МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Политехнический институт
Кафедра «Технологические системы пищевых, полиграфических
и упаковочных производств»

Утверждено на заседании кафедры
«Технологические системы пищевых,
полиграфических и упаковочных
производств»
«26» января 2022 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой
______________________________В.В. Прейс

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«Методы и средства исследований в полиграфических и упаковочных производствах»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
29.03.03 Технология полиграфического и упаковочного производства

с направленностью (профилем)
Технология полиграфического производства

Формы обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 290303-01-22

Тула 2022 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
практических занятий дисциплины (модуля)

Разработчик:

Проскуряков Н.Е., профессор, докт. техн. наук, профессор ______________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие №1. Отбор образцов, проб и выборок для исследования свойств полиграфических материалов, методы оценки их неоднородности

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы:

1.Изучить принципы и методы отбора образцов, проб и выборок при исследовании свойств полиграфических материалов.

2.Изучить способы вычисления основных статистических характеристик.

Задачи работы:

1.Изучить принципы отбора образцов, проб и выборок. Основные понятия и определения.

2.Результаты исследования свойств полиграфических материалов.

3.Расчет статистических характеристик результатов измерений классическим способом.

4.Расчет статистических характеристик упрощенными способами.

5.Анализ результатов работы, формулировка выводов.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Контроль качества продукции осуществляют сплошным и выборочным способами. В легкой промышленности и бытовом обслуживании наиболее часто применяется выборочный контроль качества продукции. При этом партию продукции рассматривают как генеральную совокупность единиц любой продукции, а ее исследуемую часть называют одинаково – выборкой.

Чтобы выборка отражала свойства партии продукции и позволяла прогнозировать их, выборку необходимо отбирать по определенным правилам.

Объем выборки определяется неравномерностью продукции и величиной доверительных границ или интервала, в пределах которых должно находиться искомое значение показателя свойств всей партии продукции. Чем больше неравномерность материала (неоднородность) и чем больше задаваемая величина доверительного интервала, тем большим должен быть объем выборки. По возможности объем выборки принимают минимальным для ускорения испытаний. Выборочные значения характеристик распределения вероятностей в генеральной совокупности называют оценками или статистиками. К основным статистикам относятся среднее, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Образец – часть объекта испытания, который непосредственно подвергается испытанию.

Методы отбора проб:

На практике применяются различные методы отбора проб. Принципиально их можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части:

а) простой случайный бесповторный отбор;

б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части:

а) типический отбор;

б) механический отбор;

в) серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

Подчеркнем, что на практике часто применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Результаты измерений испытания данной выборки и результаты расчета статистик, заносятся в табл. 1.

Таблица 1

.п.	Первичные результаты измерений Xi, г/м²	Отклонение первичного результата от	Квадратическое отклонение $(X_i – X)^2$
	552,8	6,7	44,89
	548,7	2,6	6,76
	537,3	-8,8	77,44
	545,0	-1,1	1,21
	542,4	-3,7	13,69
	550,2	4,1	16,81
	$\sum X_i$ 3276,4	$\sum(X_i-X)$ -0,2	$\sum(X_i-X)^2$ 160,8

2. Обрабатывает полученные результаты классическим способом.

2.1. Средний результат наблюдаемого признака определяют по формуле:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{6}\left(X_1 + X_2 + ... + X_6\right) = 546{,}1$$

2.2. Отклонение каждого наблюдения в опыте от среднего:

$$M_i = X_i - \overline{X}$$

2.3. Определяют дисперсию теоретического распределения:

$$S_b^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{6-1}\left(\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + ... + \left(X_6 - \overline{X}\right)^2\right) = 32{,}16$$

2.4. Выборочное среднеквадратическое отклонение определяют по формуле:

$$S_b = \sqrt{S_b^2} = \sqrt{32{,}16} = 5{,}7$$

3.5. Выборочное значение коэффициента вариации Св (%), являющейся мерой относительной изменчивости наблюдаемой случайной величины, вычисляют по формуле:

$$C_B = \frac{S_b}{\overline{X}} \cdot 100 = \frac{5{,}7}{546{,}1} \cdot 100 = 1{,}04\%$$

При большом числе испытаний используют упрощенные способы вычислений статистик (произведений, сумм).

3. Вычисление статистических характеристик способом произведений.

Результаты измерений толщины картона в мм:

1.23	1.23	1.28	1.26
1.22	1.25	1.24	1.24
1.26	1.24	1.21	1.22
1.20	1.25	1.23	1.25
1.21	1.27	1.25	1.21
1.25	1.24	1.24	1.27
1.28	1.22	1.20	1.24
1.24	1.23	1.24	1.26
1.26	1.24	1.27	1.24
1.24	1.26	1.25	1.24

При числе испытаний n=40 применяем упрощённый способ подсчёта среднего арифметического, среднего арифметического отклонения и коэффициента вариации, результаты первичных наблюдений разбиваем на разряды с определённым интервалом и определяем частоту встречаемости результатов наблюдений в каждом разделе.

По таблице 2 определяем количество классов, т.к. n=40, то выбираем 10 классов.

Таблица 2

Число испытаний	25	50	100	200	500	более 500
Количество классов	7…11	8…13	9…14	10…16	12…18	14…20

Определяем размах результатов испытаний R. Для этого из всей совокупности результатов выбирает наибольшую X_{max} и наименьшую X_{min} величины и определяем разницу между ними:

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 1.28 - 1.20 = 0.08$$

Далее определяем интервал класса (разряда):

$$k = \frac{R}{i} = \frac{0.08}{10} = 0.008$$

После определения интервала класса первичные результаты группируют по разрядам и определяют частоту n_i (табл.3).

Таблица 3

Номер разрядов	Границы разрядов	Частота	Условное отклонение	Сумма S_1	Сумма S_2
1	1.20…1.208	2	-5	-10	50
2	1.208…1.216	3	-4	-12	48
3	1.216…1.224	3	-3	-9	27
4	1.224…1.232	4	-2	-8	16
5	1.232…1.240	4	-1	-4	4
6	1.240…1.248	8	0	0	0
7	1.248…1.256	6	+1	6	6
8	1.256…1.264	5	+2	10	20
9	1.264…1.272	3	+3	9	27
10	1.272…1.280	2	+4	8	32
10		40		10	230

Определяем условное среднее значение x_0 как полусумму значений нижней границы класса:

$$x_0 = \frac{x_{но} + x_{н.см.}}{2} = \frac{(1.240 + 1.248)}{2} = 1.244$$

Среднее арифметическое результатов испытаний:

$$x = x_0 + \frac{k \cdot S_1}{n} = 1.244 + \frac{0.008 \times 10}{40} = 1.246$$

Определяем сумму квадратов отклонений $\sum X^2$:

$$\sum X^2 = S_2^2 - \frac{S_1^2}{n} = 230^2 - \frac{10^2}{40} = 52897.5$$

Вычисляем среднеквадратическое отклонение:

$$S_B = k\sqrt{\frac{\sum X^2}{n-1}} = 0.008\sqrt{\frac{52897.5}{39}} = 0.29$$

Далее определяем коэффициент вариации:

$$C_B = \frac{S_B}{X}\cdot 100 = \frac{0.29}{1.246}\cdot 100\% = 23.3\%$$

4. ОБОРУДОВАНИЕ И МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Мультимедийный класс, оборудованные проектором и ПК с установленным программным обеспечением не ниже:

1) Операционная система Windows XP;

2) Редактор презентаций MS PowerPoint.

