восьми молей этого газа равна 45,9 кДж.

*Ответ: 474,3 м/с*

**15.11.** В закрытом сосуде с объёмом  $V=50$  литров находится идеальный газ под давлением  $p=60$  кПа, причем величина скорости, которой обладает наибольшая доля его молекул, равна  $v_v=400$  м/с. Найти массу газа, находящегося в сосуде.

*Ответ: 0,0375 кг*

**15.12.** В закрытом сосуде с объёмом  $V=15$  литров находятся  $N = 3 \cdot 10^{22}$  молекул идеального газа. Величина среднего квадрата скорости, которой обладает молекула этого газа, равна  $\langle v^2 \rangle = 6 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Найти давление газа в сосуде. Масса одной молекулы  $m = 4 \cdot 10^{-25}$  кг.

*Ответ: 160 кПа*

**15.13.** Найти молярную массу идеального газа, у которого при температуре  $t^\circ = 27^\circ\text{C}$  средняя квадратичная скорость молекул больше средней скорости молекул на  $\Delta v = 30$  м/с.  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

*Ответ: 51,45 г/моль*

## 16. Распределение Больцмана. Барометрическая формула

Распределение Максвелла описывает газ молекул, потенциальные энергии которых практически одинаковы. Концентрация  $n$  молекул такого газа одинакова во всём его объёме.

Если объём газа настолько велик, что потенциальная энергия молекул в поле внешних сил различна в различных областях, то концентрация  $n$  молекул будет зависеть от величины потенциальной энергии одной молекулы  $E_{\text{пот}}$ . Такая зависимость называется распределением Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{k_B T}\right), \text{ где } n_0 - \text{величина концентрации молекул газа в точке,}$$

где потенциальная энергия молекулы равна нулю.

В идеальном газе уравнение состояния связывает концентрацию молекул с давлением:  $p = nk_B T$ . Поэтому для газа с одинаковой во всех точках температурой  $T = \text{const}$  распределение Больцмана можно записать для давления:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{k_B T}\right).$$

В частном случае газ находится в поле сил тяжести и для его молекулы с массой  $m$   $E_{\text{пот}} = mgh$ . Распределение

Больцмана превращается в барометрическую формулу:  $p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$ , согласно которой давление

атмосферы уменьшается с высотой  $h$  над уровнем моря, где давление равно  $p_0$  (рис.1.38). Аналогичную формулу можно для концентрации молекул равновесной атмосферы, имеющей всюду одинаковую температуру:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

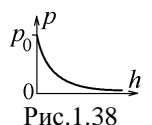


Рис.1.38

Примеры решения задач:

**16.1.** Газ, образующий атмосферу планеты, имел во всех точках температуру  $T_1 = 300$  К. Какой стала температура атмосферы, если концентрация молекул этого газа увеличилась вблизи поверхности планеты (на высоте  $h = 0$ ) в 1,22 раз, а на высоте  $h = 1$  км над поверхностью планеты концентрация возросла в 1,2 раза? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>; молярная масса газа  $\mu = 44$  г/моль; универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

Решение.

Распределения концентрации молекул газа до и после изменения температуры имеют вид  $n_1 = n_{01} \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_1}\right)$  и  $n_2 = n_{02} \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_2}\right)$ . По условию  $\frac{n_2}{n_1} = 1,2$  и  $\frac{n_{02}}{n_{01}} = 1,22$ . Взяв отношение левых и правых частей записанных формул, получим  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{02}}{n_{01}} \exp\left(\frac{\mu gh}{RT_1} - \frac{\mu gh}{RT_2}\right)$ .



Чтобы в подобных задачах выразить переменные, стоящие под знаком экспоненты, надо прологарифмировать экспоненциальную функцию:  $\ln(\exp(x)) = x$ .

$$\text{Поэтому } \ln \exp\left(\frac{\mu gh}{RT_1} - \frac{\mu gh}{RT_2}\right) = \ln\left(\frac{n_2}{n_1} \frac{n_{01}}{n_{02}}\right) = \frac{\mu gh}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \text{ Отсюда } T_2 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{R}{\mu gh} \ln\left(\frac{1,2}{1,22}\right)\right)^{-1} = 274,3 \text{ К}$$

**16.2.** Считая температуру атмосферы некоторой планеты постоянной и равной  $t^0 = -23^\circ\text{C}$ , определить величину молярной массы смеси газов, образующих атмосферу. Известно, что давление атмосферы вблизи поверхности планеты (на высоте  $h = 0$ ) равно 150 кПа, а при подъёме на высоту  $h = 1$  км оно изменяется на величину  $\Delta p = 20$  кПа. Ускорение свободного падения  $g = 15$  м/с<sup>2</sup>;  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

Решение.

Согласно барометрической формуле  $p = p_0 - \Delta p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$ , где  $T = -23 + 273 = 250$  К. Логарифмируя это выражение, находим  $\ln \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) = -\frac{\mu gh}{RT} = \ln\left(\frac{p_0 - \Delta p}{p_0}\right)$ , и  $\mu = -\frac{RT}{gh} \ln\left(\frac{p_0 - \Delta p}{p_0}\right) = 19,8 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ .

**16.3.** Газ с температурой  $t^0 = 327^\circ\text{C}$  из заряженных ионов находится в таком электрическом поле, что потенциальная энергия иона зависит только от координаты  $x$  и меняется по закону  $E_{\text{пот}} = \alpha + \beta x$ , где  $\alpha = 2 \cdot 10^{-20}$  Дж. Найти величину постоянной  $\beta$  (в Дж/м), если отношение концентраций этого газа в точках с координатами  $x_2 = 4$  м и  $x_1 = 2$  м равно  $n_2/n_1 = 0,04$ .  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Решение.

Для такого газа из ионов по-прежнему справедливо распределение Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\alpha + \beta x}{k_B T}\right). \text{ Отношение концентраций позволяет убрать неизвестную величину } n_0:$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\alpha + \beta x_2}{k_B T} + \frac{\alpha + \beta x_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{\beta(x_1 - x_2)}{k_B T}\right), \text{ откуда } \beta = \frac{k_B T}{x_1 - x_2} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 1,33 \cdot 10^{-20} \text{ Дж/м.}$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**16.4.** Атмосфера планеты имела во всех точках температуру  $T_1 = 450$  К. После того, как температура атмосферы уменьшилась на  $\Delta T = 150$  К, концентрация молекул составляющего её газа на высоте  $h = 1$  км над поверхностью планеты увеличилась в 1,5 раза. Чему стала равной концентрация молекул газа вблизи поверхности планеты (на высоте  $h = 0$ ), если при температуре  $T_1$  она была равна  $5 \cdot 10^{16}$  м<sup>-3</sup>? Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>; молярная масса газа  $\mu = 16$  г/моль;  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

$$\text{Ответ: } 7,66 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$$

**16.5.** Атмосфера планеты имела во всех точках температуру  $T_1 = 400$  К. После того, как температура атмосферы увеличилась на  $\Delta T = 100$  К, давление атмосферы вблизи поверхности планеты (на высоте  $h = 0$ ) уменьшилось в 1,24 раза. На какой высоте  $h$  над поверхностью планеты давление атмосферы уменьшилось в 1,2 раза? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>; молярная масса образующей атмосферу смеси газов  $\mu = 30$  г/моль;  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

$$\text{Ответ: } 1817 \text{ м}$$

**16.6.** На высоте  $h = 500$  м над поверхностью планеты плотность газа, образующего её атмосферу, составляет 95% от величины плотности газа вблизи поверхности планеты. Определить температуру атмосферы, считая её постоянной и одинаковой во всех точках. Ускорение свободного падения  $g = 12$  м/с<sup>2</sup>; молярная масса газа, который можно считать идеальным,  $\mu = 20$  г/моль;  $R = 8,31$  Дж/К·моль.

$$\text{Ответ: } 281,5 \text{ К}$$

**16.7.** Известно, что концентрация молекул газа вблизи поверхности некоторой планеты (на высоте  $h = 0$ ) равна  $10^{25} \text{ м}^{-3}$ , а при подъёме на высоту  $h$  она изменяется на величину  $\Delta n = 8 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ . Считая температуру атмосферы этой планеты постоянной и равной  $t^\circ = 7^\circ\text{C}$ , определить высоту  $h$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ; молярная масса газа  $\mu = 30 \text{ г/моль}$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ .  
**Ответ:** 647 м

## 17. Частота соударений и средняя длина свободного пробега молекул газа

Частота соударений молекул со стенкой  $\nu$  равна числу молекул, сталкивающихся с единицей поверхности стенки за единицу времени. Если с площадкой  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  сталкивается  $\Delta N$  молекул газа, то  $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ , где  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – средняя скорость молекул газа,  $n = N/V$  – концентрация или число молекул в единице его объёма.



Рис.1.39

Если в стенке сосуда с газом сделано маленькое отверстие площадью  $S$ , то попадающие на отверстие молекулы газа будут вылетать из сосуда. За время  $\Delta t$  из сосуда вылетит

$$\Delta N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t \quad \text{молекул (рис.1.39).}$$



Для решения задач на эту тему необходимо учесть уравнение состояния газа и заданное по условию уравнение протекающего с газом процесса. Например, если сосуд с газом закрыт, то  $n = N/V = \text{const}$ , и при изменении температуры  $p$  происходит изохорический процесс  $p = nk_B T$ .

*Примеры решения задач:*

**17.1.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа возрастает с ростом объёма по закону  $p = \alpha \cdot \sqrt{V}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади  $S = 1 \text{ см}^2$  на стенке сосуда за единицу времени, если давление газа возрастёт в 4 раза?

*Решение.*

Надо вычислить зависимость числа соударений молекул  $\Delta N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t$  от давления газа  $p$ , т.е. устранить из этой формулы параметры  $V$  и  $T$  (объём и температуру газа). Подставим в эту формулу определение концентрации молекул  $n = N_{\text{Авогадро}}/V$  (для 1 моля газа), а также выражение для средней скорости молекул  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ , откуда можно исключить температуру  $T$  с помощью уравнения состояния идеального газа  $T = \frac{pV}{R}$ . Получим  $\Delta N = N_{\text{Авог}} \sqrt{\frac{p}{2\pi\mu V}} S \Delta t$ .

Устранив отсюда переменную  $\sqrt{V} = p/\alpha$  (заданное в условии уравнение процесса), находим зависимость  $\Delta N \sim 1/\sqrt{p}$ . При увеличении  $p$  в 4 раза число  $\Delta N$  соударений молекул уменьшится в 2 раза.

**17.2.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа растёт с ростом его температуры по закону  $p = \alpha \cdot T^{3/2}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади  $S = 1 \text{ см}^2$  на стенке сосуда за  $\Delta t = 1 \text{ с}$ , если температура газа возрастёт в 4 раза?

*Решение.*

Как и в предыдущей задаче,  $\Delta N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t = \frac{1}{4} \frac{N_{\text{Авог}}}{V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} S \Delta t$ . Теперь, согласно условию, надо выразить объём  $V$  через температуру  $T$ . Для этого исключаем давление  $p$  из уравнения состояния 1 моля идеального газа и заданного уравнения процесса:  $p = \frac{RT}{V} = \alpha \cdot T^{3/2}$ . Отсюда  $V = \frac{R}{\alpha \sqrt{T}}$  и  $\Delta N \sim \frac{\sqrt{T}}{V} \sim T$ . Как и температура, число соударений  $\Delta N$  возрастёт в 4 раза.

\*\*\*\*\*

Длина свободного пробега молекулы газа определяется формулой  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$ , в которой эффективный диаметр  $d$

молекулы можно считать практически постоянным при относительно небольшом изменении температуры, предполагаемом в условии задач:  $d \approx \text{const}$ . Концентрацию молекул идеального газа удобно выражать через давление с помощью уравнения состояния, записанного в форме  $p = nk_B T$ .

**17.3.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его температура растёт с увеличением объёма по закону  $T = \alpha V^3$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре  $T_2 = 600 \text{ К}$ , если при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$  она равна  $\lambda_1 = 300 \text{ нм}$ ?

*Решение.*

Концентрация молекул газа меняется обратно пропорционально его объёму, который, согласно условию, зависит от

температуры по закону  $V = \sqrt[3]{\frac{T}{\alpha}}$ , т.е.  $n = \frac{N}{V} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{T}}$ . Поэтому  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} \sim \frac{1}{n} \sim \sqrt[3]{T}$  или  $\lambda = \text{const} \cdot \sqrt[3]{T}$ . Отсюда следует, что  $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \sqrt[3]{T_2/T_1} = \lambda_1 \cdot \sqrt[3]{2} = 378 \text{ нм}$ .

**17.4.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление уменьшается с увеличением объёма по закону  $p = \alpha \cdot V^{-1/3}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре  $T_2 = 600 \text{ К}$ , если при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$  она равна  $\lambda_1 = 200 \text{ нм}$ ?

*Решение.*



*Устраняйте неизвестные переменные, решая систему из уравнения процесса и уравнения состояния газа.*

Надо найти зависимость  $\lambda$  от температуры  $T$  газа. Для этого исключим вначале объём  $V$  из заданного в условии уравнения процесса  $p = \alpha \cdot V^{-1/3}$ , которое можно переписать в виде  $V = (\alpha/p)^3$ , и уравнения состояния идеального газа:  $V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p} = \frac{\alpha^3}{p^3}$ . Отсюда  $p \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$ . Подставим эту зависимость в формулу для  $\lambda$ , в которой концентрация  $n$  выражена через давление:  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} = \frac{k_B T}{\sqrt{2\pi d^2 p}} \sim \frac{T}{p} \sim T^{3/2}$ . Отсюда  $\lambda = \text{const} \cdot T^{3/2}$  и  $\lambda_2 = \lambda_1 (T_2/T_1)^{3/2} = 565,6 \text{ нм}$ .

**17.5.** В сосуде, заполненном идеальным газом, имеющем температуру  $t^0 = 75^\circ\text{C}$ , проделано маленькое отверстие с площадью  $S = 1 \text{ мм}^2$ . Известно, что средняя длина свободного пробега молекул газа в сосуде равна  $\lambda = 1 \text{ мкм}$ , эффективный диаметр молекулы  $d = 0,3 \text{ нм}$ , а за секунду из отверстия в окружающий сосуд вакуум вылетает  $N = 4 \cdot 10^{20}$  молекул. Найти величину молярной массы этого газа. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ .

*Решение.*

Выразим концентрацию молекул газа через среднюю длину свободного пробега,  $n = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 \lambda}}$ , и подставим её в формулу для числа молекул, вылетающих через отверстие за время  $\Delta t = 1 \text{ с}$ :  $N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t = \frac{1}{4 \sqrt{2\pi d^2 \lambda}} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} S \Delta t$ . Отсюда  $\mu = \frac{RT}{4\pi^3} \left( \frac{S \Delta t}{d^2 \lambda N} \right)^2 = 18 \text{ г/моль}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**17.6.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа возрастает с ростом объёма по закону  $p = \alpha V^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади  $S = 1 \text{ см}^2$  на стенке сосуда за одну секунду, если объём сосуда возрастёт в 4 раза?

*Ответ:* увеличится в 2 раза

**17.7.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что объём газа возрастает с ростом его давления по закону  $V = \alpha p^3$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади  $S = 1 \text{ см}^2$  на стенке сосуда за одну секунду, если объём сосуда возрастёт в 4 раза?

*Ответ:* уменьшится в 1,587 раз

**17.8.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что температура газа возрастает с ростом его давления по закону  $T = \alpha p^6$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади  $S = 1 \text{ см}^2$  на стенке сосуда за одну секунду, если давление возрастёт в 4 раза?

*Ответ:* уменьшится в 16 раз

**17.9.** Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что температура газа уменьшается с ростом его объёма по закону  $T = \alpha/V^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Во сколько раз изменится частота соударений молекул газа со стенкой, если давление газа возрастёт в 8 раз?

*Ответ:* увеличится в 4 раза

**17.10.** В закрытом сосуде с объёмом  $V = 100$  литров находится  $N = 2,4 \cdot 10^{24}$  молекул углекислого газа, который можно считать идеальным газом. Масса этого газа  $m = 176 \text{ г}$ . За промежуток времени  $\Delta t = 3 \text{ сек}$  из маленького отверстия с площадью  $S = 3 \text{ мм}^2$  в стенке сосуда должно вылетать наружу  $\Delta N = 2 \cdot 10^{22}$  молекул. Найти величину давления газа в сосуде.

*Ответ:* 94,8 кПа

**17.11.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление возрастает с увеличением температуры по закону  $p = \alpha \cdot T^{3/2}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре  $T_2 = 600 \text{ К}$ , если при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$  она равна  $\lambda_1 = 100 \text{ нм}$ ?

*Ответ:* 70,7 нм

**17.12.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его объём уменьшается с ростом давления по закону  $V = \alpha/p^4$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре  $T_2 = 1600$  К, если при температуре  $T_1 = 200$  К она равна  $\lambda_1 = 100$  нм?  
*Ответ:* 1600 нм

**17.13.** Идеальный газ совершает процесс, при котором его температура возрастает с увеличением давления по закону  $T = \alpha \cdot p^{2/3}$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре  $T_2 = 600$  К, если при температуре  $T_1 = 300$  К она равна  $\lambda_1 = 300$  нм?  
*Ответ:* 212 нм

## 18. Явления переноса (теплопроводность)

Поток тепла или количество теплоты, переносимое за единицу времени через поперечную поверхность с площадью  $S$ , определяется уравнением теплопроводности:  $\vec{J}_Q = -\kappa \cdot \text{grad } T \cdot S$ , где  $|\vec{J}_Q| = \Delta Q / \Delta t$ ,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности среды.

Если поток тепла направлен вдоль одной оси, то во всех точках он должен быть одинаков:  $J_Q = \text{const}$ . Иначе нарушается тепловое равновесие и участки среды, куда поступает больше тепла, чем уходит, быстро разогреваются до огромных температур.

В газах коэффициент теплопроводности определяется формулой  $\kappa_{\text{газа}} = \frac{i}{6} k_B n \lambda \langle v \rangle \sim p / \sqrt{T}$  и в зависимости от газового процесса может иметь разную зависимость от температуры  $T$ .

В твердых средах зависимость  $\kappa$  от температуры можно пренебречь и считать, что  $\kappa_{\text{тв.среды}} \approx \text{const}$ . В этом случае градиент температуры постоянен так же как и поток тепла, и его можно вычислить по формуле  $|\text{grad } T| = \Delta T / \Delta x$ . Температура изменяется по линейному закону (рис.1.40). Количество теплоты  $\Delta Q$ , переносимого за время  $\Delta t$  через поперечную площадь  $S$  в сторону с более низкой температурой можно вычислить по формуле  $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} S$ .

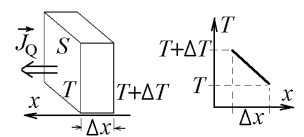


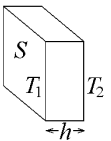
Рис.1.40

*Примеры решения задач:*

**18.1.** Кирпичная стена толщиной в два кирпича ( $h = 50$  см) имеет площадь  $S = 15$  м<sup>2</sup>. Коэффициент теплопроводности кирпича  $\kappa = 0,7$  Вт/м·К. Какое количество теплоты переносится сквозь стену из отапливаемой комнаты на улицу за сутки? Температуру воздуха в комнате  $t_1^0 = 27^\circ\text{C}$  и на улице  $t_2^0 = -10^\circ\text{C}$  считать неизменными.

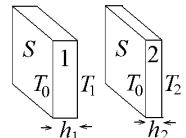
*Решение.*

Из уравнения теплопроводности  $J_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa |\text{grad } T| \cdot S = \kappa \frac{T_2 - T_1}{h} S$  находим  $\Delta Q = \kappa \frac{T_2 - T_1}{h} S \Delta t = 67,13$  МДж. Этот пример показывает, насколько велики потери тепла зимой через стены зданий.



**18.2.** Два плоских слоя с одинаковой поперечной площадью  $S$  сделаны из разных металлов. Слой “1” с толщиной  $h_1 = 4$  см – из стали, а слой “2” с толщиной  $h_2 = 8$  см – из меди. Температура  $T_0 = 300$  К по левую сторону этих слоев одинакова. По их правую сторону температуры равны  $T_1 = 450$  К и  $T_2 = 400$  К. За 3 минуты через стальной слой переносится 5,2 МДж теплоты. За какое время через медный слой будет перенесено 19 МДж теплоты? Коэффициенты теплопроводности стали и меди равны  $\kappa_1 = 52$  Вт/м·К и  $\kappa_2 = 380$  Вт/м·К.

*Решение.*

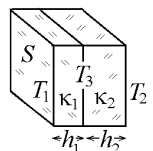


Запишем выражения для тепловых потоков через два указанных слоя:  $J_{Q1} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = \kappa_1 \frac{T_1 - T_0}{h_1} S$ ,  $J_{Q2} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_0}{h_2} S$ .

Отношение левых и правых частей этих уравнений позволяет устранить неизвестную площадь  $S$  и определить время  $\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{\Delta Q_2 h_2}{\Delta Q_1 h_1} \frac{\kappa_1 (T_1 - T_0)}{\kappa_2 (T_2 - T_0)} = 4,5$  мин.

**18.3.** Два плотно прижатых друг к другу плоских слоя с поперечной площадью  $S = 16$  м<sup>2</sup> изготовлены из разных материалов с коэффициентами теплопроводности  $\kappa_1 = 3$  Вт/м·К и  $\kappa_2 = 4$  Вт/м·К и имеют толщину  $h_1 = 20$  см и  $h_2 = 40$  см соответственно. Найти промежуток времени, за который через слои переносится количество теплоты, равное 360 кДж? Температуры слева и справа от слоев неизменны и равны  $T_1 = 300$  К и  $T_2 = 360$  К.

*Решение.*

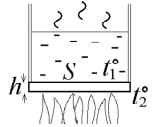


Поток тепла через левый слой должен быть равен потоку тепла через правый слой. Иначе из-за разности поступающего и уходящего тепла граница между слоями очень быстро нагреется до бесконечности или охладится до 0 К. Температура  $T_3$  граничного слоя лежит в интервале  $T_1 < T_3 < T_2$ . Уравнение баланса тепловых потоков

$$J_{Q1} = \kappa_1 \frac{T_3 - T_1}{h_1} S = J_{Q2} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_3}{h_2} S \quad \text{позволяет вычислить эту температуру } T_3 = \frac{\kappa_2 h_1 T_2 + \kappa_1 h_2 T_1}{\kappa_2 h_1 + \kappa_1 h_2} = 324 \text{ К.}$$

Количество теплоты  $\Delta Q$ , переносимое через слои за одно и то же время  $\Delta t$ , одинаково. Промежуток времени  $\Delta t$  может быть вычислен, например, для левого слоя:  $J_{Q1} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa_1 \frac{T_3 - T_1}{h_1} S$ , откуда  $\Delta t = \frac{\Delta Q \cdot h_1}{\kappa_1 (T_3 - T_1) S} = 62,5$  сек.

**18.4.** Вода кипит в стальном сосуде при температуре  $t_1^\circ = 100^\circ\text{C}$ . Температура противоположной стороны плоского дна сосуда с площадью  $S = 500\text{ см}^2$  равна  $t_2^\circ = 100,3^\circ\text{C}$ . Определить толщину  $h$  дна сосуда, если за две минуты из сосуда выкипает, превращаясь в пар, масса воды, равная  $\Delta m = 8\text{ г}$ . Удельная теплота парообразования воды  $q = 2250\text{ кДж/кг}$ , коэффициент теплопроводности стали  $\kappa = 52\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ .

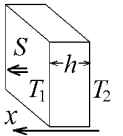


*Решение.*

Вся теплота  $\Delta Q$ , поступающая в сосуд с водой через плоское дно за время  $\Delta t = 2\text{ мин}$  идёт на нагревание кипящей воды и превращение в пар массы  $\Delta m$ :  $\Delta Q = q\Delta m$ . Уравнение теплопроводности позволяет выразить эту теплоту через поток тепла:  $\Delta Q = J_Q \Delta t = \kappa \frac{T_2 - T_1}{h} S \Delta t$ . Отсюда  $h = \kappa \frac{T_2 - T_1}{q \Delta m} S \Delta t = 5,2\text{ мм}$ .

Металлы хорошо пропускают тепло. Поэтому разность температур двух поверхностей металлического дна (одна граничит с кипящей водой, а другая нагревается пламенем), так невелика:  $T_2 - T_1 = 0,3\text{ К}$ .

**18.5.** Поток тепла направлен вдоль оси  $x$  и одинаков во всех точках плоского слоя с поперечной площадью  $S = 1\text{ м}^2$  с толщиной  $h = 50\text{ см}$ . Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны  $T_1 = 300\text{ К}$  и  $T_2 = 600\text{ К}$ . Коэффициент теплопроводности материала этого слоя зависит от температуры  $T$  по закону  $\kappa = \alpha \cdot \sqrt{T/T_1}$ , где  $\alpha = 10\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ . Какое количество теплоты будет перенесено через слой за одну минуту?



*Решение.*

В данной задаче коэффициент теплопроводности зависит от температуры и зависимость  $T = T(x)$  нельзя представить линейным графиком (рис.1.40). Но величина теплового потока  $J_Q$  по-прежнему одинакова во всех точках слоя. Поэтому

уравнение теплопроводности  $J_Q = \kappa(T) \cdot |\text{grad } T| \cdot S = \kappa(T) \frac{dT}{dx} S = \text{const}$  позволяет разделить переменные  $\frac{J_Q}{S} dx = \kappa(T) dT$  и

проинтегрировать обе части полученного уравнения:  $\frac{J_Q}{S} \int_0^h dx = \frac{J_Q}{S} h = \int_{T_1}^{T_2=2T_1} \kappa(T) dT = \frac{\alpha}{\sqrt{T_1}} \int_{T_1}^{2T_1} T^{1/2} dT =$

$= \frac{\alpha}{\sqrt{T_1}} \frac{(2T_1)^{3/2} - T_1^{3/2}}{3/2} = \frac{2\alpha T_1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ . Полученный результат позволяет найти перенесенную через слой за время  $\Delta t = 1\text{ мин}$

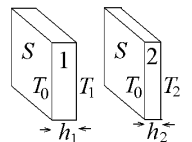
теплоту:  $\Delta Q = J_Q \Delta t = \frac{2\alpha T_1 S}{3h} (2\sqrt{2} - 1) \Delta t = 438,8\text{ кДж}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**18.6.** Бетонная стена здания толщиной  $20\text{ см}$  за счет теплопроводности пропускала за сутки количество теплоты, равное  $240\text{ МДж}$ . Какой должна быть толщина деревянной стены с той же поперечной площадью, чтобы она за неделю пропускала вдвое меньшее количество теплоты при условии, что разность температур по обе стороны бетонной и деревянной стен одинакова? Коэффициенты теплопроводности бетона и древесины равны  $\kappa_B = 1,7\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$  и  $\kappa_D = 0,15\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ .

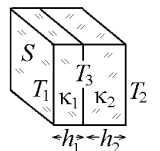
*Ответ: 24,7 см*

**18.7.** Две стены с одинаковой поперечной площадью  $S$  сделаны из разных материалов. Стена "1" толщиной  $h_1 = 25\text{ см}$  – из кирпича, а стена "2" толщиной  $h_2 = 20\text{ см}$  – из бетона. Температура  $T_0 = 300\text{ К}$  по одну сторону этих стен одинакова. По другую сторону стен температуры равны  $T_1 = 250\text{ К}$  и  $T_2 = 260\text{ К}$ . Через кирпичную стену за пять минут переносится  $60\text{ кДж}$  теплоты. Какое количество теплоты переносится за две минуты через бетонную стену? Коэффициенты теплопроводности кирпича и бетона равны  $\kappa_1 = 0,8\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$  и  $\kappa_2 = 1,6\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$  соответственно.



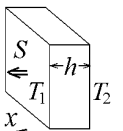
*Ответ: 48 кДж*

**18.8.** Стена с площадью  $S$  состоит из двух плотно прижатых плоских слоёв. Материалы этих слоёв имеют разные коэффициенты теплопроводности  $\kappa_1 = 4\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$  и  $\kappa_2 = 5\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ . Температуры слева и справа от слоёв, а также в точке их соприкосновения, равны  $T_1 = 300\text{ К}$ ,  $T_2 = 400\text{ К}$  и  $T_3 = 360\text{ К}$  соответственно. Чему равна толщина  $h_1$  левого слоя, если толщина правого слоя  $h_2 = 30\text{ см}$ ?



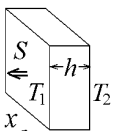
*Ответ: 36 см*

**18.9.** Поток тепла направлен вдоль оси  $x$  и одинаков во всех точках плоского слоя с толщиной  $h = 21\text{ см}$ . Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны  $T_1 = 300\text{ К}$  и  $T_2 = 600\text{ К}$ . Коэффициент теплопроводности материала из которого изготовлен слой, зависит от температуры  $T$  по закону  $\kappa = \alpha \cdot (T/T_1)^5$ , где  $\alpha = 10\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ . Найти площадь  $S$  поперечного сечения слоя, если за одну минуту через это сечение переносится количество теплоты, равное  $27\text{ МДж}$ .



*Ответ: 3 м²*

**18.10.** Поток тепла направлен вдоль оси  $x$  и одинаков во всех точках плоского слоя с поперечной площадью  $S = 16\text{ м}^2$ . Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны  $T_1 = 300\text{ К}$  и  $T_2 = 600\text{ К}$ . Коэффициент теплопроводности материала этого слоя зависит от температуры  $T$  по закону  $\kappa = \alpha \cdot (T_1/T)^6$ , где  $\alpha = 10\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ . Через слой за один час переносится количество теплоты, равное  $210\text{ МДж}$ . Найти толщину слоя  $h$ .



*Ответ: 16,2 см*



## Семестр 3

### 19. Расчет электростатических полей точечных зарядов

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от зарядов их потенциалы складываются с учетом знака заряда,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} + \frac{-|q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}. \text{ Напряженности складываются векторно, } \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \text{ где вели-$$

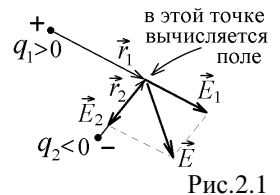


Рис.2.1

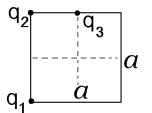
чины векторов (поля точечных зарядов)  $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^2}$ ,  $E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^2}$ . Надо помнить, что вектор

$\vec{E}_1$  поля положительного заряда  $+q_1$  направлен от заряда, а вектор  $\vec{E}_2$  поля отрицательного заряда  $-q_2$  направлен к заряду, как показано на рис.2.1 (линии  $\vec{E}$  начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - электрическая постоянная,  $\epsilon$  - диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха  $\epsilon \approx 1$ ) Постоянная  $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  м/Ф.

На любой точечный заряд  $q$ , внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а энергия внешнего заряда равна  $W = q\varphi$ .

*Пример решения задач:*

**19.1.** Точечные заряды  $q_1 = +5$  мкКл и  $q_2 = +1$  мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной  $a = 3$  м, а заряд  $q_3 = +2$  мкКл - в середине его стороны (см.рисунок). Найти а) величину кулоновской силы, действующей на заряд  $q_3$  со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$ ; б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата; в) энергию заряда  $q_3$ . Как изменятся результаты, если заряд  $q_1$  поменяет знак?



*Решение.*



Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок - это 30-50% успешного решения задачи.

Как видно из рис.2.2, величины напряженностей  $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot AC^2}$ ;  $E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot BC^2}$ , где  $BC = \frac{a}{2}$ ,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$ . Проекции векторов на оси  $x$  и  $y$  равны  $E_{1x} = E_1 \cos \beta$ ;  $E_{1y} = E_1 \sin \beta$ ;  $E_{2x} = E_2$ ;  $E_{2y} = 0$ . Из прямоугольного треугольника ABC следует, что  $\cos \beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$ ;  $\sin \beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$ .

Проекции результирующего вектора  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  в точке C равны

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{5a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_2}{a^2}; \quad E_y = E_{1y} + E_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{5a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Сила Кулона, действующая на}$$

заряд  $q_3$  равна  $F = q_3 E = q_3 \sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q_3}{a^2} \sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt{5}} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2} \sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt{5}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot 10^{-6} = 0,0136 \text{ Н.}$$

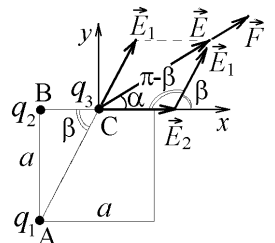


Рис.2.2



Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при подстановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.

Угол  $\alpha$  между направлением вектора силы  $\vec{F}$  (или вектора  $\vec{E}$ ) и осью  $x$  можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = E_y / E_x = 2q_1 / (q_1 + 5\sqrt{5}q_2) = 0,0856, \text{ откуда } \alpha = 4,89^\circ.$$



Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны  $a$  и  $b$  треугольника и угол  $\theta$  между ними (рис.2.3), то противоположная сторона равна  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$ .

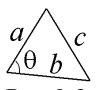


Рис.2.3

Из рис.2.2 видно, что векторы  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  и  $\vec{E}$  образуют треугольник с углом  $\pi - \beta$ . Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов  $E_1 = \frac{4q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot 5a^2} = 4000$  В/м,

$$E_2 = \frac{4q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^2} = 4000 \text{ В/м. } E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(\pi - \beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \beta} \text{ и } F = q_3 E = 13,6 \text{ мН.}$$

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot AC} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{a} \left( \frac{q_1}{\sqrt{5}} + q_2 \right) = 1,94 \cdot 10^4 \text{ В.}$$

Энергия заряда  $q_3$  в электростатическом поле зарядов  $q_1$  и  $q_2$  будет равна  $W = q_3 \varphi = q_3 (\varphi_1 + \varphi_2) = 0,0388 \text{ Дж.}$



Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

Если заряд  $q_1$  изменит знак, то вектор  $\vec{E}_1$  поменяет направление (рис.2.4). Тогда по теоре-

ме косинусов  $F = q_3 E = q_3 \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \beta} = 8,41 \text{ мН}$ . Потенциал заряда  $q_1$  изменит знак:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-|q_1|}{AC} + \frac{q_2}{BC} \right) = -7,42 \cdot 10^3 \text{ В} \quad \text{и} \quad W = q_3 \varphi = -0,0148 \text{ Дж}.$$

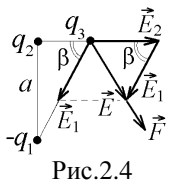


Рис.2.4

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**19.2.** Имеющие разные знаки точечные заряды  $q_1 = q_3 = 2 \text{ мкКл}$  и  $q_2 = -1 \text{ мкКл}$  находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд  $q_3$  со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$  действует электрическая сила величиной  $F = 0,01 \text{ Н}$ . Найти длину  $a$  стороны треугольника.

Ответ: 1,77 м.

**19.3.** Точечные заряды одного знака  $q_1 = 1 \text{ мкКл}$ ,  $q_2 = 2 \text{ мкКл}$  и  $q_3$  находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом  $60^\circ$  и с прилежащим катетом  $a = 1 \text{ м}$ . Определить величину заряда  $q_3$ , если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , равна  $F = 6 \text{ мН}$ . Определить величину энергии заряда  $q_3$ .

Ответ: 0,747 мкКл; 11,1 мВ.

**19.4.** Точечные заряды разного знака  $q_1, q_2, q_3$  и  $q_4$  находятся в вершинах квадрата со стороной  $a = 2 \text{ м}$ . Определить величину положительного заряда  $q_1$ , если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов  $q_2, q_3$  и  $q_4$ , равен  $F = 0,2 \text{ мН}$ . Найти потенциал, созданный зарядами  $q_2, q_3$  и  $q_4$  в точке, где находится заряд  $q_1$ . Учесть, что  $q_2 = q_4 = -2 \text{ мкКл}$ ,  $q_3 = +6 \text{ мкКл}$ .

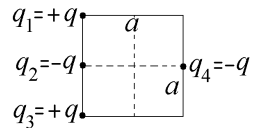
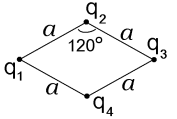
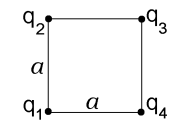
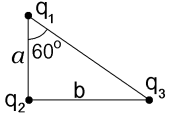
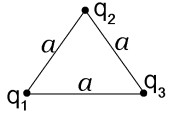
Ответ: 0,518 мкКл, 1092 В.

**19.5.** Точечные заряды разного знака  $q_1 = q_3 = +3 \text{ мкКл}$ ,  $q_2 = q_4 = -2 \text{ мкКл}$  находятся в вершинах ромба с углом  $120^\circ$  и с длиной каждой из сторон  $a = 1 \text{ м}$ . Найти величину электрической силы, действующей на заряд  $q_3$  со стороны трёх других зарядов  $q_1, q_2$  и  $q_4$ . Найти энергию заряда  $q_3$  в поле трех остальных зарядов.

Ответ: 66,5 мН, -0,0145 Дж.

**19.6.** Точечные заряды  $q_1, q_2, q_3$  и  $q_4$ , имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны  $a = 3 \text{ м}$ , как показано на рисунке. Определить величину заряда  $q_1$ , если модуль электрической силы, действующей на заряд  $q_4$  со стороны трёх зарядов  $q_1, q_2$  и  $q_3$ , равен  $F = 1 \text{ мН}$ . Найти потенциал, созданный зарядами  $q_2, q_3$  и  $q_4$  в точке расположения заряда  $q_1$ .

Ответ: 1,523 мкКл, 8,66 кВ.



## 20. Расчет электростатических полей распределенных зарядов

Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью  $\rho$ , то его можно разбить на крошечные участки  $dV$ , заряды которых можно считать **точечными**  $dq = \rho dV$  (рис.2.5). Созданные ими напряженности  $d\vec{E}$  и потенциалы  $d\varphi$  суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл:  $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

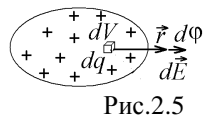


Рис.2.5

Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью  $\rho$  [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной  $dl$  находится заряд  $[dq = \rho dl]$ , создающий в вакууме на удалении  $r$  потенциал

$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$  и напряженность  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (рис.2.6). Интегрировать надо по всем участкам, на которых

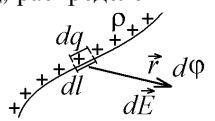


Рис.2.6

находится ненулевой заряд  $\rho \neq 0$ , причем векторы  $d\vec{E}$  надо складывать с учетом направления.

Примеры решения задач:

**20.1.** Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины  $2a = 1 \text{ м}$ , вытянутому вдоль оси  $x$ . Линейная плотность этого заряда меняется с координатой  $x$  по степенному закону

$\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (x/a)^3 & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$  где  $\rho_0 = 4 \text{ мкКл/м}$ . В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён то-

чечный заряд  $q = 3 \text{ мкКл}$  (см. рисунок). Найти проекцию на ось  $x$  электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд  $q$ . Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.

Решение.

Положительный заряд  $dq = \rho(x)dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  справа от точки 0, создает в этой точке напряженность  $d\vec{E}_+$ , направленную от заряда против оси  $x$  (рис.2.7). Так

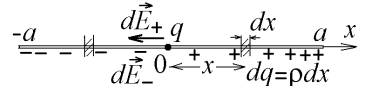


Рис.2.7

как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то ту же по величине напряженность  $d\vec{E}_-$ , направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд  $-|dq|$  слева от точки 0.



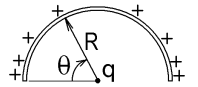
Используйте условия симметрии в распределении заряда. Достаточно вычислить поле заряда только одного знака. Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0 одинаковые поля:

$$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \left( \rho_0 \frac{x^3}{a^3} \right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0}{a^3} \int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{2a}.$$

Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на стержне в точке 0 равна  $\vec{E} = 2\vec{E}_+$ , а проекция силы, действующей на заряд  $q$ ,  $F_x = qE_x = \rho_0 q / (4\pi\epsilon_0 a) = -0,216 \text{ Н}$ .

Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположенных положительного и отрицательного зарядов должны компенсировать друг друга,  $\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0}{a^3} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-$ . Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.

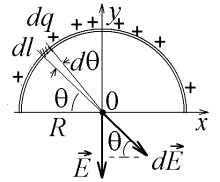
**20.2.** Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса  $R = 50 \text{ см}$  неравномерно с линейной плотностью  $\rho = \rho_0 \sin^2 \theta$ , где  $\rho_0 = 7,08 \text{ мкКл/м}$ , а угол  $\theta$  указан на рисунке. Найти величину электрической силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд  $q = 6 \text{ мкКл}$ , находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, который заряд на полукольце создает в его центре.



*Решение.*

При решении подобных задач на полукольце выделяют крошечную дугу длины  $dl = R d\theta$ , опирающуюся на бесконечно малый угол  $d\theta$  (рис.1.8). На этом участке находится точечный заряд  $dq = \rho dl$ ,

создающий в центре 0 полукольца напряженность  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . В силу симметрии распределения за-



ряда слева и справа от вертикальной оси  $y$ , суммарная напряженность  $\vec{E}$  направлена против оси  $y$ , т.е.

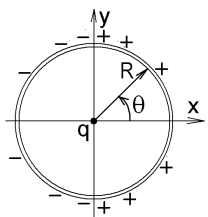
$$\text{надо суммировать проекции на эту ось: } E = \int dE \sin \theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\theta) \cdot R d\theta}{R^2} \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \rho_0 \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta.$$



При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида  $\int f(\cos \theta) \sin \theta d\theta$  или  $\int f(\sin \theta) \cos \theta d\theta$ , которые легко привести к простому виду заменой переменной  $z = \cos \theta$ ,  $\sin \theta d\theta = -dz$  или  $z = \sin \theta$ ,  $\cos \theta d\theta = dz$ . При этом  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ .

Делая замену переменной  $z = \cos \theta$  в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак “-”, получаем  $E = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho_0}{3R}$ , откуда  $F = qE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q\rho_0}{3R} = 0,288 \text{ Н}$  – это сила, действующая на заряд  $q$  в точке 0. Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \varphi_0 = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot R d\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \rho_0 \sin^2 \theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0 R} = 200 \text{ кВ}$$



**20.3.** Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса  $R = 60 \text{ см}$  так, что его линейная плотность меняется с углом  $\theta$  по закону  $\rho = \rho_0 / \cos \theta$ , где  $\rho_0 = 1,18 \text{ мкКл/м}$ . В центре кольца помещён точечный электрический заряд  $q$ , на который заряд кольца действует с силой  $F = 1 \text{ Н}$ . Найти величину заряда  $q$ .

*Решение.*

Выделяем на кольце крошечный участок дуги  $dl = R d\theta$  с точечным зарядом  $dq = \rho dl = \rho R d\theta$ , который создает в центре 0 кольца напряженность  $d\vec{E}$

(рис.2.9). Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности  $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$ , направленные против оси  $x$ . Их сумма (сумма проекций  $d\vec{E}$  на ось  $x$ ) имеет величину

$$E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2 \int dE \cdot \cos \theta = 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\rho R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R}.$$

Величина силы, действующей на заряд  $q$  в точке 0  $F = qE = \frac{q\rho_0}{2\epsilon_0 R}$ , откуда  $q = \frac{2\epsilon_0 R F}{\rho_0} = 9 \text{ мкКл}$ .

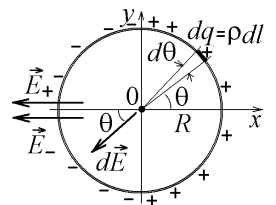


Рис.2.9

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**20.4.** По тонкому стержню длины  $a = 2$  м, направленному вдоль оси  $x$ , неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой  $x$  по закону  $\rho = \rho_0 \cdot (x/a)^3$ , где  $\rho_0 = -2$  мКл/м. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд  $q = +2$  мКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось  $x$  электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд  $q$ , а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.

Ответ: +9 мН, -6 кВ.

**20.5.** Тонкий стержень длины  $a$  направлен вдоль оси  $x$ . По стержню равномерно с линейной плотностью  $\rho = 0,2$  мКл/м распределен положительный электрический заряд. На расстоянии  $a$  от правого конца стержня на оси  $x$  находится точечный заряд  $q = 0,5$  мКл того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд  $q$  с силой  $F = 0,9$  Н. Найти длину  $a$  стержня, а также энергию заряда  $q$ .

Ответ: 0,5 м, 0,624 Дж.

**20.6.** Положительный точечный заряд  $q = 7$  мКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью  $\rho = \rho_0 \cdot \cos\theta$ , где  $\rho_0 = 1,77$  мКл/м, распределен другой электрический заряд (угол  $\theta$  указан на рисунке). Найти радиус  $R$  полукольца, если заряд на нём действует на заряд  $q$  с силой, величина проекции которой на ось  $x$  равна  $|F_x| = 0,5$  Н.

Ответ: 0,35 м.

**20.7.** Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса  $R = 40$  см так, что его линейная плотность меняется с углом  $\theta$  по закону  $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$ , где  $\rho_0 = +2,95$  мКл/м. В центре кольца помещён другой точечный заряд  $q = +24$  мКл. Найти величину электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд  $q$ .