3) Пособия и инструменты: образцы полиграфических материалов, микрокалькулятор.

5. ОТЧЕТ О РАБОТЕ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ.

1. Исходные данные (вариант задания)
2. Расчет статистических характеристик классическим и упрощенными способами.
3. Анализ результатов работы, формулировка выводов.

Выводы:

- в процессе выполнения практического занятия были изучены принципы и методы отбора образцов, проб и выборок при исследовании свойств полиграфических материалов,
- освоены способы вычисления основных статистических характеристик распределения.

Практическое занятие №2. Однофакторный эксперимент. Определение линейного уравнения регрессии первого порядка

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы:

Освоение методов математической обработки результатов исследования свойств полиграфических материалов; определение уравнения регрессии по данным однофакторного эксперимента.

Задачи работы:

1. Статистическая обработка первичных результатов эксперимента.
2. Расчет критерия Кохрена и проверка однородности дисперсии в опытах матрицы.
3. Определение средней дисперсии выходного параметра в опытах матрицы.
4. Определение коэффициентов регрессии и составление уравнения регрессии.
5. Определение адекватности уравнения регрессии. Расчет критерия Фишера.
6. Оценка значимости коэффициентов регрессии.
7. Определение доверительных интервалов средних и индивидуальных значений выходного параметра.
8. Построение графика полученного уравнения регрессии.
9. Анализ результатов работы. Формулировка выводов.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящее время при исследовании свойств полиграфических материалов и других видов продукции широкое применение получили математико-статистические методы планирования экспериментов.

В задачу планирования эксперимента входят: выбор необходимых для эксперимента опытов, т.е. построение матрицы планирования, выбор методов математической обработки результатов эксперимента.

Существует два вида планирования активного эксперимента: традиционное (классическое) однофакторное и многофакторное (факторное).

В традиционном однофакторном планировании изучается влияние на выходной параметр одного входного параметра (фактора).

В результате обработки экспериментальных данных определяют взаимосвязь между выходным параметром (Y) и варьируемым на нескольких уровнях фактором (X). Математическая модель в общем виде описывается функцией отклика:

$$\mathbf{y = f(x)} \qquad \mathbf{(1)}$$

При существовании линейной связи между входными и выходными параметрами уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y = d_o+d_1(x-\tilde{x}), \qquad (2)$$

где d_0,d_1 – коэффициенты уравнения регрессии.

Адекватность уравнения регрессии проверяется по критерию Фишера [1,4]. Если расчетное значение критерия Фишера (F_p) меньше табличного (F_m), то гипотеза об адекватности линейной модели не отвергается.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Статистическая обработка первичных результатов эксперимента

Полученные значения статистических характеристик заносим в соответствующие графы табл. 1.

Таблица 1

Расчёты статистических характеристик

№ опыта	Фактор X	Значение параметра, Y		$\tilde{Y}$	S^2	S	$C_в$
		1	2				
1.	4	9.93	9.47	9.70	0.106	0.325	3.353
2.	12	9.81	9.32	9.56	0.120	0.346	3.622
3.	20	9.76	9.21	9.48	0.151	0.389	4.1
4.	27	9.74	9.16	9.45	0.168	0.41	4.34
5.	35	9.73	9.12	9.42	0.186	0.431	4.577
6.	43	9.68	9.10	9.39	0.168	0.41	4.368
7.	50	9.67	9.07	9.37	0.180	0.424	4.528
8.	58	9.64	9.04	9.34	0.180	0.424	4.542
9.	66	9.63	9.01	9.32	0.192	0.438	4.704
10	73	9.62	9.00	9.32	0.192	0.438	4.709
11	81	9.61	8.99	9.30	0.192	0.438	4.714
12	88	9.62	8.97	9.29	0.212	0.46	4.945
13	96	9.60	8.95	9.27	0.212	0.46	4.955
14	104	9.58	8.94	9.26	0.205	0.453	4.887
15	111	9.57	8.92	9.24	0.212	0.46	4.972
16	119	9.54	8.92	9.23	0.192	0.438	4.75
17	126	9.55	8.93	9.22	0.192	0.438	4.745
18	134	9.53	8.90	9.21	0.198	0.445	4.834
19	141	9.53	8.89	9.21	0.205	0.453	4.914
20	149	9.52	8.88	9.20	0.205	0.453	4.919
21	156	9.51	8.86	9.18	0.212	0.46	5.004
22	164	9.49	8.88	9.18	0.186	0.431	4.696
23	171	9.49	8.85	9.17	0.205	0.453	4.935
24	179	9.49	8.82	9.15	0.225	0.474	5.175
25	186	9.47	8.82	9.14	0.212	0.46	5.026

26	194	9.46	8.82	9.14	0.205	0.453	4.951
27	201	9.45	8.82	9.13	0.225	0.474	5.175
28	209	9.47	8.80	9.13	0.212	0.46	5.026
29	216	9.46	8.80	9.13	0.218	0.467	5.112
30	224	9.45	8.79	9.12	0.218	0.467	5.117

2. Расчёт критерия Кохрена и проверка однородности дисперсии в опытах матрицы

Для проверки однородности дисперсии и воспроизводимости эксперимента при одинаковой повторности (m) всех опытов рассчитываем значение критерия Кохрена G_p по формуле

$$G_з = \frac{S_u^2 \max\{y\}}{\sum_{u=1}^{N} S_u^2\{y\}} = 0.039 \qquad (3)$$

где $S_u^2 \max\{y\}$ - максимальная дисперсия из всех опытов;

$\sum_{u=1}^{N} S_u^2\{y\}$ - сумма всех дисперсий эксперимента.

Далее расчётное значение G_p сравниваем с табличным значением G_T. Дисперсии однородны и число повторных опытов одинаково, т.к. $G_p < G_T$ (0.039<0.3632).

3. Определение средней дисперсии выходного параметра в опытах матрицы

Т.к. в опытах матрицы дисперсии однородны и число повторных опытов одинаково, то среднюю дисперсию определяют по формуле

$$S_{(1)}^2\{y\} = \frac{\sum_{u=1}^{N} S_u^2\{y\}}{N} = 0.193 \qquad (4)$$

После этого определяем число степеней свободы средней дисперсии;

$F(S^2_{(1)}\{y\})=N(m-1)=30$ (5)

Средняя дисперсия характеризует средний разброс значений выходного параметра относительно его средних значений, т.е. ошибку опытов в эксперименте.