Ответ: 5 Н.

**20.8.** Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса  $R = 50$  см с линейной плотностью  $\rho = \rho_0 (\theta/\pi)^3$ , где  $\rho_0 = 7,08$  мКл/м, а угол  $\theta$  меняется в пределах  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Найти энергию точечного заряда  $q = 6$  мКл, находящийся в центре полукольца.

Ответ: 0,3 Дж.

**20.9.** Два очень тонких стержня длиной  $a = 20$  см каждый направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $x$  и  $y$  и соединяются в начале координат 0, в котором закреплён точечный заряд  $q = 2$  мКл (см. рисунок). По стержням неравномерно распределены электрические заряды, линейные плотности которых зависят от координат  $x$  и  $y$  соответственно:  $\rho_1 = \rho_0 \cdot (x/a)^2$ ,  $\rho_2 = \rho_0 \cdot (y/a)^2$ , где  $\rho_0 = 2$  мКл/м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд  $q$ , а также энергию этого заряда.

Ответ: 0,255 Н, 0,036 Дж.

## 21. Использование теоремы Гаусса для расчета электрических полей

В том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность, которую линии напряженности  $\vec{E}$  или линии электрической индукции  $\vec{D}$  пересекают под прямым углом, для расчета поля удобно использовать теорему Гаусса: поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов  $\sum q$  (с учетом их знака!), находящихся **внутри этой поверхности**, деленной на  $\epsilon\epsilon_0$ :  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum q / \epsilon\epsilon_0$ . Для вектора  $\vec{D}$  такая же теорема имеет вид  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q$ .



Используйте теорему Гаусса в том случае, когда заряд распределен симметрично по шару, по длинному цилиндру, по нити или равномерно распределен по плоскости или плоскому слою.

Примеры решения задач:

**21.1.** По шару радиуса  $R$  равномерно с плотностью  $\rho$  распределен электрический заряд. На расстояниях  $r_1 = 15$  см и  $r_2 = 60$  см от центра шара величина напряженности электрического поля, созданного этим зарядом, равна, соответственно,  $E_1 = 24$  В/м и  $E_2 = 12$  В/м. Чему равен радиус шара  $R$ , если известно, что  $r_1 < R < r_2$ ?

Решение.

Линии  $\vec{E}$  начинаются на всех зарядах внутри шара и направлены радиально (рис.2.10). Охватим шар сферической замкнутой поверхностью  $A$  с радиусом  $r > R$ . Если вектор  $\vec{E}$  составляет угол  $\theta$  с вектором элементарной площадки  $d\vec{S}$ , то  $\vec{E} d\vec{S} = E \cos\theta dS$ . В нашей задаче элементы площади  $d\vec{S}$  направлены параллельно линиям  $\vec{E}$ , а величина  $E$  в силу симметрии одинакова во всех точках сферы. Поэтому поток  $\vec{E}$  через замкнутую сферу равен произведению  $E$  на площадь поверхности сферы  $4\pi r^2$ , которую линии  $E$  пересекают нормально:  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cos 0^\circ \oint dS = E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \epsilon_0$ . Сумма зарядов внутри сферы равна заряду шара  $\sum q = \rho \cdot V_{\text{шара}} = \rho \cdot 4\pi R^3 / 3$ , и вне шара напряженность  $E_{\text{вне}} = \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2$  совпадает с напряженностью поля заряда, собранного в центр шара.

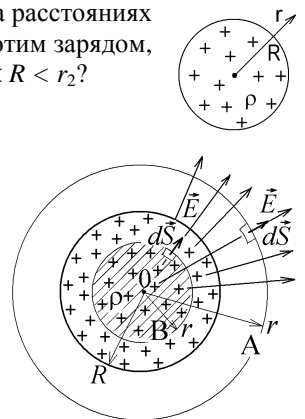


Рис.2.10

Вторую сферическую поверхность В с радиусом  $r < R$  выберем внутри шара. Внутри неё находится заряд заштрихованного на рис.2.10 шара радиуса  $r$ :  $\sum q = \rho \cdot 4\pi r^3/3$ . Применение теоремы Гаусса дает  $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\epsilon_0 = \rho \cdot 4\pi r^3/3\epsilon_0$ . Поле внутри шара растёт пропорционально расстоянию  $r$ :  $E_{\text{внутри}} = \rho r/3\epsilon_0$  (рис.2.11).

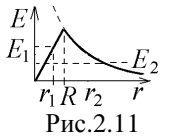


Рис.2.11

Согласно условию, на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  величины напряженностей различаются в два раза (рис.2.11):

$$E_1 = \rho r_1/3\epsilon_0 = 2E_2 = 2\rho R^3/3\epsilon_0 r_2^2, \text{ откуда } R = \sqrt[3]{r_1 r_2^2/2} = 30 \text{ см.}$$

**Совет:** Если плотность заряда является функцией расстояния  $r$ , то данное решение не меняется, но сумма зарядов внутри сферы радиуса  $r$  вычисляется по формуле  $\sum q = \int \rho(r) dV = \int \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$ .

**21.2.** По шару радиуса  $R = 50$  см из материала с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2$  распределён электрический заряд, причём объёмная плотность такого заряда меняется с расстоянием  $r$  от центра шара по закону  $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ . На расстоянии  $r = 5$  см от центра заряд создаёт электрическое поле с величиной напряжённости  $E = 20$  В/м. Найти величину  $\rho_0$ .

*Решение.*

Как и в предыдущей задаче, поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую сферическую поверхность радиуса  $r$ , находящуюся **внутри** шара, равен  $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\epsilon_0 \epsilon$  (надо учесть диэлектрическую проницаемость среды). Объем внутри  $V = 4\pi r^3/3$ , элемент объема  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Заряд внутри поверхности  $\sum q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi \rho_0 r^5}{5R^2}$ . Так как

$$\epsilon = 2, \text{ то } E = \frac{\rho_0 r^3}{10\epsilon_0 R^2} \text{ и } \rho_0 = \frac{10\epsilon_0 \epsilon R^2 E}{r^3} = 7,08 \text{ мкКл/м}^3.$$

**21.3.** Две очень длинные цилиндрические поверхности с радиусами  $a = 1$  м и  $b = 5$  м с общей осью О ограничивают равномерно заряженный цилиндрический слой. Плотность электрического заряда в нём  $\rho = 4$  мКл/м<sup>3</sup>. Найти величину вектора электрической индукции  $\vec{D}$  (вектора смещения) на расстоянии  $r = 4$  м от оси О.

*Решение.*

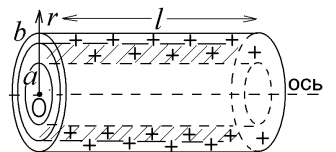


Рис.2.12

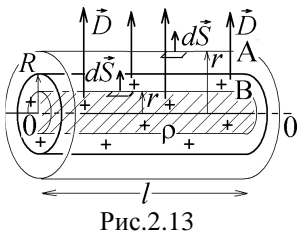


Рис.2.13

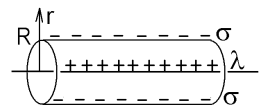
Рассмотрим вначале равномерно заряженный с плотностью  $\rho = \text{const}$  сплошной цилиндр. Окружим его соосной цилиндрической поверхностью А длины  $l$  и большего радиуса  $r > R$ . Как и линии  $\vec{E}$ , линии индукции  $\vec{D}$  направлены по радиусам к общей оси О и пересекают боковую поверхность  $S_{\text{бок}} = 2\pi r l$  нормально (рис.2.13). Внутри этой поверхности находится заряд из вырезанного поверхностью участка заряженного цилиндра  $\sum q = \rho \cdot V_{\text{цилиндра}} = \rho \cdot \pi R^2 l$ . Согласно теореме Гаусса

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \sum q. \text{ Поэтому вне цилиндра } D_{\text{вне}} = \rho R^2/2r.$$

Цилиндрическая поверхность В меньшего радиуса  $r < R$ , охватывает заштрихованный на рис.2.13 участок цилиндра с зарядом  $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l$ . Теорема Гаусса для этой поверхности дает  $D \cdot 2\pi r l = \sum q = \rho \pi r^2 l$ . Поэтому внутри цилиндра  $D_{\text{внутри}} = \rho r/2$ .

В нашей задаче проводим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса  $r < b$  и длины  $l$  внутри цилиндрического слоя. Она охватывает заштрихованный на рис.2.12 участок с объемом  $V = \pi r^2 l - \pi a^2 l$ , имеющий заряд  $\sum q = \rho V$ . Теорема Гаусса позволяет просто определить индукцию  $D$  на этой поверхности:  $D = \frac{\sum q}{2\pi r l} = \rho(r^2 - a^2)/2r = 7,5 \text{ мКл/м}^2$ .

**21.4.** Поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса  $R = 30$  см, равна  $\sigma = -2$  мКл/м<sup>2</sup>. По её оси протянута нить, равномерно заряженная с линейной плотностью  $\lambda = 4$  мКл/м. На каком удалении  $r$  от оси напряженность электрического поля, созданного этими зарядами будет равна  $E = 1$  кВ/м?



*Решение.*

Как и на рис.1.13, охватим эту систему зарядов замкнутой цилиндрической поверхностью длины  $l$  и радиуса  $r > R$ . Она охватывает участок цилиндра с зарядом  $q_{\text{ц}} = \sigma \cdot 2\pi R l$  и участок нити с зарядом  $q_{\text{н}} = \lambda \cdot l$ . Линии  $\vec{E}$  расходятся вдоль радиусов и перпендикулярны к выбранной поверхности. Согласно теореме Гаусса

$$E \cdot 2\pi r l = \sum q/\epsilon_0 = (q_{\text{ц}} + q_{\text{н}})/\epsilon_0, \text{ откуда } r = \frac{2\pi R \sigma + \lambda}{2\pi \epsilon_0 E} = 4,14 \text{ м.}$$

При  $r < R$  поле создает только заряд нити. Одна нить создаёт слишком большое поле  $E_{\text{нити}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ , не удовлетворяющее условиям задачи.

**21.5.** На удалении  $z = 1$  м от бесконечного плоского слоя, заряженного равномерно с плотностью заряда  $\rho = 5$  мкКл/м<sup>3</sup>, находится точечный заряд  $q = 4$  мкКл. Чему равна толщина слоя  $h$ , если он действует на заряд  $q$  с электрической силой  $F = 0,02$  Н?

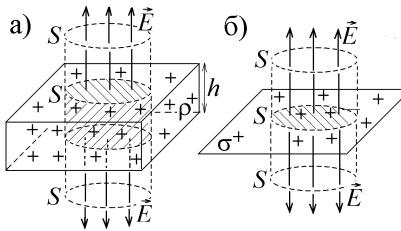
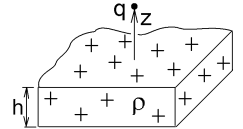


Рис.2.14

*Решение.*

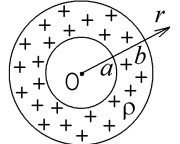
И в случае равномерно заряженного с плотностью  $\rho$  слоя (рис.2.14,а), и в случае равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  плоскости (рис.2.14,б), линии напряженности  $\vec{E}$  выходят нормально и пересекают только имеющие площадь  $S$  основания цилиндрической замкнутой поверхности, охватывающей заряды на заштрихованных участках. По теореме Гаусса поток  $\vec{E}$  через эту поверхность  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2S = \sum q / \epsilon_0 \epsilon$ . Сумма зарядов на заштрихованных участках  $\sum q = \rho \cdot hS$  для

слоя и  $\sum q = \sigma \cdot S$  для плоскости. Поэтому  $E_{\text{слоя}} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0 \epsilon}$  (рис.1.14,а) и  $E_{\text{плоскости}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon}$  (рис.1.14,б).

Величина  $E$  не зависит от расстояния до бесконечного слоя (или плоскости). Действующая на заряд  $q$  сила  $F = qE$ , и по условиям задачи ( $\epsilon = 1$ ) толщина слоя  $h = 2\epsilon_0 F / q\rho = 1,77$  см.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

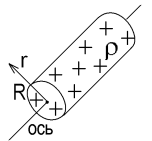
**21.6.** Заряд с плотностью  $\rho = 3,75$  мкКл/м<sup>3</sup> равномерно распределён по шаровому слою, ограниченному двумя сферическими поверхностями с общим центром  $O$  и с радиусами  $a$  и  $b$ . Чему равен радиус  $a$ , если  $b = 9$  м, а на расстоянии  $r = 5$  м от центра  $O$  величина вектора электрической индукции поля, созданного этим зарядом, равна  $D = 6,2$  мКл/м<sup>2</sup>?



*Ответ:* 1 м.

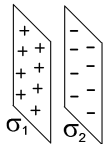
**21.7.** Очень длинный цилиндр радиуса  $R = 4$  см равномерно с плотностью  $\rho = \text{const}$  заряжен по объёму. На расстоянии  $r_1 = 3$  см от оси цилиндра напряжённость электрического поля, имеет величину  $E_1 = 24$  В/м, а на расстоянии  $r_2 > r_1$  от оси  $E_2 = 16$  В/м. Найти расстояние  $r_2$ .

*Ответ:* 8 см.



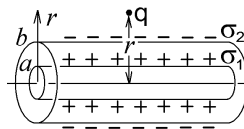
**21.8.** По двум параллельным бесконечным плоскостям равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1 = +8$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = -4$  мкКл/м<sup>2</sup> разного знака. Во сколько раз величина вектора электрической индукции  $\vec{D}$  между заряженными плоскостями больше величины вектора  $\vec{D}$  слева от обеих плоскостей?

*Ответ:* в 3 раза.



**21.9.** Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы  $a = 5$  см и  $b = 10$  см. Поверхностные плотности таких зарядов  $\sigma_1 = -5,9$  нКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = +4,72$  нКл/м<sup>2</sup>. Чему равна величина точечного заряда  $q$ , находящегося на расстоянии  $r = 20$  см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила  $F = 3$  мН?

*Ответ:* 30 мкКл.



**21.10.** Электрический заряд распределён в пространстве неравномерно: его плотность изменяется с расстоянием  $r$  от центра  $O$  по закону:  $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (R/r)^3 & \text{при } r \geq R; \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$  где  $\rho_0 = 2,36$  нКл/м<sup>3</sup>;  $R = 50$  см. Найти величину напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом на расстоянии  $r = 1$  м от центра  $O$ .  $\epsilon = 1$ .

*Ответ:* 23,1 В/м.

**21.11.** Электрический заряд распределён по объёму бесконечно длинного цилиндра радиуса  $R = 20$  см. Плотность заряда меняется с расстоянием  $r$  от оси цилиндра по закону  $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$ , где  $\rho_0 = 8$  мКл/м<sup>3</sup>. На каком расстоянии  $r$  от оси (внутри цилиндра) величина вектора электрической индукции равна  $D = 3,2$  мКл/м<sup>2</sup>?

*Ответ:* 4 см.

## 22. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы



При решении задач проще использовать дифференциальные операторы (производные). Например, напряжённость

поля можно определить, зная его потенциал:  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi \equiv -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .

Зная напряжённость, вычисляют плотность заряда, создающего электрическое поле:

$$\rho = \epsilon_0 \epsilon \operatorname{div} \vec{E} \equiv \epsilon_0 \epsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

Примеры решения задач:

**22.1.** Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону  $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x) + \sin(\beta y) + \sin(\gamma z))$ , где  $\varphi_0 = 100$  В,  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$  рад/м. Найти плотности  $\rho$  электрического заряда в той точке, в которой потенциал поля равен  $\varphi = 100$  В, а также величину напряженности в точке  $x = y = z = 2$  м. Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1$ .

Решение.

Находим проекции вектора  $\vec{E}$ :  $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -\alpha\varphi_0 \cos(\alpha x)$ ;

$E_y = -\partial\varphi/\partial y = -\beta\varphi_0 \cos(\beta y)$ ;  $E_z = -\partial\varphi/\partial z = -\gamma\varphi_0 \cos(\gamma z)$ . Плотность заряда пропорциональна дивергенции этого вектора и, так как  $\alpha = \beta = \gamma$ , во всех точках пропорциональна потенциалу:

$$\rho = \epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \epsilon_0 (\alpha^2 \varphi_0 \sin(\alpha x) + \beta^2 \varphi_0 \sin(\beta y) + \gamma^2 \varphi_0 \sin(\gamma z)) = \epsilon_0 \alpha^2 \varphi = 2,18 \text{ нКл/м}^3.$$

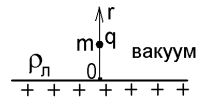
$$\text{Величина напряженности: } E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \varphi_0^2 \cos^2 \pi} = \sqrt{3} \alpha \varphi_0 = 544 \text{ В/м}.$$

Работу по перемещению частицы с зарядом  $q$  из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле можно вычислить с помощью силы Кулона:  $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r}$ . Но проще найти её с помощью потенциала. Эта работа идет на изменение кинетической энергии заряженной частицы:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Примеры решения задач:

**22.2.** Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью  $\rho_l = 2$  мКл/м. Покоившаяся первоначально на расстоянии  $r_1 = 1$  м от нити частица с зарядом  $q = 5$  мКл и с массой  $m = 0,8$  г удаляется от нити под действием электрической силы. На каком расстоянии  $r_2$  от нити частица будет иметь скорость  $v = 30$  м/с?



Решение.

Напряженности поля заряженного шара, плоскости, нити можно получить с помощью теоремы Гаусса.

**Совет:** В данной задаче напряженность поля нити  $E_{\text{нити}} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$  (см. задачу 21.4). Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = A_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} q E dr = \frac{q \rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q \rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Избавиться от логарифма можно вычислив экспоненту от обеих частей уравнения:  $\exp \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \equiv \frac{r_2}{r_1} = \exp \left( \frac{\pi\epsilon_0 m v^2}{q \rho_l} \right)$ , откуда  $r_2 = 7,40$  м.

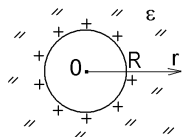
Плотность энергии электрического поля (или энергия единицы объема поля)  $w_{эл} = \epsilon \epsilon_0 E^2 / 2$ . Энергия поля в объеме  $V$  вычисляется как  $W = \int w_{эл} dV$ .

Примеры решения задач:

**22.3.** Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$  заполняет все пространство вокруг заряженного металлического шара радиуса  $R = 3$  см. Чему равна величина заряда  $q$  на шаре, если энергия созданного им электрического поля равна  $W = 60$  Дж.

Решение.

Внутри металлического шара поле отсутствует, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, сосредоточенного в центр шара:  $E = q / (4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2)$ , при  $r \geq R$ . Поэтому энергия поля вне шара



$$W = \int \epsilon \epsilon_0 \frac{E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}.$$

Отсюда  $q = \sqrt{8\pi\epsilon\epsilon_0 W R} = 40$  мКл. **Совет:** Вместо энергии поля иногда проще найти энергию системы зарядов, создающих данное поле. Эти энергии одинаковы.

Энергия заряда выражается через емкость проводника  $C$  и его потенциал  $\varphi$ :  $W = C\varphi^2 / 2$ , где  $q = C\varphi$ . Емкость уединенного шара  $C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$ , его потенциал  $\varphi = q / (4\pi\epsilon\epsilon_0 R)$ . Подставляя, получаем уже найденную формулу

для энергии  $W$ .

Заряд  $q$  и емкость  $C$  конденсатора связаны с разностью потенциалов  $U = \Delta\phi$  на его обкладках:  $q = CU$ . Энергия

заряженного конденсатора  $W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ . Емкость вычисляют, с помощью формулы, связывающей напряжен-

ность и потенциал поля:  $\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}$ .

В **плоском конденсаторе** (рис.2.15,а) с площадью пластин  $S$ , расстоянием между пластинами  $d$ , заполненном диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , напряженность поля между пластинами  $E_{\text{конд}} = \sigma/\epsilon\epsilon_0$ , где  $\sigma = q/S$  - поверхностная плотность заряда. Разность

потенциалов на пластинах  $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E_{\text{конд}} dx = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$ . Ёмкость плоского

конденсатора  $C_{\text{плоск}} = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ .

В **сферическом конденсаторе** (рис.2.15,б) пространство между металлическими сферами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  заполнено диэлектриком с  $\epsilon = \text{const}$ . Поле между ними создано

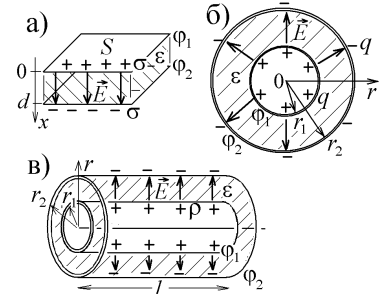


Рис.2.15

зарядом  $q$  на внутренней сфере:  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ . Тогда  $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{C}$ . Ёмкость сферическо-

го конденсатора  $C_{\text{сфер}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ .

Аналогичным вычислением покажите, что емкость **цилиндрического конденсатора** (две соосные цилиндрические поверхности с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  большой длины  $l$ , рис.2.15,в) равна  $C_{\text{цилин}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}$ .

*Примеры решения задач:*

**22.4.** Заряженный плоский конденсатор заполнен твердым диэлектриком и имеет энергию  $W = 0,2$  Дж. Расстояние между его пластинами  $d = 2$  мм. Найти силу, притягивающую одну пластину к другой.

*Решение.*

На пластину с зарядом  $q$  может действовать только заряд другой пластины (рис.2.15,а), создающий поле  $E = \sigma/(2\epsilon\epsilon_0)$  (поле заряженной плоскости). Заряд конденсатора можно выразить через его энергию:  $q^2 = 2CW = 2W\epsilon\epsilon_0 S/d$ . Подставляя этот результат в формулу для силы  $F = qE = q\sigma/(2\epsilon\epsilon_0) = q^2/(2\epsilon\epsilon_0 S)$ , получаем  $F = W/d = 100$  Н.

**22.5.** Пространство между заряженным металлическим шаром радиуса  $r_1 = 2$  см и металлической заземленной сферой с радиусом  $r_2 = 4$  см заполнено неоднородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется с расстоянием  $r$  от общего центра  $O$  по закону  $\epsilon = \alpha/r$ , где  $\alpha = 6$  см. Найти заряд  $q$  шара, если энергия такой системы заряженных проводников равна  $W = 0,2$  Дж.

*Решение.*

На внутренней поверхности заземленной сферы окажется заряд  $-q$ , на котором будут заканчиваться все силовые линии  $\vec{E}$ , не проникая в металл. Система будет сферическим конденсатором, для которого разность потенциа-

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\alpha\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\alpha\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

$$\text{Его энергия, } W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{8\pi\alpha\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \text{ и } q = \sqrt{\frac{8\pi\alpha\epsilon_0 W}{\ln(r_2/r_1)}} = 1,96 \text{ мкКл}.$$

Ёмкость этого конденсатора не совпадает с ёмкостью конденсатора, заполненного однородным диэлектриком.

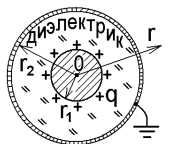
*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**22.6.** Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону  $\phi = \alpha \cdot xyz$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Величина напряженности такого поля в точке с координатами  $x_1 = y_1 = z_1 = 1$  м равна  $E_1 = 30$  В/м. Найти величину напряженности этого поля в точке с координатами  $x_2 = 1$  м,  $y_2 = 2$  м,  $z_2 = 3$  м.

*Ответ:* 121 В/м.

**22.7.** Потенциал электростатического поля зависит от координат  $x, y$  по закону  $\phi = \phi_0 \cdot (\sin(\alpha x) + \cos(\beta y))$ , где  $\phi_0 = 100$  В,  $\alpha = 2$  рад/м,  $\beta = 3$  рад/м. Найти величину напряженности поля, а также плотность электрического заряда в точке с координатами  $x = y = 1$  м.

*Ответ:* 93,4 В/м,  $-4,67$  нКл/м<sup>3</sup>.





**22.8.** Частица с зарядом  $q = 3$  мкКл и с массой  $m = 0,2$  г покоилась на расстоянии  $z_1 = 1$  см от очень большой плоской поверхности металла, по которой с поверхностной плотностью  $\sigma = 3,54$  нКл/м<sup>2</sup> распределен электрический заряд того же знака. Какую скорость приобретёт частица, удалившись на расстояние  $z_2 = 4$  см от поверхности металла под действием электрической силы.

Ответ: 0,6 м/с.



**22.9.** Заряженный плоский конденсатор, имеющий энергию  $W = 0,004$  Дж, заполнен диэлектриком и отключен от источника напряжения. Чтобы вынуть диэлектрик, надо совершить работу  $A = 0,003$  Дж. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика?

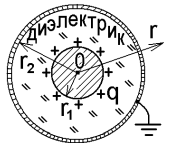
Ответ: 1,75.

**22.10.** Расстояние между горизонтально расположенными пластинами плоского воздушного конденсатора  $d = 1$  см. Между пластин неподвижно висит заряженная пылинка с массой  $m = 0,05$  г. Ёмкость конденсатора  $C = 0,03$  мкФ, заряд на его пластинах  $q = 6$  мкКл. Найти величину заряда пылинки. Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ: 25 нКл.

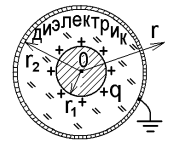
**22.11.** Однородная среда с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$  заполняет пространство между металлическим шаром и заземленной металлической сферой радиуса  $r_2 = 8$  м. На шар помещен заряд  $q = 6$  мкКл, а потенциал электростатического поля в общем центре  $O$  шара и сферы имеет величину  $\phi_0 = 2,4$  кВ. Чему равен радиус  $r_1$  шара?

Ответ: 3,30 м.



**22.12.** Металлический шар радиуса  $r_1 = 2$  см и заземленная металлическая сфера радиуса  $r_2 = 3$  см имеют общий центр  $O$ . Диэлектрическая проницаемость непроводящей среды, заполняющей пространство между шаром и сферой, убывает с расстоянием  $r$  от центра  $O$  по закону  $\epsilon = a/r$ , где  $a = 4$  см. Найти ёмкость такой системы проводников (в пФ).

Ответ: 11,0 пФ



**22.13.** Металлический шар с зарядом  $q = 4$  мкКл окружен заземленной металлической сферой радиуса  $r_2 = 5$  см. Между ними находится диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого убывает с расстоянием  $r$  от общего центра  $O$  по закону  $\epsilon = b/r^3$ , где  $b = 150$  см<sup>3</sup>. Энергия этой системы заряженных проводников равна  $W = 0,36$  Дж. Найти радиус шара  $r_1$ .

Ответ: 3,16 см.

## 23. Законы квазистационарного тока

Ток, протекающий по участку цепи с сопротивлением  $R$ , создает на нем падение напряжения  $[U = IR]$ . Мощность тока  $[P = UI = I^2 R]$ , а величина силы тока зависит от величины заряда, протекшего через сечение проводника за единицу времени:  $[I = dq/dt]$ .



Если ток зависит от времени, не используйте школьные формулы, записанные для постоянного тока!

Величина заряда, протекшего по цепи за время  $0 \leq t \leq \tau$  будет равна  $q = \int_0^{\tau} I(t) dt$ , а величина выделившегося за это

время тепла  $Q = \int_0^{\tau} I^2(t) R dt$ .

Примеры решения задач:

**23.1.** Ток, текущий по проводнику, возрастает прямо пропорционально времени  $t$ :  $I = \alpha \cdot t$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Чему равно сопротивление  $R$  проводника, если за промежуток времени  $0 \leq t \leq \tau$ , где  $\tau = 4$  с, через поперечное сечение проводника протекает заряд  $q = 5$  Кл, а в проводнике выделяется джоулево тепло  $Q = 80$  Дж?

Решение.

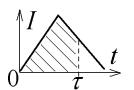
Так как  $q = \int_0^{\tau} I dt = \int_0^{\tau} \alpha t dt = \frac{\alpha \tau^2}{2}$ ;  $Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = \int_0^{\tau} \alpha^2 t^2 R dt = \frac{\alpha^2 \tau^3 R}{3}$ , то  $\frac{q^2}{Q} = \frac{3\tau}{4R}$  (исключили неизвестную  $\alpha$ ). Поэтому

$$R = \frac{3\tau Q}{4q^2} = 9,6 \text{ Ом}.$$

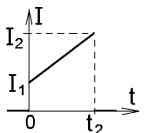


Если зависимость силы тока от времени задана с помощью графика (в задачах обычно задана линейная зависимость), то её надо выразить линейной функцией:  $I = a + bt$ . Параметры  $a$  и  $b$  этой зависимости определяют подстановкой числовых данных на осях графика.

Надо помнить, что интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции. Например, протекающий за время  $\tau$  заряд будет равен заштрихованной площади под графиком тока.



**23.2.** По проводнику с сопротивлением  $R = 2$  Ом течёт ток, величина которого за интервал времени  $0 \leq t \leq t_2 = 3$  с меняется по линейному закону от  $I_1 = 2$  А до  $I_2 = 5$  А (см. рисунок). Чему равно тепло  $Q$ , которое выделится в проводнике за указанный интервал времени  $0 \leq t \leq t_2$  с, а также заряд  $q$ , который протечет по проводнику за это время?

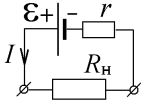


*Решение.*

Так как  $I = a + bt$ , то при  $t = 0$  имеем  $I_1 = a$ , а при  $t = t_2$   $I_2 = a + bt_2$ . Отсюда  $b = (I_2 - I_1)/t_2 = 1 \text{ А/с}$ ;  $a = I_1 = 2 \text{ А}$ .

$$\text{Поэтому } Q = \int I^2 R dt = \int (a + bt)^2 R dt = R \left( a^2 \int_0^{t_2} dt + 2ab \int_0^{t_2} t dt + b^2 \int_0^{t_2} t^2 dt \right) = R \left( a^2 t_2 + ab t_2^2 + b^2 t_2^3 / 3 \right) = 78 \text{ Дж}.$$

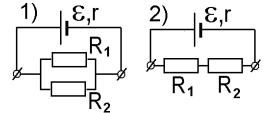
Протекший заряд  $q = \int I dt$  равен площади под графиком тока:  $q = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) t_2 = 10,5 \text{ Кл}$ .



В случае, когда к источнику тока с **постоянной** ЭДС  $\mathcal{E}$  подключается внешняя нагрузка с сопротивлением  $R_H$ , по цепи протекает постоянный ток  $I = \mathcal{E} / (R_H + r)$ . Помните, что у каждого источника тока имеется внутреннее сопротивление  $r$ . В этом случае за время  $\Delta t$  на нагрузке выделяется тепло  $Q = I^2 R \Delta t$ .

*Примеры решения задач:*

**23.3.** К клеммам источника постоянного тока с внутренним сопротивлением  $r = 40 \text{ Ом}$  сначала подключали нагрузку из двух одинаковых сопротивлений  $R_1 = R_2 = R$ , соединенных параллельно (рис.1), а потом соединённых последовательно (рис.2). В цепи на рис.1 за одну минуту на нагрузке выделялось тепло  $Q_1 = 3,6 \text{ кДж}$ , а в цепи на рис.2 за то же время на нагрузке выделялось тепло  $Q_2 = 2,5 \text{ кДж}$ . Чему равно каждое из сопротивлений  $R_1$  или  $R_2$ ? Какой заряд протекает через нагрузку в обоих случаях?



*Решение.*

При параллельном соединении резисторов сопротивление нагрузки равно  $R_{H1} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = R/2$ , а при последовательном –  $R_{H2} = R_1 + R_2 = 2R$ . Поэтому  $Q_1 = I_1^2 R_{H1} \Delta t = \left( \frac{\mathcal{E}}{r + R/2} \right)^2 \frac{R}{2} \Delta t$ ;  $Q_2 = I_2^2 R_{H2} \Delta t = \left( \frac{\mathcal{E}}{r + 2R} \right)^2 2R \Delta t$ .

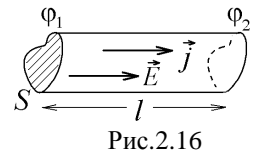
$$\text{Отсюда } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{36}{25} = \frac{(r + 2R)^2}{4(r + R/2)^2}, \text{ или } \frac{r + 2R}{r + R/2} = \frac{12}{5} \text{ и } R = \frac{7r}{4} = 70 \text{ Ом}.$$

Зная сопротивления, можно вычислить величину ЭДС, величину токов  $I_1 = \sqrt{2Q_1 / R \Delta t}$ ;  $I_2 = \sqrt{Q_2 / 2R \Delta t}$ , а также определить протекший за время  $\Delta t$  заряд:  $q_1 = I_1 \Delta t = \sqrt{\frac{2Q_1 \Delta t}{R}} = 111 \text{ Кл}$ ;  $q_2 = I_2 \Delta t = \sqrt{\frac{Q_2 \Delta t}{2R}} = 46,3 \text{ Кл}$ .



Если в условии задачи приведены удельное сопротивление проводника  $\rho$  или его удельная проводимость  $\sigma = 1/\rho$ , то можно использовать закон Ома в локальной форме:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

Здесь  $\vec{E}$  – напряженность стороннего электрического поля, создающего ток, а  $j = dI/dS$  – плотность тока, текущего через поперечное сечение  $S$  проводника, которое может иметь произвольную форму (рис.2.16). Величина силы тока, текущего по проводнику  $I = \int j dS$ . Если плотность тока во всех

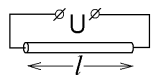


точках сечения  $S$  одинакова, то  $I = jS$ , а падение напряжения на проводнике длины  $l$  равно  $\phi_1 - \phi_2 = \int E dl = U = El$ .

Подстановкой  $j$  и  $E$  из закона Ома в локальной форме легко получить обычную запись закона Ома  $U = IR$ , где сопротивление участка однородного проводника  $R = \rho l / S = l / \sigma S$ .

*Примеры решения задач:*

**23.4.** Когда проволока длины  $l_1$  была подключена к источнику постоянного напряжения  $U$ , в ней каждую минуту выделялось джоулево тепло  $Q_1 = 729 \text{ Дж}$ . Затем эту проволоку растянули до длины  $l_2$  и подключили к тому же источнику напряжения  $U$ . Теперь каждую минуту в проволоке начало выделяться тепло  $Q_2 = 625 \text{ Дж}$ . Во сколько раз была увеличена длина проволоки?



*Решение.*

Текущий по проволоке ток  $I = U/R$  постоянен. Меняется сопротивление  $R_1 = \rho l_1 / S_1 \rightarrow R_2 = \rho l_2 / S_2$ , где  $S$  – сечение проволоки, уменьшающееся при её растяжении. Поэтому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U^2}{R_1} \Delta t \bigg/ \frac{U^2}{R_2} \Delta t = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2}.$$

При растяжении не меняется объём проволоки  $V = l_1 S_1 = l_2 S_2$ . Отсюда  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$  и  $\frac{Q_1}{Q_2} = \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2$ . Длина проволоки меняется в  $l_2 / l_1 = \sqrt{Q_1 / Q_2} = 1,08$  раз.

**23.5.** Напряженность электрического поля внутри цилиндрического проводника с радиусом  $r_0 = 4$  мм направлена вдоль его оси и во всех точках равна  $E = 0,5$  мВ/м. Удельная проводимость материала проводника возрастает с расстоянием  $r$  от оси проводника по закону  $\sigma = \sigma_0 (r/r_0)^2$ , где  $\sigma_0 = 5 \cdot 10^7$  (Ом·м) $^{-1}$ . Найти силу тока  $I$ , текущего по проводнику.

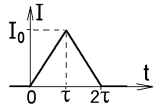
*Решение:*

Выражая ток через его плотность  $I = \int j dS$ , где  $dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$ , и используя закон Ома в локальной форме  $j = \sigma E$ , получаем  $I = \int_0^{r_0} \sigma E \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \sigma_0 E}{r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{2\pi \sigma_0 E}{r_0^2} \cdot \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi \sigma_0 E r_0^2}{2} = 0,628$  А.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

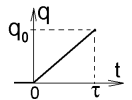
**23.6.** По проводнику течёт ток, величина которого меняется со временем  $t$ , как показано на рисунке, где  $I_0 = 0,6$  А,  $\tau = 3$  с. Заряд какой величины  $q$  протечет через сечение проводника за интервал времени  $0 \leq t \leq 2\tau$ ?

*Ответ:* 1,8 Кл.



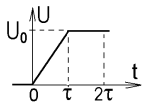
**23.7.** В начальный момент  $t = 0$  по проводнику с сопротивлением  $R = 8$  Ом начинает течь ток, причем величина протекшего через поперечное сечение проводника заряда  $q$  линейно растёт со временем  $t$  (см. рисунок). Найти величину заряда  $q_0$  протекшего к моменту времени  $\tau = 3$  с, если за промежуток времени  $0 \leq t \leq \tau$  в проводнике выделится джоулево тепло  $Q = 24$  Дж?

*Ответ:* 3 Кл.



**23.8.** Падение напряжения на участке проводника с сопротивлением  $R = 24$  Ом вначале линейно возрастает со временем  $t$ , а потом постоянно и равно  $U_0 = 12$  В (см. рисунок, где  $\tau = 1$  мин). Какое джоулево тепло выделится в проводнике за промежуток времени  $0 \leq t \leq 2\tau$ ?

*Ответ:* 480 Дж.



**23.9.** К клеммам источника постоянного тока подключена нагрузка с сопротивлением  $R = 30$  Ом. За какой промежуток времени  $\Delta t$  в нагрузке выделится джоулево тепло  $Q = 15$  Дж, если за это же время по цепи протечёт заряд  $q = 5$  Кл?

*Ответ:* 50 с.



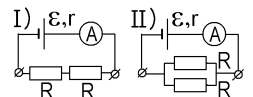
**23.10.** Вначале сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянного тока с эдс  $\varepsilon = 36$  В, было равно  $R_1 = 100$  Ом. Движком реостата увеличили его сопротивление в 4 раза, и при этом падение напряжения на нем в возросло в  $k = 1,5$  раз. Какое джоулево тепло стало после этого выделяться на реостате каждую секунду?

*Ответ:* 2,25 Дж.



**23.11.** Два одинаковых резистора с сопротивлением  $R = 8$  Ом каждый подключены к источнику постоянного тока сначала последовательно (рис. I), а потом параллельно (рис. II). Во втором случае ток, показываемый амперметром, в 2,5 раз больше, чем в первом. По цепи, изображенной на правом рис. II за время  $\Delta t = 2$  мин протекает заряд  $q_{II} = 48$  Кл. Чему равна величина эдс данного источника тока?

*Ответ:* 3,2 В.



**23.12.** Найти удельную проводимость  $\sigma$  однородного материала, из которого изготовлен цилиндрический проводник радиуса  $r_0 = 5$  мм, если во всех точках проводника напряженность стороннего электрического поля равна  $E = 0,004$  В/м, а по проводнику течет ток  $I = 10$  А.

*Ответ:*  $3,18 \cdot 10^7$  (Ом·м) $^{-1}$ .

**23.13.** Однородный проводник с удельным сопротивлением  $\rho = 5 \cdot 10^{-6}$  Ом·м имеет поперечное сечение в форме квадрата со стороной  $a = 5$  мм. Величина напряженности квазистационарного стороннего электрического поля, направленного вдоль проводника, меняется со временем  $t$  по линейному закону:  $E = At + B$ , где  $A = 5$  В/м·с,  $B = 3$  В/м. Какой заряд протечет через поперечное сечение проводника за промежуток времени  $0 \leq t \leq 2$  с?

*Ответ:* 80 Кл.

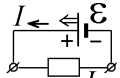
## 24. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа



При решении задач с разветвленными цепями делайте следующие действия, которые автоматически приведут Вас к правильному решению (для примера показана схема на рис. 2.17).

1) Аккуратно нарисуйте схему разветвленной цепи и жирными точками обозначьте все узлы – точки, где соединяются три и более проводника (точки А, В, D, Е на рис. 2.17);

2) Рядом с каждым источником ЭДС  $\varepsilon_i$  поставьте его внутреннее сопротивление  $r_i$ . На каждом источнике обозначьте стрелку  $\Rightarrow$ , выходящую из его плюсовой клеммы. Эта стрелка показывает направление тока  $I_i$ , создаваемое источником  $\varepsilon_i$  в неразветвленной цепи:



3) В каждой ветви – участке цепи между двумя узлами – стрелкой обозначьте направление текущего тока. На рис. 2.17 видно 6 ветвей и 6 токов  $I_1 - I_6$ . Старайтесь проставить индексы токов такими же, как индексы сопротивлений, по которым они текут. Вдоль одной ветви ток не дол-

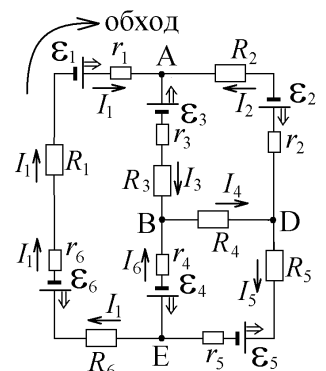


Рис. 2.17

жен менять ни величину, ни направление, как показано для тока  $I_1$ . Не думайте в какую сторону действительно течет ток. Если Вы ошиблись с направлением, то в ответе получите этот ток с правильной величиной, но со знаком “минус”.

4) Для каждого узла можно записать первое правило Кирхгофа:  $\sum I_i = 0$ : токи, входящие в узел записывают со знаком “+”, а выходящие – со знаком “-”. Число токов равно числу проводников, соединяющихся в узле:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$  для узла А;  $I_3 + I_6 - I_4 = 0$  для узла В;  $I_4 - I_2 - I_5 = 0$  для узла D и т.п.

5) Выберите направление обхода (по часовой стрелке на рис 2.17) и запишите второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура цепи:  $\sum U_i = \sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$  (алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом же замкнутом контуре). В цепи на рис.2.17 имеется семь **разных** замкнутых контуров (рис.2.18).

Если выбранное направление стрелки тока совпадает с направлением обхода, то этот ток в сумме берется со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Если стрелка ЭДС  $\Rightarrow$  совпадает с направлением обхода, то эта ЭДС входит в сумму со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Менять направление уже поставленных стрелок нельзя. Идите по направлению обхода и записывайте падения напряжения **только для тех сопротивлений, которые Вы встретите в выбранном контуре**. Пройдя по контуру второй раз, запишите все встреченные ЭДС с соответствующими знаками:

$I_1 R_6 + I_1 r_6 + I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 + I_5 R_5 + I_5 r_5 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_6$  (для контура 1 на рис.2.18);

$I_1 R_6 + I_1 r_6 + I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 - I_4 R_4 - I_6 r_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_6$  (для контура 6 на рис.2.18) и т.п.

6) Число возможных уравнений (1-е правило Кирхгофа для 4 узлов и

2-е правило для 7 контуров в цепи на рис.2.17) превышает число неизвестных токов  $I_1 - I_6$ . Эти уравнения будут линейно зависимыми.



Линейно независимыми для цепи с  $N$  узлами будут уравнения 1-го правила Кирхгофа для любых  $N-1$  узлов и уравнения 2-го правила Кирхгофа для самых маленьких контуров, пустых внутри.

Для цепи на рис.2.17 это, например, узлы А, В и D, и контуры 2, 3 и 4 (см. рис. 2.18). Остается без ошибок решить записанную систему линейных уравнений.

Как правило, в задаче контрольной работы надо рассчитать цепь с двумя узлами. В этом случае решается простая система из трех уравнений.

*Примеры решения задач:*

**24.1.** Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы:  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом. Найти величину сопротивления  $R_3$ , если известно, что  $R_1 = 2$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом;  $\mathcal{E}_1 = 12$  В;  $\mathcal{E}_2 = 8$  В;  $\mathcal{E}_3 = 10$  В;  $I_2 = 2$  А.

*Решение.*

Линейно независимой будут уравнения системы из 1-го правила Кирхгофа, записанного для узла В:  $I_2 + I_3 - I_1 = 0$ , и двух 2-х правил Кирхгофа, записанных для треугольных контуров САВ и ВAD:  $I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_2 R_2 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ;  $I_3 R_3 + I_3 r_3 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$ .

(как и на рис.2.17, направление обхода – по часовой стрелке). Эта система из трех уравнений содержит три неизвестные величины  $I_1, I_3$  и  $R_3$ .



Решать такую систему в буквенных обозначениях всё ещё слишком громоздко. Если Вы уверены в записанных уравнениях – подставьте все числовые значения из условия в систему СИ. Тогда ответ также получится в системе СИ. Уравнения станут простыми, но проверить размерности Вы уже не сможете.

Из второго уравнения находим единственную не заданную в нем величину  $I_1 = 4$  А. Подставляя её в первое уравнение, находим  $I_3 = I_1 - I_2 = 2$  А.

Последнюю неизвестную  $R_3$  находим из последнего уравнения, подставляя все найденные величины:  $R_3 = 4$  Ом.

**24.2.** Семь одинаковых источников тока с внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС  $\mathcal{E}$  каждого из источников, если по левому проводнику протекает ток  $I = 3,2$  А.

*Решение.*

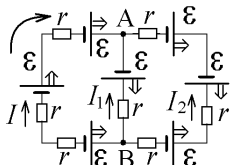


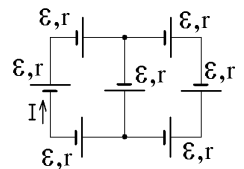
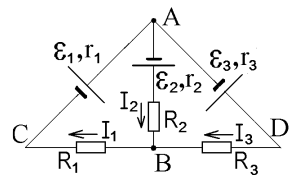
Рис.2.19

Направим стрелки токов  $I_1$  и  $I_2$  вверх, как и стрелку тока  $I$ . Все токи сходятся в узле А (рис.2.19)  $I + I_1 + I_2 = 0$ . Это означает, что направление каких-то токов указано неверно и в процессе вычисления эти токи будут иметь разный знак. Для контуров слева и справа от линии АВ 2-е правило Кирхгофа имеет вид:

$$Ir + Ir + Ir - I_1 r = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} - \mathcal{E}, \quad I_1 r - I_2 r - I_2 r - I_2 r = \mathcal{E} + \mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}.$$

Получили систему с тремя неизвестными  $I_1, I_2$  и  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = -I, \\ 2\mathcal{E} + I_1 r = 3Ir, \\ I_1 r - 3I_2 r = 0. \end{cases} \text{ Из последнего уравнения } I_2 = \frac{I_1}{3}, \text{ из первого } I_1 = -\frac{3}{4}I, \text{ из второго уравнения } \mathcal{E} = \frac{(3I - I_1)r}{2} = \frac{15Ir}{8} = 6 \text{ В.}$$

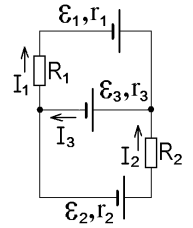


Токи  $I_1 = -2,4$  А и  $I_2 = -0,8$  А имеют правильную величину, но направления их мы не угадали.

**24.3.** Три источника тока с одинаковыми внутренними сопротивлениями  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину падения напряжения  $U_3$  на клеммах источника тока с ЭДС  $\varepsilon_3 = 9$  В и внутренним сопротивлением  $r_3$ , если  $R_1 = 2$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом;  $\varepsilon_1 = 16$  В;  $\varepsilon_2 = 25$  В.

*Решение.*

Направления токов на рисунке уже заданы. 1-е правило Кирхгофа для левого узла имеет вид  $I_3 - I_1 - I_2 = 0$ . 2-е правило Кирхгофа для верхнего маленького контура  $I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_3 r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ , для нижнего маленького контура  $-I_3 r_3 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$  (обход – по часовой стрелке). После подстановки чи-



словых данных в СИ имеем простую систему: 
$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0, \\ 3I_1 + I_3 = 7, \\ I_3 + 4I_2 = 16. \end{cases}$$
 Решение этой системы дает  $I_1 = 1$  А;  $I_2 = 3$  А;  $I_3 = 4$  А.



Помните, что если ток  $I$  **разряжает** батарею с ЭДС  $\varepsilon$  и с внутренним сопротивлением  $r$  (рис. 2.20,а), то падение напряжения на её клеммах  $U = \varepsilon - Ir$ . Если же ток **заряжает** батарею (рис. 2.20,б), то  $U = \varepsilon + Ir$ . Величина  $U > \varepsilon$ , иначе ток не потечет против источника ЭДС.

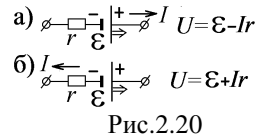


Рис.2.20

В нашей задаче, как видно из рисунка, ток  $I_3$  направлен против источника ЭДС  $\varepsilon_3$ , и напряжение на его клеммах  $U_3 = \varepsilon_3 + I_3 r = 13$  В.



Если цепь содержит больше двух узлов и линейно независимых уравнений слишком много, расставьте все числовые данные задачи на схеме и определите узлы или контуры, для которых уравнения правил Кирхгофа включают только одну неизвестную величину.

**24.4.** Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы:  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$  Ом. Найти величину падения напряжения на клеммах источника  $\varepsilon_2$ , если известно, что  $\varepsilon_2 = 7$  В;  $\varepsilon_4 = 4$  В;  $R_2 = 2$  Ом;  $R_4 = 5$  Ом;  $R_5 = 7$  Ом;  $I_2 = 3$  А;  $I_4 = 2$  А.

*Решение.*

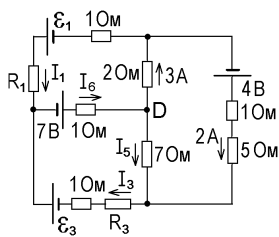
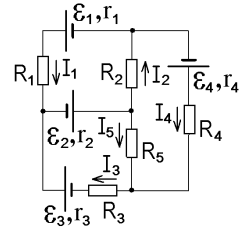


Рис.2.21

Обозначим все числовые данные задачи на схеме (рис.2.21). Теперь видно, что в уравнение 2-го правила Кирхгофа для правого контура входит единственная неизвестная величина – ток  $I_5$ :  $I_2 R_2 + I_4 (R_4 + r_4) - I_5 R_5 = \varepsilon_4$ , откуда легко найти  $I_5 = 2$  А.

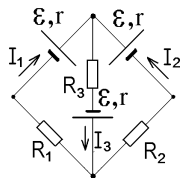
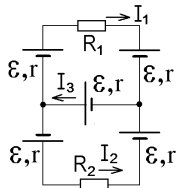
Далее из уравнения 1-го правила Кирхгофа для узла D (рис.2.21) находим величину тока  $I_6 = I_2 + I_5 = 5$  А. Этот ток будет разряжать источник  $\varepsilon_2$ , и падение напряжения на его клеммах согласно рис.1.20,а, равно  $U_2 = \varepsilon_2 - I_6 r_2 = 4$  В.



*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**24.5.** Три одинаковых источника тока с внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке справа. Найти величину ЭДС  $\varepsilon$  каждого из источников тока, если  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $R_3 = 3$  Ом;  $I_3 = 5$  А.

Ответ: 13 В.

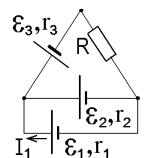
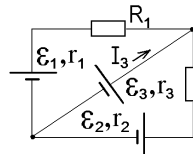


**24.6.** Пять одинаковых источников тока с ЭДС  $\varepsilon = 11$  В каждый включены в разветвленную цепь, показанную на рисунке слева. Найти величину внутреннего сопротивления  $r$  источника тока, если  $R_1 = 2$  Ом;  $R_2 = 6$  Ом;  $I_1 = 1$  А.

Ответ: 1,5 Ом

**24.7.** Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы:  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом. Найти величину тока  $I_1$ , текущего через источник  $\varepsilon_1$ , если известно, что  $R = 5$  Ом;  $\varepsilon_1 = 8$  В;  $\varepsilon_2 = 4$  В;  $\varepsilon_3 = 32$  В.

Ответ: 0 А.



**24.8.** Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы:  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом. Найти величину ЭДС  $\varepsilon_3$ , если известно, что  $R_1 = 3$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $\varepsilon_1 = 2$  В;  $\varepsilon_2 = 10$  В;  $I_3 = 2$  А.

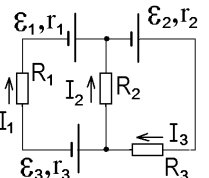
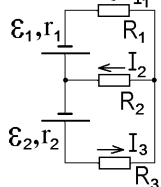
Ответ: 12 В.

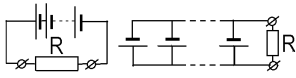
**24.9.** Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы:  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом. Найти величину тока  $I_2$ , текущего через сопротивление  $R_2$ , если известно, что  $R_1 = R_3 = 3$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $\varepsilon_1 = 12$  В;  $\varepsilon_2 = 14$  В;  $\varepsilon_3 = 4$  В.

Ответ: 1 А

**24.10.** Внутренние сопротивления двух источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы:  $r_1 = r_2 = 1$  Ом. Найти величину сопротивления  $R_2$ , если известно, что  $R_1 = 2$  Ом;  $R_3 = 2$  Ом;  $\varepsilon_1 = 9$  В;  $\varepsilon_2 = 36$  В;  $I_2 = 3$  А.

Ответ: 3 Ом.



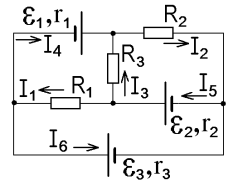


**24.11.** Одиннадцать одинаковых источников ЭДС с внутренним сопротивлением  $r = 12 \text{ Ом}$  каждый соединяют в батарею вначале последовательно, а потом параллельно, и подключают к клеммам этих батарей одну и ту же нагрузку. Найти сопротивление нагрузки  $R$ , если при последовательном соединении источников ток в нагрузке в два раза больше, чем при параллельном.

Ответ:  $28 \text{ Ом}$ .

**24.12.** Три источника тока включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину сопротивления  $R_2$ , если известно, что  $\varepsilon_1 = 3 \text{ В}$ ;  $\varepsilon_2 = 9 \text{ В}$ ;  $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $I_1 = 2 \text{ А}$ ;  $I_3 = I_4 = 1 \text{ А}$ .

Ответ:  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ .



## 25. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами

Элемент тока  $I$  длины  $d\vec{l}$ , направленный по току, создает на расстоянии  $\vec{r}$  магнитное поле с

индукцией  $d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$  (рис.2.22). Здесь  $\mu$  – магнитная проницаемость среды ( $\mu = 1$  в вакууме

или воздухе),  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная.



В задачах очень важно правильно определить направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в любой точке. Для этого надо поставить винт перпендикулярно току и радиус-вектору  $\vec{r}$ , проведенному в эту точку. Если вращать винт ближней стороной по направлению тока, как показано на рис.2.22, то направление его поступательного движения покажет направление вектора  $\vec{B}$ . Замкнутые линии  $\vec{B}$  охватывают проводник с током.

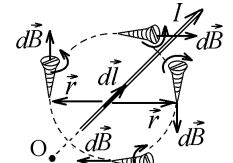


Рис.2.22

Чтобы найти индукцию  $\vec{B}$  всего тока надо взять интеграл по длине проводника:  $\vec{B} = \int d\vec{B}$ . В задачах контрольной работы встречаются токи, текущие по круговому или по прямому проводнику.

В центре  $O$  кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$  (рис.2.23,а) получаем

$$B_0 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r dl \sin 90^\circ}{r^3} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}.$$

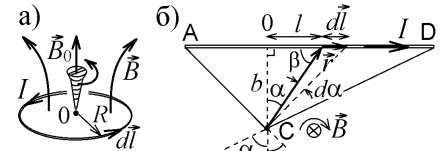


Рис.2.23

Для точки  $C$ , находящейся на расстоянии  $b$  от прямого отрезка с током  $I$ , как видно из треугольника на рис.2.23,б, выполняются соотношения  $r = b/\cos \alpha$ ;  $l = b \tan \alpha$ ;  $dl = b d(\tan \alpha) = b d\alpha / \cos^2 \alpha$ . Угол  $\beta$  между радиус-вектором  $\vec{r}$  и элементом тока  $Id\vec{l}$  равен  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Поэтому

$$B_C = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{r dl \sin \beta}{r^3} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2).$$

Пределы интегрирования  $-\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответствуют граничным точкам  $A$  и  $D$  отрезка с током (точка  $O$  на рис.2.23,б соответствует углу  $\alpha = 0$ ). Для бесконечного прямого проводника с током  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 90^\circ$  и  $B_C = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b}$ .

Помимо индукции  $\vec{B}$  магнитное поле можно описать вектором напряженности  $\vec{H}$ , которая в неферромагнитной среде имеет вид  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ .

Все полученные для индукции  $\vec{B}$  формулы будут справедливыми и для напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля, если в них убрать множитель  $\mu\mu_0$ :



В задачах контрольной работы линейные токи состоят из отдельных участков круговых токов, прямолинейных отрезков с токами и прямых бесконечных проводников с токами.

Необходимо разбить систему на такие участки, определить величину и правильное направление вектора  $\vec{B}$  или  $\vec{H}$ , созданного током, текущим по каждому участку, а затем сложить все эти векторы.

Учтите, что на продолжении прямого тока (точка  $O$  на рис.2.22) поле не создается:  $B_0 = 0$ .

Примеры решения задач:

**25.1.** По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых проводников, как показано на рисунке, течет ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в точке  $O$ , если  $b = 40 \text{ см}$ .

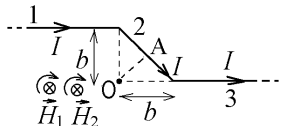
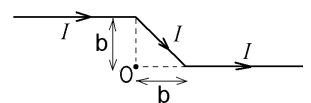


Рис.2.24

Решение.

Разбиваем систему на отдельные прямолинейные участки 1, 2 и 3 (рис.2.24). Участок 1 –

это полубесконечный ток, создающий в точке  $O$  напряженность  $H_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{2\pi b}$ . Участок 2 – прямо-

линейный отрезок, находящийся на расстоянии  $r = OA = b \cos 45^\circ$  от точки  $O$ . Его концы видны из

этой точки под углами  $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$ . Он создает напряженность  $H_2 = \frac{I}{4\pi r} \cdot 2 \sin 45^\circ = \frac{I}{2\pi b}$ . Точка О находится на продолжении прямого участка 3, и этот участок поля в ней не создает:  $H_3 = 0$ . Как видно из рис.2.24, направления векторов  $\vec{H}_1$  и  $\vec{H}_2$  совпадают и их сумма  $H_O = H_1 + H_2 = 3I/4\pi b = 1,79 \text{ А/м}$ .

**25.2.** По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых полубесконечных линий, двух дуг с радиусами  $R_1 = 1 \text{ м}$  и  $R_2 = 2 \text{ м}$  (внешняя дуга имеет угол  $\alpha = 135^\circ$ ) и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре О дуг.

*Решение.*

Прямые участки 3 и 5 на рисунке не создают полей в точке О на их продолжении. Поэтому

$$\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4. \text{ Индукция полубесконечного тока } B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \text{ и индукция половины кругового тока } B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R_1}$$

направлены в одну сторону, а индукция, созданная участком 4, являющимся частью окружности,  $B_4 = \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R_2}$ , направле-

на противоположно. Так как  $R_2 = 2R_1$ , то в точке О имеем  $B_O = |B_1 + B_2 - B_4| = \frac{\mu_0 I}{4R_1} \left| \frac{1}{\pi} + 1 - \frac{3}{8} \right| = 0,889 \text{ мкТл}$ .



Если векторы  $\vec{B}$  или  $\vec{H}$  направлены под углом друг к другу, то удобно указать их направления в трех осях декартовой системы координат.

**25.3.** Бесконечный проводник согнут так, что текущий по нему ток  $I = 3 \text{ А}$  вначале течет против оси  $z$ , затем поворачивает в начале координат О, образуя дугу окружности с углом  $270^\circ$  и с радиусом  $R = 1 \text{ м}$ , лежащую в плоскости  $xy$ , а затем снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной параллельно оси  $z$ . Найти величину индукции магнитного поля в центре дуги С.

*Решение.*

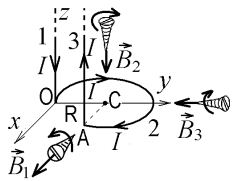


Рис.2.25

Определяем направления полей, созданных отдельными участками (рис.2.25) с помощью винтов, острия которых должны находиться в точке С. Направление вращения винтов связаны с направлением токов (см.рис.2.22). Как видно, вектор индукции поля полубесконечного тока 1 имеет величину

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{ и направлен вдоль оси } x; \text{ вектор индукции, созданный } 3/4 \text{ кругового тока } 2, \text{ и имеющий}$$

величину  $B_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}$  направлен против оси  $z$ ; вектор индукции полубесконечного тока 3,

$B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , направлен против оси  $y$  (рис.2.25). Все эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма имеет в

точке С величину  $B_C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{\pi^2}} = 1,48 \text{ мкТл}$ .

**25.4.** Ток  $I_1 = 1 \text{ А}$  течёт по бесконечному проводнику, вначале совпадающему с осью  $y$ , затем образующему дугу в четверть окружности с радиусом  $R = 1 \text{ м}$ , лежащую в плоскости  $yz$ . Далее проводник продолжается в виде прямой линии, параллельной оси  $y$ . Расстояние от центра дуги С до начала координат О равно  $2R$ . Второй ток  $I_2 = 3 \text{ А}$  течет по бесконечному проводнику вдоль оси  $x$  (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этими токами в центре дуги С.

*Решение.*

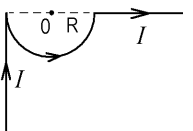
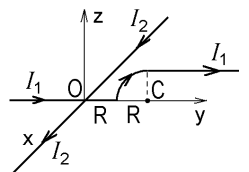
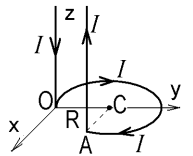
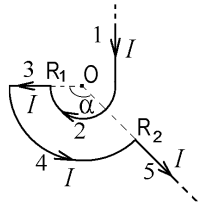
В точке С первый ток создает напряженность  $H_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_1}{2R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1}{2\pi R}$ , вектор которой направлен против оси  $x$  (это поле 1/4 кругового тока, протекающего по дуге и поле половины бесконечного прямого тока). Второй ток, находящийся на расстоянии  $2R$  от точки С, создает напряженность  $H_2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot 2R}$ , вектор которой направлен вдоль оси  $z$ . Величина суммы этих

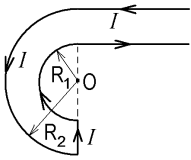
$$\text{векторов } H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{1}{4R} \sqrt{\left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\pi}\right)^2} = 0,314 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**25.5.** По бесконечному проводнику, согнутому, как показано на рисунке, течет ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре О дуги с радиусом  $R = 20 \text{ см}$ .

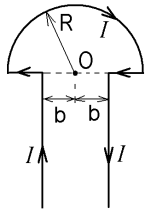
*Ответ:* 3,21 мкТл.





**25.6.** По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных прямых линий, двух полуокружностей с радиусами  $R_1 = 50$  см и  $R_2 = 1$  м и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток  $I = 5$  А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре  $O$  полуокружностей.

Ответ: 1,648 А/м.



**25.7.** По замкнутому проводнику, согнутому в виде дуги с радиусом  $R = 20$  см и соединяющей её концы хорды (см. рисунок), течет ток  $I = 3$  А. Найти величину напряженности магнитного поля в центре  $O$  дуги, если угол  $\alpha = 90^\circ$ .

Ответ: 8,01 А/м.

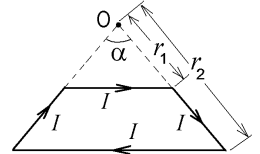
**25.8.** По бесконечному проводнику, согнутому в виде полуокружности с радиусом  $R = 60$  см, двух прямых отрезков и двух параллельных линий, течет ток  $I = 4$  А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре  $O$  полуокружности (см. рисунок), если  $b = 30$  см.

Ответ: 4,76 мкТл.



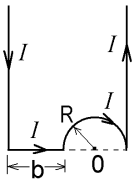
**25.9.** По проводнику, согнутому в виде симметричной трапеции, течет ток  $I = 3$  А. Размеры приведены на рисунке, где  $r_1 = 20$  см,  $r_2 = 50$  см,  $\alpha = 90^\circ$ . Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в точке  $O$ .

Ответ: 1,8 мкТл.



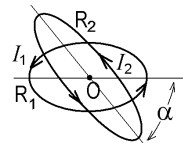
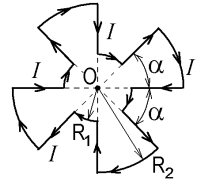
**25.10.** По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных линий, полуокружности с радиусом  $R = 40$  см и прямого отрезка длины  $b = 50$  см, течет ток  $I = 2$  А (см. рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого током в центре  $O$  полуокружности.

Ответ: 0,849 мкТл.



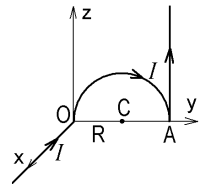
**25.11.** По проводнику, согнутому в виде восьми круговых дуг с одинаковыми углами  $\alpha = 45^\circ$  и с радиусами  $R_1 = 40$  см и  $R_2 = 80$  см, а также восьми соединяющих их прямых отрезков, как показано на рисунке, течет ток  $I = 5$  А. Найти величину индукции магнитного поля в общем центре дуг  $O$ .

Ответ: 5,89 мкТл.



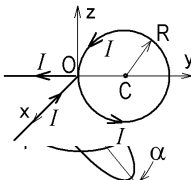
**25.13.** Бесконечный проводник согнут так, что образованная им полуокружность с радиусом  $R = 40$  см расположена в плоскости  $yz$ . Направление текущего по нему тока  $I = 3$  А указано на рисунке. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого током в центре  $C$  полуокружности.

Ответ: 1,41 А/м.



**25.14.** Бесконечный проводник согнут так, что ток  $I = 4$  А течет по нему против оси  $x$ , поворачивает в начале координат  $O$ , протекая по окружности с радиусом  $R = 30$  см, расположенной в плоскости  $yz$ , а затем течет против оси  $y$  (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре  $C$  окружности.

Ответ: 7,00 А/м



**25.15.** Ток  $I = 3$  А течет по согнутому бесконечному проводнику против оси  $y$ , поворачивает в начале координат  $O$ , протекая по дуге окружности с углом  $90^\circ$  и с радиусом  $R = 50$  см, расположенной в плоскости  $yz$ , снова поворачивает в точке  $A$  и течет по прямой линии, направленной вдоль оси  $x$  (см. рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре дуги  $C$ .

Ответ: 1,66 мкТл.



## 26. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции

Циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру называется интеграл  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Циркуляция вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

(для вектора напряженности  $\vec{H}$  циркуляция по замкнутому контуру равна  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ ).

Чтобы определить знак тока в этой сумме, расположите винт перпендикулярно плоскости контура и вращайте его по направлению обхода контура. Если направление тока совпадает с направлением поступательного движения винта, то этот ток входит в сумму с положительным знаком. Если ток направлен противоположно движению винта, то он входит в сумму со знаком "минус".



Например, на рис.2.26 винт, вращающийся по направлению обхода контура, движется вверх. В эту сторону направлены токи  $I_1$  и  $I_4$ , охватываемые контуром, а противоположно – токи  $I_2$  и  $I_3$ . Согласно теореме о циркуляции  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3 + I_4)$ . Ток  $I_5$  создает поле, но не охватывается контуром, и в сумму не входит.

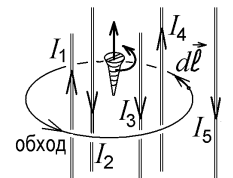


Рис.2.26





Внимательно следите на рисунке, сколько раз линия замкнутого контура **охватывает** каждый ток. Если ток охватывается  $N$  раз, то в сумму он также входит  $N$  раз.

Примеры решения задач:

**26.1.** Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами  $I_1 = 2$  А,  $I_2 = 1$  А,  $I_3 = 4$  А и  $I_4$ . Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Циркуляция вектора индукции магнитного поля  $\oint \vec{B} d\vec{l}$  по этому контуру равна 5 мкТл·м. Найти величину тока  $I_4$ .

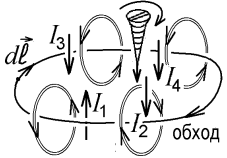
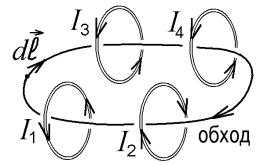


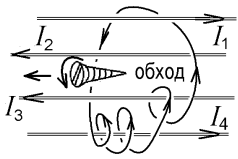
Рис.2.27

Решение.

На рис.2.27 дополнительными стрелками указаны направления токов  $I_i$  **внутри** охватывающего их замкнутого контура. Винт, вращаемый по направлению обхода контура, движется вниз. В эту сторону направлены токи  $I_2, I_3, I_4$ . Здесь  $\mu = 1$ . Поэтому  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$  и  $I_4 = I_1 - I_2 - I_3 + \oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0 = 0,979$  А.



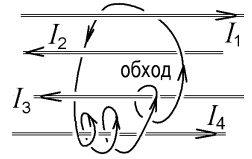
**26.2.** На рисунке показан замкнутый контур, направление его обхода и прямолинейные проводники с токами  $I_1 = 3$  А,  $I_2, I_3 = 1$  А,  $I_4 = 2$  А. Циркуляция вектора индукции магнитного поля, созданного этими токами по указанному контуру отрицательна и равна  $\oint \vec{B} d\vec{l} = -4$  мкТл·м. Найти величину тока  $I_2$ .



Решение.

Приглядитесь к рисунку внимательно! Линия контура проходит за током  $I_1$ , не охватывая его. Перед током  $I_4$  эта линия проходит три раза, т.е. ток  $I_4$  охватывается 3 раза, ток  $I_3$  - 2 раза, ток  $I_2$  - один раз.

Вращаемый по направлению обхода винт движется налево, вдоль токов  $I_2$  и  $I_3$ . Поэтому, согласно теореме о циркуляции  $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_2 + 2I_3 - 3I_4)$ , откуда  $I_2 = 3I_4 - 2I_3 - \oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0 = 0,817$  А.



Теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитного поля токов с симметричным распределением плотности тока  $\vec{j}$  или поверхностной плотности тока  $\vec{i}$ .

**26.3.** По четырем тонким и очень длинным цилиндрическим проводящим поверхностям, имеющим радиусы  $a_1 = 1$  см,  $a_2 = 2$  см,  $a_3 = 3$  см и  $a_4 = 4$  см протекают токи с поверхностными плотностями  $i_1 = 3$  А/м,  $i_2 = 4$  А/м,  $i_3 = 5$  А/м и  $i_4 = 6$  А/м соответственно. Направления токов показаны на рисунке. На каком расстоянии  $r$  от общей оси  $OO'$  проводников величина индукции магнитного поля  $B = 0,5$  мкТл, при условии, что  $r > a_4$ ?

Решение.

Поверхностная плотность тока задается формулой  $i = dI/dl$ , где  $dI$  – это ток, протекающий по полоске поверхности ширины  $dl$ . Поэтому величина тока, текущего по цилиндрической поверхности радиуса  $a$  равна  $I = i \cdot 2\pi a$  (рис.2.28). Окружим цилиндр круговым замкнутым контуром радиуса  $r > R$ , совпадающим с линией индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, созданного током  $I$  внутри контура. По теореме о циркуляции  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \oint d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ . Хотя ток и распределен в пространстве, он создает такое же поле, как и линейный ток  $I$ , проходящий по оси цилиндра. Подставив  $I$ , получим  $B = \mu_0 i a / r$ . В нашей задаче круговой контур радиуса  $r$  охватит четыре проводника, по которым токи  $i_1, i_2, i_3$  текут в одну сторону, а ток  $i_4$  – в другую. Циркуляция  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi (i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4)$ , откуда  $r = \mu_0 (i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4) / B = 5,03$  см.

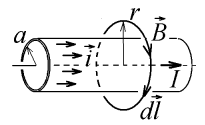
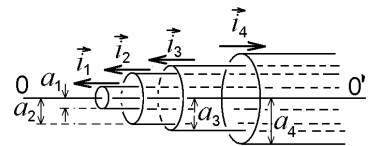


Рис.2.28

**26.4.** По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса  $a$  течёт постоянный ток с однородной плотностью  $\vec{j} = \text{const}$ . Величина напряжённости магнитного поля на расстоянии  $r_1 = 4,8$  мм от оси проводника  $OO'$  в полтора раза больше величины напряжённости на расстоянии  $r_2 = 0,8$  мм от оси. Найти радиус  $a$  проводника, если  $r_2 < a < r_1$ .

Решение.

Снова окружим проводник круговым замкнутым контуром радиуса  $r > a$  (рис.2.29), который охватит ток  $I = j \cdot \pi a^2$ , протекающий через все поперечное сечение проводника. Согласно теореме о циркуляции:  $\oint \vec{H} d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I$ . Поэтому вне проводника, при  $r > a$ , его поле совпадает с полем линейного тока

$$H_{\text{вне}} = \frac{I}{2\pi r} = \frac{j a^2}{2r}.$$

Внутри проводника, при  $r < a$ , линии  $\vec{H}$  также образуют круговой контур, но он

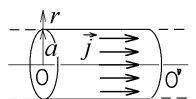


Рис.2.29

охватывает только ток  $I = j \cdot \pi r^2$ , протекающий через меньшее, заштрихованное на рис.1.29 сечение. Получаем

$$H_{\text{внутри}} = I / 2\pi r = jr / 2.$$

По условию  $\frac{H_{\text{вне}}(r_1)}{H_{\text{внутри}}(r_2)} = \frac{ja^2}{2r_1} \cdot \frac{2}{jr_2} = \frac{a^2}{r_1 r_2} = \frac{3}{2}$ . Радиус проводника  $a = \sqrt{3r_1 r_2 / 2} = 2,4$  мм.

**26.5.** В среде с  $\mu = 1$  вдоль выделенной оси  $OO'$  течёт постоянный ток, плотность которого меняется с расстоянием  $r$  от оси по закону  $j = j_0 \cdot \sqrt{b/r}$ , где  $b = 0,5$  м,  $j_0 = 3000$  А/м<sup>2</sup>. Найти величину индукции  $B$  магнитного поля, созданного этим током на расстоянии  $r = 2$  м от оси  $OO'$ .

*Решение.*

Если плотность тока  $\vec{j}$  симметрична относительно оси  $OO'$ , то линии вектора  $\vec{B}$ , созданного этим током, охватывают ось  $OO'$  по кругу (рис.2.30). Запишем теорему о циркуляции для контура радиуса  $r$ , совпадающего с одной из линий  $\vec{B}$ :  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$ . Величина тока, охватываемого этим контуром

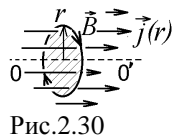
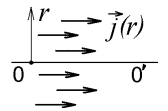


Рис.2.30

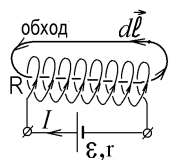
$\sum I = \int_0^r j dS = \int_0^r j d(\pi r^2) = \int_0^r j \cdot 2\pi r dr$ . Подставляя заданную зависимость  $j = j(r)$ , находим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r j_0 \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi \mu_0 j_0 \sqrt{b} \int_0^r \sqrt{r} dr = 2\pi \mu_0 j_0 \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2}, \text{ откуда } B = 2\mu_0 j_0 \sqrt{b} r / 3 = 2,51 \text{ мТл.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**26.6.** Резистор с сопротивлением  $R = 10$  Ом подключен длинными проводами к источнику тока с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r = 2$  Ом. Циркуляция вектора  $\vec{B}$ , созданного протекающим по цепи током  $I$ , по замкнутому контуру, направление обхода которого показано на рисунке, равна  $\oint \vec{B} d\vec{l} = 3$  мкТл·м. Найти величину ЭДС  $\varepsilon$ .

*Ответ: 3,18 В.*

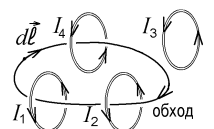


**26.7.** Источник тока с эдс  $\varepsilon = 24$  В подключен к катушке из  $N = 8$  витков, имеющей омическое сопротивление  $R = 10$  Ом. По катушке течёт постоянный ток, а циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке, равна  $\oint \vec{H} d\vec{l} = -30$  А. Чему равно внутреннее сопротивление  $r$  источника тока?

*Ответ: 3,6 Ом.*

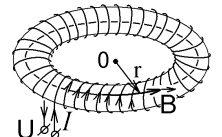
**26.8.** Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами  $I_1 = 1$  А,  $I_2 = 2$  А,  $I_3 = 3$  А и  $I_4$  (см. рисунок). Циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру отрицательна и равна  $\oint \vec{B} d\vec{l} = -2$  мкТл·м. Найти величину тока  $I_4$ .

*Ответ: 1,41 А.*



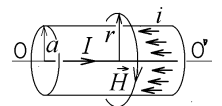
**26.9.** Провод с сопротивлением  $R = 30$  Ом равномерно навит на тороидальный сердечник из материала с магнитной проницаемостью  $\mu = 25$ . Ток  $I$ , текущий по виткам получившейся катушки, имеющей  $N = 600$  витков, создаёт в сердечнике на удалении  $r = 9$  см от центра катушки  $O$  магнитное поле с индукцией  $B = 0,05$  Тл. Чему равно напряжение  $U$ , приложенное к концам провода?

*Ответ: 45 В.*



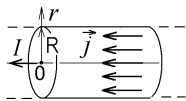
**26.10.** По осевому тонкому проводнику-жиле длинного прямого коаксиального кабеля течёт ток  $I = 3$  А. По второму тонкому цилиндрическому проводнику с радиусом  $a = 4$  мм протекает встречный ток с поверхностной плотностью  $i = 100$  А/м. На каком расстоянии  $r$  от оси кабеля  $OO'$  напряжённость магнитного поля равна  $H = 3$  А/м?

*Ответ: 2,58 см*



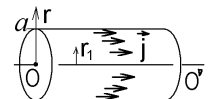
**26.11.** Ток  $I = 1$  А протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса  $R = 1$  см и имеет однородную плотность  $\vec{j} = \text{const}$ . Чему равна величина индукции  $\vec{B}$  магнитного поля на расстоянии  $r = 5$  мм от оси проводника?

*Ответ: 10 мкТл.*



**26.12.** По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса  $a = 5$  мм течёт ток с неоднородной плотностью  $j = j_0 \cdot (r/a)^3$ , зависящей от расстояния  $r$  до оси проводника  $OO'$ . На каком расстоянии  $r_1$  от оси проводника напряжённость созданного током магнитного поля равна  $H = 100$  А/м? Известно, что  $j_0 = 1,6 \cdot 10^6$  А/м<sup>2</sup>.

*Ответ: 2,5 мм или 8 см.*



## 27. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях

В электромагнитном поле с напряжённостью  $\vec{E}$  и индукцией  $\vec{B}$  на частицу с зарядом  $q$  и с массой  $m$ , движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  действует сила Лоренца  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ , являющаяся суммой электрической и магнитной сил.



Чтобы решить задачу, аккуратно нарисуйте направления векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  в декартовой системе координат, правильно укажите направления сил и сообразите, по какой траектории будет двигаться частица под действием этих сил.

Примеры решения задач:

**27.1.** Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  взаимно перпендикулярны. Найти минимальную величину скорости частицы, если  $E = 100$  В/м,  $B = 0,01$  Тл.

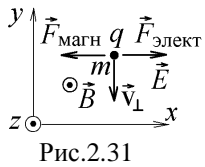


Рис.2.31

Решение.

Так как по условию  $\vec{v} = \text{const}$ , то  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = 0$ . Направим вектор  $\vec{E}$  вдоль оси  $x$ , а вектор  $\vec{B}$  - вдоль оси  $z$ . Магнитная составляющая силы Лоренца компенсирует электрическую составляющую:  $F_{\text{элект}} = qE = F_{\text{магн}} = qv_{\perp}B$  (рис.2.31). Видно, что вектор скорости частицы  $\vec{v}_{\perp}$  направлен против оси  $y$ .



Определить направление  $\vec{F}_{\text{магн}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$  (векторного произведения) для частицы с положительным зарядом проще с помощью “правила левой руки”: если направить четыре пальца по первому вектору  $\vec{v}$ , а второй вектор  $\vec{B}$  входит в ладонь, то большой палец показывает направление  $\vec{F}_{\text{магн}}$  (рис.2.32,а). Для частицы с отрицательным зарядом используйте “правило правой руки” (рис.2.32,б).

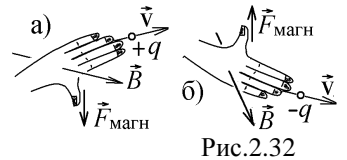
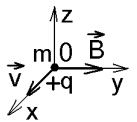


Рис.2.32

Скорость  $v_{\perp} = E/B = 10^4$  м/с будет минимальной скоростью, так как частица может иметь любую проекцию скорости  $v_z$  на ось  $z$ , параллельную вектору  $\vec{B}$ . Это не изменит решения, так как не изменит ни величину, ни направление силы  $\vec{F}_{\text{магн}}$ .

**27.2.** Частица с положительным зарядом  $q$  и с массой  $m$  движется в магнитном поле, индукция  $\vec{B}$  которого направлена вдоль оси  $y$ . В начальный момент  $t_0 = 0$  она находилась в точке 0 начала координат и имела скорость  $\vec{v}$ , направленную вдоль оси  $x$ . В момент времени  $t_1 = 3$  мс координата  $z$  частицы в первый раз становится максимальной и равной  $z_m = 10$  см. Найти расстояние частицы от точки 0 в момент времени  $t_2 = 2$  мс.



Решение.

Если скорость  $\vec{v} \perp \vec{B}$  (рис.2.33), то в однородном магнитном поле частица движется по окружности, радиус  $R$  которой можно найти, подставляя нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$  в уравнение динамики:  $ma_n = F_{\text{магн}}$  или  $mv^2/R = qvB$ , откуда

$$R = mv/qB. \quad \text{Период обращения частицы по этой окружности} \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Нарисовав направления векторов и траекторию согласно условиям задачи, видим, что  $R = \frac{z_m}{2}$ . Время  $t_1 = \frac{T}{2} = 3$  с. За это время частица пройдет половину окружности с углом  $180^\circ$ . А за время  $t_2 = 2$  с она опишет дугу окружности с углом  $120^\circ$  и будет находиться в точке А на расстоянии  $r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}R = \sqrt{3}z_m/2 = 8,66$  см от точки 0.

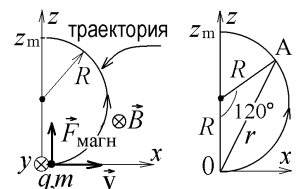
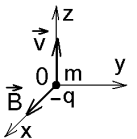


Рис.2.33

**27.3.** Частица с отрицательным удельным зарядом  $q/m = 2 \cdot 10^9$  Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов  $\Delta\phi = 1$  кВ, в начальный момент  $t_0 = 0$  находится в точке 0 (см. рисунок) и движется со скоростью  $v = 200$  м/с, направленной вдоль оси  $z$  в однородном магнитном поле, индукция  $\vec{B}$  которого направлена вдоль оси  $x$ . В момент времени  $t = 5$  мкс её скорость в первый раз будет направлена против оси  $y$ . На каком удалении от точки 0 частица окажется в этот момент времени, и какой путь она пройдет за время  $t$ ?



Решение.

Работа, совершаемая ускоряющим напряжением  $U = \Delta\phi$ , идет на изменение кинетической энергии частицы:  $A = q\Delta\phi = mv^2/2$ . Поэтому, проходя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi$ , частица приобретает скорость

$$v = \sqrt{2q\Delta\phi/m}.$$

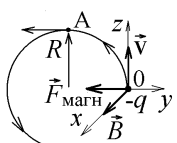


Рис.2.34

Указывая направление силы  $\vec{F}_{\text{магн}}$  и рисуя круговую траекторию частицы (рис.2.34), видим, что скорость будет направлена против оси  $y$  в точке А, когда частица пройдет четверть окружности за время  $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{qB}$ . Отсюда  $B = \frac{\pi m}{qt}$ . Подставляя найденное выражение для  $v$ , находим радиус траектории:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} = 3,18 \text{ м.}$$

За время  $t$  частица проделает путь  $2\pi R/4 = 5$  м и удалится от точки 0 на расстояние  $AO = \sqrt{2}R = 4,50$  м.

**27.4.** Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной вдоль оси  $y$ , по винтовой траектории, у которой шаг равен радиусу. Найти угол  $\alpha$  между векторами скорости  $\vec{v}$  частицы и индукции  $\vec{B}$ .

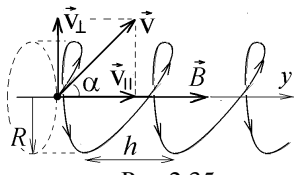
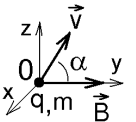


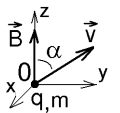
Рис.2.35

*Решение.*

Разложим скорость  $\vec{v}$  частицы на две составляющие  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ . Со скоростью  $v_\perp$ , перпендикулярной к направлению  $\vec{B}$ , частица будет вращаться по кругу радиуса  $R = mv_\perp / qB$  вокруг линий  $\vec{B}$ . А так как скорость  $\vec{v}_\parallel$  параллельна  $\vec{B}$ , то  $\vec{F} = q[\vec{v}_\parallel, \vec{B}] = 0$ , и частица движется с постоянной скоростью  $v_\parallel$  вдоль направления  $\vec{B}$ .

Сумма двух движений – винтовая линия (рис.2.35). Так как  $v_\perp = v \sin \alpha$ ,  $v_\parallel = v \cos \alpha$ , то радиус траектории  $R = mv \sin \alpha / qB$ , а её шаг  $h$  – это расстояние, которое частица пролетает со скоростью  $v_\parallel$  за один период обращения по окружности:  $h = v_\parallel T = 2\pi m \cdot v \cos \alpha / qB$ . По условию их отношение  $R/h = \tan \alpha / 2\pi = 1$  и  $\alpha = \arctg(2\pi) = 89,95^\circ$ .

**27.5.** Частица с удельным зарядом  $q/m = 3 \cdot 10^8$  Кл/кг ускорена разностью потенциалов  $\Delta\phi$  и движется в магнитном поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл, направленной вдоль оси  $z$ . Скорость  $\vec{v}$  частицы направлена под углом  $\alpha = 45^\circ$  к оси  $z$ . Частица периодически пересекает ось  $z$  через равные интервалы  $\Delta z = 5$  см. Найти величину разности потенциалов  $\Delta\phi$ .



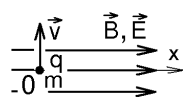
*Решение.*

Движение частицы происходит по винтовой линии (рис.2.36). Вращаясь вокруг линий  $\vec{B}$ , она периодически то пересекает ось  $z$ , то удаляется от неё на максимальное расстояние  $2R$ . Интервал  $\Delta z$  – это шаг  $h$ , выражение которого получили в предыдущей задаче:  $\Delta z = h = \frac{2\pi m \cdot v \cos \alpha}{qB}$ , где

Рис.2.36

$v = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}}$  – скорость, приобретаемая частицей после ускорения. Отсюда  $\Delta\phi = \frac{q}{2m} \left( \frac{\Delta z B}{2\pi \cos \alpha} \right)^2 = 3,04$  кВ.

**27.6.** Вылетев из точки  $O$  на оси  $x$  с начальной скоростью  $v_0$ , направленной перпендикулярно к этой оси, частица с зарядом  $q = 20$  мкКл движется в электрическом и магнитном полях с напряжённостью  $E = 20$  В/м и индукцией  $B = 0,8$  Тл соответственно. Эти поля направлены вдоль оси  $x$  (см. рисунок). Чему равна масса  $m$  частицы, если совершив  $N = 8$  полных витков траектории, она окажется на расстоянии  $x = 400$  м от точки  $O$ ?



*Решение.*

Под действием электрического поля частица приобретает постоянное ускорение  $a_x = F_{\text{элект}} / m = qE / m$ . Поэтому со временем растёт проекция её скорости  $v_x = a_x t$ , параллельная вектору  $\vec{B}$ , а траектория движения становится винтовой линией с постоянным радиусом  $R = mv_0 / qB$  и с переменным шагом (рис.2.37). Частица пересекает ось  $x$  через каждый период обращения  $T$  в точках с координатами  $x_n = a_x t^2 / 2 = a_x (nT)^2 / 2$ . После восьмо-

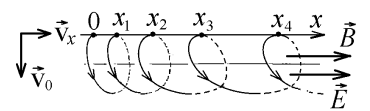


Рис.2.37

го оборота её координата  $x = \frac{a_x (8T)^2}{2} = \frac{qE}{m} \cdot 32 \left( \frac{2\pi m}{qB} \right)^2 = 128\pi^2 \frac{mE}{qB^2}$ , откуда получаем величину массы

$$m = \frac{qB^2 x}{128\pi^2 E} = 0,203 \text{ мг}.$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**27.7.** Отрицательно заряженная частица с массой  $m = 0,4$  мг двигалась с постоянной скоростью  $v = 300$  м/с вдоль оси  $x$  в электрическом поле с напряжённостью  $E = 600$  В/м, направленной вдоль оси  $y$ , и в магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной вдоль оси  $z$ . После выключения электрического поля частица продолжила вращение по окружности радиуса  $R = 2$  м. Чему равна величина заряда частицы?

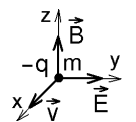
*Ответ:* 30 мкКл.

**27.8.** Ускоренная разностью потенциалов  $\Delta\phi = 18$  кВ заряженная частица движется по окружности радиуса  $R = 25$  мм в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $B = 0,3$  Тл. Чему равна величина  $q/m$  удельного заряда частицы?

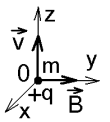
*Ответ:*  $6,4 \cdot 10^8$  Кл/кг.