4. Определение коэффициентов регрессии и составление уравнения регрессии

Дисперсии выходного параметра для каждого уровня фактора однородны, следлвательно, применяем метод наименьших квадратов.

Коэффициенты уравнения регрессии определяем по формулам:

$$d_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u}{N} = \bar{y} = 9.275 \qquad (6)$$

$$d_1 = \frac{\sum_{u=1}^{N} (x_u - \bar{x})\overline{y_u}}{\sum_{u=1}^{N} (x_u - \bar{x})^2} = -1.967 \times 10^{-3} \qquad (7)$$

где $\bar{y}$ - среднее значение результата эксперимента;

x_u - значение фактора на определенном u-уровне;

$\bar{x}$ - среднее значение фактора.

Для удобства все промежуточные расчеты сводят в табл. 2.

Таблица 2

Расчет коэффициентов уравнения регрессии

№ опыта u	Фактор x_u	$x_u - \tilde{x}$	$(x_u - \tilde{x})^2$	$\tilde{Y}_u$	$(x_u - \tilde{x})\,\tilde{Y}_u$
1.	4	-110.567	12225.06	9.70	-1072.49
2.	12	-102.567	10519.99	9.56	-980.54
3.	20	-94.567	8942.91	9.48	-896.49
4.	27	-87.567	7667.98	9.45	-827.51
5.	35	-79.567	6331.38	9.42	-749.52
6.	43	-71.567	5121.84	9.39	-672.01
7.	50	-64.567	4168.89	9.37	-604.99
8.	58	-56.567	3199.83	9.34	-528.34
9.	66	-48.567	2358.75	9.32	-452.64
10.	73	-41.567	1727.82	9.32	-387.40
11.	81	-33.567	1126.74	9.30	-312.17
12.	88	-26.567	705.81	9.29	-246.81
13.	96	-18.567	344.73	9.27	-172.12
14.	104	-10.567	111.66	9.26	-97.85
15.	111	-3.567	12.72	9.24	-32.96
16.	119	4.433	19.65	9.23	40.92
17.	126	11.433	130.71	9.22	105.41
18.	134	19.433	377.64	9.21	178.98
19.	141	26.433	698.70	9.21	243.45
20.	149	34.433	1185.63	9.20	316.78
21.	156	41.433	1716.69	9.18	380.35
22.	164	49.433	2443.62	9.18	453.79
23.	171	56.433	3184.68	9.17	517.49
24.	179	64.433	4151.61	9.15	589.56
25.	186	71.433	5102.67	9.14	652.89
26.	194	79.433	6309.60	9.14	726.60
27.	201	86.433	7470.66	9.13	489.13
28.	209	94.433	8917.59	9.13	862.17
29.	216	101.433	10288.65	9.13	926.08
30.	224	109.433	11975.58	9.12	998.02

После определения коэффициентов составляют искомое уравнение регрессии:

$$y_R = d_o + d_1(x - \tilde{x}). \quad (8)$$

5. Определение адекватности уравнения регрессии. Расчеты критерия Фишера. Для определения адекватности полученного уравнения (8) используют критерий Фишера, расчетное значение которого определяем по

формуле

$$F_p = \frac{S^2_{(2)}\{y\}}{S^2_{(1)}\{y\}} = 0.029 \qquad (9)$$

где $S^2_{(1)}$ – средняя дисперсия или дисперсия воспроизводимости, определяемая но формуле (4);

$S^2_{(2)}$ – дисперсия, характеризующая рассеивание средних экспериментальных значений y_u относительно прямой линии, определяемой по формуле (8) (дисперсия адекватности).

Дисперсия $S^2_{(2)}$ характеризует точность аппроксимации зависимости $\tilde{y}=f(X)$ прямой линией, ее определяют по формуле

$$S^2_{(2)}\{y\} = \frac{m}{N-2}\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_u - y_{Ru})^2 = 5.641\times10^{-3} \qquad (10)$$

где $\bar{y}_u$ и y_{Ru} экспериментальное и расчетное значения выходного параметра.

После этого определяют число степеней свободы дисперсии адекватности

$$F\{S^2_{(2)}\}=N-2=28$$

Далее подставляем в формулу (9) значения дисперсии $S^2_{(1)}\{y\}$ и $S^2_{(2)}\{y\}$ рассчитывают критерий Фишера. F_p сравниваем с табличным значением критерия Фишера F_T, которое определяют из [1.4] при доверительной вероятности α=0,95 и число степеней свободы f $\{S^2_{(2)}\}$ и f $\{S^2_{(1)}\}$

$$F_T = 2.38, \text{ а } Fp = 0.029$$

$$Fp < F_T$$

Т.к. $Fp < F_T$, то линейное уравнение адекватно.

Расчет суммы в формуле (10) сводим в табл. 3. Расчетные значения выходного параметра Y_{Ru} определяем из уравнения (8), подставляя значения X_u.

Таблица 3

Расчёт дисперсии адекватности

u	x_u	d_1x_u	Y_{Ru}	$\tilde{y}_u$	$\tilde{y}_u$- Y_{Ru}	$(\tilde{y}_u- Y_{Ru})^2$
1.	4	-7.864×10^{-3}	9.492	9.70	0.208	0.043
2.	12	-0.024	9.477	9.56	0.083	6.950×10^{-3}
3.	20	-0.039	9.461	9.48	0.019	3.645×10^{-4}
4.	27	-0.053	9.447	9.45	2.853×10^{-3}	8.140×10^{-6}
5.	35	-0.069	9.431	9.42	-0.011	1.304×10^{-4}
6.	43	-0.085	9.416	9.39	-0.026	6.601×10^{-4}
7.	50	-0.098	9.402	9.37	-0.032	1.020×10^{-3}
8.	58	-0.114	9.386	9.34	-0.046	2.135×10^{-3}
9.	66	-0.130	9.370	9.32	-0.050	2.548×10^{-3}
10.	73	-0.144	9.357	9.32	-0.037	1.348×10^{-3}
11.	81	-0.159	9.341	9.30	-0.041	1.680×10^{-3}
12.	88	-0.173	9.327	9.29	-0.037	1.386×10^{-3}
13.	96	-0.189	9.312	9.27	-0.042	1.722×10^{-3}
14.	104	-0.204	9.296	9.26	-0.036	1.280×10^{-3}
15.	111	-0.218	9.282	9.24	-0.042	1.765×10^{-3}