**27.9.** Частица с удельным зарядом  $q/m = -4 \cdot 10^9$  Кл/кг была ускорена разностью потенциалов  $\Delta\phi$  и оказалась в магнитном поле с индукцией  $B = 5$  мТл, направленной вдоль оси  $z$ . В начальный момент  $t_0 = 0$  частица находилась в точке  $O$  и двигалась со скоростью  $v$ , направленной вдоль оси  $x$  (см. рисунок). В дальнейшем наибольшее удаление частицы от точки  $O$  равно 20 см. Чему равна величина ускоряющей разности потенциалов  $\Delta\phi$ ?

*Ответ:* 500 В.

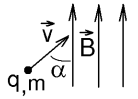


**27.10.** Частица с зарядом  $q = +5$  мкКл движется в однородном магнитном поле, индукция  $B = 3$  Тл которого направлена вдоль оси  $y$ . В начальный момент частица находилась в точке  $O$  и двигалась вдоль оси  $z$  (см. рисунок). Через промежуток времени  $\Delta t = 0,2$  с скорость частицы в первый раз окажется направленной вдоль оси  $x$ . Чему равна масса  $m$  частицы?



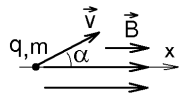
Ответ:  $m = 0,637$  мг.

**27.11.** Частица с массой  $m = 0,02$  мг была ускорена разностью потенциалов  $\Delta\phi = 1$  кВ и влетела под углом  $\alpha = 45^\circ$  в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 2$  Тл, после чего начала двигаться по винтовой траектории с шагом  $h = 2$  м. Найти величину заряда частицы.



Ответ:  $q = 49,3$  мкКл.

**27.12.** Частица имеет удельный заряд  $q/m = 3000$  Кл/кг, ускорена разностью потенциалов  $\Delta\phi = 6$  кВ и движется под углом  $\alpha = 30^\circ$  к линиям индукции однородного магнитного поля, направленного вдоль оси  $x$ , периодически пересекая ось  $x$  через равные промежутки времени. Максимальное удаление частицы от оси  $x$  равно 2 м. Найти величину индукции  $B$ .



Ответ:  $B = 1$  Тл.

## 28. Явление электромагнитной индукции и самоиндукции

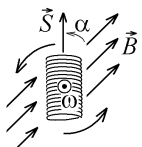


Рис.2.38

ЭДС электромагнитной индукции возникает в **замкнутом** проводящем контуре, если в нем меняется поток магнитной индукции  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Пусть контур (например, катушка) состоит из  $N$  витков любой формы с площадью  $S$  каждый и вращается с угловой скоростью  $\omega$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис.2.38). В этом случае  $\Phi = BNS \cos \alpha$ , где  $\alpha = \omega t + \alpha_0$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  (вектор площади витка  $\vec{S}$  имеет величину, равную площади витка, и направлен перпендикулярно к его плоскости).

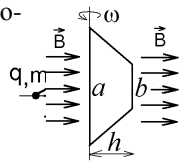
Возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt$ , причиной появления которой может быть или изменение величины индукции  $B$ , или изменение площади  $S$  контура, или изменение угла  $\alpha$  между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$ .

Если сопротивление проводящего контура равно  $R$ , то при этом в нем возникает индукционный ток

$I_{\text{инд}} = |\mathcal{E}_{\text{инд}}|/R$ , направленный в такую сторону, чтобы компенсировать изменение потока  $\Phi$ .

*Примеры решения задач:*

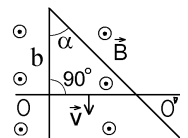
**28.1.** Замкнутый проводящий контур из тонкого провода с сопротивлением  $R = 9$  Ом имеет вид равнобедренной трапеции с основаниями  $a = 12$  см,  $b = 6$  см и с высотой  $h = 8$  см. Контур вращается в магнитном поле с индукцией  $B = 0,2$  Тл вокруг оси, проходящей через большее основание трапеции и перпендикулярной к линиям  $\vec{B}$ . Найти величину угловой скорости вращения  $\omega$ , если максимальная величина индукционного тока в контуре  $I_{\text{max}} = 4$  мА.



*Решение.*

Контур состоит из одного витка с площадью (площадь трапеции)  $S = \frac{(a+b)h}{2} = 72$  см<sup>2</sup>. При вращении в витке возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = BS\omega \sin \omega t$ . Индукционный ток  $I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$  меняется по гармоническому закону (такая система будет моделью генератора переменного тока). Его амплитуда  $I_{\text{max}} = BS\omega/R$ , откуда  $\omega = I_{\text{max}} R / BS = 25$  рад/с.

**28.2.** Замкнутый проводящий контур образован двумя прямыми проводниками, согнутыми под углом  $\alpha = 45^\circ$  и проводником-перемычкой, скользящим со скоростью  $v = 0,8$  м/с (см. рисунок). Перпендикулярно к его плоскости создано магнитное поле. Единица длины каждого из проводников, образующих прямоугольный треугольник, имеет сопротивление  $R_1 = 2$  Ом/м. Чему равна величина индукции магнитного поля  $B$ , если в контуре создаётся индукционный ток  $I = 0,2$  А?

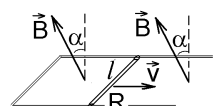


*Решение.*

В этой задаче меняется площадь  $S = b^2/2$  равнобедренного прямоугольного треугольника, так как меняется его катет  $b = b_0 + vt$ . Одновременно меняется поток  $\Phi = BS \cdot \cos 0^\circ$  (вектор  $\vec{S}$  параллелен вектору  $\vec{B}$ ). Величина индукционного тока  $I = \left| \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{B}{R} \frac{dS}{dt} = \frac{B}{R} b \frac{db}{dt} = \frac{B}{R} bv$ .

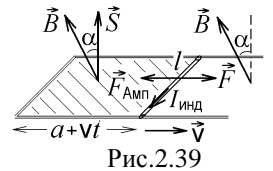
Сумма всех сторон треугольника равна  $b + b + \sqrt{2}b$ , и его сопротивление  $R = R_1 \cdot (2 + \sqrt{2})b$  меняется вместе с катетом  $b$ . Подставляя эту величину в формулу для  $I$ , находим  $B = IR_1 (2 + \sqrt{2})/v = 1,71$  Тл.

**28.3.** Угол между линиями индукции магнитного поля  $B = 0,2$  Тл и нормалью к плоскости не имеющей сопротивления проводящей П-образной рамки равен  $\alpha = 30^\circ$ . По рамке без трения со скоростью  $v = 9$  м/с скользит проводящая перемычка с сопротивлением  $R = 20$  Ом. В ней возникает индукционный ток  $I = 60$  мА. Найти длину перемычки  $l$ , а также величину силы, с которой тянут перемычку.

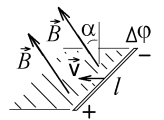


Решение.

При движении перемычки меняется площадь  $S = l(a + vt)$  проводящего контура, заштрихованная на рис.2.39. Меняется поток магнитной индукции  $\Phi = BS \cos \alpha$  и возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = |-d\Phi/dt| = B \cos \alpha \cdot dS/dt = B \cos \alpha \cdot lv$ .



Помните: если линии индукции  $\vec{B}$  магнитного поля составляют угол  $\alpha$  с нормалью к плоскости движения проводника с поперечным размером  $l$ , то на его краях  $a$  образуется разность потенциалов, которая будет причиной появления ЭДС индукции  $\Delta\Phi = \mathcal{E}_{\text{инд}} = Blv \cos \alpha$ .



Величина индукционного тока  $I_{\text{инд}} = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R = Blv \cos \alpha/R$ . Отсюда  $l = IR/Bv \cos \alpha = 0,770$  м.

Индукционный ток направлен так, чтобы возникающая сила Ампера  $\vec{F}_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}} [\vec{l}, \vec{B}]$  препятствовала изменению потока  $\Phi$  и тормозила перемычку (рис.1.39). Чтобы перемычка двигалась с постоянной скоростью, её надо тянуть с силой  $F = F_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}} l B = B^2 l^2 v \cos \alpha / R = 9,24$  мН.

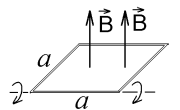
Индукционный ток связан с величиной электрического заряда  $q$ , протекающего по замкнутому проводящему контуру при изменении магнитного потока  $\Phi$  в нем:  $I_{\text{инд}} = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ . Интегрируя получившееся уравнение

$$\int dq = -\frac{1}{R} \int d\Phi, \text{ находим } q = \frac{1}{R} (\Phi_{\text{начал}} - \Phi_{\text{конечн}}).$$

Протекший заряд пропорционален разности начального и конечного значения магнитного потока.

Примеры решения задач:

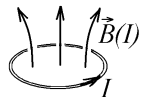
**28.4.** Вначале замкнутая проводящая рамка, сделанная в виде квадрата из четырёх одинаковых тонких проводников с сопротивлением  $R = 3$  Ом и длиной  $a = 15$  см каждый, располагалась в магнитном поле так, что линии его индукции  $\vec{B}$  были перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол  $180^\circ$  вокруг одной из её сторон, по рамке протёк заряд  $q = 6$  мКл. Найти величину индукции магнитного поля  $B$ .



Решение.

До поворота вектор площади  $\vec{S}$  был параллелен вектору  $\vec{B}$ , и поток магнитной индукции был равен  $\Phi_{\text{начал}} = Ba^2 \cos 0^\circ$ . После поворота на  $180^\circ$  вектор  $\vec{S}$  поменял направление, и конечный поток  $\Phi_{\text{конечн}} = Ba^2 \cos 180^\circ$ . Суммарное сопротивление всех проводников равно  $4R$ . Подстановка в формулу для протекшего заряда даёт  $q = 2Ba^2/4R$ , откуда  $B = 2qR/a^2 = 1,6$  Тл.

Текущий по замкнутому проводящему контуру ток  $I$  создаёт магнитное поле, индукция которого пропорциональна току:  $B \sim I$ . Поэтому и поток магнитной индукции будет пропорционален току:  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \sim I$  или  $\Phi = LI$ . Коэффициент пропорциональности  $L$  называют коэффициентом индуктивности.



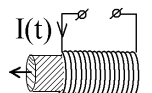
При изменении тока со временем меняется созданный им поток  $\Phi$  и возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Обычно эту формулу записывают в случае  $L = \text{const}$ . Но причиной появления  $\mathcal{E}_{\text{самоинд}}$  может оказаться меняющаяся со временем величина индуктивности  $L$ .

Примеры решения задач:

**28.5.** Ферромагнитный сердечник извлекают из катушки таким образом, что её индуктивность уменьшается со временем  $t$  по закону  $L(t) = \alpha/t$ , где  $\alpha = 4$  Гн·с. При этом ток, текущий по катушке, возрастает со временем:  $I(t) = \beta \cdot t^3$ , где  $\beta = 3$  А/с<sup>3</sup>. Найти величину индуктивности катушки в тот момент времени, когда возникающая в ней ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E} = 8$  В.



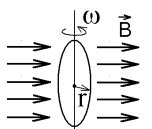
Решение.

Подставляем приведенные в условии зависимости в формулу  $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(LI) = \alpha\beta \frac{d}{dt}(t^2) = 2\alpha\beta t$ . Указанная величина

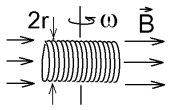
ЭДС наблюдается в момент времени  $t = \frac{\mathcal{E}}{2\alpha\beta}$ . В этот момент  $L = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\alpha^2\beta}{\mathcal{E}} = 12$  Гн.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**28.6.** Виток из тонкого провода с радиусом  $r = 5$  см вращается с угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с в магнитном поле с индукцией  $B = 2$  Тл. Чему равна величина сопротивления  $R$  витка, если ось вращения перпендикулярна к линиям индукции, а в витке создаётся индукционный ток с максимальной величиной  $I_{\text{max}} = 4$  мА?



Ответ: 78,5 Ом.

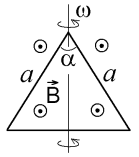


**28.7.** Короткозамкнутая катушка из  $N = 20$  витков вращается с угловой скоростью  $\omega = 15$  рад/с в магнитном поле с индукцией  $B = 4$  мТл. Ось вращения перпендикулярна как к линиям индукции, так и к оси катушки. Чему равен радиус витков катушки, если максимальная величина ЭДС электромагнитной индукции в ней  $\varepsilon_{\max} = 4$  мВ?

Ответ: 3,26 см.

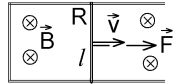
**28.8.** В магнитном поле с индукцией  $B = 0,25$  Тл вращается замкнутый проводящий контур с сопротивлением  $R = 6$  Ом имеющий вид равнобедренного треугольника со стороной  $a = 8$  см и с углом  $\alpha = 30^\circ$  (см. рисунок). Ось вращения совпадает с биссектрисой угла  $\alpha$  и перпендикулярна к линиям индукции  $\vec{B}$ . Индукционный ток в контуре имеет амплитуду  $I_{\max} = 5$  мА. Найти величину угловой скорости вращения  $\omega$ .

Ответ: 75 рад/с.



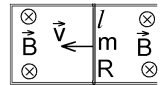
**28.9.** Линии индукции магнитного поля с величиной  $B = 2$  Тл перпендикулярны плоскости П-образной проводящей рамки, не имеющей сопротивления. По рамке с постоянной скоростью без трения скользит проводящая перемычка длины  $l = 60$  см с сопротивлением  $R = 8$  Ом. Для этого перемычку тянут с силой  $F = 0,9$  Н. Чему равна скорость перемычки?

Ответ: 5 м/с.



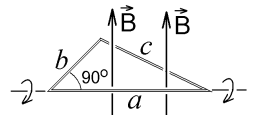
**28.10.** Магнитное поле с индукцией  $B = 1,5$  Тл приложено к П-образной проводящей рамке, не имеющей сопротивления. Линии индукции перпендикулярны к плоскости рамки. По рамке без трения скользит проводящая перемычка длины  $l = 40$  см с сопротивлением  $R = 15$  Ом. Чему равна масса  $m$  перемычки, если в тот момент, когда её скорость равна  $v = 3$  м/с, она движется с ускорением  $a = 4$  м/с<sup>2</sup>?

Ответ: 18 г.



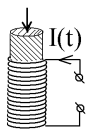
**28.11.** В магнитное поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл поместили рамку из тонкого провода с сопротивлением  $R = 18$  Ом, имеющую вид прямоугольного треугольника с катетом  $b = 15$  см. Вначале линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол  $\alpha = 60^\circ$  вокруг оси, проходящей через второй катет  $a$ , по рамке протёк заряд  $q = 0,3$  мКл. Чему равна длина гипотенузы  $c$  треугольника?

Ответ: 39 см.

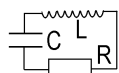


**28.12.** Сердечник вдвигают внутрь катушки индуктивности таким образом, что её индуктивность возрастает со временем  $t$  по закону  $L(t) = \alpha \cdot t$ . При этом ток, текущий по катушке, убывает со временем:  $I(t) = \beta/t^3$ , где  $\beta = 16$  А·с<sup>3</sup>. Найти величину постоянной  $\alpha$ , если в момент времени  $t = 2$  с величина ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке, была равна  $\varepsilon = 6$  В.

Ответ: 1,5 Гн/с.



## 29. Собственные электрические колебания



Электрический колебательный контур – это замкнутая цепь, которая содержит конденсатор ёмкости  $C$  и катушку с индуктивностью  $L$ . Такая цепь может иметь сопротивление  $R$ . В таком случае колебания, например,

заряда  $q$  на конденсаторе будут затухающими:  $q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$  (рис.2.40,а). Их

амплитуда  $Ae^{-\beta t}$  экспоненциально уменьшается со временем  $t$ . Циклическая частота

собственных затухающих колебаний имеет вид  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – цик-

лическая частота незатухающих колебаний (возникающих при  $R = 0$ ),  $\beta = R/2L$  – ко-

эффициент затухания колебаний. Период собственных затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  увеличивается с

ростом сопротивления  $R$ , и становится бесконечным при критическом сопротивлении  $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}$ , при котором  $\omega \rightarrow 0$ .

При  $R \geq R_{\text{кр}}$  колебания не наблюдаются (рис.2.40,б).

Скорость затухания колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания колебаний  $\theta$  – это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде через период:

$$\theta = \ln \left( \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} \right) = \ln(e^{\beta T}), \text{ т.е. } \theta = \beta T.$$

Примеры решения задач:

**29.1.** Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре меняется со временем  $t$  по закону  $U_C = U_0 \cdot \exp(-at) \cos(bt)$ , где  $U_0 = \text{const}$ ;  $a = 10^4$  с<sup>-1</sup>;  $b = 3 \cdot 10^4$  рад/с. Ёмкость конденсатора  $C = 4$  мкФ. Найти сопротивление  $R$  контура.

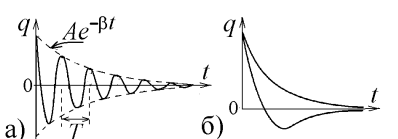
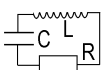


Рис.2.40

*Решение.*

Падение напряжения на конденсаторе  $U_C = q/C$  изменяется со временем по тому же приведенному выше закону, что и заряд  $q$  на конденсаторе. Поэтому  $a = \beta = \frac{R}{2L}$ ,  $b = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}$ . Отсюда  $L = \frac{1}{C(a^2 + b^2)}$ , и  $R = 2La = 2a/C(a^2 + b^2) = 5 \text{ Ом}$ .

**29.2.** В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. Во сколько раз уменьшился при этом период собственных электрических колебаний?  $L = 100 \text{ Гн}$ ;  $C = 50 \text{ мкФ}$ ;  $R = 1 \text{ кОм}$ .

*Решение.*



Помните правила вычисления суммарной ёмкости (или суммарного сопротивления) двух конденсаторов (или резисторов), соединённых последовательно или параллельно (рис.2.41):

При разомкнутом ключе в цепь был подключен один конденсатор с ёмкостью  $C_I = C$ . После замыкания ключа подключены два параллельно соединённых конденсатора с общей ёмкостью  $C_{II} = C + C = 2C$ . Подставляя формулу для периода колебаний, находим, что он

$$\text{уменьшился в } \frac{T_I}{T_{II}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC_I} - \frac{R^2}{4L^2}}} \bigg/ \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC_{II}} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC_{II}} - \frac{R^2}{4L^2}\right) \bigg/ \left(\frac{1}{LC_I} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} \text{ раз.}$$

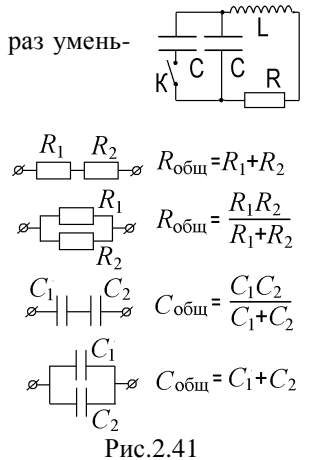


Рис.2.41

*Совет:* Чтобы не запутаться с приставками и степенями при подстановке числовых данных, делайте сложные вычисления по частям, находя отдельные слагаемые в системе СИ и только потом подставляя их в сложную формулу.

$$\frac{1}{LC_I} = \frac{1}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ с}^{-1}; \quad \frac{1}{LC_{II}} = 100 \text{ с}^{-1}; \quad \frac{R^2}{4L^2} = \left(\frac{10^3}{2 \cdot 100}\right)^2 = 25 \text{ с}^{-1}. \text{ Теперь нетрудно найти } \frac{T_I}{T_{II}} = \sqrt{\frac{200 - 25}{100 - 25}} = 1,53 \text{ раз.}$$

**29.3.** В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний увеличился в два раза. Чему равна индуктивность  $L$  контура?  $C = 0,8 \text{ мкФ}$ ;  $R = 5 \text{ кОм}$ .

*Решение.*

Сопротивление контура после замыкания ключа равно  $\frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$ . Логарифмический декремент был равен

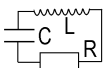
$$\theta_1 = \beta_1 T_1 = 2\pi \frac{R}{2L} \bigg/ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \text{ После изменения сопротивления } \theta_2 = \beta_2 T_2 = 2\pi \frac{R/2}{2L} \bigg/ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(R/2)^2}{4L^2}}. \text{ Подставив эти выражения в отношение } \theta_2/\theta_1 = 2 \text{ и возводя в квадрат, чтобы избавиться от корня, получим } \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{16}{LC} - \frac{R^2}{L^2}, \text{ откуда } L = R^2 C / 20 = 1 \text{ Гн.}$$

**29.4.** Движок реостата “Ре” перемещают слева направо, увеличивая сопротивление  $R$ . При нулевом сопротивлении,  $R = R_1 = 0 \text{ Ом}$ , циклическая частота собственных электрических колебаний в контуре была равна  $\omega_1$ . При сопротивлении  $R = R_2 = 15 \text{ кОм}$  частота колебаний уменьшилась в два раза:  $\omega_2 = \omega_1/2$ . При какой величине сопротивления реостата  $R_3$  колебания прекратятся?

*Решение.*

При  $R = 0$  циклическая частота незатухающих колебаний равна  $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . При ненулевой величине сопротивления  $R = R_2$  частота  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_2^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta_2^2} = \omega_1/2$ . Возводя в квадрат обе части последнего равенства, находим  $\omega_1^2 - \beta_2^2 = \frac{\omega_1^2}{4}$ , откуда получаем  $\beta_2 = \frac{R_2}{2L} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{LC}}$  и  $\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_2}{\sqrt{3}}$ . Колебания прекращаются, когда  $\omega = \beta$  и сопротивление достигает критической величины  $R_3 = R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Поэтому  $R_3 = \frac{2R_2}{\sqrt{3}} = 17,3 \text{ кОм}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

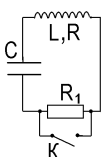


**29.5.** В колебательном контуре заряд конденсатора меняется со временем  $t$  по закону  $q = q_0 \exp(-bt) \sin(at)$ , где  $q_0$ ,  $a$ ,  $b$  – постоянные. Найти величину отношения  $b/a$ , если  $R = 2 \text{ кОм}$ ;  $L = 30 \text{ Гн}$ ;  $C = 6 \text{ мкФ}$ .

*Ответ:* 0,5.

**29.6.** В показанном на рисунке контуре замыкают ключ К, закорачивая сопротивление  $R_1$ . Во сколько раз уменьшится при этом период собственных электрических колебаний? Соленоид в контуре имеет индуктивность  $L = 500 \text{ Гн}$  и активное сопротивление  $R = 10 \text{ кОм}$ ;  $C = 4 \text{ мкФ}$ ;  $R_1 = 10 \text{ кОм}$ .

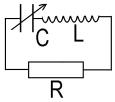
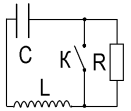
*Ответ:* уменьшится в 2 раза.





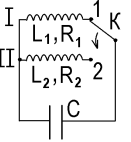
**29.7.** В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом период собственных электрических колебаний уменьшился в полтора раза. Чему равна ёмкость  $C$  контура, если  $L = 27$  Гн;  $R = 2$  кОм?

Ответ: 15 мкФ.



**29.8.** В цепь колебательного контура включен резистор с сопротивлением  $R = 1,5$  кОм, катушка с индуктивностью  $L$  и конденсатор с переменной ёмкостью  $C$ . Если величину ёмкости уменьшить от величины  $C_1 = 18$  мкФ до величины  $C_2 = 4$  мкФ, то циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре увеличивается в  $n = 3$  раза. Чему равна индуктивность  $L$  катушки?

Ответ: 18 Гн.



**29.9.** Ключом К в колебательный контур с ёмкостью  $C = 4$  мкФ включается или соленоид I, или соленоид II с одинаковыми активными сопротивлениями  $R_1 = R_2 = R$  и с индуктивностями  $L_1 = 3$  Гн и  $L_2 = 3L_1$  соответственно. При этом частота собственных электрических колебаний в контуре не меняется. Чему равна величина сопротивления  $R$ ?

Ответ: 1,5 кОм.

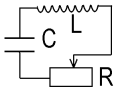


**29.10.** Логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний в контуре, изображённом на рисунке,  $\theta = 2$ . Чему равна ёмкость  $C$  контура, если  $L = 44$  Гн;  $R = 2$  кОм?

Ответ: 4,05 мкФ.

**29.11.** Собственные электрические колебания в контуре прекращаются при увеличении сопротивления реостата до значения  $R_0$ . Чему равен логарифмический декремент затухания  $\theta$  колебаний при вдвое меньшем сопротивлении  $R = R_0/2$ ?

Ответ: 3,63.



### 30. Вынужденные электрические колебания

Вынужденные колебания возникают, если в контур включена внешняя ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$ , меняющаяся, например, по гармоническому закону с циклической частотой  $\omega_{\text{вн}}$ .

Величины заряда на конденсаторе и тока в цепи будут меняться с той же частотой  $\omega_{\text{вн}}$ . Амплитуды их колебаний постоянны во времени, но зависят от частоты внешней ЭДС:

амплитуда заряда  $q_0(\omega_{\text{вн}}) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_{\text{вн}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2}}$ ; амплитуда тока  $I_0(\omega_{\text{вн}}) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_{\text{вн}}C} - \omega_{\text{вн}}L\right)^2 + R^2}}$ .

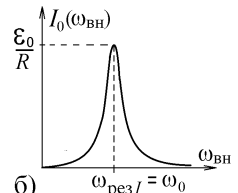
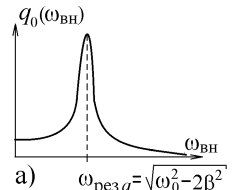


Рис.2.42

Графики такой зависимости приведены на рис.2.42.

Наблюдается **резонанс** – резкое увеличение амплитуды колебаний, когда частота внешней ЭДС сравнивается с резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$ . Резонансная частота для заряда или для напряжения на конденсаторе

$$\omega_{\text{рез}q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Резонансная частота для тока в цепи  $\omega_{\text{рез}I} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . При этой частоте амплитуда тока

достигает максимального значения, равного  $I_{0\text{max}} = \mathcal{E}_0/R$  (рис.2.42,б).

Примеры решения задач:

**30.1.** Если ключ К находится в положении “1” и подключает к электрическому колебательному контуру источник ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  и циклической частотой  $\omega$ , то при частоте  $\omega = \omega_1$  в наблюдается резонанс вынужденных колебаний тока, а при частоте  $\omega = \omega_2$  – резонанс вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора. Когда ключ К переключают в положение “2”, в контуре возникают собственные затухающие колебания с циклической частотой  $\omega_3$ . Найти отношение частот  $\omega_1/\omega_3$ , если известно отношение частот  $\omega_3/\omega_2 = 2$ .

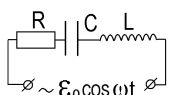
Решение.

Резонансная частота тока в цепи  $\omega_1 = \omega_0$ ; резонансная частота напряжения  $U = q/C$  на конденсаторе

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ ; частота собственных затухающих колебаний при положении ключа “2”  $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . По условию

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 2^2 = 4. \text{ Находим отсюда, что } \beta^2 = \frac{3}{7}\omega_0^2. \text{ Тогда } \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3/7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32.$$

**30.2.** В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС  $\omega = \omega_1 = 4000$  рад/с, а при частоте  $\omega = \omega_2 = 5000$  рад/с амплитуда тока уменьшается в два раза. Чему равна ёмкость  $C$  контура, если  $R = 15$  кОм?



Решение.

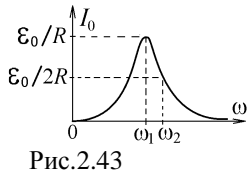


Рис.2.43

Из графика зависимости амплитуды тока от частоты внешней ЭДС (рис.2.43) видно, что при  $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  амплитуда тока максимальна и равна  $I_{0\max} = \epsilon_0/R$ , где  $\epsilon_0$  – амплитуда ЭДС. При

частоте  $\omega_2$  по условию  $I_0(\omega_2) = \epsilon_0 / \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 + R^2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{R}$ .

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим  $\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 = 3R^2$ .



Помните, что извлекая квадратный корень, Вы получаете два значения:  $\sqrt{x^2} = \pm x$ . Выбрав неверный знак, можно получить в ответе отрицательную величину сопротивления  $R$ , ёмкости  $C$  или индуктивности  $L$ .

Поэтому, извлекая корень, учтем оба знака:  $\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = \pm \sqrt{3}R$ . Индуктивность  $L$  подставим из записанной

выше формулы  $L = 1/(\omega_1^2 C)$ , и находим  $C = \pm \frac{1}{\sqrt{3}R} \left( \frac{1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \right)$ . После подстановки числовых данных видно, что правильным будет нижний знак, дающий положительное значение  $C = 4,33 \text{ нФ}$ .

**30.3.** На рисунке представлен график зависимости амплитуды тока  $I_0$  от циклической частоты  $\omega$  внешней ЭДС. Эта амплитуда имеет одинаковую величину  $I_{01} = 3I_{0m}/5$  при двух значениях  $\omega_1$  и  $\omega_2$  частоты, где  $I_{0m}$  – максимальное возможное значение амплитуды тока при вынужденных колебаниях. Найти величину разности частот  $\omega_2 - \omega_1$ . Параметры контура:  $\beta = R/2L = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 9000 \text{ с}^{-1}$ .

Решение.

Так как  $I_{0m} = \frac{\epsilon_0}{R}$ , то амплитуда тока  $I_{01} = \epsilon_0 / \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \frac{3}{5} \frac{\epsilon_0}{R}$ . Возводя в квадрат обе части

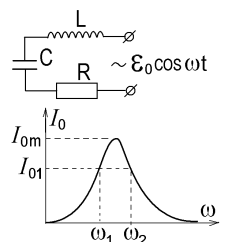
этого равенства, получим  $\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = \frac{16}{9} R^2$ , откуда  $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \pm \frac{4}{3} R$ . Последнее уравнение приводится к виду

$\omega^2 \pm \frac{4R}{3L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$  или, согласно условию,  $\omega^2 \pm \frac{8}{3} \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0$ . Такое квадратное уравнение имеет два положительных корня, если взять нижний знак:  $\omega_1 = \omega_0/3$  и  $\omega_2 = 3\omega_0$ . Поэтому  $\omega_2 - \omega_1 = 8\omega_0/3 = 24000 \text{ с}^{-1}$ .

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

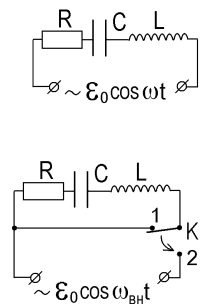
**30.4.** В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС  $\omega = \omega_1 = 2000 \text{ с}^{-1}$ , а максимум амплитуды тока – при  $\omega = \omega_2 = 3000 \text{ с}^{-1}$ . Чему равно активное сопротивление  $R$  контура, если  $L = 2 \text{ Гн}$ ?

Ответ: 6,324 кОм.



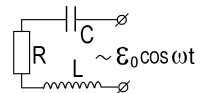
**30.5.** Вначале ключ  $K$  была замкнут в положении "1", и циклическая частота собственных электрических колебаний в образовавшемся контуре имела величину  $\omega_1 = 4000 \text{ с}^{-1}$ . Затем ключ  $K$  переключили в положение "2" (см. рисунок), подключая внешнюю ЭДС. При какой циклической частоте  $\omega_{\text{вн}}$  внешней ЭДС амплитуда тока в цепи будет максимальной, если амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна при  $\omega_{\text{вн}} = \omega_2 = 3000 \text{ с}^{-1}$ ?

Ответ: 4796  $\text{с}^{-1}$ .



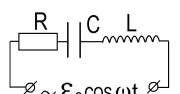
**30.6.** В колебательный контур включен источник внешней ЭДС с амплитудой  $\epsilon_0$  и с циклической частотой  $\omega$ . Наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе наблюдается при  $\omega = \omega_1 = 1000 \text{ с}^{-1}$ . При каком значении частоты  $\omega$  достигается наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний тока в цепи? Активное сопротивление контура  $R = 8 \text{ кОм}$ , его индуктивность  $L = 2 \text{ Гн}$ .

Ответ: 3000  $\text{с}^{-1}$ .



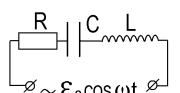
**30.7.** Амплитуда тока в электрическом колебательном контуре оказывается одинаковой при двух значениях циклической частоты внешней ЭДС:  $\omega_1 = 3000 \text{ рад/с}$  и  $\omega_2 = 4000 \text{ рад/с}$ . Чему равна ёмкость  $C$  контура, если его индуктивность  $L = 1 \text{ Гн}$ ?

Ответ: 83,3 нФ.



**30.8.** В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС  $\omega = \omega_1 = 2000 \text{ рад/с}$ , а при частоте  $\omega = \omega_2 = 3000 \text{ рад/с}$  амплитуда тока уменьшается в три раза. Чему равно сопротивление  $R$  контура, если  $C = 2 \text{ мкФ}$ ?

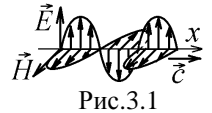
Ответ: 49,1 Ом.



## Семестр 4

### 31. Условия интерференции. Интерференционная схема Юнга

Распространяющаяся вдоль оси  $x$  плоская монохроматическая электромагнитная волна описывается вектором напряженности переменного электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \alpha)$ . В частности, та-  
кой волной будет видимый свет с циклической частотой  $\omega = 2\pi\nu$ . Здесь  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi c/\omega$  – волновое



число,  $\lambda$  – длина волны,  $c$  – её скорость, равная  $3 \cdot 10^8$  м/с в вакууме. При сложении двух **когерентных** волн, имеющих одну частоту  $\omega$ , не зависящую от времени разность фаз  $\Delta\varphi$  и распространяющихся вдоль одного направления, возникает интерференционная картина чередующихся максимумов и минимумов освещенности. При этом выполняются условия:

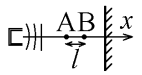
в точках интерференционных максимумов  $\Delta\varphi = 2m\pi$ ; в точках интерференционных минимумов  $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ , где  $m$  – любое целое число.

Если начальные фазы  $\alpha$  когерентных волн одинаковы, то эти условия удобно записать для оптической разности хода двух волн  $\Delta = n \cdot (x_2 - x_1)$ , где  $x_2 - x_1$  – разность проходимых ими путей,  $n$  – показатель преломления среды, равный 1 в вакууме:

$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$  в точке максимума;  $\Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}$  в точке минимума.

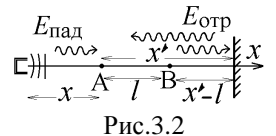
*Пример решения задач:*

**31.1.** Генератор испускает плоскую электромагнитную монохроматическую волну в направлении оси  $x$ . Волна отражается от перпендикулярного плоского зеркала. В точках А и В на оси, разделенных расстоянием  $l = 6$  мм, наблюдаются два последовательных интерференционных минимума (см. рисунок). Чему равна частота  $\nu$  генератора (в ГГц)? Скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.



*Решение.*

В точку А приходит падающая от генератора волна  $\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ . Продолжая движение, эта волна отражается от зеркала и возвращается обратно в точку А, пройдя расстояние  $2x'$  (рис.3.2):  $\vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k(x + 2x') + \pi)$ . При отражении от зеркала фаза волны сдвигается на  $\pi$ . Согласно условию, разность фаз этих волн удовлетворяет условию интерференционного минимума:  $\Delta\varphi_A = 2kx' + \pi = (2m+1)\pi$ .



В точку В отраженная волна, проходящая меньшее дополнительное расстояние  $2(x'-l)$ , приходит со сдвигом фаз (соседний интерференционный минимум)  $\Delta\varphi_B = 2k(x'-l) + \pi = (2m-1)\pi$ .

Находя разность  $\Delta\varphi_A - \Delta\varphi_B$  и подставляя  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi c/\nu$ , получаем  $2kl = 4\pi l\nu/c = 2\pi$ , откуда  $\nu = c/2l = 2,5 \cdot 10^{10}$  Гц = 25 ГГц.

\*\*\*\*\*

Одним из способов получения интерференционной картины будет **интерференционная схема Юнга**: два очень узких когерентных источника света  $S_1$  и  $S_2$ , расстояние  $2d$  между которыми много меньше расстояния  $l$  до экрана Э, испускают волны, складывающиеся в точке наблюдения Р на экране (рис.3.3). Пути  $s_1$  и  $s_2$ , проходимые волнами до точки Р, являются гипотенузами прямоугольных треугольников  $\Delta S_1AP$  и  $\Delta S_2BP$ :  $s_1^2 = S_1P^2 = S_1A^2 + AP^2 = l^2 + (x-d)^2$ ,  $s_2^2 = S_2P^2 = S_2B^2 + BP^2 = l^2 + (x+d)^2$

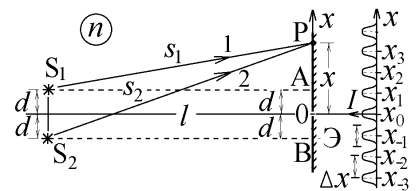


Рис.3.3

(рис.3.3). Отсюда  $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 4xd$ . Размер наблюдаемой интерференционной картины очень мал, и расстояние  $x$  от точки Р до центра О картины мало по сравнению с расстоянием  $l$  до экрана ( $2d, x \ll l$ ). Поэтому  $s_2 + s_1 \approx 2l$ , и мы получаем оптическую разность хода лучей, приходящих в точку Р с координатой  $x$ :  $\Delta = n(s_2 - s_1) = 2xnd/l$ , где  $n$  – показатель преломления среды.

Зависимость освещенности  $I$  экрана от координаты  $x$  показана в правой части рис.3.3. Интерференционная картина имеет вид узких полос, параллельных узким светящимся щелям  $S_1$  и  $S_2$ . Из условия интерференционных максимумов

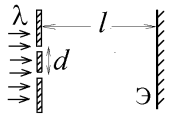
$\Delta = m\lambda$  находим координаты точек с наибольшей освещенностью  $x_m = \frac{l\lambda}{2nd} m$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Ширина каждой

интерференционной полосы  $\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{l\lambda}{2nd}$ .



Всякий раз, когда расстояние между когерентными источниками света много меньше расстояния до симметрично расположенного экрана, выполнено условие оптической схемы Юнга. Можно использовать полученные формулы для определения ширины интерференционных полос.

**31.2.** Плоская монохроматическая световая волна с  $\lambda = 625$  нм падает нормально на плоскую преграду, в которой прорезаны две параллельные узкие щели. За преградой на расстоянии  $l = 1,8$  м установлен параллельный экран Э. Найти ширину центральной интерференционной полосы на экране, если известно, что она в два раза больше расстояния  $d$  между щелями, и что  $l \gg d$ .



*Решение.*



Не используйте полученные ранее формулы, не сравнив их с условиями задачи. На рис.3.3 расстояние между источниками света было равно  $2d$ , а в данной задаче оно равно  $d$ .

Поэтому ширина полосы на экране будет равна  $\Delta x = l\lambda/d$  (показатель преломления воздуха  $n \approx 1$ ). А так как по условию  $\Delta x = 2d$ , то  $d = \sqrt{l\lambda/2}$  и  $\Delta x = \sqrt{2l\lambda} = 1,5$  мм.

**31.3.** На каком **минимальном** расстоянии  $h$  надо разместить над горизонтальным зеркалом очень узкий и длинный источник монохроматического света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 570$  нм (светящаяся щель), чтобы на вертикальном экране Э, удалённом на большое расстояние  $l = 4$  м, на расстоянии  $x = 0,95$  мм над зеркалом наблюдался максимум интерференционной картины?

*Решение.*

В точке Р экрана складывается волна 1, пришедшая непосредственно от источника света  $S$ , и волна 2, отражённая от зеркала в точке А (рис.3.4). Можно считать, что эта волна приходит от изображения  $S'$  источника света  $S$  в зеркале ( $SA=S'A$ ). Но отражение от зеркала меняет фазу волны 2.

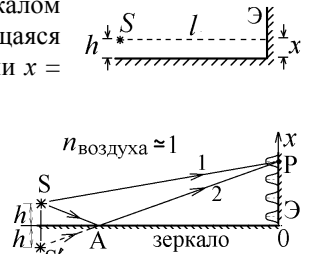


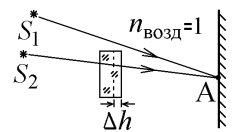
Рис.3.4



Во всех задачах учитывайте, что при отражении от зеркальной поверхности фаза волны сдвигается на  $\pi$ . Это приводит к изменению оптической разности хода на  $\lambda/2$ . Поэтому интерференционные максимумы и минимумы на рис.1.3 и 1.4 меняются местами (ширина интерференционных полос не меняется).

Так как  $d = h$ ,  $n = 1$ , и разность хода  $\Delta$  изменяется на  $\lambda/2$ , то координатами интерференционных максимумов будут  $x_m = \frac{l\lambda}{2h} \left( m - \frac{1}{2} \right)$  (вместо целого числа  $m$  записываем соседнее полуцелое число). По условию  $x = x_m > 0$  задано, и минимальное значение  $h$  получится при минимальной величине числа  $m = 1$ . Отсюда  $h_{\min} = l\lambda/4x = 0,6$  мм.

**31.4.** Лучи от двух когерентных точечных источников света  $S_1$  и  $S_2$  с длиной волны  $\lambda = 600$  нм интерферируют в точке А экрана. На пути одного из лучей расположена стеклянная пластинка. Если толщину пластинки уменьшить на  $\Delta h = 1$  мкм, то максимум освещённости в точке А сменится минимумом. Найти показатель преломления стекла (учесть, что для различных стекол он лежит в интервале  $1,5 \leq n_{\text{стекла}} \leq 2,2$ ).

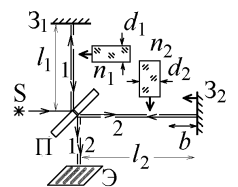


*Решение.*

Вначале оптическая разность хода волн от источников  $S_1$  и  $S_2$  соответствовала условию интерференционного максимума в точке А:  $\Delta = 2m\lambda/2$ . После уменьшения толщины пластинки изменилась оптическая длина пути, проходимого волной от источника  $S_2$ . Если раньше эта волна проходила расстояние  $\Delta h$  в стекле с показателем преломления  $n$ , то теперь она проходит этот путь в воздухе с показателем преломления  $n_{\text{возд}}=1$ . В результате разность хода изменится на величину  $n \cdot \Delta h - n_{\text{возд}} \cdot \Delta h$  и будет соответствовать интерференционному минимуму в точке А:  $\Delta' = \Delta + (n-1)\Delta h = (2m'+1)\lambda/2$ .

Это не обязательно соседний минимум. Целое число  $m'$  может не совпадать с числом  $m$ . Устраняя  $\Delta$ , находим  $n = 1 + \frac{(2\Delta m + 1)\lambda}{2\Delta h}$ , где  $\Delta m = m' - m$ . Подстановка  $\Delta m = 0$  даёт  $n = 1,3$ . При  $\Delta m = 1$  получим  $n = 1,9$ . При  $\Delta m = 2$  имеем  $n = 2,5$  и т.п. Условию задачи удовлетворяет единственное значение  $n = 1,9$ .

**31.5.** В интерферометре Майкельсона зеркало  $Z_2$ , от которого отражается горизонтальный луч 2, придвинули на расстояние  $b = 2$  мм к делительной пластинке П. На пути лучей 1 и 2 поместили прозрачные пластинки толщины  $d_1 = 1,2$  мм и  $d_2 = 1,5$  мм с показателями преломления  $n_1 = 1,5$  и  $n_2 = 1,8$  соответственно (см.рисунок). При этом интерференционная картина на экране Э сдвинулась на  $N = 1250$  полос. Чему равна длина волны света, испускаемого источником S?

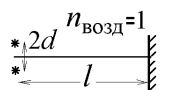


*Решение.*

Первоначально лучи 1 и 2 проходили расстояния  $l_1$  и  $l_2$  до зеркал и обратно. Оптическая разность хода была равна  $\Delta_0 = (2l_2 - 2l_1) \cdot n_{\text{возд}}$ , где показатель преломления воздуха  $n_{\text{возд}} = 1$ . Затем оптические длины меняются в пределах размещённых пластинок, имеющих другие показатели преломления. Как и в предыдущей задаче, оптическая длина пути луча 1 увеличится на  $2d_1(n_1 - 1)$ , а оптическая длина пути луча 2 изменится на  $2d_2(n_2 - 1) - 2b \cdot 1$  (путь этого луча в воздухе уменьшится на  $2b$ ). Оптическая разность хода изменится на величину  $2d_2(n_2 - 1) - 2b \cdot 1 - 2d_1(n_1 - 1) = \pm N\lambda$  (смещение  $N$  полос на экране). Знак в правой части указывает направление смещения полос. Его надо выбрать таким, чтобы оказалось  $\lambda > 0$ . Отсюда  $\lambda = [2d_1(n_1 - 1) - 2d_2(n_2 - 1) + 2b]/N = 640$  нм.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

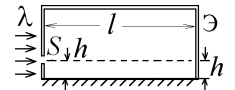
**31.6.** Два когерентных источника света находятся на малом расстоянии  $2d = 1,5$  мм друг от друга и испускают световые волны с частотой  $\nu = 5,4 \cdot 10^{14}$  Гц в одной фазе. Ширина центральной полосы интерференционной



картины, созданной на удалённом на большое расстояние экране, равна 0,5 мм. Найти расстояние  $l$  от щелей до экрана.

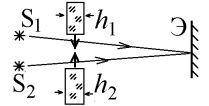
Ответ: 1,35 м.

**31.7.** В боковой стенке ящика прорезана узкая горизонтальная щель  $S$ , на которую падает монохроматическая световая волна с  $\lambda = 500$  нм. Расстояние от щели до **зеркального** дна ящика  $h=1$  мм много меньше длины ящика  $l$ . На противоположной стенке ящика "Э" на той же высоте  $h$  от дна наблюдается интерференционный минимум. При какой **наибольшей** длине  $l$  ящика это возможно?



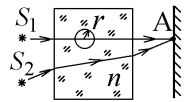
Ответ: 4 м.

**31.8.** На пути лучей в интерференционном опыте Юнга помещают тонкие прозрачные пленки с одинаковым показателем преломления  $n = 1,7$ . При этом интерференционная картина на экране Э сдвигается на  $N=35$  полос. Какой может быть толщина  $h_2$  нижней пленки, если толщина верхней пленки  $h_1 = 0,1$  мм, а когерентные источники  $S_1$  и  $S_2$  испускают свет длиной волны  $\lambda = 600$  нм?



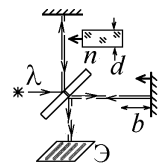
Ответ: 0,13 мм или 0,07 мм.

**31.9.** На пути одного из когерентных световых лучей, проходящих сквозь плоскопараллельную стеклянную пластинку, оказался воздушный пузырек радиуса  $r = 0,4$  мкм (луч  $S_1A$  проходит через центр пузырька). При этом в точке А экрана наблюдается интерференционный максимум освещенности. Если бы пузырька не было и стекло было бы сплошным, то в точке А снова был бы интерференционный максимум, но **соседнего** порядка. Найти величину показателя преломления  $n$  стекла, если частота света  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Гц.



Ответ: 1,75.

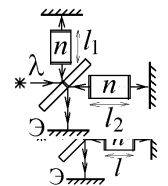
**31.10.** На пути одного из лучей голубого света с длиной волны  $\lambda = 480$  нм в интерферометре Майкельсона поместили прозрачную пластинку толщины  $d = 1,2$  мм с показателем преломления  $n = 1,8$ . На какое расстояние  $b$  надо **придвинуть** зеркало, от которого отражается второй луч, чтобы интерференционная картина на экране Э сместилась ровно на 5000 полос?



Ответ: 0,24 мм.

**31.11.** Первоначально кюветы с длиной  $l_1 = 30$  см и  $l_2 = 50$  см заполнял газ с показателем преломления  $n = 1,0005$ . После того, как этот газ был выпущен и кюветы заполнили окружающим воздухом с показателем преломления  $n_{\text{возд}} = 1,0003$ , полосы интерференционной картины на экране Э сместились. На сколько полос сместилась картина, если световые лучи красного цвета, проходящие через кюветы, имеют длину волны  $\lambda = 640$  нм?

Ответ: на 125 полос.



**31.12.** В интерферометре Майкельсона используется монохроматический свет с частотой  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Гц. Найти длину  $l$  каждой из одинаковых кювет, установленных на пути лучей, если они заполнены разными газами с показателями преломления  $n_1 = 1,000057$  и  $n_2 = 1,000027$ , а после выпуска этих газов и заполнения обеих кювет воздухом интерференционная картина на экране Э сместится ровно на полторы полосы.

Ответ: 1,5 см.

## 32. Интерференция в тонких пленках

Другой способ получения двух когерентных волн – деление падающего света на две волны, отражающиеся от разных поверхностей тонкой плёнки (пластинки).

Даже если источник света  $S$  точечный, на большом удалении волновые поверхности  $AA'$  будут практически плоскими. Все точки волны в плоскости  $AA'$  имеют одну фазу. Падающий под углом  $\alpha$  луч 1, преломляясь, отражается в точке В от противоположной поверхности пленки толщиной  $d$  и выходит из неё в точке D (рис.3.5). Луч 2, падая на пленку, отражается в точке D от её верхней поверхности. Затем лучи 1 и 2 складываются, интерферируя. Оптическая разность хода этих лучей

$\Delta = (AB+BC) \cdot n - ED \cdot n_{\text{возд}} \pm \lambda/2$  (луч 1 свой путь от поверхности  $AA'$  до точки D проходит в прозрачной пленке с показателем преломления  $n$ , а луч 2 – в воздухе).

Внимательно следите, от какой среды отражается свет!



При отражении от оптически более плотной среды с большим показателем преломления  $n$  при малых углах падения происходит сдвиг фазы на  $\pi$  (потеря  $\lambda/2$ , на рис.1.5. это происходит при отражении луча 2 в точке D). При отражении от оптически менее плотной среды с меньшим показателем преломления (отражение луча 1 в точке В от воздуха) или при преломлении луча потери  $\lambda/2$  нет!

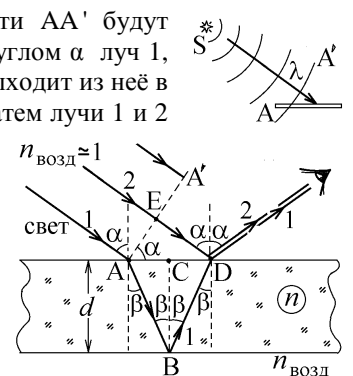


Рис.3.5

Из прямоугольных треугольников ABC, CBD и AED, где  $CD = d$ , находим:  $AB = BD = d/\cos\beta$ ,  $ED = AD \cdot \sin\alpha = 2AC \cdot \sin\alpha = 2d \cdot \tan\beta \cdot \sin\alpha$ .

Учитывая, что  $\sin\alpha = n \sin\beta / n_{\text{возд}} = n \sin\beta$  (закон преломления), получим после подстановки

$$\Delta = 2 \frac{d}{\cos\beta} n - 2d \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} n \pm \frac{\lambda}{2} = 2dn \cos\beta \pm \frac{\lambda}{2}. \text{ Но } \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - (\sin\alpha/n)^2}, \text{ что даёт } \Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2}.$$

В том случае, когда толщина  $d$  пленки не постоянна, но изменяется очень мало (рис.3.6, где угол  $\theta \ll 1$ ), на её поверхности видна картина в виде полос, цвет которых соответствует условию интерференционного максимума для отраженного света. При нормальном падении ( $\alpha=0$ ) это условие имеет вид

$$\Delta = 2dn + \lambda/2 = 2m\lambda/2, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

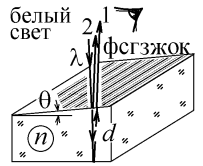
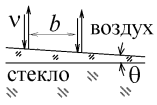


Рис.3.6

*Пример решения задач:*



**32.1.** Угол между противоположными плоскими поверхностями тонкой пленки, лежащей на стекле, очень мал:  $\theta = 4 \cdot 10^{-6}$  рад. Показатель преломления пленки  $n = 1,3$ , а стекла  $n_c = 1,5$ . При нормальном отражении от пленки монохроматического света на её поверхности на расстоянии  $b = 36$  мм друг от друга видны интерференционные полосы. Найти частоту  $\nu$  света.

*Решение.*

В точках А и С на поверхности пленки видны интерференционные максимумы  $(m+1)$ -го и  $m$ -го порядка (центры полос, рис.3.7). Толщина пленки  $d_2$  и  $d_1$  в этих местах различна. И на верхней поверхности пленки АС, и на нижней поверхности ЕD свет отражается от оптически более плотной среды. Поэтому потерю  $\lambda/2$ , происходящую 2 раза, учитывать не надо: оптическая разность хода лучей, отраженных от верхней и нижней поверхности пленки с толщиной  $d$  будет равна  $\Delta = 2dn$ .

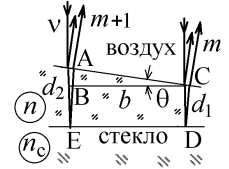
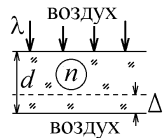


Рис.3.7

Вычитая левые и правые части условий интерференционного максимума  $\Delta_2 = 2d_2n = 2(m+1)\lambda/2$  и  $\Delta_1 = 2d_1n = 2m\lambda/2$ , получим  $2(d_2 - d_1)n = \lambda = c/\nu$ . Из треугольника ABC (рис.1.7) видно, что  $AB = d_2 - d_1 = BC \cdot \tan \theta \approx b \cdot \theta$ , откуда  $\nu = c/(2nb\theta) = 8,01 \cdot 10^{14}$  Гц.

**32.2.** На прозрачную пленку с показателем преломления  $n = 1,5$  и с толщиной  $d$  падает нормально и отражается белый свет. В отраженном свете наблюдается интерференционный максимум  $m$ -го порядка для лучей желтого света с длиной волны  $\lambda_{ж} = 540$  нм. Если с пленки удалить слой толщины  $\Delta = 0,21$  мкм, то в отраженном свете будет наблюдаться интерференционный минимум того же  $m$ -го порядка для лучей фиолетового света с длиной волны  $\lambda_{ф} = 420$  нм. Найти величину первоначальной толщины пленки  $d$  (в нм).



*Решение.*

С учетом потери  $\lambda/2$  при отражении от верхней поверхности, условия интерференционного максимума для лучей желтого цвета на пленке толщины  $d$  и интерференционного минимума того же порядка  $m$  для лучей фиолетового цвета на пленке толщины  $(d-\Delta)$  имеют вид:  $\Delta_{ж} = 2dn - \lambda_{ж}/2 = 2m \cdot \lambda_{ж}/2$ ;  $\Delta_{ф} = 2(d-\Delta)n - \lambda_{ф}/2 = (2m-1) \cdot \lambda_{ф}/2$ . Исключая отсюда неизвестное целое число  $m$ , получим  $\frac{2dn - \lambda_{ж}/2}{2(d-\Delta)n} = \frac{\lambda_{ж}}{\lambda_{ф}} = \frac{9}{7}$ , откуда  $d = \frac{9}{2}\Delta - \frac{7}{8n}\lambda_{ж} = 630$  нм.

**32.3.** Интерференционная картина колец Ньютона наблюдается в отраженном свете с длиной волны  $\lambda = 640$  нм, падающем нормально на плоско-выпуклую тонкую стеклянную линзу с радиусом сферической поверхности  $R = 15$  см, лежащую на плоской стеклянной пластинке. Найти величину показателя преломления жидкости, заполняющей промежуток между линзой и пластинкой, если радиус  $m$ -го темного кольца равен 0,4 мм, а радиус  $(m+4)$ -го темного кольца равен 0,693 мм. Найти также число  $m$ .



*Решение.*

В данном случае пленкой будет тонкая прослойка между стеклянной линзой и стеклянной опорой. Точки, в которых толщина прослойки равна  $d$ , образуют окружность с радиусом  $r$ . Из прямоугольного треугольника ABC на рис.3.8 видно, что  $r^2 = R^2 - (R-d)^2 \approx 2Rd$  (малым слагаемым  $d^2 \sim \lambda^2$  можно пренебречь, так как длины волн  $\lambda$  видимого света очень малы).

Точки, для которых оптическая разность хода световых волн, отраженных от нижней сферической поверхности линзы и от верхней поверхности опоры, удовлетворяют условию интерференционного минимума  $\Delta = 2dn + \lambda/2 = (2m+1)\lambda/2$ , образуют темное кольцо интерференционной картины. Подставляя  $2d = r^2/R$ , находим радиусы этих темных колец:

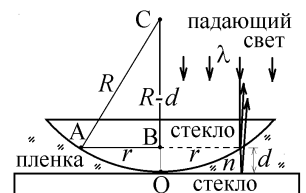


Рис.3.8

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{n} m}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots - \text{номер кольца.}$$

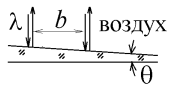
Не заданное по условию задачи целое число  $m$  можно устранить, вычисляя разность  $r_{m+4}^2 - r_m^2 = 4 \frac{R\lambda}{n}$ , откуда  $n = 4R\lambda / (r_{m+4}^2 - r_m^2) = 1,20$ . Вычислив  $n$ , находим номер кольца  $m = nr_m^2 / R\lambda = 2$ .

Каким бы ни был показатель преломления  $n$  жидкости, заполняющей пространство между стеклами ( $n > n_{\text{стекла}}$  или  $n < n_{\text{стекла}}$ ) потеря  $\lambda/2$  происходит только при одном отражении. В центре картины (точке В на рис.1.8) всегда будет темное пятно. Радиусы светлых колец Ньютона определяются условием интерференционного максимума и равны

$$r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{n} \left(m - \frac{1}{2}\right)}, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots - \text{номер светлого кольца (} m\text{-е светлое кольцо меньше } m\text{-го темного).}$$

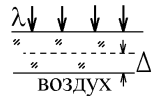
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**32.4.** Две плоские поверхности тонкой пленки образуют очень малый угол  $\theta = 8 \cdot 10^{-6}$  рад (см. рисунок). При нормальном отражении от пленки монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 560$  нм на поверхности пленки видны интерференционные полосы. Расстояние между центрами соседних полос равно  $b = 25$  мм. Определить величину показателя преломления  $n$  пленки.



Ответ: 1,4

**32.5.** На плоскую прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  и с толщиной  $d = 0,5$  мкм нормально падает белый свет. В отраженном свете наблюдается интерференционный максимум  $m$ -го порядка для лучей оранжевого света с длиной волны  $\lambda_o = 600$  нм. Слой какой толщины  $\Delta$  (в нм) надо сошлифовать с пластинки, чтобы в отраженном свете наблюдался интерференционный максимум того же  $m$ -го порядка для лучей фиолетового света с длиной волны  $\lambda_\phi = 420$  нм?



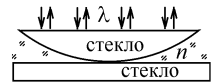
Ответ: 150 нм.

**32.6.** Плоско-выпуклая стеклянная линза с радиусом сферической поверхности  $R = 126$  см освещается падающей сверху нормально плоской световой волной с длиной волны  $\lambda = 560$  нм. Четвертое светлое кольцо Ньютона имеет радиус  $r_4 = 1,4$  мм. Определить показатель преломления  $n$  жидкости, находящейся между линзой и стеклянной опорой.



Ответ: 1,26.

**32.7.** Система колец Ньютона наблюдается в отраженном свете, падающем нормально на плоско-выпуклую тонкую стеклянную линзу с радиусом сферической поверхности  $R = 30$  см, лежащую на плоской стеклянной пластинке (показатель преломления стекла  $n_{\text{стекла}} = 1,5$ ). Промежуток между линзой и пластинкой залит жидкостью с показателем преломления  $n = 1,2$ . Найти длину волны падающего света (в нм), если разница радиусов четвертого светлого и четвертого темного колец Ньютона равна  $\Delta r = 50$  мкм.



Ответ: 599 нм

### 33. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка

Дифракционная решетка ширины  $L$ , на которую приходится  $N$  щелей, имеет постоянную  $d = L/N$  (это расстояние между соседними щелями). При нормальном падении на дифракционную решетку монохроматического света с длиной волны  $\lambda$  главные интерференционные максимумы (спектры  $m$ -го порядка) наблюдаются под углом  $\varphi$  к направлению падения света (рис.3.9), где  $d \sin \varphi = m\lambda$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

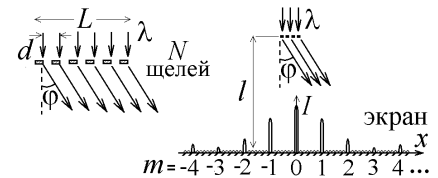


Рис.3.9

На удаленном на большое расстояние  $l$  экране видны очень узкие освещенные полосы (спектры  $m$ -го порядка) с координатами  $x_m = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .

Примеры решения задач:

**33.1.** Свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм падает нормально на дифракционную решетку, в которой на 1 см ширины приходится  $N = 3000$  штрихов. Сколько главных интерференционных максимумов можно наблюдать за решеткой?

Решение.

Из условия интерференционных максимумов  $\sin \varphi = m\lambda/d \leq 1$ , где  $d = L/N$ ,  $L = 1$  см, получим  $m \leq l/N\lambda = 5,56$ . Наибольшее целое число  $m_{\max} = 5$ . За решеткой наблюдается 11 главных интерференционных максимумов ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ , см. рис.3.9).

**33.2.** На дифракционную решетку из  $N = 400$  щелей с постоянной  $d = 4,2$  мкм падают нормально две плоские волны с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Два соседних главных интерференционных максимума света для света с длиной волны  $\lambda$  наблюдаются за решеткой под углами  $\alpha = \arcsin(1/5)$  и  $\beta = \arcsin(1/3)$ . Определить наименьшую возможную разность длин волн  $\Delta\lambda$ , при которой интерференционные максимумы двух волн можно увидеть за данной решеткой раздельно.



Решение.

Согласно критерию Рэлея, два пика интенсивности еще можно увидеть раздельно, если максимум одного из них совпадает с минимумом другого. При сложении  $N$  лучей (волн), приходящих от одинаковых щелей, между двумя соседними главными интерференционными максимумами на рис.1.9 возникает  $(N-1)$  минимум освещенности, удовлетворяющих условию  $d \sin \varphi = m'\lambda/N$ , где  $m'$  – целые числа, не равные  $0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$

На рис.3.10 в точке, выделенной на оси  $\sin \varphi$ , интерференционный максимум  $m$ -го порядка для света с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  совпадает с ближайшим интерференционным минимумом для света с длиной волны  $\lambda$ , что даёт условие  $d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$ . По критерию Рэлея две узкие линии, соответствующие волнам  $\lambda + \Delta\lambda$  и  $\lambda$  на экране видны раздельно, если  $\Delta\lambda \geq \lambda/(mN)$  (величина  $\lambda/\Delta\lambda = mN$  называется разрешающей способностью дифракционной решетки).

Наименьшее значение  $\Delta\lambda$ , удовлетворяющее критерию Рэлея, определяется в спектре наибольшего возможного порядка  $m_{\max}$ . Как и в предыдущей задаче,  $m_{\max} = d \sin \varphi / \lambda \leq d/\lambda$ . По условию задачи  $d \sin \alpha = d \cdot 1/5 = m\lambda$ ,  $d \sin \beta = d \cdot 1/3 = (m+1)\lambda$  (соседние интерференционные максимумы).

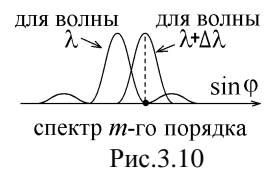


Рис.3.10

Исключая неизвестное число  $m$ , находим  $d/\lambda = 7,5$ , откуда  $m_{\max} = 7$ ,  $\lambda = 2d/15 = 560$  нм. Поэтому

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda/m_{\max}N = 0,2 \text{ нм}.$$

**33.3.** Плоская монохроматическая световая волна падает на дифракционную решетку под углом  $\alpha = 30^\circ$  к нормали. Сколько щелей приходится на один миллиметр ширины решетки, если за решеткой под углом  $\varphi = 2\alpha$  к нормали виден главный интерференционный максимум порядка  $m = 5$ ? Длина волны света  $\lambda = 450$  нм.

*Решение.*

Во всех точках волновой поверхности АВ падающей на решетку волны её фаза одинакова, как и во всех точках волновой поверхности CD преломленной волны. Поэтому, как видно из рис.3.11, разность хода двух лучей AD и BC от двух соседних щелей, распространяющихся в воздухе ( $n=1$ ), равна

$$\Delta = AD - BC = d \sin \varphi - d \sin \alpha.$$

По условию  $d = L/N$ , где  $L = 1$  мм. Из условия интерференционного максимума  $\Delta = m\lambda$  находим

$$N = \frac{L}{d} = \frac{L}{m\lambda} (\sin 2\alpha - \sin \alpha) \approx 163 \text{ щелей}.$$

**33.4.** Лучи оранжевого света с длиной волны  $\lambda_o = 600$  нм и синего света с длиной волны  $\lambda_c = 480$  нм падают на дифракционную решетку под углом  $\alpha = 30^\circ$  к нормали. Какое **наибольшее** число щелей (штрихов) на 3 мм ширины должна иметь решетка, чтобы главные максимумы синего и оранжевого цветов были видны за решеткой под одним и тем же углом  $\varphi = 30^\circ$ , как показано на рисунке?

*Решение.*

Из рис.3.12 видно, что разность хода между лучами 1 и 2, приходящими от соседних щелей решетки, равна  $\Delta = BC + CD = d \sin \alpha + d \sin \varphi = m_o \lambda_o = m_c \lambda_c$ , где  $m_o$  и  $m_c$  – целые числа. Наибольшее число щелей  $N$  будет при наименьшей возможной величине постоянной решетки  $d = L/N$ , где  $L = 3$  мм по условию. Подставляя величины  $\lambda_o$  и  $\lambda_c$ , получаем  $600 \cdot m_o = 480 \cdot m_c$  или  $5m_o = 4m_c$ . Наименьшие возможные целые числа, удовлетворяющие этому условию,  $m_o = 4$  и  $m_c = 5$ . Поэтому  $N_{\max} = \frac{L}{d_{\min}} = \frac{L}{m_o \min \lambda_o} (\sin \alpha + \sin \varphi) = 1250$  щелей.

**33.5.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на дифракционную решетку с постоянной  $d = 90$  мкм. За решеткой, параллельно её плоскости, установлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 120$  см, а в её фокальной плоскости – экран. Координата второго главного интерференционного максимума на экране равна  $x = 12$  мм (начало отсчета 0 оси  $x$  совпадает с фокусом линзы). Найти длину волны  $\lambda$  падающего света (в нм).

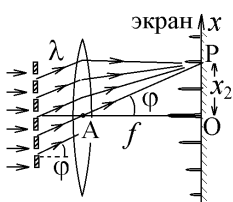


Рис.3.13

*Решение.*

Линза соберет в одной точке Р фокальной плоскости (экрана) все параллельные лучи, уходящие от каждой щели под углом  $\varphi$  к направлению падения волны. Угол  $\varphi$ , под которым виден главный интерференционный максимум 2-го порядка, находим из условия  $d \sin \varphi = 2 \cdot \lambda$ .

Так как луч, проходящий через центр линзы А, не преломляется, то из треугольника АОР на рис.3.13 видно, что  $x_2 = f \cdot \tan \varphi$ , откуда  $\tan \varphi = x_2/f = 0,01$ . Для такого малого угла  $\tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$  и

$$\text{мы получим } \lambda = \frac{d}{2} \sin \varphi \approx \frac{d}{2} \frac{x_2}{f} = 450 \text{ нм}.$$

**33.6.** Свет с длиной волны  $\lambda = 450$  нм падает нормально на дифракционную решетку с постоянной  $d = 60$  мкм. На очень большом удалении  $l = 9$  м за решеткой установлен экран (см. рисунок). Найти расстояние  $\Delta x$  между спектрами 4-го и 2-го порядка, видимыми с разных сторон от центра 0 экрана.

*Решение.*

Если  $m\lambda/d \ll 1$ , то угол  $\varphi$ , под которым наблюдается интерференционный макси-

**Совет:**

мум, мал, и можно принять  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \ll 1$ .

В данной задаче  $\lambda/d = 0,0075 \ll 1$ . Как видно из рисунка,  $\Delta x = l \cdot \tan \varphi_4 + l \cdot \tan \varphi_2 \approx l(\sin \varphi_4 + \sin \varphi_2)$ , где углы определяются условием главных интерференционных максимумов  $d \sin \varphi_m = m\lambda$ . Поэтому  $\Delta x = l(4 + 2)\lambda/d = 0,405$  м.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**33.7.** На дифракционную решетку падает нормально плоская монохроматическая световая волна с длиной  $\lambda$ . Два **соседних** главных интерференционных максимума света наблюдаются за решеткой под углами  $\alpha = \arcsin(0,6)$  и  $\beta = \arcsin(0,8)$  к направлению падения света (см.рисунок). Найти порядок главного максимума, наблюдаемого под углом  $\alpha$ .

*Ответ:  $m = 3$ .*

**33.8.** На дифракционную решетку падает нормально плоская монохроматическая световая волна. Ширина освещенного участка решетки, имеющего 800 щелей, равна 4,8 мм. Главные интерференционные макси-

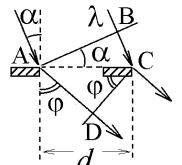
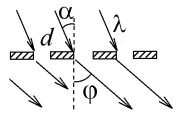


Рис.3.11

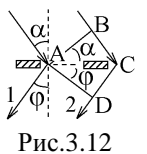
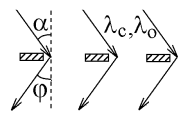
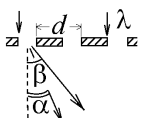
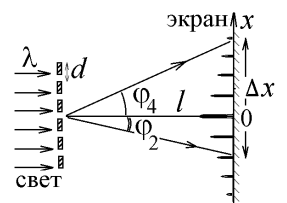
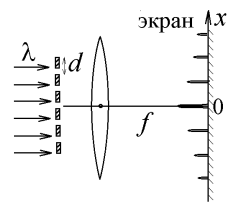


Рис.3.12



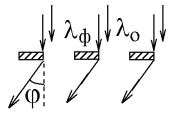


мумы порядка  $m$  и  $m-3$  наблюдаются за решеткой под углами  $\beta = 30^\circ$  и  $\alpha = \arcsin(0,25)$  соответственно. Найти длину волны  $\lambda$  света, падающего на решетку (в нм).

Ответ: 500 нм.

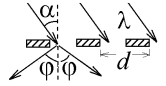
**33.9.** Лучи фиолетового и оранжевого света с длинами волн  $\lambda_{\text{ф}} = 450$  нм и  $\lambda_{\text{о}} = 600$  нм падают нормально на дифракционную решетку. Какое **наибольшее** число щелей (штрихов) должно приходиться на один сантиметр ширины решетки, чтобы главные интерференционные максимумы данных цветов наблюдались за решеткой под одним и тем же углом  $\phi = 30^\circ$  к направлению падающего света?

Ответ: 2778.



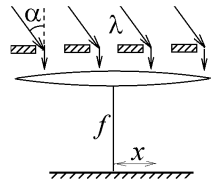
**33.10.** На дифракционную решетку с постоянной  $d = 6,6$  мкм под углом  $\alpha$  к нормали падает плоская монохроматическая волна с длиной  $\lambda = 600$  нм. За решеткой под одинаковыми углами  $\phi = 30^\circ$  к нормали наблюдаются главные интерференционные максимумы  $m$ -го и  $(m+1)$ -го порядков (см. рисунок). Найти величину  $m$ .

Ответ:  $m = 5$ .



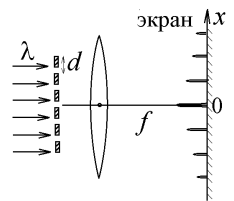
**33.11.** Монохроматическая плоская световая волна с  $\lambda = 480$  нм падает на дифракционную решетку с постоянной  $d = 80$  мкм под малым углом  $\alpha$ . За решеткой параллельно установлена тонкая собирающая линза, а в ее фокальной плоскости – экран. Найти величину фокусного расстояния  $f$  линзы, если известно, что лучи света, распространяющиеся перпендикулярно к линзе и к экрану (см. рисунок), образуют главный интерференционный максимум третьего порядка. При этом центральная полоса интерференционной картины (максимум нулевого порядка) наблюдается на экране на расстоянии  $x = 3,6$  мм.

Ответ: 20 см.



**33.12.** Плоская монохроматическая световая волна с  $\lambda = 640$  нм падает нормально на дифракционную решетку. За решеткой параллельно её плоскости установлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 1,5$  м, а в её фокальной плоскости – экран. Расстояние между спектрами 2-го и 4-го порядка с одной стороны от центра интерференционной картины на экране равно  $\Delta x = 2,4$  см (начало отсчета 0 оси  $x$  совпадает с фокусом линзы). Сколько штрихов приходится на 1 см ширины решетки?

Ответ: 125.



#### 34. Дифракция на круглом отверстии и на узкой щели

На узкую щель-прорезь ширины  $a$  в непрозрачной преграде падает нормально плоская монохроматическая световая волна. АВ – её волновая поверхность, все точки которой имеют одинаковую фазу (рис.3.14). Рассмотрим волну, распространяющуюся за щелью под углом  $\phi$ . Расстояние  $BC = a \sin \phi$  будет разностью хода между отклоненными лучами 1 и 2 (рис.3.14). Разобьем плоскость щели на узкие полосы – **зоны Френеля**, расстояния от противоположных границ которых до новой волновой поверхности АС равны  $\lambda/2$ , что соответствует сдвигу фаз  $\pi$ . Поэтому световые колебания от двух соседних зон Френеля приходят в противофазе и гасят друг друга. Если щель разбивается на четное число  $2m$  зон, то в этом направлении свет не распространяется: условие дифракционного минимума на щели:  $a \sin \phi = m\lambda$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .

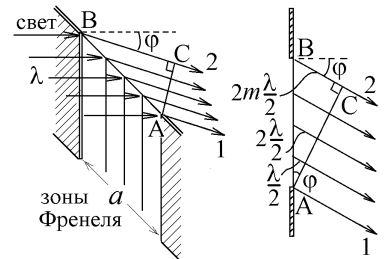


Рис.3.14

Примеры решения задач:

**34.1.** За непрозрачной преградой с прорезанной узкой щелью на большом удалении  $l = 9$  м установлен экран. На преграду нормально падает свет с длиной волны  $\lambda = 720$  нм. Найти ширину щели  $a$ , если она в четыре раза меньше ширины дифракционного изображения щели на экране.

Решение.

Распределение интенсивности света на экране, удаленном на большое расстояние  $l$ , показано на рис.1.15. Если  $\lambda/a \ll 1$ , то  $\tan \phi = \sin \phi$  и координаты дифракционных минимумов  $x_m = l \cdot \tan \phi = l \lambda m / a$ , где  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . В этом случае в центре дифракционной картины видна полоса шириной  $\Delta = x_1 - x_{-1} = 2l\lambda/a$ , которая называется **дифракционным изображением щели**.

По условию задачи  $\Delta = 2l\lambda/a = 4a$ , откуда  $a = \sqrt{l\lambda/2} = 1,8$  мм.

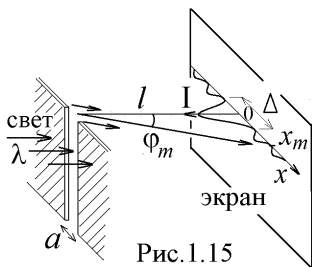
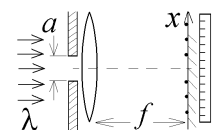


Рис.1.15

**34.2.** Монохроматический свет падает нормально на узкую щель ширины  $a = 0,8$  мм в непрозрачной преграде. За щелью установлена параллельная преграде тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 4$  м, а в ее фокальной плоскости – линейка. Координаты дифракционных минимумов, измеряемые по линейке равны 212 мм, 215 мм, 218 мм, 224 мм, 227 мм, 230 мм, .... Найти длину волны  $\lambda$  падающего света.

Решение.

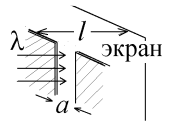
Как и в задаче 3.5, линза соберет лучи, уходящие за щелью под углом  $\phi$ , в одну точку экрана-линейки с координатой  $x = f \cdot \tan \phi$  (см. рис.1.13). Распределение интенсивности света показано на рис.1.15, дифракционная картина имеет вид яркой



центральной полосы шириной  $\Delta = 2f\lambda/a$ , а по её бокам – слабо освещенные полосы, имеющие вдвое меньшую ширину  $\Delta x = x_{m+1} - x_m = f\lambda/a$ .

Начало отсчета линейки смещено относительно центра этой картины, но из условия видно, что центральная полоса имеет ширину  $\Delta = 224\text{ мм} - 218\text{ мм} = 6\text{ мм}$ , а остальные интервалы равны 3 мм (боковые полосы). Отсюда  $\lambda = a\Delta/2f = 600\text{ нм}$ .

**34.3.** На узкую щель в непрозрачной преграде нормально падает монохроматический свет, длина волны  $\lambda$  которого в 1600 раз меньше ширины щели  $a$ . Найти расстояние от второго дифракционного минимума освещенности по одну сторону от центра дифракционной картины на экране, удаленном на расстояние  $l = 8\text{ м}$ , до третьего дифракционного минимума по другую сторону от этого центра.



*Решение.* Как видно из рис.3.15, это расстояние равно  $x_3 - x_2 = \frac{(3+2)l\lambda}{a} = 25\text{ мм}$ .

\*\*\*\*\*

В других задачах рассматривается дифракция света на круглом отверстии. Точечный источник света  $S$  находится на оси круглого отверстия, прорезанного в непрозрачной плоской преграде на удалении  $a$  (рис.3.16). По другую сторону преграды на удалении  $b$  находится экран. В задачах контрольной работы радиус отверстия настолько мал, что расстояние  $OB = h_m \ll a, b$ . Дифракция света рассматривается в центральной точке  $P$  экрана, находящейся на оси отверстия. Источник  $S$  создает сферическую волновую поверхность радиуса  $SB = a$ , которую разбивают на зоны Френеля – кольца, расстояния от противоположных границ которых до точки  $P$  отличаются на  $\lambda/2$ . Если отверстие открывает  $m$  зон Френеля, то расстояние от крайней точки открытых зон до точки наблюдения равно  $AP = b + m\lambda/2$  (рис.3.16). Радиус  $m$ -й зоны Френеля  $OA = r_m$  будет общим катетом двух прямоугольных треугольников  $SAO$  и  $AOP$ , в которых  $SO = a - h_m$ ,  $OP = b + h_m$ . Тогда  $OA^2 = SA^2 - SB^2 = AP^2 - OP^2$  (теорема Пифагора).

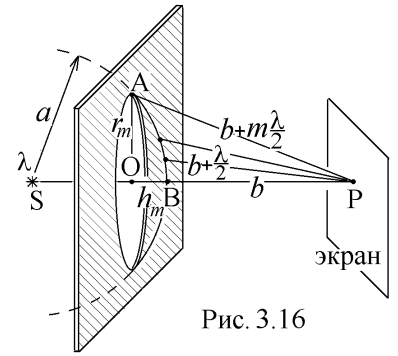


Рис. 3.16

Подставим величины этих отрезков, указанные на рис.3.16:  $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2$ .

Раскроем скобки в правом равенстве:  $2(a + b)h_m = bm\lambda + (m\lambda/2)^2$ . Последним слагаемым можно пренебречь, так как для видимого света  $\lambda \ll r, a, b$ . Подставив найденный отрезок  $h_m = bm\lambda/2(a + b)$  в левое равенство, снова пренебрежем малой величиной  $h_m^2 \sim \lambda^2$ . Получаем

$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$  - радиус  $m$ -й зоны Френеля при дифракции света от точечного источника.

Если источник света очень удален ( $a \rightarrow \infty$ ), то на отверстие падает плоская световая волна (рис.3.17). В этом случае

$r_m = \sqrt{bm\lambda}$  - радиус  $m$ -й зоны Френеля при дифракции плоской световой волны, где  $m = 1, 2, 3, \dots$ .

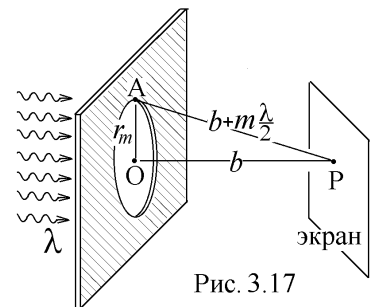


Рис. 3.17

Чтобы определить интенсивность света в точке  $P$  экрана, используют спираль Френеля (рис.1.18). Проходя расстояние  $\lambda/2$ , световая волна увеличивает фазу на  $\pi$ , т.е. её вектор  $\vec{E}$  поворачивается на  $180^\circ$ . Поэтому вклады двух соседних зон Френеля почти полностью компенсируют друг друга. Цифрами на рис.1.18 обозначены границы зон Френеля. Чтобы определить суммарный вектор  $\vec{E}$  волн, приходящих от всех открытых участков отверстия в точку  $P$ , надо соединить на спирали начало и конец открытых зон Френеля (на рис.3.18 вклады закрытых зон обозначены пунктиром, вектор  $\vec{E}_{1,5}$  соответствует 1,5 зонам Френеля, открытых отверстием). Если открыты все зоны (преграды нет), спираль сходится в центральную точку, что дает вектор  $\vec{E}_0$  падающей плоской волны.

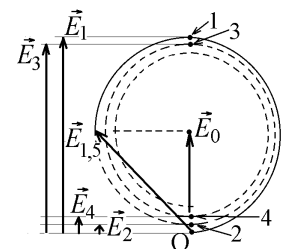
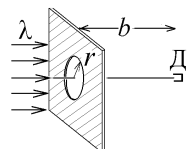


Рис.3.18

Дифракционный максимум освещенности в центральной точке  $P$  экрана наблюдается, если отверстие открывает **нечетное число** зон Френеля, причем наибольшая освещенность получится, если открыта одна зона Френеля ( $E_1 = \max$  на рис.3.18).

Дифракционный минимум в точке  $P$  окажется, если открыто **четное число** зон Френеля, причем наименьшая освещенность будет при двух открытых зонах Френеля ( $E_2 = \min$  на рис.3.18).

**34.4.** Плоская монохроматическая электромагнитная волна падает нормально на плоскую бесконечную преграду, в которой вырезано круглое отверстие радиуса  $r = 4\text{ мм}$ . На его оси за преградой на удалении  $b = 50\text{ см}$  стоит детектор  $D$ . При какой **наибольшей** длине волны  $\lambda$  излучения детектор его не фиксирует?



*Решение.*

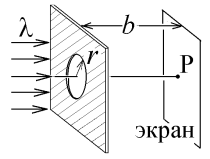
В месте нахождения детектора должен оказаться дифракционный минимум, т.е. отверстие должно

открыть четное число зон Френеля:  $r_{\text{отверстия}} = \sqrt{b \cdot 2m\lambda}$ . Наибольшее значение  $\lambda$  соответствует наименьшему четному числу  $2m=2$ , откуда  $\lambda = r^2/2b = 16$  мкм. Условие  $\lambda \ll r$  выполнено.

**34.5.** Свет с длиной волны  $\lambda = 500$  нм падает нормально на непрозрачную ширму с прорезанным отверстием радиуса  $r = 1,5$  мм. За ширмой на удалении  $b = 3$  м установлен экран. Во сколько раз уменьшится освещенность центральной точки Р экрана (см. рисунок), если ширму убрать?

*Решение.*

Определим, сколько зон Френеля открывает отверстие:  $r = r_m = \sqrt{bm\lambda}$ , откуда  $m = r^2/b\lambda = 1,5$ . Световой вектор  $\vec{E}_{1,5}$ , соответствующий полутора открытым зонам, показан на рис.1.18. Если ширму убрать, то будут открыты все зоны Френеля, создавая в точке Р волну, величина светового вектора которой  $E_0 = E_{1,5} \cos 45^\circ$  (рис.1.18). Так как освещенность  $I \sim E^2$ , то она уменьшится в  $E_{1,5}^2/E_0^2 = \cos^{-2} 45^\circ = 2$  раза.



**34.6.** В плоской преграде прорезано круглое отверстие радиуса  $r = 1$  мм. На его оси находятся точечный монохроматический источник света S и точка наблюдения Р на экране. При расстоянии от источника S до преграды  $a = 4$  м, отверстие открывало для точки наблюдения Р две зоны Френеля. Если расстояние  $a$  уменьшить в 4 раза, то отверстие будет открывать три зоны Френеля. Найти длину волны света, испускаемого источником.

*Решение.*

По условию задачи вначале радиус отверстия был равен радиусу второй зоны Френеля, а затем стал равен радиусу третьей зоны:  $r_{\text{отверстия}} = r_2 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \cdot 2\lambda = r'_3 = \sqrt{\frac{a'b}{a'+b}} \cdot 3\lambda$ , где  $a' = \frac{a}{4}$ . Правое равенство дает  $\frac{2a}{a+b} = \frac{3a'}{a'+b}$ , откуда

$$b = \frac{aa'}{2a - 3a'} = \frac{a}{5} = 0,8 \text{ м.}$$

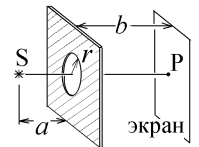
Подставляя  $b$  в левое равенство, находим  $\lambda = r^2(a+b)/2ab = 750$  нм.

**34.7.** Точечный источник света S с длиной волны  $\lambda = 600$  нм находится на оси отверстия радиуса  $r = 1$  мм, прорезанного в плоской преграде, удаленной на расстояние  $a = 0,3$  м (см. рисунок). При каком **наибольшем** расстоянии  $b$  от преграды до экрана в центре Р дифракционной картины наблюдается минимум освещенности?

*Решение.*

Отверстие должно открывать четное число зон Френеля (условие дифракционного минимума), т.е.  $r = r_{2m} = \sqrt{ab \cdot 2m\lambda / (a+b)}$ . Отсюда находим  $b = r^2 a / (a \cdot 2m\lambda - r^2)$ . Наибольшую величину  $b$  получим при наименьшем возможном четном числе  $2m$ . Но знаменатель должен быть положительным, откуда  $2m > r^2/a\lambda = 5,55$ .

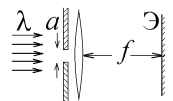
Т.е.  $2m_{\min} = 6$  и  $b_{\max} = r^2 a / (6a\lambda - r^2) = 3,75$  м.



*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

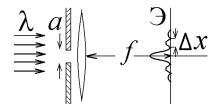
**34.8.** Плоская световая волна с  $\lambda = 480$  нм падает нормально на узкую щель ширины  $a = 1,6$  мм в непрозрачной преграде. За щелью установлена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 2$  м, оптическая ось которой перпендикулярна к преграде (см. рисунок). В фокальной плоскости линзы размещен экран "Э". Найти ширину дифракционного изображения щели на экране.

*Ответ:* 1,2 мм.



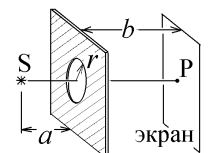
**34.9.** За щелью ширины  $a = 0,4$  мм, сделанной в непрозрачной плоской преграде, установлена тонкая собирающая линза, а в ее фокальной плоскости – экран "Э". Чему равно фокусное расстояние  $f$  линзы, если при нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 600$  нм наименьшее расстояние между соседними минимумами освещенности на экране  $\Delta x = 3,6$  мм?

*Ответ:* 2,4 м.



**34.10.** Точечный источник света S с длиной волны  $\lambda = 560$  нм находится на оси круглого отверстия, прорезанного в плоской непрозрачной преграде, удаленной на расстояние  $a$ . Отверстие открывает три зоны Френеля для центральной точки Р экрана, стоящего за преградой на расстоянии  $b$  (см. рисунок). Условия опыта изменили, уменьшив и расстояние  $a$ , и расстояние  $b$  в 2 раза, а также взяв другой точечный источник света. При этом отверстие будет открывать для точки наблюдения Р семь зон Френеля. Чему равна длина волны  $\lambda'$  нового источника света?

*Ответ:* 480 нм.

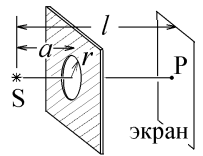


**34.11.** В опыте с дифракцией монохроматического света, расстояние от плоской ширмы с прорезанным отверстием до точечного источника света, находящегося на оси отверстия, равно  $a = 90$  см (рис.3.16). Отверстие открывает ровно две зоны Френеля для центральной точки Р дифракционной картины на экране, находящемся на расстоянии  $b = 30$  см за ширмой. На какое расстояние  $\Delta a$  надо придвинуть источник света к ширме, чтобы отверстие открывало три зоны Френеля для точки Р?

*Ответ:* на 60 см.

**34.12.** Расстояние от точечного монохроматического источника света  $S$  до экрана равно  $SP = l = 2$  м. Линия  $SP$  совпадает с осью круглого отверстия радиуса  $r = 0,3$  мм в плоской непрозрачной преграде (см. рисунок). На каком расстоянии  $a$  от источника света  $S$  надо установить эту преграду, чтобы освещенность в точке  $P$  экрана стала **наибольшей из всех возможных**? Длина волны света  $\lambda = 500$  нм.

Ответ: 1,8 м или 0,2 м.



### 35. Поляризованный свет

**Естественный** свет испускается отдельными атомами в виде коротких цугов (рис.3.19), в которых векторы  $\vec{E}$  совершают колебания во всех возможных направлениях, перпендикулярных скорости  $\vec{v}$  электромагнитной волны.



Рис.3.19

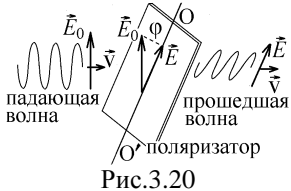


Рис.3.20

Пленка или пластинка поляризатора пропускает волну, в которой вектор  $\vec{E}$  колеблется в одной плоскости вдоль оси пропускания поляризатора  $OO'$  (рис.3.20). Это – **плоскополяризованный свет**.