16.	119	-0.234	9.266	9.23	-0.036	1.317×10^{-3}
17.	126	-0.248	9.253	9.22	-0.033	1.058×10^{-3}
18.	134	-0.263	9.237	9.21	-0.027	7.180×10^{-4}
19.	141	-0.277	9.223	9.21	-0.013	1.699×10^{-4}
20.	149	-0.293	9.207	9.20	-7.308×10^{-3}	5.340×10^{-5}
21.	156	-0.307	9.194	9.18	-0.014	1.835×10^{-4}
22.	164	-0.322	9.178	9.18	2.181×10^{-3}	4.756×10^{-6}
23.	171	-0.336	9.164	9.17	5.942×10^{-3}	3.531×10^{-5}
24.	179	-0.352	9.148	9.15	1.669×10^{-3}	2.786×10^{-6}
25.	186	-0.366	9.135	9.14	5.430×10^{-3}	2.949×10^{-5}
26.	194	-0.381	9.119	9.14	0.021	4.476×10^{-4}
27.	201	-0.395	9.105	9.13	0.025	6.210×10^{-4}
28.	209	-0.411	9.089	9.13	0.041	1.652×10^{-3}
29.	216	-0.425	9.076	9.13	0.054	2.960×10^{-3}
30.	224	-0.440	9.060	9.12	0.060	3.616×10^{-3}

6. Оценка значимости коэффициентов регрессии

Для определения значимости полученных коэффициентов d_0 и d_1 уравнения (8) используется критерий Стьюдента [1], расчетное значение которого определяем по формуле

$$t_p=|d_i|/S\{d_i\}=3,114 \tag{12}$$

где S $\{d_i\}$ - оценка среднеквадратического отклонения коэффициента регрессии d_i.

Дисперсию коэффициентов регрессии $S^2_{\{do\}}$ и $S^2_{\{d1\}}$ рассчитываем по формулам:

$$S^2_{\{do\}}\{y\}=\frac{S^2\{y\}}{mN}=1,709\cdot10^{-3} \tag{13}$$

$$S^2_{\{d1\}}\{y\}=\frac{S^2\{y\}}{m\sum\limits_{u=1}^{N}(x_u-\bar{x})^2}=3,989\cdot10^{-7}. \tag{14}$$

В формулы (13) и (14) входит дисперсия $S^2\{y\}$, которая является сводной оценкой дисперсии случайной величины Y_u выходного параметра при условии линейной связи. Эту дисперсию определяем по формуле

$$S^2\{y\}=\frac{(m-1)\cdot NS^2_{(1)}+(N-2)\cdot S^2_{(2)}}{mN-2}=0.103 \tag{15}$$

далее определяют число степеней свободы этой дисперсии:

$$f\{S^2\}=m*N-2=58$$

Сравниваем табличное и расчётное значения критерия Стьюдента. Если $t_p>t_т$, то коэффициенты уравнения регрессии значимы и, следовательно, связь между Y и X значима.

В нашем случае $t_p=3,114$, а $t_t=2,0$. Следовательно, связь между Y и X значима.

После этого определяем абсолютные ошибки коэффициентов регрессии

$\varepsilon\{d_i\}$:

$$\varepsilon\{d_i\}=S_{\{di\}}\cdot t_T[\alpha,f\{S^2\}]. \qquad (17)$$

$$\varepsilon\{d_0\}=2,314$$

$$\varepsilon\{d_1\}=0,035$$

Тогда для истинных значений коэффициентов регрессии δ_0 и δ_1 в линейном уравнении (8) доверительные интервалы определяются неравенством

$$d_i-\varepsilon\{d_i\}\leq \delta_i\leq d_s+ \varepsilon\{d_i\}. \qquad (18)$$

$$6,961\leq \delta_0\leq 5,289$$

$$-0,036967\leq \delta_1\leq -0,033$$

7. Определение доверительных интервалов средних и индивидуальных значений выходного параметра

Чтобы определить степень отклонения расчетных значений выходного параметра Y_{Ru} от истинного его значения при каждом уровне фактора X_u, определяем доверительные ошибки $\varepsilon\{Y_{Ru}\}$ расчетного значения выходного параметра и доверительные интервалы средних и индивидуальных значений выходного параметра.

Доверительные ошибки расчетных значений выходного параметра для каждого уровня фактора рассчитывают по формуле

$$\varepsilon_m\{Y_{Ru}\}=S_m\{y_{Ru}\}\cdot t_T[\alpha,f\{S^2\}] \qquad (19)$$

где $S_m\{y_{Ru}\}$ – оценка среднеквадратического отклонения расчетного значения выходного параметраY_{Ru} для каждого значения x_u.

Оценку среднеквадратического отклонения рассчитывают по формуле

$$S_m\{y_{Ru}\}=\sqrt{S^2_{\{d_0\}}+S^2_{\{d_1\}}(x_u-\bar{x})^2}. \qquad (20)$$

Расчеты $\varepsilon_m\{Y_{Ru}\}$ и $S_m\{Y_{Ru}\}$ заносим в табл.4.

Далее в таблицу заносят расчетные значения y_{Ru}, полученные по уравнению регрессии (8).

Зная ошибки расчетной величины, определяем доверительные интервалы для испытанных средних значений выходного параметра.

Нижний доверительный интервал определяют:

$$Y_m^{(н)}=y_{Ru}- \varepsilon_m, \qquad (21)$$

верхний доверительный интервал :

$$Y_m^{(в)}=y_{Ru}+ \varepsilon_m, \qquad (22)$$

Значения верхних и нижних значений доверительных интервалов для каждого опыта заносим в табл. 4.

Таблица 4

Доверительные интервалы средних значений

u	x_u	$(x_u-\tilde{x})^2$	S_m^2	S_m	ε_m	Y_{Ru}	$Y_m^{(н)}$	$Y_m^{(в)}$
1.	4	12225.06	4.871e	0.070	8.096	9.492	1.397	17.588
2.	12	10519.99	4.192e	0.065	7.510	9.477	1.967	16.987
3.	20	8942.91	3.563e	0.060	6.924	9.461	2.537	16.385
4.	27	7667.98	3.055e	0.055	6.412	9.447	3.035	15.859
5.	35	6331.38	2.523e	0.050	5.826	9.431	3.605	15.258

6.	43	5121.84	2.041e	0.045	5.241	9.416	4.175	14.656
7.	50	4168.89	1.661e	0.041	4.728	9.402	4.674	14.130
8.	58	3199.83	1.275e	0.036	4.142	9.386	5.244	13.529
9.	66	2358.75	9.401e	0.031	3.557	9.370	5.814	12.927
10.	73	1727.82	6.888e	0.026	3.044	9.357	6.312	12.401
11.	81	1126.74	4.493e	0.021	2.459	9.341	6.882	11.800
12.	88	705.81	2.816e	0.017	1.947	9.327	7.381	11.274
13.	96	344.73	1.377e	0.012	1.361	9.312	7.950	10.673
14.	104	111.66	4.488e	0.0067	0.777	9.296	8.519	10.073
15.	111	12.72	5.467e	0.002338	0.271	9.282	9.011	9.553
16.	119	19.65	8.228e	0.002868	0.333	9.266	8.934	9.599
17.	126	130.71	5.247e	0.007244	0.840	9.253	8.412	10.093
18.	134	377.64	1.509e	0.012	1.425	9.237	7.812	10.662
19.	141	698.70	2.788e	0.017	1.937	9.223	7.286	11.160
20.	149	1185.63	4.728e	0.022	2.522	9.207	6.685	11.729
21.	156	1716.69	6.843e	0.026	3.035	9.194	6.159	12.228
22.	164	2443.62	9.739e	0.031	3.620	9.178	5.558	12.798
23.	171	3184.68	1.269e	0.036	4.133	9.164	5.031	13.297
24.	179	4151.61	1.654e	0.041	4.718	9.148	4.430	13.867
25.	186	5102.67	2.033e	0.045	5.231	9.135	3.904	14.365
26.	194	6309.60	2.514e	0.050	5.816	9.119	3.302	14.935
27.	201	7470.66	2.977e	0.055	6.329	9.105	2.776	15.434
28.	209	8917.59	3.553e	0.060	6.915	9.089	2.175	16.004
29.	216	10288.65	4.099e	0.064	7.427	9.076	1.648	16.503
30.	224	11975.58	4.771e	0.069	8.013	9.060	1.047	17.073

Далее определяем границы доверительного интервала для индивидуальных значений выходного параметра Y при каждом уровне фактора.