Если на поляризатор падает плоскополяризованная волна, вектор  $\vec{E}_0$  которой направлен под углом  $\phi$  к оси пропускания  $OO'$ , то через поляризатор проходит волна с вектором  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \phi$  (рис.3.20). Интенсивность света  $I \sim \vec{E}^2$ , что приводит к **закону Малюса**:  $I = I_0 \cos^2 \phi$ , где  $I_0$  –

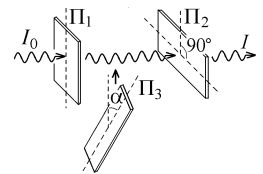
интенсивность падающего плоскополяризованного света,  $I$  – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через поляризатор,  $\phi$  – угол между плоскостями поляризации (рис.3.20).

При падении естественного света через поляризатор проходит свет вдвое меньшей интенсивности  $I_{\text{прош}} = I_{\text{ест}}/2$ .

*Примеры решения задач:*

**35.1.** Естественный свет с интенсивностью  $I_0 = 16$  Вт/м<sup>2</sup> проходит через систему из двух поляризаторов, чьи плоскости перпендикулярны к направлению распространения светового луча, а оси пропускания  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  повернуты на угол  $90^\circ$ . Если между ними поместить третий поляризатор, ось пропускания  $\Pi_3$  которого образует угол  $\alpha$  с осью  $\Pi_1$ , то интенсивность вышедшего из данной системы света станет равной  $I = 2$  Вт/м<sup>2</sup>. Чему равна величина угла  $\alpha$ ?

*Решение.*



Без поляризатора  $\Pi_3$  свет не может пройти через систему двух скрещенных под углом  $\phi = 90^\circ$  поляризаторов:  $I = (I_0/2) \cdot \cos^2 90^\circ = 0$ .

Поместим поляризатор  $\Pi_3$ . После первого поляризатора  $\Pi_1$  интенсивность естественного света уменьшится вдвое:  $I_1 = I_0/2$ . После поляризатора  $\Pi_3$ , в соответствии с законом Малюса,  $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$ . Вышедший из  $\Pi_3$  свет поляризован в плоскости, составляющей угол  $90^\circ - \alpha$  с осью пропускания последнего поляризатора  $\Pi_2$  (рис.3.21), из которого выйдет свет с интенсивностью  $I_3 = I_2 \cos^2 (90^\circ - \alpha) = I_2 \sin^2 \alpha = I$ .

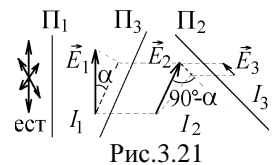
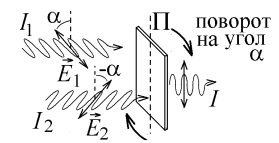


Рис.3.21

В результате  $I = (I_0/2) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = I_0 \sin^2 (2\alpha)/8$  и  $\sin(2\alpha) = \sqrt{8I/I_0} = 1$ , откуда  $2\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 45^\circ$ .

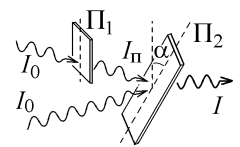
**35.2.** Через поляризатор с осью пропускания  $\Pi$  одновременно проходят два некогерентных луча плоскополяризованного света. В первом луче с интенсивностью  $I_1 = 2$  Вт/м<sup>2</sup> световой вектор  $\vec{E}_1$  совершает колебания в плоскости, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с осью  $\Pi$ . Во втором луче с интенсивностью  $I_2 = 4$  Вт/м<sup>2</sup> плоскость колебаний  $\vec{E}_2$  образует с осью  $\Pi$  угол  $-\alpha$ . Поляризатор повернули на тот же угол  $\alpha$  (см. рисунок). Во сколько раз изменилась интенсивность  $I$  света, прошедшего через поляризатор?



*Решение.*

Интенсивности некогерентного света складываются. Вначале по закону Малюса  $I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 (-\alpha) = (I_1 + I_2) \cdot \cos^2 30^\circ = (I_1 + I_2) \cdot 3/4 = 4,5$  Вт/м<sup>2</sup>. После поворота ось поляризатора совпадет с плоскостью поляризации второго луча  $I_2$  и составит угол  $2\alpha$  с плоскостью поляризации первого луча  $I_1$ . Интенсивность прошедшего света будет равна  $I' = I_1 \cos^2 2\alpha + I_2 \cos^2 0^\circ = I_2 + I_1 \cdot 1/4 = 4,5$  Вт/м<sup>2</sup>. Она не изменится.

**35.3.** Один луч естественного света с интенсивностью  $I_0 = 8$  Вт/м<sup>2</sup> непосредственно падает на поляризатор  $\Pi_2$ , а второй луч естественного света с той же интенсивностью  $I_0$  предварительно проходит через поляризатор  $\Pi_1$ . Чему равна интенсивность  $I$  света, вышедшего из данной системы, если угол между осями пропускания поляризаторов равен  $\alpha = 30^\circ$ ? Чему равна степень поляризации света, падающего на поляризатор  $\Pi_2$ ?



*Решение.*

Частично поляризованный свет с интенсивностью  $I_{\Pi}$  будет смесью естественного света с интенсивностью  $I_1 = I_0$  и плоскополяризованного света с интенсивностью  $I_2 = I_0/2$ , прошедшего через поляризатор  $\Pi_1$ . Чтобы определить **степень**

его поляризации  $P$ , на пути луча ставят поляризатор и вращают его ось на угол  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$  (рис.3.22). При этом интенсивность прошедшего света меняется в пределах

$$I_{\min} \leq I \leq I_{\max}. \text{ Степень поляризации равна } P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \times 100\%. \text{ При любом положе-}$$

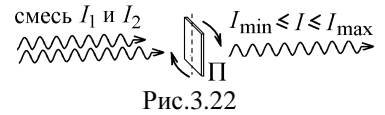


Рис.3.22

нии поляризатора  $\Pi$  на рис.3.22 естественный свет будет ослаблен в 2 раза. Поэтому  $I_{\max} = I_2 + I_1/2 = I_0$  (при некоторой ориентации оси пропускания  $\Pi$  проходит весь плоскополяризованный свет), и  $I_{\min} = 0 + I_1/2 = I_0/2$  (плоскополяризованный свет не проходит). Находим  $P = (I_0 - I_0/2)/(I_0 + I_0/2) \times 100\% = 33,3\%$ .

Через второй поляризатор  $\Pi_2$ , если учесть закон Малюса, пройдет свет с интенсивностью  $I = \frac{I_1}{2} + I_2 \cos^2 \alpha = \frac{7}{8} I_0 = 7 \text{ Вт/м}^2$ .

\*\*\*\*\*

Плоскополяризованный свет получается также при отражении падающего естественного света (луч “1” на рис.3.23) от плоской границы диэлектрика, если свет падает на эту границу под углом Брюстера  $\alpha_B$ . При этом угол падения и угол преломления связаны соотношением  $\alpha_B + \beta = 90^\circ$ . Из закона преломления находим  $\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \frac{n_2}{n_1}$ . Отраженный луч “2” будет плоскополяризован (вектор  $\vec{E}$  в нем колеблется в плоскости, перпендикулярной плоскости падения). Преломленный луч “3” частично поляризован.

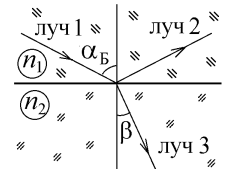
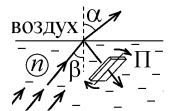


Рис.3.23

**35.4.** Параллельный пучок естественного света падает из жидкости на плоскую границу с воздухом. Преломленный луч выходит в воздух под углом  $\alpha = 60^\circ$  к нормали (см. рисунок). При некоторой ориентации оси пропускания поляризатора  $\Pi$ , поставленного на пути отраженного луча, поляризатор не пропустит свет. Чему равен показатель преломления  $n$  жидкости?



*Решение.*

Если в условии сказано, что поляризатор не пропускает падающий свет, то этот свет плоскополяризован.



Поэтому угол падения  $\beta$  луча должен быть углом Брюстера (отраженный к поляризатору свет будет плоско-

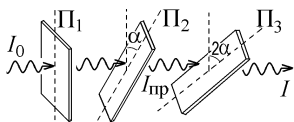
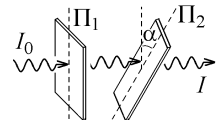
поляризованным). Для угла Брюстера  $\tan \beta_B = \frac{n_{\text{воздуха}}}{n_{\text{жидкости}}} = \frac{1}{n}$ . А так как  $\beta_B + \alpha = 90^\circ$ , то  $\tan \beta_B = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ . Отсю-

да  $n = \sqrt{3} = 1,73$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**35.5.** Естественный свет с интенсивностью  $I_0$  проходит через систему из двух поляризаторов, у которых оси пропускания  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  повернуты на угол  $\alpha = 15^\circ$ . Чему равна при этом интенсивность  $I$  света, вышедшего из системы? Если угол  $\alpha$  между осями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  увеличить в 2 раза то интенсивность света, вышедшего из системы окажется равной  $I' = 4 \text{ Вт/м}^2$ .

*Ответ:*  $4,976 \text{ Вт/м}^2$ .

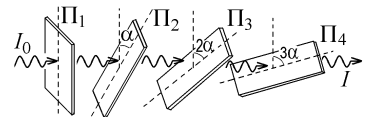


**35.6.** Естественный свет с интенсивностью  $I_0$  проходит через систему из трёх поляризаторов, оси пропускания которых повернуты на углы  $\alpha$  и  $2\alpha$  (см. рисунок). Из последнего поляризатора  $\Pi_3$  выходит свет с интенсивностью  $I = 2 \text{ Вт/м}^2$ , а после поляризатора  $\Pi_2$  интенсивность света равна  $I_{\text{пр}} = 3 \text{ Вт/м}^2$ . Найти интенсивность  $I_0$  падающего света.

*Ответ:*  $9 \text{ Вт/м}^2$ .

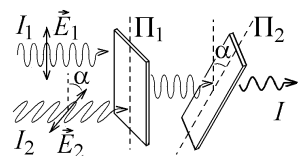
**35.7.** Естественный свет с интенсивностью  $I_0$  проходит через систему из четырёх поляризаторов, чьи оси пропускания  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$  последовательно повернуты относительно оси  $\Pi_1$  на углы  $\alpha = 30^\circ$ ,  $2\alpha$  и  $3\alpha$  (см. рисунок). Из системы выходит свет с интенсивностью  $I = 0,81 \text{ Вт/м}^2$ . Чему равна интенсивность  $I_0$  падающего света?

*Ответ:*  $3,84 \text{ Вт/м}^2$ .



**35.8.** Через систему из двух поляризаторов одновременно проходят два луча плоскополяризованного света. Оси пропускания  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  этих поляризаторов повернуты на угол  $\alpha$  друг относительно друга. В первом луче с интенсивностью  $I_1 = 6 \text{ Вт/м}^2$  световой вектор  $\vec{E}_1$  совершает колебания вдоль оси  $\Pi_1$  первого поляризатора, а во втором луче с интенсивностью  $I_2 = 4 \text{ Вт/м}^2$  световой вектор  $\vec{E}_2$  колеблется вдоль оси  $\Pi_2$  второго поляризатора (см. рисунок). Результирующая интенсивность света, прошедшего через систему поляризаторов, равна  $I = 4 \text{ Вт/м}^2$ . Чему равна величина угла  $\alpha$ ?

*Ответ:*  $45^\circ$ .



**35.9.** Свет является смесью естественного света с интенсивностью  $I_1 = 12 \text{ Вт/м}^2$  и плоскополяризованного света с интенсивностью  $I_2$ . Степень поляризации  $P$  этого света, которая равна  $P = 40\%$ . Чему равна интенсивность  $I_2$  плоскополяризованного света?

*Ответ:*  $8 \text{ Вт/м}^2$ .

**35.10.** Луч естественного света падает из воздуха на плоскую поверхность стекла. При этом угол преломления в 2 раза меньше угла падения, а поляризатор, установленный на пути отраженного от стекла луча, при некоторой ориентации его оси не пропускает свет. Чему равен показатель преломления стекла?

*Ответ:*  $1,73$ .

**35.11.** На пути светового луча, отраженного от стеклянной пластинки с показателем преломления  $n = 2$ , ставят поляризатор. Поворотом оси его пропускания можно добиться полного исчезновения прошедшего через поляризатор света. Найти синус угла преломления луча из воздуха в стекло.

Ответ: 0,447.

### 36. Законы теплового излучения

Нагретые до температуры  $T$  тела испускают с поверхности тепловое излучение – электромагнитные волны со всеми длинами  $\lambda$ . При некоторых условиях энергия электромагнитного излучения, испущенная с единицы поверхности нагретого тела за единицу времени (энергетическая светимость), выражается формулой  $R_3 = A\sigma T^4$  [Дж/с·м<sup>2</sup>], где  $A$  – коэффициент поглощения ( $A \leq 1$ ),  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Дж/с·м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup> – постоянная Стефана-Больцмана. Среды, для которых  $A = 1$  называются абсолютно черным телом.

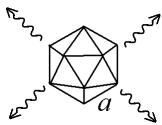
Энергия, испускаемая со всей поверхности нагретого тела за время  $\Delta t$ , равна  $W = R_3 S \Delta t = A\sigma T^4 S \Delta t$ , где  $S$  – площадь поверхности.

Эта энергия неравномерно уносится волнами с разной длиной волны  $\lambda$ . Максимум излучения приходится на длину волны  $\lambda_m$  (рис.3.24), которая определяется законом смещения Вина  $\lambda_m T = b$ , где  $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$  м·К – постоянная Вина.



Рис.3.24

Примеры решения задач:



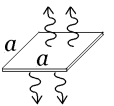
**36.1.** Икосаэдр – правильный многогранник, имеющий двадцать одинаковых граней в виде равносторонних треугольников – изготовлен из материала, который можно считать абсолютно черным телом. Температура икосаэдра поддерживается постоянной и равной 227°С. Чему равна величина ребра  $a$  икосаэдра, если каждый час он излучает в окружающий вакуум тепловую энергию  $W = 4$  МДж?

Решение.

Площадь поверхности данного тела равна площади 20 равносторонних треугольников со стороной  $a$ :  $S = 20S_{\Delta}$ , где  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ . Тогда  $W = \sigma T^4 \cdot 20S_{\Delta} \cdot \Delta t$ , откуда  $a = \sqrt{W / (5\sqrt{3}\sigma T^4 \Delta t)} = 0,19$  м.

При вычислениях не забывайте переводить все заданные в условии величины в систему СИ:  $T = 500$  К,  $\Delta t = 3600$  с,  $W = 4 \cdot 10^6$  Дж.

**36.2.** Тонкая квадратная пластинка находится в вакууме и была нагрета до температуры  $T = 1000$  К. Верхнюю плоскость пластинки нагрели до температуры  $T_1 = 1050$  К. До какой температуры  $T_2$  надо нагреть нижнюю плоскость пластинки, чтобы мощность испускаемого всей пластинкой теплового излучения увеличилась в полтора раза?

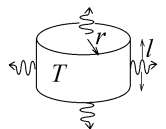


Решение.

Первоначально вся пластинка с площадью поверхности  $S = 2a^2$  была нагрета одинаково и за время  $\Delta t$  излучала энергию  $W_0 = A\sigma T^4 \cdot 2a^2 \Delta t$  (мощность теплового излучения  $P = W/\Delta t$ ). Затем её верхняя и нижняя плоскости с площадью  $a^2$  нагреты по-разному и излучают энергию  $W_1 + W_2 = A\sigma T_1^4 \cdot a^2 \Delta t + A\sigma T_2^4 \cdot a^2 \Delta t$ . По условию  $(W_1 + W_2)/W_0 = 1,5$ , откуда  $T_2 = \sqrt[4]{3T_1^4 - T_1^4} = 1156$  К.

При вычислениях учтите, что  $T^4 = (T^2)^2$ ,  $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$ .

**36.3.** Цилиндр длиной  $l = 20$  см излучает как тело с коэффициентом поглощения  $A = 0,6$ . Радиус цилиндра  $r = 20$  см, а его температура поддерживается постоянной. За какое время  $\Delta t$  цилиндр испустит тепловую энергию  $W = 4$  МДж, если максимум его спектральной излучательной способности приходится на длину волны  $\lambda_m = 1,61$  мкм?



Решение.

Площадь поверхности цилиндра складывается из площади двух его оснований и площади боковой поверхности:  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl$ . Так как  $l = r$ , то  $S = 4\pi r^2$ . Температуру цилиндра можно вычислить с помощью закона смещения Вина:  $T = b/\lambda_m = 1800$  К. Время излучения находим по известной величине испущенной энергии  $\Delta t = W / (A\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2) = 22,3$  с.

**36.4.** Постоянный ток  $I = 0,3$  А протекает по прямому тонкому длинному проводнику, имеющему вид половины тонкого цилиндра, разрезанного по диаметру, равному  $d = 1,2$  мм, и нагревает его до температуры  $t^\circ = 727^\circ\text{С}$ . Найти длину  $l$  этого проводника, если его материал имеет коэффициент поглощения  $A = 0,7$ , а сопротивление проводника при данной температуре равно  $R = 6$  кОм.



Решение.

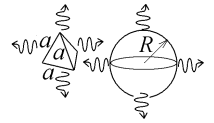
Протекающий ток  $I$  приводит к выделению джоулевого тепла, нагревающего проводник до температуры  $T$ . При этой температуре устанавливается тепловое равновесие: все выделившееся тепло излучается через боковую поверхность

проводника  $S_{\text{бок}} = dl + \pi dl/2$  (площадь оснований  $\pi d^2/8$  мала, т.к. по условию  $d \ll l$ , и можно считать, что излучение идет через боковую поверхность тонкого провода). Из уравнения баланса тепловой энергии

$$Q_{\text{джоул}} = I^2 R \Delta t = W_{\text{изл}} = A \sigma T^4 S_{\text{бок}} \Delta t \quad \text{находим } l = \frac{I^2 R}{A \sigma T^4 (1 + \pi/2) d} = 4,41 \text{ м.}$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**36.5.** Правильный тетраэдр и шар изготовлены из материала, который можно считать абсолютно черным телом. Рёбра тетраэдра  $a$  равны радиусу шара. Температура тетраэдра в два раза больше температуры шара. Во сколько раз мощность теплового излучения, испускаемого тетраэдром больше тепловой мощности, испускаемой шаром?



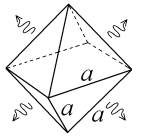
*Ответ:* в 2,205 раз.

**36.6.** Находящийся в вакууме шар был нагрет до температуры  $T$ . Половину шара нагрели в два раза ( $T_2 = 2T$ ), а половину охладили в два раза ( $T_2 = T/2$ ). Во сколько раз увеличилась мощность теплового излучения, испускаемого шаром?



*Ответ:* увеличилась в 8,031 раз.

**36.7.** В вакууме находится правильный октаэдр, имеющий восемь одинаковых граней в виде равнобедренных треугольников со стороной  $a = 20$  см. Этот многогранник, который можно считать абсолютно черным телом, каждую минуту излучает энергию  $W = 30$  кДж (его температура при этом поддерживается постоянной). Найти длину волны (в мкм), на которую приходится максимум спектральной излучательной способности данного тела.

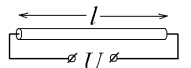


*Ответ:* 5,77 мкм

**36.8.** Ток  $I = 2$  А течет по прямой проволоке длины  $l = 2$  м, имеющей сопротивление  $R = 1$  кОм. Температура проволоки  $T = 2000$  К поддерживается постоянной за счёт теплового излучения через её боковую поверхность. Материал проволоки имеет коэффициент поглощения  $A = 0,4$ . Найти радиус проволоки.

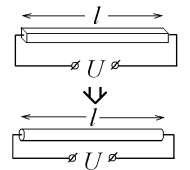
*Ответ:* 0,877 мм.

**36.9.** Найти величину постоянного напряжения  $U$ , приложенного к длинной и очень тонкой прямой проволоке диаметра  $d = 0,5$  мм и длины  $l = 2$  м. Температура проволоки, по которой непрерывно течет ток, равна  $t^\circ = 927^\circ\text{C}$ , а сопротивление проволоки при данной температуре  $R = 1,2$  кОм. Коэффициент поглощения материала проволоки  $A = 0,6$ .



*Ответ:* 515,7 В.

**36.10.** Длинный тонкий прямой проводник с квадратным поперечным сечением  $2 \times 2$  мм<sup>2</sup> подключен к источнику постоянного напряжения  $U$ . Проводник деформировали, не меняя длины  $l$  так, что его поперечное сечение стало круглым, но не изменило своей величины. Как изменилась равновесная температура проводника, если его сопротивление возросло в 1,01 раз?



*Ответ:* увеличилась в 1,028 раз.

## 37. Фотоэффект. Эффект Комптона

С точки зрения квантовой теории электромагнитное излучение образовано потоком фотонов.



Используйте соответствующее условиям задачи выражение для энергии фотона  $E_\phi$ . Её можно записать через частоту  $\nu$ , длину волны  $\lambda$  или импульс  $p_\phi$  фотона:  $E_\phi = h\nu = hc/\lambda = cp_\phi$ , где  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная

Планка,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света.

Если **вся** энергия падающего на металл фотона передается электрону, находящемуся внутри (рис.3.25), то часть этой энергии расходуется на работу выхода  $A_{\text{вых}}$  (это минимальная энергия, необходимая электрону для преодоления двойного электрического слоя на поверхности металла и вылету из металла). Такой электрон вылетает с максимальной возможной скоростью  $v_{\text{max}}$  и выполняется закон сохранения энергии (уравнение Эйнштейна для фотоэффекта):

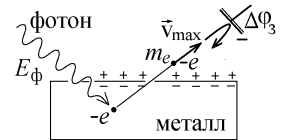


Рис.3.25

$$E_\phi = h\nu = A_{\text{вых}} + m_e v_{\text{max}}^2 / 2, \quad \text{где } m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг - масса электрона (величина его заряда } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл).}$$



Так как энергия одной микрочастицы очень мала, то её выражают в электрон-вольтах: 1 эВ – это энергия, которую приобретает электрон, ускоряясь разностью потенциалов в 1 вольт. Поэтому  $1 \text{ эВ} = e \cdot \Delta\phi = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

Учитывайте это соотношение при вычислениях!

При уменьшении энергии падающего фотона уменьшается скорость выбитого электрона. Когда она станет равной нулю, фотоэффект прекращается. Это – красная граница фотоэффекта: фотоэффект возникает (или прекращается) при минимальной частоте падающего фотона  $\nu_K = A_{\text{вых}}/h$  или при максимальной длине волны  $\lambda_K = hc/A_{\text{вых}}$ .

Выведшие из металла электроны можно остановить, если приложить отрицательную задерживающую разность потенциалов  $\Delta\phi_z$  (задерживающее напряжение) (рис.3.25). Кинетическая энергия вылетевшего электрона полностью расхо-

дуются на работу по преодолению задерживающего электрического поля:  $A = \boxed{e \cdot \Delta\phi_3 = m_e v_{\max}^2 / 2}$ .

*Примеры решения задач:*

**37.1.** При уменьшении частоты падающих на металл фотонов от значения  $\nu_1 = 8 \cdot 10^{14}$  Гц до значения  $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$  Гц максимальная величина скорости выбиваемого из металла электрона уменьшается в два раза. Чему равна работа выхода электрона из данного металла (в эВ)?

*Решение.*

Если в условии задано отношение каких-либо величин, то следует получить это отношение с помощью уравнений процесса. Это значительно упрощает математические преобразования.



Поэтому находим отношения левых и правых частей уравнений фотоэффекта для двух разных частот, кото-

рые имеют вид  $E_{\phi 1} = h\nu_1 = A_{\text{вых}} + m_e v_1^2 / 2$  и  $E_{\phi 2} = h\nu_2 = A_{\text{вых}} + m_e v_2^2 / 2$ . Отсюда  $\frac{h\nu_1 - A_{\text{вых}}}{h\nu_2 - A_{\text{вых}}} = \frac{m_e v_1^2 / 2}{m_e v_2^2 / 2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = 4$

(по условию), что дает  $A_{\text{вых}} = h(4\nu_2 - \nu_1) / 3 = 1,768 \cdot 10^{-19}$  Дж = 1,105 эВ.

**37.2.** Работа выхода электрона из первого металла  $A_1 = 4$  эВ. Найти работу выхода  $A_2$  из второго металла, если при падении на оба металла фотонов с одинаковой длиной волны наибольшая скорость вылета электронов из второго металла в  $k = 1,1$  раз больше, чем из первого, а при увеличении длины волны падающих фотонов в четыре раза фотоэффект на первом металле прекращается.

*Решение.*

Запишем уравнения фотоэффекта для фотонов с одной длиной волны  $\lambda$ , выбивающих электроны из двух разных металлов:  $E_{\phi} = hc/\lambda = A_1 + m_e v_1^2 / 2$ ,  $E_{\phi} = hc/\lambda = A_2 + m_e v_2^2 / 2$ .

Прекращение фотоэффекта в первом металле соответствует красной границе при длине волны  $\lambda_k = 4\lambda = hc/A_1$ , откуда  $hc/\lambda = 4A_1$ . Как и в предыдущей задаче удобно найти заданное в условии отношение

$$\frac{m_e v_2^2 / 2}{m_e v_1^2 / 2} = \frac{hc/\lambda - A_2}{hc/\lambda - A_1} = \frac{4A_1 - A_2}{4A_1 - A_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = k^2, \text{ откуда } A_2 = A_1(4 - 3k^2) = 1,48 \text{ эВ}.$$

**37.3.** Выбиваемые из металла фотонами ультрафиолетового излучения с длиной волны  $\lambda = 100$  нм электроны полностью задерживаются электрическим полем с разностью потенциалов  $\Delta\phi = 10$  В. При какой длине волны падающих фотонов (в нм) фотоэффект на этом металле прекращается?

*Решение.*

Условия этой задачи изображены на рис.3.25. Фотоэффект прекращается при длине волны  $\lambda_k$  фотона, соответствующей красной границе, при которой  $A_{\text{вых}} = hc/\lambda_k$ . Кинетическая энергия выбитого электрона затрачивается на совершение работы над силами задерживающего электрического поля:  $m_e v^2 / 2 = e \cdot \Delta\phi$ . Подставляя эти соотношения в уравнение фотоэффекта,  $E_{\phi} = hc/\lambda = A_{\text{вых}} + m_e v^2 / 2 = hc/\lambda_k + e\Delta\phi$ , находим  $\lambda_k = \frac{\lambda}{1 - e\Delta\phi\lambda/hc} = 512$  нм.

Другое явление, указывающее на корпускулярный характер света – эффект Комптона: если фотон с длиной волны  $\lambda$  падает на покоящуюся частицу с массой  $m$ , то рассеянный (отклонившийся на угол  $\theta$ ) фотон имеет большую длину волны  $\lambda'$  (рис.3.26), где

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)}.$$

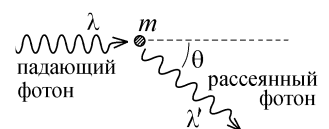


Рис.3.26

Величина  $\Lambda = h/mc$  называется комптоновской длиной волны частицы с массой  $m$ . Угол

рассеяния может меняться в пределах  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  (в задачах контрольной работы частица покоится, хотя формулу эффекта Комптона можно получить и при рассеянии на движущейся частице).

*Примеры решения задач:*

**37.4.** Фотон с длиной волны  $\lambda = 2$  нм испытывает рассеяние на угол  $\theta = 60^\circ$  на покоящейся частице. Определить её массу, если энергия фотона уменьшилась в  $k = 1,0004$  раз.

*Решение.*

Так как энергия фотона  $E = hc/\lambda$ , то при уменьшении энергии рассеянного фотона в  $k$  раз его длина волны увеличилась в  $k$  раз:  $\lambda' = k\lambda$ . Из уравнения Комптона  $\lambda' - \lambda = (k - 1)\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos 60^\circ) = \frac{h}{2mc}$  находим  $m = h / (2c(k - 1)\lambda) = 1,38 \cdot 10^{-30}$  кг.

**37.5.** Фотон с энергией  $E = 9$  МэВ испытывает комптоновское рассеяние, налетая на покоящуюся частицу с массой  $m = 5 \cdot 10^{-30}$  кг и отклоняясь на угол  $\theta = 30^\circ$  (см.рис.1.33). Во сколько раз уменьшится энергия фотона после рассеяния?

*Решение.*

Необходимо найти отношение  $k = E/E'$ . Выражая длины волн через энергии фотонов и подставляя  $E' = E/k$ , при-



водим уравнение Комптона к виду  $\lambda' - \lambda = \frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = (k-1) \frac{hc}{E} = \frac{h}{mc} (1 - \cos 30^\circ)$ . Отсюда  $k = 1 + \frac{E}{mc^2} (1 - \cos 30^\circ) = 1,43$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**37.6.** Найти работу выхода (в эВ) для металла, из которого фотоны с импульсами  $p = 4 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с выбивают электроны, вылетающие с максимальной скоростью  $v = 9 \cdot 10^5$  м/с.

*Ответ:* 5,20 эВ.

**37.7.** Максимальная кинетическая энергия электронов, выбиваемых фотонами с частотой  $\nu_1 = 6 \cdot 10^{15}$  Гц из металла с работой выхода  $A = 4$  эВ, в 3 раза больше максимальной кинетической энергии электронов, выбиваемых из того же металла фотонами с другой частотой  $\nu_2$ . Чему равна частота  $\nu_2$ ?

*Ответ:*  $2,64 \cdot 10^{15}$  Гц.

**37.8.** Фотоны с импульсами  $p_1 = 3 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с и с импульсами  $p_2$  выбивают электроны из металла с работой выхода  $A = 3$  эВ. В первом случае максимальная кинетическая энергия выбитых электронов в 4 раза меньше, чем во втором. Найти отношение импульсов  $p_2/p_1$ .

*Ответ:* 2,4.

**37.9.** Максимальная скорость вылета электронов, выбиваемых из металла с работой выхода  $A = 4$  эВ фотонами с энергией  $E_1$  в  $n = 2,5$  раза меньше максимальной скорости вылета электронов, выбиваемых из того же металла фотонами с другой энергией  $E_2 = 36$  эВ. Чему равна энергия фотона  $E_1$ ?

*Ответ:* 9,12 эВ.

**37.10.** Фотоны с энергией 3,9 эВ выбивали из металла с работой выхода 2,6 эВ электроны. Длину волны фотонов уменьшили в 6 раз. Во сколько раз увеличилась максимальная скорость выбиваемых электронов?

*Ответ:* в 4 раза.

**37.11.** Падая на металл, фотоны с длиной волны  $\lambda$  выбивали электроны, вылетающие с максимальной скоростью  $v_{\max} = 2000$  км/с. При увеличении длины волны падающих фотонов в 3 раза фотоэффект прекратится. Чему была равна первоначальная длина волны  $\lambda$  фотонов?

*Ответ:* 72,8 нм.

**37.12.** Фотоэффект на металле начинается при величине длины волны падающих фотонов  $\lambda_0 = 240$  нм. Чему равна величина задерживающей разности потенциалов внешнего электрического поля для электронов, выбитых из металла излучением с частотой  $\nu = 6 \cdot 10^{15}$  Гц?

*Ответ:* 19,7 В.

**37.13.** Фотон с частотой  $\nu_1 = 4 \cdot 10^{17}$  Гц испытывает комптоновское рассеяние на угол  $\theta = 120^\circ$  на покоящейся частице, превращаясь в фотон с частотой  $\nu_2 = 3,6 \cdot 10^{17}$  Гц. Найти комптоновскую длину волны данной частицы (в нм).

*Ответ:* 0,0556 нм.

**37.14.** При комптоновском рассеянии на угол  $\theta_1 = 60^\circ$  на покоящейся микрочастице, фотон увеличивает длину волны на  $\Delta_1 \lambda = 2 \cdot 10^{-13}$  м. На какой угол  $\theta_2$  должен рассеяться этот фотон на той же микрочастице, чтобы длина его волны изменилась на величину  $\Delta_2 \lambda = 5 \cdot 10^{-13}$  м?

*Ответ:* на угол  $104,5^\circ$ .

## 38. Волна де Бройля. Постулат Бора и боровские орбиты

Микрочастица с массой  $m$  и с импульсом  $\vec{p} = m\vec{v}$ , обладает свойствами волны с длиной  $\lambda_B = 2\pi\hbar/mv$  (волна де Бройля). Постоянная  $\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж·с также называется постоянной Планка.

*Примеры решения задач:*

**38.1.** Чему равен заряд  $q$  микрочастицы с массой  $m = 4,5 \cdot 10^{-27}$  кг, если после прохождения ускоряющей разности потенциалов  $\Delta\phi = 40$  В она имеет длину волны де Бройля  $\lambda_B = 2,21 \cdot 10^{-13}$  м?

*Решение.*

Ускоряясь в электрическом поле, частица приобретает кинетическую энергию  $E_{\text{кин}} = mv^2/2 = q\Delta\phi$ . Импульс частицы связан с этой энергией:  $p = mv = \sqrt{2mE_{\text{кин}}}$ . Длина волны де Бройля частицы  $\lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{кин}}}} = \frac{h}{\sqrt{2mq\Delta\phi}}$  и

$$q = \frac{1}{2m\Delta\phi} \left( \frac{h}{\lambda_B} \right)^2 = 2,5 \cdot 10^{-17} \text{ Кл.}$$



В рассматриваемых задачах можно использовать связь кинетической энергии нерелятивистской частицы с её длиной волны де Бройля:  $E_{\text{кин}} = h^2/2m\lambda_B^2$ .

**38.2.** Кинетическая энергия нерелятивистского электрона с длиной волны де Бройля  $\lambda_B = 0,3$  нм в 3 раза больше энергии некоторого фотона. Найти длину волны этого фотона (в нм).

*Решение.*

По условию  $E_{\text{кин}} \text{ частицы} = h^2/2m\lambda_B^2 = 3E_{\text{фотона}} = 3hc/\lambda_{\text{фотона}}$ . Отсюда  $\lambda_{\text{фотона}} = 6\pi\lambda_B^2/h \approx 222$  нм.

**38.3.** Фотоны с длиной волны  $\lambda = 66,3$  нм производят фотоэффект на металле с работой выхода электрона  $A = 6$  эВ. Найти наименьшую возможную длину волны де Бройля выбитых из металла электронов?

*Решение.*

Вспомним уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (рис.1.25):  $E_{\text{фотона}} = hc/\lambda = A + E_{\text{кин}}$ , откуда

$E_{\text{кин}} = h^2/2m\lambda_B^2 = hc/\lambda - A$ . Максимальная скорость вылетевших электронов соответствует наименьшему значению длины волны де Бройля  $\lambda_B = h/\sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} = 0,344$  нм.

**38.4.** Фотон с длиной волны  $\lambda = 10$  нм падает на металл с величиной красной границы фотоэффекта  $\lambda_{\text{кр}} = 100$  нм. Найти наименьшую возможную длину волны де Бройля  $\lambda_B$  нерелятивистского электрона, который данный фотон может при этом выбить из металла.

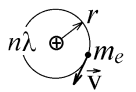
*Решение.*

Так как красная граница фотоэффекта определяется величиной работы выхода электрона из металла,  $\lambda_{\text{кр}} = hc/A_{\text{вых}}$ ,

то из уравнения фотоэффекта  $E_{\text{фотона}} = \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}} + \frac{h^2}{2m_e\lambda_B^2}$  находим  $\lambda_B = \sqrt{h/2m_e c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}} \right)} = 0,116$  нм.

\*\*\*\*\*

Волновые свойства электрона позволяют вычислить радиус  $r$  его устойчивой атомной орбиты в полуклассической модели атома Бора: на длине круговой орбиты укладывается целое число длин волн де Бройля  $2\pi r = n\lambda_B$ , откуда после подстановки  $\lambda_B$  следует **квантовый постулат Бора**  $m_e v r = n\hbar$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$



*Замечание:* записанный в таком виде постулат Бора описывает полуклассическую модель одноэлектронного атома и не соответствует точным результатам квантовой теории. Однако с его помощью можно рассчитать почти правильные значения энергии электрона в атоме.



Чтобы в любой задаче найти выражения для радиуса  $r_n$  орбиты с номером  $n$ , скорости  $v_n$  и энергии  $E_n$  электрона на этой орбите, решите систему из классического уравнения движения и квантового постулата Бора.

Пусть электрон движется по орбите с номером  $n$  со скоростью  $v_n$  (рис.3.27) и с центростремительным ускорением  $a_n = v_n^2/r_n$ . Со стороны атомного ядра, в котором находятся  $Z$  протонов с общим зарядом  $+Ze$ , действует кулоновская сила, позволяющая записать классическое уравнение движения электрона:  $m_e a_n = F_{\text{кул}}$  или  $m_e \frac{v_n^2}{r_n} = k \frac{e \cdot Ze}{r_n^2}$ , где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}}$ . Подставляя  $v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}$ , полученное из постулата

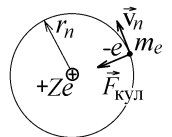


Рис.3.27

Бора, находим  $r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kZe^2 m_e}$  - это **радиус  $n$ -й боровской орбиты**, который удобно выразить через радиус первой боровской орбиты:  $r_n = n^2 r_1$ , где  $r_1 = 5,291 \cdot 10^{-11} / Z$  м.

Видно, что скорость электрона уменьшается с ростом радиуса орбиты:  $v_n = n\hbar/m_e r_n = kZe^2/n\hbar$  или  $v_n = v_1/n$ .

Энергия находящегося на  $n$ -й орбите электрона складывается из кинетической и потенциальной энергии:

$E_n = \frac{m_e v_n^2}{2} - k \frac{Ze^2}{r_n}$ . Подставляя  $r_n$  и  $v_n$  имеем  $E_n = -\frac{k^2 Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2}$  или  $E_n = E_1/n^2$ , где  $E_1 = -13,6 \cdot Z^2$  эВ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

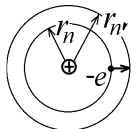
*Примеры решения задач:*

**38.5.** В боровском одноэлектронном атоме электрон переходит с одной орбиты на другую. Скорость движения электрона по боровской орбите при этом уменьшается в 1,2 раза. Во сколько раз увеличивается радиус боровской орбиты?

*Решение.*

Электрон переходит с орбиты с номером  $n$  на орбиту с номером  $n'$ . Из полученного выше выражения

$\frac{v_n}{v_{n'}} = \frac{n'}{n} = 1,2 = \frac{6}{5}$ . Поэтому  $\frac{r_{n'}}{r_n} = \frac{n'^2}{n^2} = (1,2)^2 = 1,44$ .



**38.6.** Одноэлектронный водородоподобный атом (ион) имеет  $Z = 5$  протонов в ядре. Чему равна величина момента импульса  $L$  электрона, движущегося по боровской орбите с радиусом  $r = 0,04247$  нм?

*Решение.*

Момент импульса электрона на боровской орбите с номером  $n$  имеет величину  $L_n = m_e v_n \cdot r_n = n\hbar$  (постулат Бора).

Неизвестный номер орбиты можно найти, зная её радиус  $r = r_n = n^2 \hbar^2 / (kZe^2 m_e)$ . Отсюда

$L_n = n\hbar = \sqrt{kZe^2 m_e r} = 2,11 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

**38.7.** Электрон движется по орбите радиуса  $r = 0,09555$  нм со скоростью  $v = 3640$  км/с в одноэлектронном атоме (ионе). Во сколько раз величина заряда ядра этого иона больше величины заряда электрона?

*Решение.*

Неизвестный номер орбиты  $n$  находим с помощью квантового постулата Бора:  $n = m_e v \cdot r / \hbar = 3$ , где  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Отношение заряда ядра к заряду электрона равно числу  $Z$  протонов в ядре (см. рис.3.27). Это число можно вычислить, зная, например величину скорости электрона:  $v = kZe^2 / n\hbar$ , откуда  $Z = v \cdot n\hbar / kZe^2 = 5$ .

**38.8.** В некотором одноэлектронном ионе электрон движется по орбите радиуса  $r = 0,11944$  нм, имея при этом энергию  $E = -24,112$  эВ. Определить номер  $n$  этой орбиты.

*Решение.*

Кроме номера  $n$  неизвестен заряд  $Ze$  ядра, который можно найти, если перемножить полученные ранее выражения для энергии электрона и радиуса орбиты:  $E_n \cdot r_n = -\frac{k^2 Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2} \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{kZe^2 m_e} = -\frac{kZe^2}{2}$ . Отсюда  $Z = -\frac{2Er}{ke^2} = 4$  и

$$n = \sqrt{\frac{kZe^2 m_e r}{\hbar^2}} = \frac{r}{\hbar} \sqrt{-2m_e E} = 3 \quad (\text{в системе СИ } E = -3,8579 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}).$$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**38.9.** Нерелятивистский электрон имел кинетическую энергию  $E_k = 36$  эВ. Величина этой энергии увеличилась на  $\Delta E_k = 64$  эВ. Во сколько раз изменилась при этом длина волны де Бройля электрона?

*Ответ:* уменьшилась в 1,667 раз.

**38.10.** Покоившаяся частица с зарядом  $q = 1,3 \cdot 10^{-16}$  Кл начинает ускоряться в постоянном электрическом поле. Чему равна величина напряженности  $E$  этого поля, если спустя промежуток времени  $t = 3$  с после начала ускорения длина волны де Бройля частицы станет равной  $\lambda_B = 4 \cdot 10^{-20}$  м?

*Ответ:* 42,5 В/м.

**38.11.** Фотоны с импульсом  $p = 4 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с выбивают из металла электроны, наименьшая возможная длина волны де Бройля которых равна  $\lambda_B = 0,51$  нм. Чему равна величина работы выхода  $A$  электрона из этого металла (в эВ)?

*Ответ:* 1,70 эВ.

**38.12.** Падающие на металл фотоны выбивают электроны, имеющие наименьшую длину волны де Бройля  $\lambda_B = 0,4$  нм. Найти частоту  $\nu$  таких фотонов. Известно, что увеличение длины волны падающих фотонов в 4 раза приводит к прекращению фотоэффекта.

*Ответ:*  $3,03 \cdot 10^{15}$  Гц.

**38.13.** При внутреннем фотоэффекте фотон с энергией  $E_\phi = 8$  эВ падает на атом с энергией ионизации  $E_{\text{ион}} = 5$  эВ. Найти длину волны де Бройля электрона, который при этом может вылететь из атома.

*Ответ:* 0,709 нм.

**38.14.** Электрон перешел со второй на четвертую боровскую орбиту атома водорода. На какую величину изменилась его длина волны де Бройля (радиус первой боровской орбиты равен  $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  м)?

*Ответ:* увеличилась на 0,665 нм.

**38.15.** Электрон в одноэлектронном ионе находится на боровской орбите с радиусом  $r_n = 0,07963$  нм. Заряд ядра иона равен  $+6e$ . Чему равен номер  $n$  данной орбиты?

*Ответ:* 3.

**38.16.** В боровском одноэлектронном атоме электрон переходит с одной боровской орбиты на другую, радиус которой в 36/25 раз меньше радиуса первой орбиты. Во сколько раз при этом уменьшится величина момента импульса электрона?

*Ответ:* в 1,2 раза.

**38.17.** Длина волны де Бройля свободного электрона, движущегося со скоростью  $v = 1,941 \cdot 10^6$  м/с, в полтора раза больше длины волны де Бройля электрона, находящегося на третьей боровской орбите одноэлектронного атома (иона). Чему равно число  $Z$  протонов в ядре иона?

*Ответ:* 4.

### 39. Спектральные серии излучения одноэлектронного атома

Решение стационарного уравнения Шредингера для электрона в кулоновском электрическом поле ядра с зарядом  $+Ze$  дает те же значения разрешенных значений энергии (энергетических уровней), что и постулат Бора:

$$E_n = -\frac{k^2 Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2 n^2} \quad \text{или} \quad E_n = E_1 / n^2, \quad \text{где } E_1 = -13,6 \cdot Z^2 \text{ эВ}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots - \text{главное}$$

квантовое число.

Переход электрона с уровня на уровень сопровождается излучением или поглощением фотона с энергией  $E_\phi = \hbar\omega$ . Излучение при переходах со всех вышележащих уровней на уровень  $n = 1$  образует спектральную серию Лаймана, при переходах на уровень  $n = 2$  – спектральную серию Бальмера, при переходах на уровень  $n = 3$  – спектральную серию Пашена (рис.3.28).

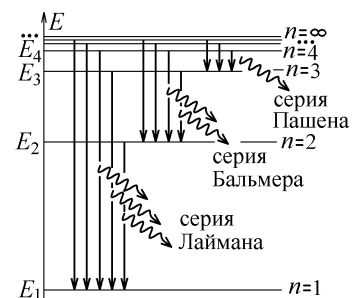


Рис.3.28

В боровской модели одноэлектронного атома эти уровни соответствуют боровским орбитам (рис.3.29).