Верхняя граница интервала:

$$y_l^{(в)}=y_{Ru}+S_l\cdot t_т[\alpha,f\{S^2\}]. \qquad (23)$$

Нижняя граница интервала:

$$y_l^{(в)}=y_{Ru}-S_l\cdot t_т[\alpha,f\{S^2\}]. \qquad (24)$$

Предварительно определяем ошибку:

$$S_B=\sqrt{S_m^2+S^2\{y\}}. \qquad (25)$$

Используя значения S_m из табл. 4 и ранее определенные по уравнению (15) значения $S^2\{y\}$ и критерий Стьюдента, определяем верхние и нижние границы искомой зоны по формулам (23) и (24), сводя все расчеты в табл. 5,

Таблица 5

u	x_u	S_m^2	S_l^2	S_l	Y_{Ru}	$t_т\cdot S_l$	$Y_l^{(н)}$	$Y_l^{(в)}$
1.	4	4.871e	0.107	0.328	9.492	0.656	8.837	10.148
2.	12	4.192e	0.107	0.327	9.477	0.653	8.823	10.130

3.	20	3.563e	0.106	0.326	9.461	0.652	8.809	10.112
4.	27	3.055e	0.106	0.325	9.447	0.650	8.797	10.097
5.	35	2.523e	0.105	0.324	9.431	0.648	8.783	10.080
6.	43	2.041e	0.105	0.323	9.416	0.647	8.769	10.063
7.	50	1.661e	0.104	0.323	9.402	0.646	8.756	10.048
8.	58	1.275e	0.104	0.322	9.386	0.644	8.742	10.031
9.	66	9.401e	0.103	0.322	9.370	0.643	8.727	10.014
10.	73	6.888e	0.103	0.321	9.357	0.643	8.714	9.999
11.	81	4.493e	0.103	0.321	9.341	0.642	8.699	9.983
12.	88	2.816e	0.103	0.321	9.327	0.641	8.686	9.969
13.	96	1.377e	0.103	0.320	9.312	0.641	8.671	9.952
14.	104	4.488e	0.103	0.320	9.296	0.641	8.655	9.936
15.	111	5.467e	0.103	0.320	9.282	0.640	8.642	9.923
16.	119	8.228e	0.103	0.320	9.266	0.640	8.626	9.907
17.	126	5.247e	0.103	0.320	9.253	0.641	8.612	9.893
18.	134	1.509e	0.103	0.320	9.237	0.641	8.596	9.878
19.	141	2.788e	0.103	0.321	9.223	0.641	8.582	9.864
20.	149	4.728e	0.103	0.321	9.207	0.642	8.565	9.849
21.	156	6.843e	0.103	0.321	9.194	0.643	8.551	9.836
22.	164	9.739e	0.104	0.322	9.178	0.644	8.534	9.821
23.	171	1.269e	0.104	0.322	9.164	0.644	8.520	9.808
24.	179	1.654e	0.104	0.323	9.148	0.646	8.503	9.794
25.	186	2.033e	0.105	0.323	9.135	0.647	8.488	9.781
26.	194	2.514e	0.105	0.324	9.119	0.648	8.471	9.767
27.	201	2.977e	0.106	0.325	9.105	0.650	8.455	9.755
28.	209	3.553e	0.106	0.326	9.089	0.651	8.438	9.741
29.	216	4.099e	0.107	0.327	9.076	0.653	8.422	9.729
30.	224	4.771e	0.107	0.328	9.060	0.655	8.405	9.715

4. ОБОРУДОВАНИЕ И МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Мультимедийный класс, оборудованные проектором и ПК с установленным программным обеспечением не ниже:

1) Операционная система Windows XP;

2) Редактор презентаций MS PowerPoint.

3) Пособия и инструменты: образцы полиграфических материалов, микрокалькулятор.

5. ОТЧЕТ О РАБОТЕ ДОЛЖЕН СОДЕРЖАТЬ.

1. Исходные данные (вариант задания)
2. Расчет статистических характеристик классическим и упрощенными способами.

3. Анализ результатов работы, формулировка выводов.

Выводы:

в процессе выполнения практического занятия были изучены методы математической обработки результатов исследования свойств полиграфических материалов, приведёны расчёт критерия Кохрена и проверка однородности дисперсии в опытах матрицы, определена средняя дисперсия выходного параметра в опытах матрицы, коэффициенты регрессии, адекватность уравнения регрессии, расчёт критерия Фишера, определены уравнения регрессии по данным однофакторного эксперимента, доверительные интервалы средних и индивидуальных значений выходного параметра, построен график полученного уравнения регрессии.

Практическое занятие № 3. Основы планирования эксперимента

Под планированием эксперимента понимается процедура выбора числа опытов и условий их проведения, необходимых для решения поставленной задачи с требуемой точностью. Все факторы, определяющие процесс, изменяются одновременно по специальным правилам, а результаты эксперимента представляются в виде математической модели,

Этапы построения математической модели

1. сбор и анализ априорной информации;
2. выбор входных и выходных переменных, области экспериментирования;
3. выбор математической модели, с помощью которой будут представляться экспериментальные данные;
4. выбор критерия оптимальности и плана эксперимента;
5. определение метода анализа данных;
6. проведение эксперимента;
7. проверка статистических предпосылок для полученных экспериментальных данных;
8. обработка результатов;
9. интерпретация и рекомендации.

Выбор входных и выходных переменных

Входные переменные (будем называть их факторами) определяют состояние объекта. Основное требование к факторам — управляемость. Под управляемостью понимается установление нужного значения фактора (уровня) и поддержание его в течение всего опыта. В этом состоит особенность активного эксперимента. Факторы могут быть количественными и качественными. Примерами количественных факторов являются температура, давление, концентрация и т. п. Их уровням соответствует числовая шкала. Различные катализаторы, конструкции аппаратов, способы лечения, методики преподавания являются примерами качественных факторов. Уровням таких факторов не соответствует числовая шкала, и их порядок не играет роли.