При переходе с энергетического уровня с номером  $n'$  на уровень с номером  $n$  (или при переходе с  $n'$ -й боровской орбиты на  $n$ -ю) испускается фотон с циклической частотой

$$\omega_{n' \rightarrow n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

или с длиной волны 
$$\lambda_{n' \rightarrow n} = \frac{2\pi c}{\omega_{n' \rightarrow n}} = \frac{2\pi c \hbar}{E_{n'} - E_n} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left/ \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \right.$$

Например, спектральная серия Лаймана образована длинами волн

$$\lambda_{n' \rightarrow 1} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left/ \left( 1 - \frac{1}{n'^2} \right) \right., \text{ где } n' = 2, 3, 4, \dots, \infty.$$

Примеры решения задач:

**39.1.** Электрон в атоме водорода перешел со 2-й на 4-ю боровскую орбиту, поглотив фотон с циклической частотой  $\omega_1$ , а затем совершил второй переход, испустив фотон с циклической частотой  $\omega_2$ , соответствующий спектральной линии в серии Лаймана. Найти отношение частот  $\omega_2/\omega_1$ .

Решение.

Изобразите условия задачи на диаграмме энергетических уровней, аналогичной рис.1.36. Это позволит лучше понять, как испускаются и поглощаются фотоны, и что требуется найти.

Для данной задачи такая диаграмма изображена на рис.3.30. Видно, что  $\omega_1 = (E_4 - E_2)/\hbar$ ,  $\omega_2 = (E_4 - E_1)/\hbar$  (линия серии Лаймана).

Отсюда, подставив  $E_n = -|E_1|/n^2$ , находим  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{E_4 - E_1}{E_4 - E_2} = \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) / \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 5$ .

**39.2.** Электрон в атоме водорода перешел с 1-й на 5-ю боровскую орбиту, а потом совершил второй переход, испустив фотон с **минимальной возможной** частотой и оказавшись в возбужденном состоянии. Фотон с каким импульсом  $p_\phi$ , соответствующим спектральной серии Бальмера, испускает затем такой возбужденный атом?

Решение.

Диаграмма переходов электрона между энергетическими уровнями, заданных в условии, показана на рис.3.31. Минимальная частота фотона, испускаемого электроном, соответствует переходу с 5-го на 4-й уровень  $\omega_{\min} = (E_5 - E_4)/\hbar$  (максимальная частота соответствует переходу  $5 \rightarrow 1$ ). Последний переход электрон совершает с 4-го на 2-й уровень (серия Бальмера), испуская фотон с импульсом

$$p_\phi = \frac{E_\phi}{c} = \frac{E_4 - E_2}{c} = \frac{|E_1|}{c} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = \frac{3|E_1|}{16c}. \text{ Подставляя } |E_1| = 13,6 \text{ эВ} = 2,176 \cdot 10^{-18} \text{ Дж и } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с, на-}$$

ходим  $p_\phi = 1,36 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

**39.3.** Электрон в атоме водорода перешел с 1-й на 6-ю боровскую орбиту, а потом совершил второй переход, испустив фотон с **максимальной возможной** длиной волны  $\lambda_1$ . Затем электрон совершает третий переход, соответствующий спектральной серии Пашена, и при этом испускает второй фотон с длиной волны  $\lambda_2$ . Найти разность длин волн испущенных фотонов  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  (в нм).

Решение.

Заданные в условии задачи переходы электрона показаны на рис.3.32. Максимальная длина волн

фотона  $\lambda_1 = \frac{2\pi c \hbar}{E_6 - E_5} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left/ \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) \right.$  соответствует переходу  $6 \rightarrow 5$ , при котором изменение энергии минимально. При последнем переходе  $5 \rightarrow 3$  на третью боровскую орбиту (серия Пашена) испускается фотон с длиной волны  $\lambda_2 = \frac{2\pi c \hbar}{E_5 - E_3} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left/ \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) \right.$ . После подстановки величин  $|E_1|$ ,  $c$  и  $\hbar$ , нахо-

дим  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 6186 \text{ нм}$ .

**39.4.** При переходе с  $n$ -й боровской орбиты на третью боровскую орбиту электрон в атоме водорода испускает фотон с циклической частотой  $\omega_1 = 1,46809 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Найти циклическую частоту  $\omega_2$  фотона, испущенного электроном при переходе с  $n$ -й боровской орбиты на четвертую боровскую орбиту.

Решение.

При переходах  $n \rightarrow 3$  и  $n \rightarrow 4$  испускаются фотоны с частотами  $\omega_1 = \frac{E_n - E_3}{\hbar} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  и

$\omega_2 = \frac{E_n - E_4}{\hbar} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  соответственно. Исключив из этих уравнений неизвестную величину  $1/n^2$ , получим



Рис.3.29

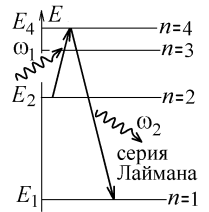


Рис.3.30

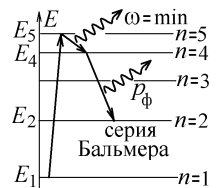


Рис.3.31



Рис.3.32

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{9} \right) = 4,645 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**39.5.** Электрон в атоме водорода перешел с 1-й на 6-ю боровскую орбиту, а затем, испустив фотон с **минимальной возможной** частотой, оказался в возбужденном состоянии. Фотон с какой циклической частотой  $\omega$ , соответствующей спектральной серии Лаймана, испускает затем такой возбужденный атом?

Ответ:  $1,982 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ .

**39.6.** Электрон в атоме водорода перешел с 1-й на 5-ю боровскую орбиту, а потом совершил второй переход, испустив фотон с **максимальной возможной** длиной волны  $\lambda_1$ . Затем электрон совершает третий переход, испуская второй фотон с длиной волны  $\lambda_2$ , соответствующий спектральной серии Бальмера. Найти отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  длин волн испущенных фотонов.

Ответ: 8,333.

**39.7.** Электрон в атоме водорода перешел с 4-й на 6-ю боровскую орбиту, поглотив фотон с длиной волны  $\lambda_1$ , а затем совершил второй переход, испустив фотон с **минимальной возможной** величиной длины волны  $\lambda_2$ . Найти отношение длин волн  $\lambda_1/\lambda_2$ .

Ответ: 28.

**39.8.** Электрон в атоме водорода переходит с 1-й на 3-ю боровскую орбиту. Затем он может совершить новый переход на орбиту с меньшим радиусом, испустив при этом фотон или с наибольшей  $p_1$ , или с наименьшей  $p_2$  возможной величиной импульса. Найти разность величин импульсов этих фотонов  $\Delta p = p_1 - p_2$ .

Ответ:  $5,44 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

**39.9.** Электрон в атоме водорода перешел с 3-й на 5-ю боровскую орбиту, поглотив фотон с длиной волны  $\lambda_1$ , а затем совершил второй переход, испустив фотон с **максимальным возможным** значением длины волны  $\lambda_2$ . Найти разность длин волн этих фотонов  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ .

Ответ: 2774 нм.

**39.10.** Электрон в возбужденном атоме водорода переходит с шестой на  $n$ -ю боровскую орбиту и при этом испускает фотон с длиной волны  $\lambda = 2629,534 \text{ нм}$ . Найти номер  $n$  последней орбиты.

Ответ: 4.

#### 40. Вероятностный смысл и нормировка волновой функции

В квантовой теории состояние микрочастицы, совершающей одномерное движение вдоль оси  $x$ , описывается волновой функцией  $\Psi(x)$ . Её физический смысл – величина  $dP = |\Psi(x)|^2 dx = \Psi^*(x)\Psi(x)dx$  будет вероятностью того, что частица находится в интервале от  $x$  до  $x+dx$ .

Поэтому волновая функция обязана удовлетворять условию нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ .

Величина  $dP/dx = |\Psi(x)|^2 = \Psi^*(x)\Psi(x)$  называется плотностью вероятности обнаружения частицы.

При движении частицы в атоме рассматривают задачи, в которых волновая функция зависит от расстояния  $r$  до его центра. В этом случае  $dP = |\Psi(r)|^2 dV$  – вероятность обнаружения частицы в заштрихованном на рис.3.33 объёме  $dV = 4\pi r^2 dr$  на расстоянии от  $r$  до  $r+dr$  до центра атома.

Функция плотности вероятности обнаружения частицы на этом расстоянии имеет вид

$$dP/dr = |\Psi(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 = \Psi^*(r)\Psi(r)4\pi r^2,$$

а условие нормировки волновой функции  $\int_0^{+\infty} |\Psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = 1$ .

Примеры решения задач:

**40.1.** Частица находится в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечными стенками ширины  $2a$ . Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = C \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ , где  $C = \sqrt{6} \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3/2}$ . Найти ширину ямы.



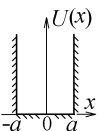
Решение.

В задачах на эту тему для определения неизвестных констант используйте условие нормировки волновой функции.

Вне ямы  $\Psi = 0$ . Подставляя заданную в условии волновую функцию в условие нормировки  $\int_{-a}^{+a} \Psi^2(x) dx = 1$ , вычисляем интеграл  $C^2 \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = C^2 \left( a^2 \int_{-a}^{+a} dx - \int_{-a}^{+a} x^2 dx \right) = 4C^2 a^3 / 3 = 1$ , откуда  $a^3 = 3 / 4C^2 = (1/8) \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$  и  $2a = 10^{-10} \text{ м} = 0,1 \text{ нм}$ .



Рис.3.33



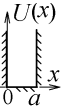
**40.2.** Состояние микрочастицы описывается сферически симметричной волновой функцией  $\psi = A \cdot \frac{\exp(-\alpha r)}{r}$ , где

$\alpha = 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Чему равна постоянная  $A$  (в  $\text{м}^{-1/2}$ )?

*Решение.*

В данной задаче состояние частицы определено в трехмерном пространстве, и условие нормировки волновой функции имеет вид  $\int_0^\infty \Psi^2(r) 4\pi r^2 dr = 1 = 4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha r} dr = 4\pi A^2 \left( e^{-2\alpha r} / (-2\alpha) \right) \Big|_0^\infty = 4\pi A^2 / 2\alpha$ . Отсюда  $A = \sqrt{\alpha/2\pi} = 3,99 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1/2}$ .

**40.3.** Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечными стенками ширины  $a$ . Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = C \cdot x(a-x)$ . Вычислите вероятность нахождения частицы в интервале с координатами  $0 \leq x \leq a/4$ .



*Решение.*

Вначале из условия нормировки надо определить неизвестную постоянную  $C$ :  $\int_0^a \Psi^2(x) dx = C^2 \int_0^a x^2(a-x)^2 dx = 1$ .

Раскрывая скобки и вычисляя простые интегралы, находим  $C^2 \left( a^2 \int_0^a x^2 dx - 2a \int_0^a x^3 dx + \int_0^a x^4 dx \right) = C^2 a^5 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) = C^2 a^5 / 30 = 1$ .

Это равная 1 (или 100%) вероятность обнаружения частицы в яме, откуда частица вылететь не может, так как плотность вероятности её обнаружения вне ямы  $|\Psi_{\text{вне}}|^2 = 0$ . Отсюда  $C = \sqrt{30/a^5}$ .

Вероятность обнаружения частицы в заданном интервале (левой четверти ямы) определяется аналогичным интегралом:

$$P = \int_0^{a/4} \Psi^2(x) dx = C^2 \left( a^2 \int_0^{a/4} x^2 dx - 2a \int_0^{a/4} x^3 dx + \int_0^{a/4} x^4 dx \right) = \frac{53C^2 a^5}{15360}. \text{ Подставив } C, \text{ имеем } P = \frac{53}{512} = 0,1035 \text{ (10,35\%).}$$

**40.4.** Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = C \cdot \frac{\exp(-\gamma r)}{r}$ , где  $C = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$ ,  $\gamma = 10^9 \text{ м}^{-1}$ . Известно, что вероятность обнаружения частицы в сферическом объеме с координатами  $0 \leq r \leq a$  равна 25%. Чему равна величина  $a$  (в нм)?

*Решение.*

В сферически симметричной задаче вероятность обнаружения частицы в заданной области  $\int_0^a |\Psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = 0,25$  (по условию). Подставляя волновую функцию и заданную  $C$ , вычисляем интеграл:

$$\int_0^a \frac{C^2}{r^2} e^{-2\gamma r} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi C^2 \int_0^a e^{-2\gamma r} dr = 4\pi C^2 \frac{1 - e^{-2\gamma a}}{2\gamma} = 1 - e^{-2\gamma a} = \frac{1}{4}. \text{ Отсюда } e^{-2\gamma a} = 3/4 \text{ и } a = -\ln(3/4)/(2\gamma) = 0,144 \text{ нм}.$$

**40.5.** Состояние частицы описывается сферически симметричной волновой функцией  $\psi = A \cdot \frac{\exp(-\alpha r)}{\sqrt{r}}$ , где

$A = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}$ ,  $\alpha = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$ . Чему равна максимальная величина плотности вероятности  $dP/dr$  обнаружения частицы?

*Решение.*

Функция плотности вероятности обнаружения частицы имеет вид  $dP/dr = |\Psi(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi A^2 r \cdot \exp(-2\alpha r) = 4\alpha^2 r \cdot \exp(-2\alpha r)$ .

В точке максимума должна быть равна нулю её производная:  $\frac{d}{dr} (4\alpha^2 r \cdot \exp(-2\alpha r)) = 4\alpha^2 (e^{-2\alpha r} - 2\alpha r e^{-2\alpha r}) = 0$ , откуда  $r = \frac{1}{2\alpha}$  (на таком удалении от центра  $r = 0$  вероятность обнаружить частицу максимальна). Подставляя это значение в функцию  $dP/dr$ , находим  $(dP/dr)_{\text{max}} = 2\alpha \exp(-1) = 3,68 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

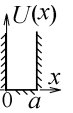
**40.6.** Состояние микрочастицы, совершающей одномерное движение, описывается волновой функцией  $\Psi = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ A\sqrt{x} \cdot \exp(-\alpha x) & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$  где  $A = 2\alpha$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$ . Чему равна координата  $x$  точки, в которой плотность вероятности обнаружения частицы  $dP/dx$  максимальна?

*Ответ:* 0,25 нм

**40.7.** Волновая функция микрочастицы, зависит от единственной координаты  $x$  и имеет вид  $\Psi = \begin{cases} A \cdot \exp(-\alpha x) & \text{при } x \geq 0, \\ A \cdot \exp(+\alpha x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$  где  $A = 4 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1/2}$ . Чему равна постоянная величина  $\alpha$  (в  $\text{м}^{-1}$ )?

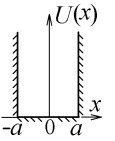
*Ответ:*  $1,6 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-1}$ .

**40.8.** Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечными стенками ширины  $a$ . Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ . Чему равна вероятность (в %) нахождения частицы в интервале с координатами  $0 \leq x \leq a/4$  ?



Ответ: 9,085%.

**40.9.** Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечными стенками ширины  $2a$  (см. рисунок). Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)$ . Чему равна вероятность (в %) нахождения частицы в интервале с координатами  $-\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{3}$ .



Ответ: 33,3%.

**40.10.** Состояние микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi = C \cdot r \exp(-\alpha r^5)$ , где  $\alpha = 6,25 \cdot 10^{48} \text{ м}^{-5}$ ,  $C = \sqrt{5\alpha/2\pi}$ . Чему равна вероятность (в %) обнаружения частицы в сферическом объеме с координатами  $0 \leq r \leq r_0$ , где  $r_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$  ?

Ответ: 98,2%.

#### 41. Стационарное уравнение Шредингера

Если потенциальная энергия  $E_{\text{пот}}$  микрочастицы не зависит от времени, то её полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) постоянна:  $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$ . Волновую функцию состояния  $\psi$  такой частицы можно найти из стационарного уравнения Шредингера:

$$\Delta\psi(x, y, z) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\text{пот}}) \psi(x, y, z) = 0 \quad (\text{при движении в трехмерном пространстве})$$

или  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_{\text{пот}}) \psi(x) = 0$  (при одномерном движении). Здесь  $m$  – масса частицы,  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – постоянная Планка,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.



Если в условии задачи задана волновая функция – подставьте её в стационарное уравнение Шредингера. Учтите, что потенциальная энергия определена с точностью до константы. Если задано  $E_{\text{пот}} = \text{const}$ , то можно положить  $E_{\text{пот}} = 0$ . В этом случае при вычислении производной должна получиться комбинация  $\Delta\psi(x, y, z) = C \cdot \psi(x, y, z)$  или

$d^2\psi(x)/dx^2 = C \cdot \psi(x)$ , где  $C$  – постоянная величина. Если это соотношение не получается – ищите ошибку в вычислении производной. После подстановки вычисленной производной получите уравнение, не содержащее производных:

$$C\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \quad \text{или} \quad C + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0.$$

Примеры решения задач:

**41.1.** Две микрочастицы находятся в области с координатами  $x, y \geq 0$ . Волновая функция первой частицы  $\psi_1 = A_1 \sin(\alpha x) \exp(-\beta y)$  а состояние второй частицы описывается функцией  $\psi_2 = A_2 \exp(-\gamma x) \cos(\delta y)$ , где  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители;  $\alpha = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\delta = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Масса первой частицы в полтора раза больше массы второй частицы. Во сколько раз кинетическая энергия первой частицы больше кинетической энергии второй частицы?

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Вначале вычислим производные: } \Delta\psi_1 &= \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = A_1 \frac{\partial^2 \sin \alpha x}{\partial x^2} \cdot e^{-\beta y} + A_1 \sin \alpha x \cdot \frac{\partial^2 e^{-\beta y}}{\partial y^2} = \\ &= A_1 (-\alpha^2 + (-\beta)^2) \sin \alpha x \cdot e^{-\beta y} = (-\alpha^2 + \beta^2) \cdot \psi_1. \quad \text{И, аналогично, } \Delta\psi_2 = (\gamma^2 - \delta^2) \cdot \psi_2. \end{aligned}$$

Подставляем этот результат в стационарное уравнение Шредингера для первой частицы, где  $E - E_{\text{пот}} = E_{\text{кин}}$ :

$$\Delta\psi_1 + \frac{2m_1}{\hbar^2} E_{\text{кин1}} \psi_1 = 0, \text{ и сокращаем на } \psi_1: \frac{2m_1}{\hbar^2} E_{\text{кин1}} = \alpha^2 - \beta^2.$$

Для второй частицы аналогично получим  $2m_2 E_{\text{кин2}} / \hbar^2 = \delta^2 - \gamma^2$ . Так как по условию  $m_1/m_2 = 3/2$ , то взяв отношение левых и правых частей полученных равенств, находим  $\frac{E_{\text{кин1}}}{E_{\text{кин2}}} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\delta^2 - \gamma^2} = 1,2$ .

**41.2.** Состояние первой частицы описывается волновой функцией  $\psi_1 = A_1 [\sin(\alpha x) + \exp(-i\alpha x)]$ , а волновая функ-

ция второй частицы  $\psi_2 = A_2 [\cos(\beta x) + \exp(i\beta x)]$ , где  $x$  – координата,  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $i$  – мнимая единица;  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = -3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Массы частиц одинаковы, а энергия первой частицы равна  $E_1 = 4 \text{ эВ}$ . Чему равна энергия второй частицы (в эВ) (потенциальную энергию микрочастиц принять равной нулю)?

*Решение.*

В одномерной задаче  $\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = A_1 \left[ \frac{d^2 \sin \alpha x}{dx^2} + \frac{d^2 e^{-i\alpha x}}{dx^2} \right] = A_1 \left[ -\alpha^2 \sin \alpha x + (-i\alpha)^2 e^{-i\alpha x} \right] = -\alpha^2 \psi_1$  так как  $i^2 = -1$ . Для

второй функции  $d^2\psi_2/dx^2 = -\beta^2 \cdot \psi_2$ . С учетом этих производных уравнения Шредингера приводятся к виду

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -\alpha^2 \cdot \psi_1 = -\frac{2m}{\hbar^2} E_1 \cdot \psi_1, \quad \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = -\beta^2 \cdot \psi_2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E_2 \cdot \psi_2.$$

Сокращая  $\psi_i$  и взяв отношения правых и левых частей, находим  $E_2 = E_1 \cdot \beta^2 / \alpha^2 = 2,25 \text{ эВ}$ .

**41.3.** Первоначально состояние свободной частицы с массой  $m = 5 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$  описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-i\beta y)$ . Затем она испустила фотон и перешла в новое состояние, с волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta y)$ , где  $x, y$  – координаты ( $x, y \geq 0$ ),  $i$  – мнимая единица,  $A_1, A_2$  – постоянные множители,  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Считая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , найти величину энергии  $E_\phi$  испущенного фотона (в эВ).

*Решение.*

Вычислим производные, как это было сделано в предыдущих задачах:  $\Delta\psi_1 = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} = (-\alpha^2 - \beta^2) \cdot \psi_1$ ,

$\Delta\psi_2 = (-\alpha^2 + \beta^2) \cdot \psi_2$ . Подставляя их в уравнение Шредингера, находим  $\frac{2m}{\hbar^2} E_1 \cdot \psi_1 = -\Delta\psi_1 = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \psi_1$ ,

$\frac{2m}{\hbar^2} E_2 \cdot \psi_2 = -\Delta\psi_2 = (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \psi_2$  (потенциальная энергия свободной частицы равна нулю).

Из первого уравнения находим  $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} (\alpha^2 + \beta^2) = 2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 12,5 \text{ эВ}$ . Отношение левых и правых частей полученных уравнений дает  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ . Подставив значения  $\alpha$  и  $\beta$ , находим  $E_2 = 3E_1/5$ . После излучения фотона энергия частицы уменьшилась:  $E_2 = E_1 - E_\phi$ , откуда энергия испущенного фотона  $E_\phi = 2E_1/5 = 5 \text{ эВ}$ .

**41.4.** Вначале состояние микрочастицы описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta y)$ . Затем, испустив фотон с циклической частотой  $\omega = 4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ , она переходит в новое состояние, определяемое волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \exp(-\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$ , где  $x, y$  – координаты ( $x, y \geq 0$ ),  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Считая потенциальную энергию частицы постоянной и принимая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , найти массу микрочастицы (в кг).

*Решение.*

Вычислим производные  $\Delta\psi$  и подставим их в уравнения Шредингера, описывающие частицу в начальном и конечном состоянии. С учетом того, что энергия частицы уменьшается на величину энергии испущенного фотона,  $E_2 = E_1 - \hbar\omega$ , а её постоянную потенциальную энергию можно считать равной нулю,  $E_{\text{пот}} = 0$ , получаем систему

$$\Delta\psi_1 = (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \psi_1 = \frac{2m}{\hbar^2} E_1 \cdot \psi_1, \quad \Delta\psi_2 = (\beta^2 - \alpha^2) \cdot \psi_2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E_1 - \hbar\omega) \cdot \psi_2, \text{ откуда следует } E_1 - \hbar\omega = -E_1 \text{ или } \hbar\omega = 2E_1.$$

Подставляя сюда выражение для первоначальной энергии частицы, которую можно найти из первого уравнения,  $E_1 = \hbar^2 (\alpha^2 - \beta^2) / 2m$ , получим  $m = \hbar (\alpha^2 - \beta^2) / \omega = 1,75 \cdot 10^{-28} \text{ кг}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**41.5.** Состояние первой микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta y)$ , а состояние второй микрочастицы, которая находится в области  $x, y, z > 0$ , где  $x, y, z$  – координаты, определяется волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \exp(-\delta y - \gamma z)$ , где  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители;  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\delta = 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Известно, что при этом энергия первой частицы равна энергии второй частицы. Во сколько раз масса первой частицы больше массы второй частицы (потенциальную энергию микрочастиц считать равной нулю)?

*Ответ:* в 3,33 раз.

**41.6.** Первоначально состояние микрочастицы описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \cdot \cos(\gamma z)$ , где  $x, y, z$  – координаты ( $x, y, z \geq 0$ ),  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . В этом состоянии энергия частицы была равна  $E_1 = 5,8 \text{ эВ}$ . Затем частица изменила состояние. Её новая волновая функция  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \cdot \exp(-\gamma z)$  ( $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители). На какую величину  $\Delta E$  (в эВ) уменьшилась энергия частицы при переходе в новое состояние (потенциальную энергию принять равной нулю)?

*Ответ:* 3,6 эВ.

**41.7.** Первоначально состояние микрочастицы описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x)$ , а затем она испусти-



ла фотон с энергией  $E_{\text{ф}} = 0,25 \text{ эВ}$  и перешла в новое состояние, которое описывается волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta z)$ , где  $x, z \geq 0$  – координаты,  $A_1, A_2$  – постоянные множители,  $\alpha = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Принимая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  и считая потенциальную энергию микрочастицы постоянной, найти её массу.

Ответ:  $1,25 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$ .

**41.8.** Вначале состояние микрочастицы с массой  $m = 4 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$  описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta y)$ , а затем она поглотила фотон с энергией  $E_{\text{ф}} = 5 \text{ эВ}$  и перешла в новое состояние, которое описывается волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x)$ , где  $x, y \geq 0$ ,  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Принимая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  и считая потенциальную энергию микрочастицы равной нулю, найти величину постоянной  $\beta$  (в  $\text{м}^{-1}$ ).

Ответ:  $8 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ .

**41.9.** Первоначально состояние микрочастицы описывалось волновой функцией  $\psi = A \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \cdot \exp(-\gamma z)$ , а затем она перешла в состояние с волновой функцией  $\psi' = A' \cdot \sin(\alpha' x) \cdot \cos(\beta y) \cdot \exp(-\gamma z)$ , где  $x, y, z$  – координаты ( $x, y, z \geq 0$ ),  $A, A'$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Величина энергии частицы при таком переходе увеличилась в 4 раза. Во сколько раз новая постоянная  $\alpha'$  больше постоянной  $\alpha$  (потенциальную энергию микрочастицы принять равной нулю)?

Ответ: в 2,2 раз.

**41.10.** Сначала состояние микрочастицы с массой  $m = 4 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$  описывалось волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \cdot \exp(-\gamma z)$ , а затем она поглотила фотон и перешла в новое состояние, определяемое волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta y) \cdot \exp(-i\gamma z)$ , где  $x, y, z$  – координаты ( $x, y, z \geq 0$ ),  $i$  – мнимая единица,  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\gamma = 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Принимая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  и считая потенциальную энергию микрочастицы постоянной, найти величину циклической частоты  $\omega$  поглощенного фотона.

Ответ:  $2,25 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**41.11.** Состояние первой микрочастицы описывается волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta y)$ , а состояние второй микрочастицы определяется волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-i\beta y)$ , где  $x, y$  – координаты ( $x, y \geq 0$ ),  $i$  – мнимая единица,  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 9 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Известно, что при этом энергия второй частицы в  $n = 13$  раз больше энергии первой частицы, а масса первой частицы в  $k = 5$  раз больше массы второй частицы. Считая потенциальную энергию микрочастицы равной нулю, найти величину постоянной  $\beta$  (в  $\text{м}^{-1}$ ).

Ответ:  $6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ .

**41.12.** Вначале микрочастица с массой  $m = 8 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$  находилась в состоянии с волновой функцией  $\psi_1 = A_1 \cdot \sin(\alpha x) \cdot \exp(-\beta y)$ , а затем перешла в состояние с волновой функцией  $\psi_2 = A_2 \cdot \sin(\beta y) \cdot \exp(-\alpha x)$ , где  $x, y$  – координаты ( $x, y \geq 0$ ),  $A_1, A_2$  – постоянные нормировочные множители,  $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$ . Принимая постоянную Планка равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , найти, на какую величину  $\Delta E$  (в эВ) увеличилась при таком переходе кинетическая энергия частицы.

Ответ:  $7,03 \text{ эВ}$ .

## 42. Микрочастица в одномерной потенциальной яме

Вначале рассмотрим одномерный квантовый гармонический осциллятор. Это микрочастица с массой  $m$  и с потенциальной энергией  $E_{\text{пот}} = kx^2/2$ , способная совершать колебания с частотой  $\omega$  вдоль оси  $x$ , называется одномерным квантовым осциллятором (пример – отдельный ион в кристаллической решетке).

Согласно стационарному уравнению Шредингера, такая квантовая система может иметь только отдельные разрешенные значения энергии  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , где  $n=0,1,2,3,\dots$  – главное квантовое число. Состояние с наименьшей возможной энергией  $E_{n=0} = \hbar\omega/2$  называется основным состоянием осциллятора. Следующий энергетический уровень с энергией  $E_{n=1}$  соответствует первому возбужденному состоянию осциллятора, уровень с энергией  $E_{n=2}$  – второму возбужденному состоянию и т.д. (рис.3.34).

При переходе с  $n'$ -го уровня на уровень с номером  $n$  испускается или поглощается фотон с энергией  $E_{\text{ф}} = \hbar\omega_{\text{ф}} = |E_{n'} - E_n| = \hbar\omega_0 |n' - n|$  или с длиной волны  $\lambda_{\text{ф}} = 2\pi c / \omega_{\text{ф}} = 2\pi c / \omega_0 |n' - n|$ , где  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – циклическая частота осциллятора.

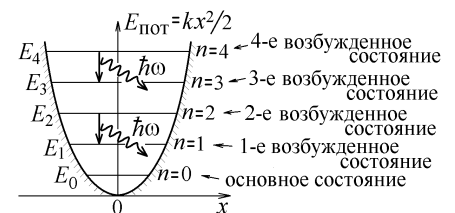


Рис.3.34

Примеры решения задач:

**42.1.** Переходя из основного в пятое возбужденное состояние, первый одномерный квантовый гармонический осциллятор должен поглотить фотон с энергией  $E_{\text{ф}}$ . Поглощая этот же фотон, второй одномерный квантовый гармонический осциллятор, находившийся в первом возбужденном состоянии и имевший в этом состоянии энергию  $E = 2,5 \text{ эВ}$ , переходит в четвертое возбужденное состояние. Чему равна собственная циклическая частота  $\omega_{01}$  первого осциллятора?

Решение.

Изобразите переходы осцилляторов на диаграмме энергетических уровней, аналогичной рис.3.34. Это позволит лучше понять, как испускаются и поглощаются фотоны.

Такая диаграмма показана на рис.3.35, в соответствии с которым

$E_{\text{ф}} = \hbar\omega_{01}(5-0) = \hbar\omega_{02}(4-1)$ , и  $\omega_{01} = 3\omega_{02}/5$ , где  $\omega_{01}, \omega_{02}$  – частоты первого и второго осцилляторов. По



условию для второго осциллятора

$$E = \hbar\omega_2(1+1/2) = 2,5 \text{ эВ} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \text{ откуда } \omega_2 = \frac{2E}{3\hbar} \text{ и } \omega_1 = \frac{2E}{5\hbar} = 1,52 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

**42.2.** Первый одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного в третье возбужденное состояние, поглощая фотон с энергией  $E_{\Phi 1}$ , а второй одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного в четвертое возбужденное состояние, поглощая фотон с энергией  $E_{\Phi 2} = E_{\Phi 1} + \Delta E$ . Чему равна величина  $\Delta E$  (в эВ), если известно, что энергия первого осциллятора в третьем возбужденном состоянии равна энергии второго осциллятора в первом возбужденном состоянии, а энергия второго осциллятора в основном состоянии равна  $E'_0 = 2,1 \text{ эВ}$ ?

*Решение.*

Переходы осцилляторов с циклическими частотами  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  показаны на рис.3.36, где также указаны энергии разрешенных состояний осцилляторов. Видно, что  $E_{\Phi 1} = 3\hbar\omega_{01}$ ,  $E_{\Phi 2} = E_{\Phi 1} + \Delta E = 4\hbar\omega_{02}$ . Отсюда  $\Delta E = 4\hbar\omega_{02} - 3\hbar\omega_{01}$ .

Но по условию известно, что  $E_3 = 7\hbar\omega_{01}/2 = E'_1 = 3\hbar\omega_{02}/2$ , откуда  $\hbar\omega_{01} = 3\hbar\omega_{02}/7$ .

Кроме того известно, что  $E'_0 = \hbar\omega_{02}/2 = 2,1 \text{ эВ}$ .

$$\text{Поэтому } \Delta E = \left(4 - \frac{9}{7}\right)\hbar\omega_{02} = \frac{38}{7}E'_0 = 11,4 \text{ эВ}$$

\*\*\*\*\*

Второй случай – частица в прямоугольной одномерной потенциальной яме с бесконечными стенками ширины  $a$  (рис.3.37), частица с массой  $m$  имеет нулевую потенциальную энергию. Волновая функция её состояния подчиняется стационарному уравнению Шредингера  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$ , где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \text{const}. \text{ Это уравнение имеет решение } \psi(x) = A \sin(kx + \alpha), \text{ что легко}$$

проверить подстановкой этой функции.

Вылететь из ямы с бесконечными стенками частица не может. Вероятность её обнаружения или волновая функция на границах равны нулю:  $\psi|_{x=0} = 0$ , откуда  $\sin \alpha = 0$  и  $\alpha = 0$ . На правой гра-

нице условие  $\psi|_{x=a} = 0$  дает  $\sin ka = 0$ , откуда  $ka = \sqrt{2mE}/\hbar = \pi n$  и  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} = E_1 n^2$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – разрешенные

значения энергии частицы. Состояние с наименьшей энергией  $E_1$  будет основным состоянием частицы. Другие состояния будут возбужденными (рис.3.37).

При переходе частицы из состояния с квантовым числом  $n'$  в состояние с квантовым числом  $n$  частица излучает или поглощает фотон с энергией  $E_{\Phi} = \hbar\omega_{\Phi} = |E_{n'} - E_n| = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} |n'^2 - n^2|$  (рис.3.37).

**Замечание:** в отличие от квантового осциллятора (рис.3.34), квантовому числу  $n$  и энергии  $E_n$  частицы в одномерной потенциальной яме соответствует  $(n-1)$ -й возбужденный уровень (рис.3.37). Следите за этим соответствием при решении задач!

*Примеры решения задач:*

**42.3.** Две разные микрочастицы находятся в двух разных одномерных прямоугольных ямах с бесконечными стенками. Первая частица имеет энергию  $E = 81 \text{ эВ}$  и находится во втором возбужденном состоянии. Чтобы перейти в третье возбужденное состояние, она должна поглотить фотон. Если тот же фотон поглотит вторая частица во второй яме, то она перейдет из первого в четвертое возбужденное состояние с энергией  $E'$ . Чему равна энергия  $E'$ ?

*Решение.*

Переходы, указанные в условии, изображены на рис.3.38. Энергии фотонов, поглощенных обеими частицами, одинаковы:  $E_{\Phi} = E_4 - E_3 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_1 a_1^2} (4^2 - 3^2) = E'_5 - E'_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_2 a_2^2} (5^2 - 2^2)$ . Отсюда

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_2 a_2^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_1 a_1^2}. \text{ Но по условию } E = E_3 = \frac{\pi^2 \hbar^2 3^2}{2m_1 a_1^2}, \text{ а найти надо}$$

$$E' = E'_5 = \frac{\pi^2 \hbar^2 5^2}{2m_2 a_2^2} = \frac{25}{3} \cdot \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_1 a_1^2} = \frac{25}{3} \cdot \frac{E}{9} = 75 \text{ эВ}.$$

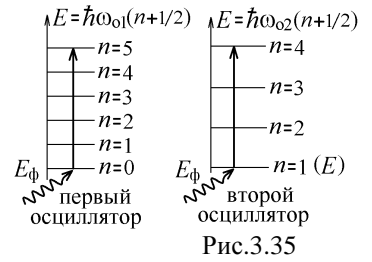


Рис.3.35

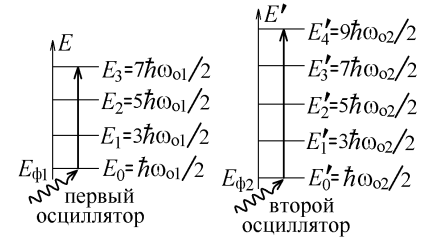


Рис.3.36

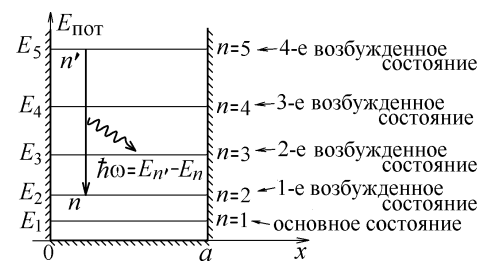


Рис.3.37

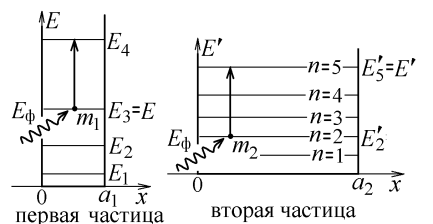


Рис.3.38

**42.4.** Две микрочастицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся в двух разных одномерных прямоугольных ямах с бесконечными стенками. Чтобы первая частица с массой  $m_1$  перешла из основного во второе возбужденное состояние, она должна поглотить фотон с энергией  $E_{\phi 1}$ . Вторая частица  $m_2$  перейдет из основного в третье возбужденное состояние, поглотив фотон с энергией  $E_{\phi 2} = E_{\phi 1} + \Delta E$ . Чему равна величина  $\Delta E$  (в эВ), если вторая частица в первом возбужденном состоянии и первая частица во втором возбужденном состоянии имеют одинаковую энергию  $E = 0,72$  эВ?

*Решение.*

В соответствии с расположением возбужденных уровней (рис.3.37), изобразим диаграмму переходов частиц в данной задаче на рис.3.38.

Вычитаем энергии фотонов, поглощенных при этих переходах

$$E_{\phi 1} = E_3 - E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_1 a_1^2} (3^2 - 1^2) = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{m_1 a_1^2} \quad \text{и} \quad E_{\phi 2} = E_{\phi 1} + \Delta E = E'_4 - E'_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_2 a_2^2} (4^2 - 1^2) = \frac{15\pi^2 \hbar^2}{2m_2 a_2^2},$$

и используем заданные в условии соотношения  $E = E_3 = \frac{\pi^2 \hbar^2 3^2}{2m_1 a_1^2} = E'_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2 2^2}{2m_2 a_2^2}$ .

Получим  $\Delta E = \frac{15\pi^2 \hbar^2}{2m_2 a_2^2} - \frac{8\pi^2 \hbar^2}{2m_1 a_1^2} = \frac{15}{4} E - \frac{8}{9} E = \frac{103}{36} E = 2,06$  эВ.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**42.5.** Испустив фотон с длиной волны  $\lambda = 120$  нм, одномерный квантовый гармонический осциллятор перешел из пятого возбужденного в основное состояние. Чему равна энергия такого осциллятора (в эВ) в третьем возбужденном состоянии?

*Ответ:* 7,243 эВ.

**42.6.** Энергия основного состояния первого одномерного квантового гармонического осциллятора равна  $E_0 = 1,5$  эВ. Чтобы перейти из основного в четвертое возбужденное состояние, он должен поглотить фотон. Если этот же фотон поглотит второй одномерный квантовый гармонический осциллятор, то он перейдет из основного в третье возбужденное состояние. Чему равна энергия второго осциллятора во втором возбужденном состоянии (в эВ)?

*Ответ:* 10 эВ.

**42.7.** Известно, что первый одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного в третье возбужденное состояние, поглощая фотон с длиной волны  $\lambda_1$ , а второй одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного во второе возбужденное состояние, поглощая фотон с длиной волны  $\lambda_2 = \lambda_1/2$ . Чему равна собственная циклическая частота первого осциллятора, если энергия второго осциллятора, находящегося во втором возбужденном состоянии равна  $E'_2 = 4$  эВ?

*Ответ:*  $8,096 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ .

**42.8.** Известно, что первый одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного в третье возбужденное состояние, поглощая фотон с длиной волны  $\lambda_1 = 560$  нм, а второй одномерный квантовый гармонический осциллятор переходит из основного в четвертое возбужденное состояние, поглощая фотон с длиной волны  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Чему равна величина  $\Delta\lambda$  (в нм), если известно, что энергия первого осциллятора в третьем возбужденном состоянии в три раза больше энергии второго осциллятора в четвертом возбужденном состоянии?

*Ответ:* 1060 нм.

**42.9.** Поглотив фотон с длиной волны  $\lambda = 180$  нм, микрочастица, находящаяся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, перешла из второго возбужденного в четвертое возбужденное состояние. Чему равна энергия микрочастицы (в эВ) в основном состоянии?

*Ответ:* 0,431 эВ.

**42.10.** Испустив фотон с импульсом  $p = 6,4 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с, микрочастица, находящаяся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, перешла из четвертого возбужденного во второе возбужденное состояние. Чему стала равной энергия микрочастицы (в эВ)?

*Ответ:* 6,75 эВ.

**42.11.** Первая микрочастица имеет массу  $m_1 = 2 \cdot 10^{-29}$  кг и находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками ширины  $a_1 = 0,3$  нм. Чтобы перейти из основного в третье возбужденное состояние, она должна поглотить фотон. Если этот же фотон поглотит вторая микрочастица с массой  $m_2 = 5 \cdot 10^{-29}$  кг, находящаяся во второй одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, то она перейдет из основного в четвертое возбужденное состояние. Найти ширину  $a_2$  второй потенциальной ямы.

*Ответ:* 0,24 нм.

**42.12.** Две разные микрочастицы находятся в одной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, имеющей ширину  $a = 0,1$  нм. Переходя из основного в третье возбужденное состояние, первая частица должна поглотить фотон с энергией  $E_{\phi}$ . Поглощая такой же фотон, вторая частица перейдет из первого возбужденного состояния с энергией  $E = 4$  эВ в четвертое возбужденное состояние. Чему равна масса первой микрочастицы?

*Ответ:*  $2,45 \cdot 10^{-29}$  кг.

**42.13.** Переходя из основного состояния в третье возбужденное состояние, первая микрочастица, находящаяся в первой одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, должна поглотить фотон с длиной волны  $\lambda_1 =$

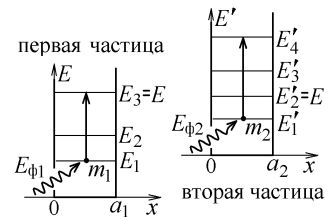


Рис.3.38

= 40 нм. Вторая микрочастица, находящаяся во второй одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками, перейдет из основного состояния в первое возбужденное состояние, поглощая фотон с длиной волны  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Чему равна величина  $\Delta\lambda$  (в нм), если известно, что энергия первой микрочастицы в третьем возбужденном состоянии в два раза меньше энергии второй микрочастицы в первом возбужденном состоянии?

Ответ: 60 нм

#### 43. Формулы квантования. Заполнение электронных оболочек

Согласно принципу Паули состояния электронов в атоме должны отличаться хотя бы одним значением одного из квантовых чисел:

$n = 1, 2, 3, 4, \dots$	– главное квантовое число
$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$	– орбитальное квантовое число
$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$	– магнитное квантовое число
$\sigma = \pm s = \pm 1/2$	– спиновое квантовое число

Электроны с одинаковыми значениями орбитального квантового числа  $l$  образуют подоболочку многоэлектронного атома. В полностью заполненной подоболочке находится  $2 \cdot (2l+1)$  электронов, различающихся значениями чисел  $m$  и  $\sigma$ .

Подоболочки обозначают буквами: s-подоболочка ( $l=0$ ), p-подоболочка ( $l=1$ ); d-подоболочка ( $l=2$ ); f-подоболочка ( $l=3$ ),...

Электроны с одинаковыми значениями главного квантового числа  $n$  образуют оболочку многоэлектронного атома.

В полностью заполненной оболочке находится  $\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$  электронов.

Помимо энергии, каждый электрон в атоме имеет определенную величину орбитального момента импульса  $\vec{L}$ , собственного (или спинового) момента импульса  $\vec{L}_s$ , орбитального магнитного момента  $\vec{p}_m$  и собственного (спинового) магнитного момента  $\vec{p}_{ms}$ .

Как и энергии, эти векторы квантуются, т.е. могут иметь только отдельные разрешенные значения величины (модуля) и проекции на выделенную ось  $z$ :

$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1;$	$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad s = 1/2;$
$L_z = \hbar m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l;$	$L_{sz} = \hbar\sigma, \quad \sigma = \pm 1/2;$
$p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1;$	$p_{ms} = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad s = 1/2;$
$p_{mz} = \mu_B m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l,$	$p_{msz} = 2\mu_B \sigma, \quad \sigma = \pm 1/2.$

Здесь  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с; магнетон Бора  $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24}$  А·м<sup>2</sup>.

Примеры решения задач:

**43.1.** В многоэлектронном атоме полностью заполнены электронами две **соседние** оболочки А и В. Известно, что в оболочке А находится на  $\Delta n = 14$  электронов больше, чем в оболочке В. Во сколько раз максимальная величина орбитального момента импульса электрона из оболочки А превышает максимальную величину проекции на выделенную ось  $z$  орбитального момента импульса электрона из оболочки В?

Решение.