Выходные переменные — это реакции (отклики) на воздействие входных переменных. Отклик зависит от специфики исследования и может быть экономическим (прибыль, рентабельность), технологическим (выход, надежность), психологическим, статистическим и т. д. Параметр оптимизации должен быть эффективным с точки зрения достижения цели, универсальным, количественным, выражаемым числом, имеющим физический смысл, быть простым и легко вычисляемым.

Обозначим наблюдаемый отклик через y, а факторы — через x_1, x_2, $\ldots x_k$. Выбор модели зависит от наших знаний об объекте, целей исследования и математического аппарата. При изучении кинетики химических процессов принято пользоваться дифференциальными уравнениями. Химические равновесия часто описываются дробно-рациональными функциями, а колебательные процессы в химических реакторах — тригонометрическими. Если вид функции неизвестен, то полезным оказывается ее представление в виде разложения в степенные ряды.

При определенных условиях такое разложение в многочлен возможно для всех непрерывных функций. На основании экспериментальных данных нужно получить некоторое представление о функции отклика $\eta = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Если аналитический вид этой функции неизвестен, то её можно представить в виде степенного ряда:

$$\eta = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ii} x_i^2 + \ldots.$$

$$\eta = a_0 + \sum a_1 x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ii} x_i^2 + \ldots.$$

Пользуясь результатами эксперимента, можно получить лишь оценки параметров этой модели:

$$\hat{y} = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ii} x_i^2 + \ldots.$$

где $\hat{y}$ — значение отклика, предсказанного этим уравнением. Оценки коэффициентов получают с помощью метода наименьших квадратов.

После построения математической модели проведем статистический анализ.

При статистическом анализе проверяется значимость коэффициентов регрессии и адекватность линейной модели. Под адекватностью понимается соответствие модели экспериментальным данным по выбранному критерию.

Планированию экспериментов предшествует этап неформализованных решений о выборе области экспериментирования (области факторного пространства, изучение которой представляет интерес для экспериментатора),

Планированию эксперимента предшествует этап определённости

центра эксперимента и интервалов варьирования факторов. При этом оцениваются границы областей определения факторов, задаваемых принципиальными ограничениями либо технико-экономическими соображениями.

Построение наиболее простых - планов сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно центра эксперимента. В этом случае все k факторов изменяются на двух уровнях, и план эксперимента носит название плана типа 2^k. Уровни факторов изображаются двумя точками на каждой из k координатных осей факторного k-мерного пространства. Эти уровни симметричны относительно основного уровня. Один из них — верхний, другой — нижний.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень, а вычитание — нижний. Чтобы упростить и унифицировать запись условий опытов и облегчить обработку экспериментальных данных, масштабы по осям задаются в виде кодированных значений +1 и -1, Для количественных факторов это всегда можно сделать с помощью преобразования $x_j = \left(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}\right) / I_j$, где x_j — кодированное значение фактора, $\tilde{x}_j$ — натуральное его значение, $\tilde{x}_{j0}$

— натуральное значение основного уровня, I_j — интервал варьирования.

Пусть в эксперименте изменяются два фактора на двух уровнях: $\tilde{x}_1$ — температура и $\tilde{x}_2$ - время реакции.

Для температуры основным уровнем является 50°C, а интервал варьирования составляет 10 °C. Тогда для $\tilde{x}_1$ 50+10=60 °C, будет верхним уровнем, а 50—10=40 °C — нижним.

В кодированных значениях это запишется так: (60—50)/10= 1 и (40—50)/10=-1. Если для $\tilde{x}_2$, выбраны $\tilde{x}_{20}$ =30мини и I_2=5 мин, то (35—30)/5=1 и (25—30)/5=-1.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Для двух уровней это будет ПФЭ типа 2^k, а для *n* уровней — ПФЭ типа n^k. Условия эксперимента представляются в виде таблицы — матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы — значениям факторов.

Пример матрицы планирования для ПФЭ 2^2:

Номер опыта	X_1	X_2	Y
1	-1	-1	Y_1
2	+1	+1	Y_2
3	-1	+1	Y_3
4	+1	-1	Y_4

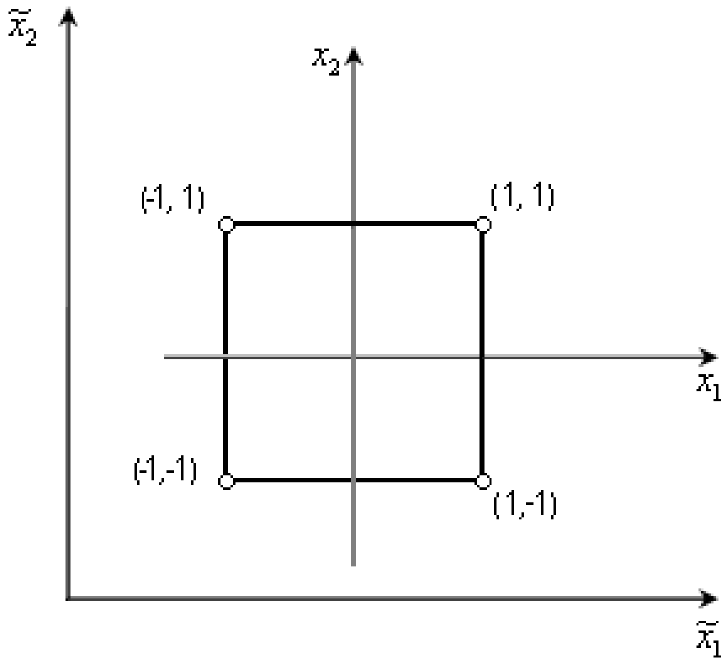

Рис. 1. Геометрическая интерпретация ПФЭ 2^2

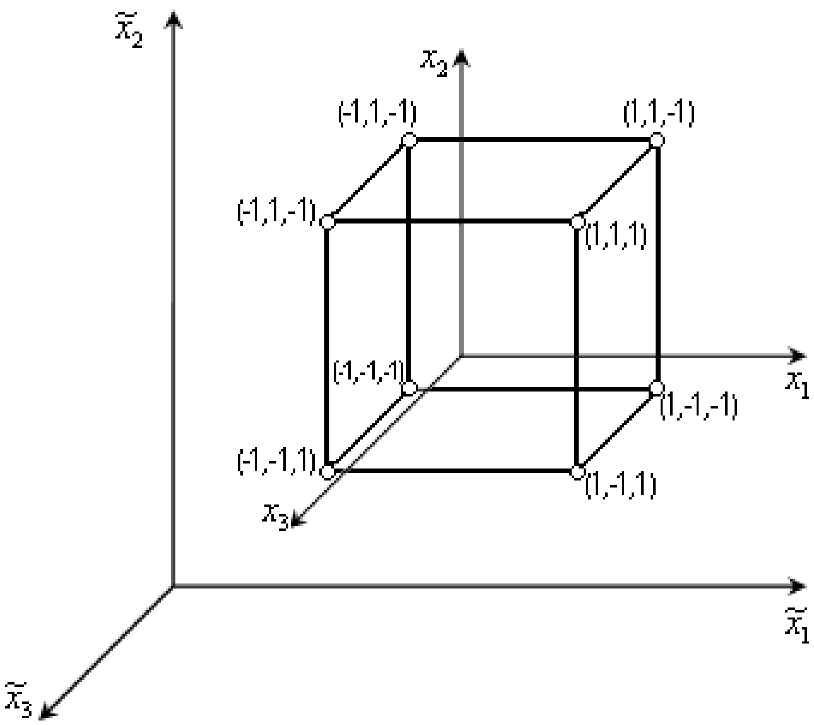

Рис. 2. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^3

Геометрическая интерпретация ПФЭ типа 2^k:

- план 2^2 задается координатами вершин квадрата,

- план 2^3 — координатами вершин куба,

- при k>3 — координатами вершин гиперкуба (рис. 1 — геометрическая интерпретация ПФЭ 2^2, рис. 2 — геометрическая интерпретация ПФЭ 2^3).

ПФЭ типа 2^k обладает следующими свойствами.

Симметричность относительно центра эксперимента. Это значит, что алгебраическая сумма элементов вектор-столбца для каждого фактора равна 0, т. е. $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0$, где j — номер фактора (j=1, 2, ,.., k*), i* — номер опыта (i=1, 2, ..., *N).*

Условие нормировки — формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, т. е. $\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N$. Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются в кодированном виде как +1 и —1.

Ортогональность сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна 0:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0,\ j \neq u,\ j, u = 1,2.....,k.$$

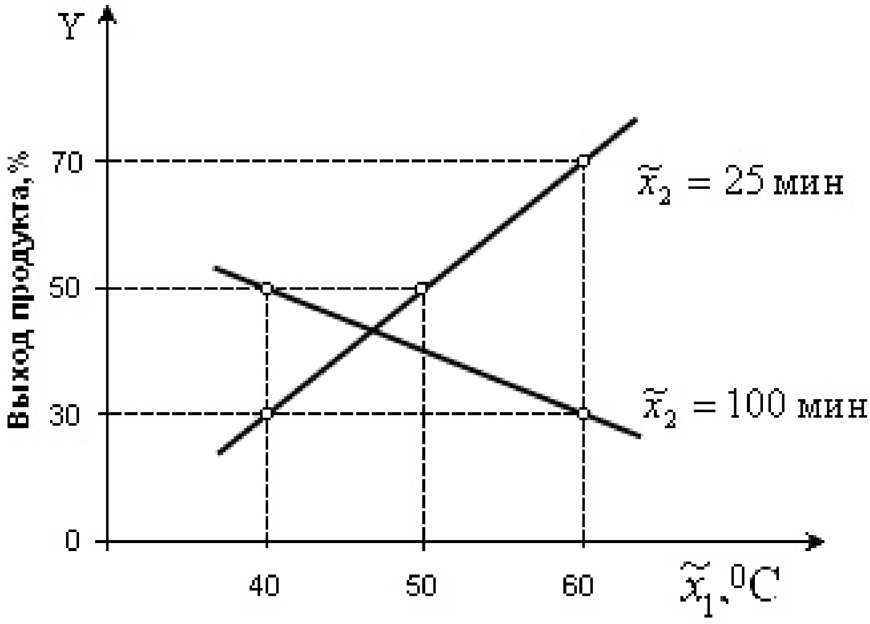

Рис 3. Геометрическая интерпретация парного эффекта взаимодействия факторов

Ортогональностью матриц планов, типа 2^k.

ПФЭ позволяет количественно оценить все линейные эффекты факторов и их взаимодействия. Взаимодействие возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор.

Рассмотрим пример: зависимость выхода продукта y от температуры $\tilde{x}_1$. На рисунке 3 приведена геометрическая интерпретация парного эффекта взаимодействия факторов.

При малом времени реакции ($\tilde{x}_2$=25 мин) для некоторого химического процесса выход основного вещества увеличивается с ростом температуры от 40 до 60 *°C,* а при большом времени ($\tilde{x}_2$=100 мин) тенденция изменения отклика становится обратной. Это и есть эффект взаимодействия факторов x_1 и x_2.

Для ПФЭ 2^2 матрица планирования с учетом свободного члена b_0 и эффекта взаимодействия b_{12} выглядит так:

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Y
1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	+1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	-1	-1	Y_3
4	+1	+1	+1	-1	Y_4

Этот план соответствует модели

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$$

Столбцы x_1 и x_2 задают планирование — по ним непосредственно определяются условия проведения опытов, а столбцы x_0 и x_1x_2 служат только для расчета. Эффект взаимодействия двух факторов называется эффектом взаимодействия первого порядка, трех факторов — второго порядка и т. д.

Полное число всех возможных эффектов, включая b_0 линейные эффекты b_j и взаимодействия всех порядков, равно N –числу опытов ПФЭ. Чтобы найти число всех возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться формулой для числа сочетаний:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$$

где k — число факторов, m — число взаимодействующих элементов. Так, для плана 2^4 число парных взаимодействий равно шести.

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$$

Ортогональность матриц планирования позволяет при обработке данных с помощью метода наименьших квадратов получить независимые друг от друга оценки коэффициентов уравнения регрессии. Это означает, что величина любого коэффициента не зависит от того, какие величины имеют другие коэффициенты. Приведем формулу для расчета коэффициентов:

$$b_j = \sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i / N, \; j = 0, 1, \ldots k$$

При определении коэффициентов используются соответствующие вектор-столбцы.

Независимость оценок коэффициентов, можно получить только при специально запланированном эксперименте. Если экспериментатор будет ставить опыты случайным образом или по своему произвольному выбору, не соответствующему ортогональному плану, то оценки коэффициентов окажутся коррелированными, что усложнит интерпретацию. Такое положение справедливо лишь для модели, включающей линейные эффекты и эффекты взаимодействия. Между тем существенными могут оказаться коэффициенты при квадратах факторов, их кубах и т. д. Так, модель с квадратичными членами для двух факторов имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} {x_1}^2 + b_{21} {x_2}^2$$

Можно ли по плану 2^2 оценить b_{11} и b_{22}? Попытка построения вектор-столбцов для x_1^2 и x_2^2 приводит к столбцам, совпадающим друг с другом и со столбцом x_0. Так как эти столбцы неразличимы, то нельзя определить, за счет чего получается величина b_0, Она зависит как от собственно b_0, так и от вкладов квадратичных членов. Здесь говорят, что имеет место смешанная оценка. Таким образом, из ПФЭ нельзя извлечь информацию о квадратичных членах и членах более высокого порядка. План и модель — эти понятия неразрывно связаны. Нельзя приступать к выбору плана, если не определена модель. Для моделей с квадратичными членами выбираются не ПФЭ 2^k, а планы с числом уровней, большим 2. Такой тип планирования описан, например, в [4, 5, 10, 26].