Соседние оболочки имеют главные квантовые числа  $n_A = n+1$  и  $n_B = n$ . Разность числа электронов в них  $2n_A^2 - 2n_B^2 = 4n + 2 = \Delta n = 14$ , откуда  $n = 3$ .

Максимальная величина квантового числа  $l$  для электрона из оболочки А равна  $l_A = n_A - 1 = n = 3$ , а для электрона из оболочки В  $l_B = n_B - 1 = n - 1 = 2$ . Из формул квантования видно, что максимальная величина орбитального момента импульса электрона из оболочки А равна  $L_{A \max} = \hbar\sqrt{n(n+1)} = \hbar\sqrt{12}$ , а максимальная величина проекции этого вектора для электрона из оболочки В  $L_{zB \max} = \hbar m_{\max} = \hbar l_B = \hbar(n-1) = 2\hbar$ . Их отношение  $L_{A \max} / L_{zB \max} = \sqrt{3} = 1,732$ .

**43.2.** Оболочка многоэлектронного атома полностью заполнена. Известно, что отношение наибольшей величины орбитального магнитного момента электрона из этой оболочки к наибольшей величине проекции орбитального магнитного момента на выделенную ось  $z$  равно  $k = 1,1547$ . Найти число электронов, заполняющих эту оболочку.

Решение.

Если номер оболочки  $n$ , то максимальные значения квантовых чисел  $l$  и  $m$  для электрона из этой оболочки равны  $l_{\max} = n-1$  и  $m_{\max} = l_{\max}$ . Поэтому из заданного в условии отношения  $\frac{p_{m \max}}{p_{mz \max}} = \frac{\mu_B \sqrt{l_{\max}(l_{\max}+1)}}{\mu_B m_{\max}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} = k$  находим

$\frac{n}{n-1} = k^2 = 1,333 = 4/3$ , т.е.  $n = 4$ . Число электронов в этой оболочке  $2n^2 = 32$ .

**43.3.** Известно, что в полностью заполненной оболочке многоэлектронного атома находится в  $k = 16/7 = 2,2857$  раз больше электронов, чем в последней подоболочке А из этой оболочки. Найти отношение величины орбитального магнитного момента электрона из подоболочки А к величине собственного (спинового) магнитного момента электрона из этой же подоболочки.

*Решение.*

Электроны из последней подоболочки А из оболочки с номером  $n$  имеют орбитальное квантовое число  $l = n - 1$ , и в ней находится  $2(2(n-1)+1) = 2(2n+1)$  электронов. Согласно условию это число меньше числа электронов во всей оболочке в  $\frac{2n^2}{2(2n+1)} = \frac{16}{7}$  раз. Отсюда получаем квадратное уравнение  $7n^2 - 32n + 16 = 0$ , имеющее решение  $n = 4$  (можно найти это число, проверяя записанное выше отношение подстановкой целых чисел  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Из формул квантования для  $p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$  и  $p_{ms} = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}$ , где  $l = n - 1$ ,  $s = \frac{1}{2}$ , находим искомое отношение

$$\frac{p_m}{p_{ms}} = \frac{\sqrt{(n-1)n}}{2 \cdot \sqrt{3/4}} = 2.$$

**43.4.** Максимальное возможное значение проекции орбитального момента импульса на выделенную ось  $z$  для электрона в некоторой оболочке многоэлектронного атома равно  $L_{z \max} = 4,216 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Последняя, самая большая подоболочка А в этой оболочке заполнена электронами наполовину. Найти максимальную возможную величину суммы  $\Sigma L_z$  проекций орбитального момента импульса всех находящихся в подоболочке А электронов.

*Решение.*

Максимальную величину  $L_{z \max}$  имеет электрон из последней подоболочки с наибольшим числом  $l$ , которое можно найти из формулы  $L_{z \max} = \hbar m_{\max}$ , где  $m_{\max} = l$ . Отсюда  $l = L_{z \max} / \hbar = 4$ .

Сделайте таблицу всех возможных значений квантовых чисел  $m$  и  $\sigma$  для всех  $2(2l+1)$  электронов из подоболочки.



$m =$	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	-1	-2	-3	-4	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	0	-1	-2	-3	-4
$\sigma =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Это поможет Вам выбрать самые большие значения проекций  $L_z = \hbar m$ , входящие в сумму  $\Sigma L_z$ .

В приведенной таблице подчеркнута половина чисел  $m$  (подоболочка заполнена наполовину), которые дадут максимальный положительный вклад в сумму  $(\Sigma L_z)_{\max} = \Sigma m \hbar = 2(4+3+2+1)\hbar = 20\hbar = 2,108 \cdot 10^{-33}$  Дж·с.

**43.5.** Максимальное возможное значение проекции орбитального момента импульса на выделенную ось  $z$  для электрона в некоторой оболочке многоэлектронного атома равно  $L_{z \max} = 4,216 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Последняя, самая большая подоболочка А в этой оболочке заполнена электронами на одну треть. Найти максимальную возможную величину суммы  $\Sigma L_{sz}$  проекций собственного момента импульса всех электронов, находящихся в подоболочке А.

*Решение.*

Как и в предыдущей задаче,  $l = L_{z \max} / \hbar = 4$ . Но вычислить надо сумму других величин  $\Sigma L_{sz} = \Sigma \sigma \hbar$ .



Внимательно следите за тем, какие величины указаны в условии задачи: орбитальные или собственные моменты; моменты импульса или магнитные моменты; их величины (модули векторов) или проекции, имеющие разный знак!

Из приведенной выше таблицы выбираем шесть электронов с  $\sigma = 1/2$ . Поэтому

$$(\Sigma L_{sz})_{\max} = 6 \cdot (1/2) \hbar = 3\hbar = 3,162 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

**43.6.** В некоторой полностью заполненной электронами оболочке многоэлектронного атома находится 18 электронов. Чему равна сумма величин орбитальных магнитных моментов всех электронов из последней, самой большой подоболочки этой оболочки и сумма модулей их проекций на выделенную ось  $z$ ?

*Решение.*

Число электронов в оболочке  $2n^2 = 18$  даёт номер этой оболочки  $n = 3$  и квантовое число  $l = n - 1 = 2$  электронов из её последней подоболочки. Эта подоболочка содержит  $2(2l+1) = 10$  электронов, которые отличаются значениями квантовых чисел  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  и  $\sigma = \pm 1/2$ . Величины вектора  $\vec{p}_m$  этих электронов одинаковы:  $p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$ . Их сумма

$$\Sigma |p_m| = 10 \cdot \mu_B \sqrt{2 \cdot 3} = 10\sqrt{6} \mu_B = 2,272 \cdot 10^{-22} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

В сумму модулей  $\Sigma |p_{mz}|$  всех проекций  $p_{mz} = m \mu_B$  с положительным знаком войдут вклады всех электронов:

$$\Sigma |p_{mz}| = 2 \cdot 2 \cdot (0+1+2) \mu_B = 12 \mu_B = 1,11 \cdot 10^{-22} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

**43.7.** Известно, что оболочка многоэлектронного атома полностью заполнена, а наибольшая величина орбитального

магнитного момента электрона из этой оболочки равна  $p_{m \max} = 3,21261 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Сколько электронов заполняют эту оболочку?  
*Ответ:* 32.

**43.8.** Некоторая оболочка многоэлектронного атома полностью заполнена электронами, и в ней находится в  $k=16/7=2,285$  раз больше электронов, чем в последней подоболочке из этой оболочки. Какую максимальную величину орбитального момента импульса может иметь электрон из данной оболочки?  
*Ответ:*  $3,651 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**43.9.** В полностью заполненной оболочке многоэлектронного атома находится в  $k = 25/9=2,778$  раз больше электронов, чем в последней подоболочке А из этой оболочки. Найти отношение максимальной величины орбитального магнитного момента к максимальной величине проекции орбитального магнитного момента на выделенную ось  $z$  для электрона из этой оболочки.  
*Ответ:* 1,118.

**43.10.** В полностью заполненной оболочке многоэлектронного атома находится в  $k = 16/7=2,286$  раз больше электронов, чем в последней подоболочке А из этой оболочки. Найти отношение максимальных величин орбитального магнитного момента электрона из последней подоболочки А электрона из предпоследней подоболочки В этой оболочки.  
*Ответ:* 1,414.

**43.11.** В некоторой полностью заполненной электронами оболочке многоэлектронного атома находится 32 электрона. Чему равна сумма  $\Sigma |L_{zi}|$  модулей проекций на выделенную ось  $z$  орбитальных моментов импульса всех электронов из последней, самой большой подоболочки этой оболочки?  
*Ответ:*  $2,53 \cdot 10^{-33} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

**43.12.** Максимальное возможное значение величины орбитального магнитного момента электрона в некоторой полностью заполненной электронами оболочке атома равно  $p_{m \max} = 2,27166 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Чему равна сумма  $\Sigma |p_{msz}|$  модулей проекций на выделенную ось  $z$  собственных (спиновых) магнитных моментов всех электронов из последней, самой большой подоболочки этой оболочки?  
*Ответ:*  $9,274 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

#### 44. Закон радиоактивного распада. Энергетический выход реакции распада атомного ядра

Если  $N_0$  – число нестабильных ядер в начальный момент времени  $t_0 = 0$ , то спустя время  $t$  сохраняется  $N = N_0 e^{-\lambda t}$

ядер (закон радиоактивного распада). За это время распадается  $\Delta N = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$  ядер. Здесь  $\lambda$  – постоянная распада.

Период полураспада  $T$  – это время, за которое распадается половина атомных ядер. Поэтому  $N = N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$ , откуда  $\ln 2^{-1} = \ln e^{-\lambda T}$  и  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$  или  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ .

*Совет:* За каждый интервал времени  $\Delta t = T$  число сохранившихся ядер уменьшается в 2 раза. Поэтому, если  $t/T = n$  – целое число, то спустя время  $t$  число сохранившихся ядер равно

$N = N_0/2^n$  (рис.3.39). Это соотношение удобнее использовать для расчета, чем аналогичный закон радиоактивного распада  $N = N_0 \exp(-t \ln 2/T)$ .

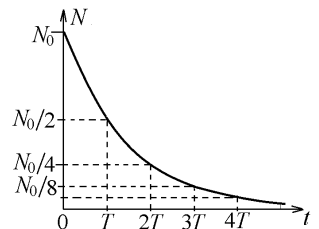


Рис.3.39

*Примеры решения задач:*

**44.1.** В начальный момент  $t_0=0$  число ядер первого радиоактивного изотопа с периодом полураспада  $T_1 = 2 \text{ с}$  было равно  $N_{10} = 1,6 \cdot 10^{11}$ , а число ядер второго радиоактивного изотопа было равно  $N_{20} = 4 \cdot 10^{10}$ . Спустя промежуток времени  $\Delta t = 6 \text{ с}$  число распавшихся за время  $\Delta t$  ядер второго изотопа оказалось равным числу еще не распавшихся ядер первого изотопа. Найти период полураспада  $T_2$  второго изотопа.

*Решение.*

По условию  $\Delta N_2 = N_{20} (1 - \exp(-\lambda_2 \Delta t)) = N_1 = N_{10} \exp(-\lambda_1 \Delta t)$ . Но  $\Delta t/T_1 = 3$ , т.е. спустя время  $\Delta t$ , равное трем периодам полураспада, сохраняется  $N_1 = N_{10}/2^3 = N_{10}/8$  ядер первого изотопа (рис.3.39).

Из записанного выше уравнения находим  $\exp(-\lambda_2 \Delta t) = 1 - N_1/N_{20} = 1 - N_{10}/(8N_{20}) = 1/2$ .

Взяв логарифм от обеих частей,  $-\lambda_2 \Delta t = \ln(1/2) = -\ln 2$ , и подставляя  $\lambda_2 = (\ln 2)/T_2$ , получим  $T_2 = \Delta t = 6 \text{ с}$ .

**44.2.** Известно, что в начальный момент времени  $t_0=0$  число ядер первого радиоактивного изотопа с периодом полураспада  $T_1 = 0,2 \text{ с}$  было в четыре раза больше числа ядер второго радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада  $T_2 = 0,25 \text{ с}$ . Спустя время  $\Delta t = 4 \text{ с}$  число сохранившихся ядер второго изотопа превышает число сохранившихся ядер первого изотопа на величину  $\Delta N = 3 \cdot 10^{10}$ . Сколько ядер второго изотопа сохранилось к этому моменту времени?

*Решение.*

Так как  $\Delta t/T_1 = 20$  и  $\Delta t/T_2 = 16$ , то число сохранившихся спустя время  $\Delta t$  ядер  $N_1 = N_{10}/2^{20}$ ,  $N_2 = N_{20}/2^{16}$ . В начальный момент  $N_{10} = 4N_{20}$ . Поэтому  $N_1 = N_{20}/2^{18} = N_2/4$ .

Согласно условию,  $\Delta N = N_2 - N_1 = 3N_2/4$ , и величина числа сохранившихся ядер второго изотопа

$$N_2 = 4\Delta N/3 = 4 \cdot 10^{10} \text{ ядер.}$$

**44.3.** В начальный момент времени  $t_0=0$  число ядер первого радиоактивного изотопа, имеющего постоянную распада  $\lambda_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ , было равно  $N_{10} = 4 \cdot 10^{10}$  и на величину  $\Delta N = 10^{10}$  превышало число ядер второго радиоактивного изотопа. Спустя время  $\Delta t = 1 \text{ с}$ , наоборот, число сохранившихся ядер второго изотопа превышало число сохранившихся ядер первого изотопа на ту же величину  $\Delta N$ . Найти величину постоянной распада  $\lambda_2$  второго изотопа.

*Решение.*

По условию в момент  $t = \Delta t = 1 \text{ с}$  числа ядер двух изотопов связаны соотношением

$$N_2 - N_1 = N_{20}e^{-\lambda_2\Delta t} - N_{10}e^{-\lambda_1\Delta t} = \Delta N. \text{ С учетом } N_{20} = N_{10} - \Delta N, \text{ получим } e^{-\lambda_2\Delta t} = (N_{10}e^{-\lambda_1\Delta t} + \Delta N)/(N_{10} - \Delta N). \text{ Подстановка в это равенство численных значений, заданных в условии, даёт } e^{-\lambda_2\Delta t} = (4e^{-1} + 1)/3.$$

$$\text{Вычисляя логарифм от левой и правой частей равенства, находим } \lambda_2 = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left( \frac{4e^{-1} + 1}{3} \right) = 0,1938 \text{ с}^{-1}.$$

\*\*\*\*\*

Энергетический выход ядерной реакции  $E_1$  – это энергия, выделяющаяся в результате распада покоящегося ядра в виде кинетической энергии его осколков. В сумме такие энергии превращаются в тепловую энергию беспорядочного движения частиц среды.

Выделившееся за время  $t$  тепло  $Q = E_1 \Delta N = E_1 N_0 (1 - e^{-\lambda t})$  будет суммарным энергетическим выходом распада всех  $\Delta N$  ядер, распавшихся за это время в соответствии с законом радиоактивного распада. Энергию  $E_1$  обычно определяют в мегаэлектрон-вольтах:  $1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$ .

*Примеры решения задач:*

**44.4.** В начальный момент  $t_0=0$  в образце находилось  $N_{10} = 8 \cdot 10^{12}$  ядер первого радиоактивного изотопа, имеющего постоянную распада  $\lambda_1=1 \text{ с}^{-1}$ , и  $N_{20} = 6 \cdot 10^{12}$  ядер второго радиоактивного изотопа с постоянной распада  $\lambda_2=2 \text{ с}^{-1}$ . Известно, что энергетический выход реакции распада ядра первого изотопа равен  $E_1 = 4 \text{ МэВ}$ , и что за последующий интервал времени  $\Delta t = 1 \text{ с}$  в образце при распаде ядер двух изотопов выделилось суммарное тепло  $Q = 4 \text{ Дж}$ . Найти величину  $E_2$  энергетического выхода реакции распада ядра второго изотопа (в МэВ).

*Решение.*

Суммарное выделившееся за время  $\Delta t$  тепло равно  $Q = E_1 N_{10} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}) + E_2 N_{20} (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t})$ , откуда

$$E_2 = \frac{Q - E_1 N_{10} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t})}{N_{20} (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t})}. \text{ Так как величину } E_2 \text{ надо вычислить в МэВ, то при вычислениях удобнее перевести в эти единицы величину } Q = \frac{4}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{1}{10^6} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ МэВ. Тогда, подставляя числовые данные, приведенные в условии, и сокращая}$$

$$\text{числитель и знаменатель на } 10^{12}, \text{ находим } E_2 = \frac{25 - 4 \cdot 8 \cdot (1 - e^{-1})}{6 \cdot (1 - e^{-2})} \text{ МэВ} = 0,9198 \text{ МэВ}.$$

**44.5.** В начальный момент времени  $t_0=0$  в образце находилось  $N_{10}$  ядер первого радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ , и  $N_{20} = 8 \cdot 10^{10}$  ядер второго радиоактивного изотопа с периодом полураспада  $T_2 = 1 \text{ с}$ . Известно, что энергетические выходы реакции распада ядра первого и второго изотопов равны  $E_1 = 4 \text{ МэВ}$  и  $E_2 = 3 \text{ МэВ}$  соответственно. Известно также, что за счет распада ядер второго изотопа за последующий интервал времени  $\Delta t = 1 \text{ с}$  выделяется в  $k = 4$  раза больше тепла, чем за счет распада ядер первого изотопа. Чему равно начальное число  $N_{10}$  ядер первого изотопа?

*Решение.*

Так как  $\Delta t/T_1 = 2$  и  $\Delta t/T_2 = 1$ , то за время  $\Delta t$  в образце сохранится  $N_{10}/4$  ядер первого изотопа и  $N_{20}/2$  ядер второго изотопа (рис.17). Число распавшихся ядер, соответственно,  $\Delta N_1 = N_{10}(1 - 1/4) = 3N_{10}/4$  и  $\Delta N_2 = N_{20}/2$ . По условию задачи  $Q_2 = E_2 \Delta N_2 = 4Q_1 = 4 \cdot E_1 \Delta N_1$ , откуда  $E_2 N_{20}/2 = 4 \cdot 3E_1 N_{10}/4$  и  $N_{10} = N_{20} E_2 / 6E_1 = 10^{10}$  ядер.

**44.6.** В начальный момент  $t_0=0$  в образце находилось  $N_0 = 8 \cdot 10^{12}$  ядер радиоактивного изотопа с постоянной распада  $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$ . За счет распада этих ядер за первый интервал времени  $0 \leq t \leq 2 \text{ с}$  в образце выделяется тепло  $Q_1$ , а за последующий интервал времени  $2 \text{ с} \leq t \leq 4 \text{ с}$  в этом же образце выделяется меньшее тепло  $Q_2 = Q_1 - \Delta Q$ , причем  $\Delta Q = 4 \text{ Дж}$ . Найти величину  $E_1$  энергетического выхода реакции распада ядра данного изотопа (в МэВ).

*Решение.*

За первый интервал времени  $0 \leq t \leq \tau = 2 \text{ с}$  в образце распадется  $\Delta N_1 = N_0 (1 - e^{-\lambda \tau})$  и сохранится  $N_0 e^{-\lambda \tau}$  ядер. За второй такой же интервал  $\tau \leq t \leq 2\tau = 4 \text{ с}$  распадется  $\Delta N_2 = N_0 e^{-\lambda \tau} (1 - e^{-\lambda \tau})$  ядер. Из уравнения баланса выделившегося те-

пла  $E_1 \Delta N_2 = E_1 \Delta N_1 - \Delta Q$  находим  $E_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta N_1 - \Delta N_2} = \frac{\Delta Q}{N_0(1 - \exp(-\lambda\tau))^2} = 7,82 \text{ МэВ}.$

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**44.7.** В начальный момент  $t_0=0$  в образце находилось в  $n=3$  раза меньше ядер первого радиоактивного изотопа, чем ядер второго изотопа. Период полураспада первого изотопа  $T_1=1$  мин. Чему равен период полураспада  $T_2$  второго изотопа (в минутах), если число ядер первого изотопа, распавшихся к моменту времени  $t_1=2$  мин, равно числу ядер второго изотопа, распавшихся к моменту времени  $t_2=1$  мин?

*Ответ:* 2,41 мин.

**44.8.** В начальный момент времени  $t_0=0$  число ядер первого радиоактивного изотопа с постоянной распада  $\lambda_1=0,02 \text{ с}^{-1}$  совпадает с числом ядер второго радиоактивного изотопа с постоянной распада  $\lambda_2=0,06 \text{ с}^{-1}$ . Спустя какой промежуток времени  $\Delta t$  число еще не распавшихся ядер первого изотопа окажется в  $k=64$  раза больше числа еще не распавшихся ядер второго изотопа?

*Ответ:* спустя 104 с.

**44.9.** Известно, что в начальный момент  $t_0=0$  число ядер первого радиоактивного изотопа было в три раза меньше числа ядер второго радиоактивного изотопа, имеющего постоянную распада  $\lambda_2=0,5 \text{ с}^{-1}$ . Спустя время  $\Delta t=4$  с число сохранившихся ядер второго изотопа превышает число сохранившихся ядер первого изотопа на величину  $\Delta N=10^{10}$ . Найти величину постоянной распада  $\lambda_1$  первого изотопа, если в момент  $t=4$  с сохранилось  $5 \cdot 10^{10}$  его ядер.

*Ответ:*  $0,271 \text{ с}^{-1}$ .

**44.10.** В начальный момент времени  $t_0=0$  в образце находилось  $N_{10}=2 \cdot 10^{10}$  ядер первого радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада  $T_1=0,5$  с, и  $N_{20}=4 \cdot 10^{10}$  ядер второго радиоактивного изотопа. Известно, что энергетические выходы реакций распада ядер первого и второго изотопов равны  $E_1=4$  МэВ и  $E_2=3$  МэВ соответственно. Известно также, что за последующий интервал времени  $\Delta t=1$  с при распаде ядер как первого изотопа, так и второго изотопа, выделяется одинаковое количество тепла. Чему равна величина периода полураспада  $T_2$  второго изотопа?

*Ответ:* 1 с.

**44.11.** В начальный момент времени  $t_0=0$  в образце находилось  $N_{10}=8 \cdot 10^{10}$  ядер первого радиоактивного изотопа и  $N_{20}=4 \cdot 10^{10}$  ядер второго радиоактивного изотопа, имеющего постоянную распада  $\lambda_2=1 \text{ с}^{-1}$ . Известно, что энергетический выход реакции распада ядра первого изотопа равен  $E_1=4$  МэВ, а энергетический выход реакции распада ядра второго изотопа равен  $E_2=3$  МэВ. Известно также, что количество тепла, выделившееся в образце за последующий интервал времени  $\Delta t=1$  с за счет распада ядер первого изотопа, в  $k=3$  раза превышает количество тепла, выделившееся в образце за то же время за счет распада ядер второго изотопа. Чему равна постоянная распада  $\lambda_1$  первого изотопа?

*Ответ:*  $1,24 \text{ с}^{-1}$ .

**44.12.** За интервал времени  $0 \leq t \leq 6$  с в образце, за счет распада ядер радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада  $T=2$  с, выделяется тепло  $Q=4$  Дж. Какое количество тепла выделится в данном образце за последующий интервал времени  $6 \text{ с} \leq t \leq 12 \text{ с}$ ?

*Ответ:* 0,5 Дж.

**44.13.** В образце находятся ядра радиоактивного изотопа, имеющего период полураспада  $T=2$  с. За счет распада этих ядер за первый интервал времени  $0 \leq t \leq 1$  с в образце выделяется тепло  $Q$ . За последующий интервал времени  $1 \text{ с} \leq t \leq t_2$  с в образце выделяется то же самое тепло  $Q$ . Найти момент времени  $t_2$  (границу второго интервала наблюдения).

*Ответ:* 2,543 с.

**44.14.** Период полураспада свободного нейтрона  $T=12$  мин. Какой энергией (в МэВ) должен обладать нейтрон, чтобы с вероятностью 50 % он мог долететь до Земли от звезды, удаленной на 10 световых лет, не распавшись?

(Указание: энергия релятивистской частицы вычисляется по формуле  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , масса нейтрона  $m=1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .)

*Ответ:*  $4,1 \cdot 10^8 \text{ МэВ}$ .

#### 45. Распределение Ферми-Дирака и функция Ферми. Свойства электронного газа при нулевой и ненулевой температуре

Распределение квазисвободных электронов по энергиям в металлах называется распределением Ферми-Дирака и

имеет вид  $dn_{\text{ФД}} = \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} f_{\text{Ф}}(E) dE$ , где  $m^*$  – эффективная масса электрона, которую можно принять равной массе

свободного электрона  $dn_{\text{ФД}}$  – число электронов в единице объема с энергиями от  $E$  до  $E+dE$ ,  $f_{\text{Ф}}(E)$  – функция Ферми,



равная  $f_{\Phi}(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_{\Phi}}{k_B T}\right) + 1}$ , которая является вероятностью заполнения электроном разрешенного уровня энергии

$E$ ,  $E_{\Phi}$  – уровень энергии, который называется энергией или уровнем Ферми.

При  $T = 0 \text{ K}$  получим  $f_{\Phi}(E)|_{T=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } E \leq E_{\Phi} \\ 0 & \text{при } E > E_{\Phi} \end{cases}$ , т.е. ниже уровня Ферми  $E_{\Phi}$  вероятность заполнения энергетического уровня  $f_{\Phi}(E) = 1$ , и все разрешенные уровни энергии заполнены электронами,

а выше  $E_{\Phi}$  все уровни энергии свободны (рис.3.40,а). График функции плотности заполнения энергетического уровня  $dn/dE$  при  $T = 0 \text{ K}$  изображен на рис.3.40,б.

Зная величину  $E_{\Phi}$ , можно определить концентрацию квазисвободных электронов

$$\text{в решетке металла при } T = 0 \text{ K} : \underline{n} = \int dn_{\Phi D} = \int_0^{E_{\Phi}} \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE = \frac{(2mE_{\Phi})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

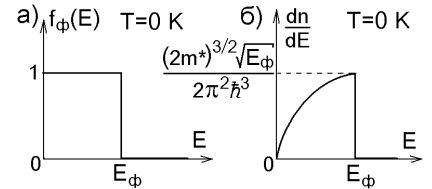


Рис.3.40

С помощью распределения Ферми-Дирака можно вычислить среднее значение любой величины  $F(E)$ , зависящей

от энергии  $E$  электронов:

$$\langle F(E) \rangle = \frac{\int_0^{\infty} F(E) dn_{\Phi D}(E)}{\int_0^{\infty} dn_{\Phi D}(E)} = \frac{\int_0^{E_{\Phi}} F(E) dn_{\Phi D}(E)}{\int_0^{E_{\Phi}} dn_{\Phi D}(E)} \quad (\text{при } T = 0 \text{ K}).$$

Например, среднее значение энергии квазисвободного электрона в металле  $\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_{\Phi}} E \cdot \text{const} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE}{\int_0^{E_{\Phi}} \text{const} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE} = \frac{\int_0^{E_{\Phi}} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_{\Phi}} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_{\Phi}.$

При нагревании металлов до температуры  $T \sim 200 - 500 \text{ K}$  тепловую энергию  $\sim k_B T$  могут приобретать только электроны, заполнявшие уровни энергии в очень узком интервале  $\Delta E$  вблизи уровня Ферми (рис.3.41). Остальным квазисвободным электронам это запрещено принципом Паули. График функции Ферми (вероятности того, что электрон имеет энергию  $E$ ) меняется незначительно и все результаты, полученные при  $T=0 \text{ K}$ , изменятся не более чем на 1-3%.

*Примеры решения задач:*

**45.1.** Величина энергии Ферми некоторого металла  $E_{\Phi} = 5 \text{ эВ}$ , а его температура близка к  $0 \text{ K}$ . Определить число свободных электронов в объёме  $V = a^3$  такого металла, где  $a = 10 \text{ см}$ . Заряд электрона  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , его масса  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ , а постоянную Планка принять равной  $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

*Решение.*

Так как при  $T \approx 0 \text{ K}$  все разрешенные уровни энергии ниже уровня Ферми  $E_{\Phi}$  в зоне проводимости металла заполнены электронами, а выше – свободны, то  $f_{\Phi}(E) = 1$  при  $E \leq E_{\Phi}$  и  $f_{\Phi}(E) = 0$  при  $E > E_{\Phi}$ , то распределение Ферми-

Дирака позволяет вычислить концентрацию электронов  $n = \int_0^{E_{\Phi}} dn_{\Phi D} = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_{\Phi}} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE = \frac{(2mE_{\Phi})^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} = 5,934 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$

(при вычислении не забывайте перевести все величины в систему СИ:  $E_{\Phi} = 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$  – масса электрона).

Умножив концентрацию на объём, получим число электронов  $N = na^3 = 5,934 \cdot 10^{25}$ .

**45.2.** Величина энергии Ферми некоторого металла равна  $E_{\Phi} = 2 \text{ эВ}$ , а его температура близка к  $0 \text{ K}$ . Найти число свободных электронов из зоны проводимости, имеющих энергии в пределах  $E_{\Phi}/2 \leq E \leq E_{\Phi}$ , если объём металла  $V = 1 \text{ см}^3$  (нижний уровень зоны проводимости имеет энергию  $E = 0$ ). Учесть, что  $\pi^2 \hbar^3 / (2m_e)^{3/2} = 4,712 \cdot 10^{-57} \text{ Дж}^3 \text{ с}^3 / \text{кг}^{3/2}$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m_e$  – масса электрона.

*Решение.*

Здесь надо вычислить концентрацию не всех электронов из зоны проводимости, а только тех электронов, энергии которых находятся в интервале  $E_{\Phi}/2 \leq E \leq E_{\Phi}$ :

$$n = \int_0^{E_\Phi} dn_{\Phi D} = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{E_\Phi/2}^{E_\Phi} \sqrt{E} \cdot 1 \cdot dE = \frac{(2m)^{3/2} (E_\Phi^{3/2} - (E_\Phi/2)^{3/2})}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{(2m_e E_\Phi)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} = 9,60 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}.$$

Число таких электронов в  $1 \text{ см}^3$  равно  $N = nV = 9,60 \cdot 10^{21}$ .

**44.3.** Найти отношение двух средних величин  $\langle E^{9/2} \rangle / \langle E^{1/2} \rangle$  (в эВ<sup>4</sup>), для золота, температура которого близка к 0 К, где  $E$  – кинетическая энергия свободного электрона из зоны проводимости. Энергия Ферми для золота равна  $E_\Phi = 5,53$  эВ.

*Решение.*

Средние значения функций, стоящих в числителе и знаменателе искомого отношения, находим с помощью распределения Ферми-Дирака (при  $T = 0 \text{ К}$  получим  $f_\Phi(E)|_{T=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } E \leq E_\Phi \\ 0 & \text{при } E > E_\Phi \end{cases}$ ):

$$\langle E^{9/2} \rangle = \frac{\int_0^{E_\Phi} E^{9/2} dn_{\Phi D}(E)}{\int_0^{E_\Phi} dn_{\Phi D}(E)} = \frac{\int_0^{E_\Phi} E^{9/2} \cdot \text{const} \cdot E^{1/2} dE}{\int_0^{E_\Phi} \text{const} \cdot E^{1/2} dE} = \frac{\int_0^{E_\Phi} E^5 dE}{\int_0^{E_\Phi} E^{1/2} dE} = \frac{E_\Phi^6/6}{2E_\Phi^{3/2}/3} = \frac{1}{4} E_\Phi^{9/2};$$

$$\langle E^{1/2} \rangle = \frac{\int_0^{E_\Phi} E^{1/2} \cdot \text{const} \cdot E^{1/2} dE}{\int_0^{E_\Phi} \text{const} \cdot E^{1/2} dE} = \frac{\int_0^{E_\Phi} E dE}{\int_0^{E_\Phi} E^{1/2} dE} = \frac{E_\Phi^2/2}{2E_\Phi^{3/2}/3} = \frac{3}{4} E_\Phi^{1/2}. \quad \text{Тогда } \frac{\langle E^{9/2} \rangle}{\langle E^{1/2} \rangle} = \frac{E_\Phi^{9/2}}{3E_\Phi^{1/2}} = \frac{E_\Phi^4}{3} = 325,5 \text{ эВ}^4.$$

**44.4.** Найти разность двух средних величин  $\langle E^{-1/2} \rangle - \langle E \rangle^{-1/2}$  (в эВ<sup>-1/2</sup>), для цезия, температура которого близка к 0 К, где  $E$  – кинетическая энергия свободного электрона из зоны проводимости. Энергия Ферми для цезия равна  $E_\Phi = 1,59$  эВ.

*Решение.*

Среднее значение энергии электрона из зоны проводимости  $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_\Phi$  (см. стр. 80). Среднее значение

$$\langle E^{-1/2} \rangle = \frac{\int_0^{E_\Phi} E^{-1/2} \cdot \text{const} \cdot E^{1/2} dE}{\int_0^{E_\Phi} \text{const} \cdot E^{1/2} dE} = \frac{\int_0^{E_\Phi} dE}{\int_0^{E_\Phi} E^{1/2} dE} = \frac{E_\Phi}{2E_\Phi^{3/2}/3} = \frac{3}{2} E_\Phi^{-1/2}. \quad \text{Искомая разность}$$

$$\langle E^{-1/2} \rangle - \langle E \rangle^{-1/2} = \frac{3}{2} E_\Phi^{-1/2} - \left( \frac{3}{5} E_\Phi \right)^{-1/2} = \left( \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \frac{1}{\sqrt{E_\Phi}} = 0,1658 \text{ эВ}^{-1/2}$$

**44.5.** Известно, что вероятность заполнения электроном уровня с энергией  $E_1$  в зоне проводимости металла равна 33,33%. При этом  $E_1 - E_\Phi = 0,02$  эВ, где  $E_\Phi$  – энергия Ферми для данного металла.

Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Найти температуру металла (в К).

*Решение.*

В данной задаче температура не равна нулю и необходимо учитывать температурную зависимость функции Ферми (вероятности заполнения энергетического уровня), которая по условию для уровня  $E = E_1$  равна  $f_\Phi(E_1) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_1 - E_\Phi}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{3}$ .

Отсюда  $\exp\left(\frac{E_1 - E_\Phi}{k_B T}\right) = 2$ . Логарифмируя экспоненту,  $\ln \exp\left(\frac{E_1 - E_\Phi}{k_B T}\right) = \left(\frac{E_1 - E_\Phi}{k_B T}\right) = \ln 2$ , находим  $T = \frac{E_1 - E_\Phi}{k_B \ln 2} = 334,5 \text{ К}$ .

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**44.6.** Число электронов из зоны проводимости в первом и втором металлах, температуры которых близки к 0 К, равно  $N_1 = 10^{25}$  и  $N_2 = 4 \cdot 10^{25}$ , а их объёмы равны  $V_1 = 0,08 \text{ м}^3$  и  $V_2 = 0,04 \text{ м}^3$  соответственно. Найти разность  $E_{\Phi 2} - E_{\Phi 1}$  величин энергий Ферми во втором и первом металлах (в эВ). Учесть, что  $3\pi^2 \hbar^3 / (2m_e)^{3/2} = 1,414 \cdot 10^{-56} \text{ Дж}^3 \text{ с}^3 / \text{кг}^{3/2}$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $m_e$  – масса электрона.

Ответ: 0,1827 эВ

**45.7.** В зоне проводимости рубидия, имеющего энергию Ферми  $E_F = 1,85$  эВ и температуру, близкую к 0 К, 12,5% свободных электронов имеют энергии в интервале  $0 \leq E \leq E_1$ . Нижний уровень зоны проводимости имеет энергию  $E = 0$ . Определить величину энергии  $E_1$  в эВ.

Ответ: 0,4625 эВ

**45.8.** Найти среднее значение величины  $\langle E^{5/2} \rangle$  (в эВ<sup>5/2</sup>), где  $E$  – кинетическая энергия свободного электрона из зоны проводимости в меди, величина энергии Ферми в которой равна  $E_F = 7,00$  эВ. Температура металла близка к 0 К.

Ответ: 48,62 эВ<sup>5/2</sup>

**45.9.** Найти отношение двух средних величин  $\langle E^5 \rangle / \langle E \rangle^5$ , где  $E$  – кинетическая энергия свободного электрона из зоны проводимости в металле, температура которого близка к 0 К.

Ответ: 2,968

**45.10.** Известно, что вероятность заполнения электроном при температуре  $T = 400$  К уровня с энергией  $E_1 = 2,28$  эВ в зоне проводимости металла равна 1%. Найти величину энергии Ферми такого металла (в эВ).  
Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

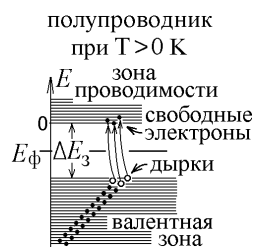
Ответ: 2,121 эВ

#### 46. Проводимость полупроводника. Свойства полупроводникового p-n-перехода

В собственном полупроводнике уровень Ферми расположен практически посередине запрещенной энергетической зоны ширины  $\Delta E_3$ , отделяющей валентную зону от зоны проводимости, которую заполняют свободные электроны, энергия которых  $E \geq 0$  (рис.3.41). Поэтому  $E_F = -\Delta E_3/2 < 0$ .

При температурах  $T \sim 200 - 500$  К, тепловая энергия электронов  $k_B T \ll \Delta E_3$  и  $\exp\left(-\frac{E_F}{k_B T}\right) \gg 1$ . Поэтому в случае полупроводника в знаменателе формулы функции Ферми можно пренебречь единицей

и считать, что  $f_F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1} \approx \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$ . Тогда концентрация свободных электронов (или дырок) в



собственном полупроводнике будет описываться распределением Максвелла-Больцмана:  $n = \int dn_{FD} =$

$$= \int_0^\infty \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \cdot f_F(E) \cdot dE = \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE \quad \text{или} \quad n \approx \text{const} \cdot \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta E_3}{2k_B T}\right).$$

Температурная зависимость проводимости собственного полупроводника определяется в основном данным экспоненциальным множителем.

*Пример решения задач:*

**46.1.** При температуре 27°C электропроводность (удельная проводимость) первого собственного полупроводника с шириной запрещенной зоны  $\Delta E_{31}$  в  $\exp(1) = 2,718$  раз меньше, чем у второго собственного полупроводника с шириной запрещенной зоны  $\Delta E_{32}$ , а при температуре -23°C она в  $\exp(1) = 2,718$  раз больше, чем у второго. Найти величину разности  $\Delta E_{32} - \Delta E_{31}$  в электрон-вольтах. Постоянная Больцмана  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

*Решение.*

Электропроводность или удельная проводимость среды пропорциональна концентрации свободных носителей заряда, т.е. электронов и дырок, число которых в собственном полупроводнике одинаково, как видно из рис.19. По условию она в  $\exp(1)$  раз меньше в первом полупроводнике при температуре  $T_1 = 27+273=300$  К:  $n_1(T_1)/n_2(T_1) = \exp(-1)$  и в  $\exp(1)$  раз больше в первом полупроводнике при температуре  $T_2 = -23+273=250$  К:  $n_1(T_2)/n_2(T_2) = \exp(1)$ .

Если подставить приведенную выше температурную зависимость  $\frac{n_1(T_1)}{n_2(T_1)} = \frac{\text{const}_1}{\text{const}_2} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta E_{31}}{2k_B T_1} + \frac{\Delta E_{32}}{2k_B T_1}\right) = \exp(-1)$ ;

$\frac{n_1(T_2)}{n_2(T_2)} = \frac{\text{const}_1}{\text{const}_2} \cdot \exp\left(\frac{-\Delta E_{31}}{2k_B T_2} + \frac{\Delta E_{32}}{2k_B T_2}\right) = \exp(1)$ , и устранить неизвестные константы, поделив левые и правые части этих от-

ношений друг на друга, то получим  $\exp\left(\frac{\Delta E_{32} - \Delta E_{31}}{2k_B T_2}\right) / \exp\left(\frac{\Delta E_{32} - \Delta E_{31}}{2k_B T_1}\right) = \exp\left(\frac{\Delta E_{32} - \Delta E_{31}}{2k_B} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right) = \exp(2)$ , откуда

$$\Delta E_{32} - \Delta E_{31} = 2 \cdot 2k_B \left/ \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \right/ = 8,28 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,5175 \text{ эВ}.$$

На рис.3.42 показано прямое и обратное подключение полупроводникового р-п-перехода (полупроводникового диода) к внешнему источнику постоянного напряжения  $U_{\text{вн}}$ . При прямом подключении уменьшается ширина запирающего слоя, в котором создаётся электрическое поле с напряжённостью  $\vec{E}_3$ , препятствующее току основных носителей заряда. При этом по экспоненциальному закону будет возрастать ток основных носителей заряда (электроны переходят из n- в p-область, а дырки – в противоположном направлении).

Если подключить обратное напряжение (рис.3.42), то запирающий слой и запирающее поле  $\vec{E}_3$  в нём возрастают, и полностью препятствует току основных носителей заряда. Но запирающее поле  $\vec{E}_3$ , наоборот, помогает току неосновных носителей заряда (электроны переходят из p- в n-область, а дырки – в противоположном направлении), который имеет очень малую величину из-за малой концентрации таких носителей и практически постоянен. Суммарный ток основных и неосновных носителей заряда имеет величину

$$I = I_{\text{неосн}} \left( \exp \left( \frac{eU_{\text{вн}}}{k_B T} \right) - 1 \right),$$

представляющую вольт-амперную характеристику р-п-перехода, изображённую на рис.3.43.

Ток при прямом подключении будет практически равен току основных носителей заряда, а при обратном подключении существует направленный в противоположную сторону, очень малый и практически постоянный ток неосновных носителей заряда (рис.3.43).

*Примеры решения задач:*

**46.2.** На р-п-переход (полупроводниковый диод) подаётся прямое напряжение  $U = 0,1$  В. Температура полупроводника  $-23^\circ\text{C}$ . Во сколько раз уменьшится ток  $I$ , текущий через р-п-переход, если это напряжение  $U$  уменьшить в два раза? Постоянная Больцмана  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

*Решение.*

Необходимо найти отношение  $I(U)/I(U/2)$ , которое при температуре  $T = -23+273=250$  К определяется формулой вольт-амперной характеристики р-п-перехода:  $\frac{I(U)}{I(U/2)} = \frac{\exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{eU/2}{k_B T}\right) - 1}$ . Подстановка числовых данных даёт  $I(U)/I(U/2) = 11,16$  (уменьшение прямого тока в 11,16 раз).

**46.3.** Если на р-п-переход (полупроводниковый диод) подать большое обратное напряжение  $U_{\text{обр}}$ , то через него течёт практически не зависящий от величины  $U_{\text{обр}}$  ток  $I_1 = 1$  мкА. Температура полупроводника  $27^\circ\text{C}$ . Какой величины ток  $I$  будет течь через р-п-переход, если подать на него прямое напряжение  $U = 0,1$  В? Постоянная Больцмана  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

*Решение.*

Ток  $I_1$  будет обратным током неосновных носителей заряда. При подключении к р-п-переходу прямого напряжения  $U$  через него потечёт ток  $I = I_1 \left( \exp\left(\frac{eU}{k_B T}\right) - 1 \right) = 46,7$  мкА.

*Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:*

**46.4.** При уменьшении температуры от  $27^\circ\text{C}$  до  $127^\circ\text{C}$  электропроводность (удельная проводимость) собственного полупроводника уменьшается в  $\exp(2) = 7,389$  раз. Чему равна ширина запрещённой зоны этого полупроводника в электрон-вольтах? Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Ответ: 0,517 эВ

**46.5.** Два одинаковых собственных полупроводника с шириной запрещённой зоны  $\Delta E_g = 1$  эВ первоначально имели температуру  $27^\circ\text{C}$ . Первый полупроводник охладили на  $\Delta t_1 = 50^\circ\text{C}$ , а второй нагрели на  $\Delta t_2 = 150^\circ\text{C}$ . Во сколько раз после этого электропроводность (удельная проводимость) второго полупроводника станет больше электропроводности первого полупроводника? Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Ответ: в 5977 раз

**46.6.** Если на р-п-переход (полупроводниковый диод) подать прямое напряжение  $U = 0,05$  В, то через него течёт ток  $I_1 = 100$  мкА. Температура полупроводника  $-23^\circ\text{C}$ . Прямое напряжение какой величины следует подать на р-п-переход, чтобы этот ток уменьшился на  $\Delta I = 50$  мкА? Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К; заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Ответ: 0,03708 В

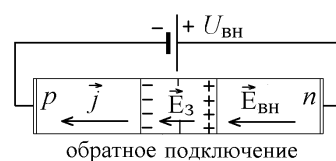
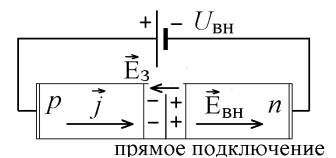


Рис.3.42

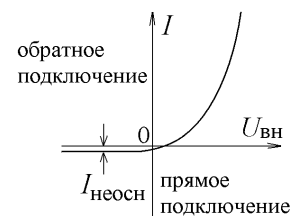


Рис.3.43