Ну а какими планами надо пользоваться, если речь идет о линейной модели и взаимодействия считаются незначимыми? Количество опытов в ПФЭ 2^k при k>=3 значительно превышает число линейных коэффициентов. Было бы заманчивым сократить число опытов за счет той информации, которая не существенна при построении линейных моделей. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих оптимальных свойств.

Обратимся вновь к ПФЭ 2^2. Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента: b_0, b_1, b_2, b_{12}. Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс описывается линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента: b_0, b_1, b_2. При линейном приближении $b_{12} \to 0$, и вектор -столбец x_1x_2 можно использовать для введения в план нового фактора x_3.'При этом линейные оценки смешиваются с оценками взаимодействия следующим образом:

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}, b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}, b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$$

Здесь греческими буквами обозначены истинные коэффициенты. Такое смешение не опасно только в том случае, если адекватна линейная модель. Итак, мы нашли способ сократить число опытов. Вместо восьми опытов для трех факторов при ПФЭ 2^3, оказывается, можно поставить только четыре опыта, воспользовавшись дробным планированием или дробной репликой — 1/2-репликой для 2^3.

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3 = X_1X_2$	Y
1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	+1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	-1	-1	Y_3
4	+1	+1	+1	-1	Y_4

При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств ' в рамках линейной модели. Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору поставить в соответствие вектор-столбец взаимодействия, которым можно пренебречь. Тогда значения уровней нового фактора в условиях опыта определяются знаками элементов этого столбца.

Мы рассмотрели самый простой случай: матрицу из четырех опытов для трехфакторного планирования. С увеличением числа факторов вопрос о минимизации числа опытов N становится очень актуальной задачей, ведь N растет как показательная функция в зависимости от числа факторов.

Матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет полурепликой от ПФЭ 2^4, а для пятифакторного планирования — четверть-репликой от ПФЭ 2^5. Для обозначения дробных реплик, в которых p линейных эффектов приравнено к эффектам взаимодействия, удобно, пользоваться условным обозначением 2^{k-p}. Так, полуреплика от 2^6 запишется в виде 2^{6-1}, а четверть-реплика от 2^5 — в виде 2^{6-2}.

Насколько значительно дробное планирование позволяет сократить число опытов, можно видеть из приведенной ниже табл. 1.

Целесообразность применения дробных реплик возрастает с ростом числа факторов. Как видно из табл. 1, при исследовании влияния 15 факторов можно в 2048 раз сократить число опытов, применяя реплику большой дробности (поставив 16 опытов вместо 32 768 для ПФЭ 2^{15}). Такое сокращение числа опытов возможно только для случая, когда линейная модель адекватно описывает исследуемый объект.

Детальное описание дробного планирования содержится в [3].

Таблица 1

Сокращение количества опытов при дробном планировании

Количество факторов	Дробная реплика	Условное	Число	
			Для дробной реплики	Для полного факторного эксперимента
3	1/2 – реплика от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2 – реплика от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4 – реплика от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 – реплика от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 – реплика от 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2 – реплика от 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4 – реплика от 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 – реплика от 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16 – реплика от 2^8	2^{8-4}	16	256
9	1/4 – реплика от 2^9	2^{9-5}	16	512
10	1/32– реплика от 2^{10}	2^{10-6}	16	1 024
11	1/128 – реплика от 2^{11}	2^{11-7}	16	2 048
12	1/256 – реплика от 2^{12}	2^{12-8}	16	4 096
13	1/512 – реплика от 2^{13}	2^{13-9}	16	8 192
14	1/1024 – реплика от 2^{14}	2^{14-10}	16	1 6384
15	1/2048 – реплика от 2^{15}	2^{15-11}	16	3 2768

Пример. Обсудим ситуацию, возникающую при получении покрытий с минимальными внутренними напряжениями. Несколько слов об объекте исследования.

Покрытия служат для защиты изделий от влаги и придают нужные свойства их поверхности. Покрытия получают разными способами – конгрев, блинтовка и др. Существенно, чтобы нанесенное покрытие не отслаивалось от поверхности и обладало заданными физико-механическими свойствами, среди которых одним из главных является сцепление с основой. Внутренние напряжения вызывают растрескивание слоя, отслаивание его от подложки, ухудшение защитных свойств. Разработана методика измерения внутреннего напряжения по деформации изделия.

Наша цель заключается в том, чтобы выяснить, каким образом влияют на внутренние напряжения различные факторы, от которых оно зависит, а также в том, чтобы найти такие условия осаждения, при которых внутренние напряжения окажутся минимальными или даже практически исчезнут. Таким образом, параметром оптимизации (откликом) выбрано внутреннее напряжение «у» в условных единицах. Предварительные исследования показали, что наибольший интерес представляют следующие три фактора: концентрация клея $\tilde{x}_1$, плотность покрытия $\tilde{x}_2$, температура $\tilde{x}_3$.

Таблица 2

Уровни и интервалы варьирования факторов

	Концентрация клея, $\tilde{x}_1$, г/см^3	Плотность, $\tilde{x}_2$, г/м^2	Температура, $\tilde{x}_3$, °С
Основной уровень	0,7	55	45
Интервал варьирования	0,3	25	15
Верхний уровень	1,0	80	60
Нижний уровень	0,4	30	30

Таблица 3

Порядок проведения, план эксперимента и результаты опытов

Номер двойного опыта	Порядок проведения двух повторных опытов	Факторы				Отклики		
		X_0	X_1	X_2	X_3	первый Y'	повтор-ный Y''	сред-ний $\bar{Y}$
1	8; 13	+1	-1	-1	-1	3,40	4,10	3,75
2	3; 12	+1	-1	+1	+1	2,35	3,15	2,75
3	11; 15	+1	-1	+1	-1	-0,40	-0,60	-0,50
4	6; 14	+1	-1	-1	+1	2,70	1,80	2,25
5	2; 4	+1	+1	-1	-1	2,20	3,30	2,75
6	5; 7	+1	+1	-1	+1	0,60	0,90	0,75
7	1; 9	+1	+1	+1	-1	-0,84	-1,16	-1,00
8	10; 16	+1	+1	+1	+1	0,60	0,40	0,50

А теперь приступим к выбору модели и плана эксперимента. Прежде всего, важно уяснить, оценки каких эффектов интересуют экспериментатора. В данном случае это линейные эффекты и парные взаимодействия. Поэтому модель объекта имеет вид:

Таблица 4 Дисперсии среднего

Номер опыта	S_i^2
1	0,122
2	0,160
3	0,010
4	0,202
5	0,302
6	0,022
7	0,025
8	0,010

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

Наиболее простой план, допускающий оценку всех коэффициентов этой модели, — полный факторный эксперимент 2^3. Уровни факторов и их интервалы варьирования, выбраны на основе априорных сведений и представлены в табл. 2, табл. 3 содержит план и результаты опытов, а табл. 4 — оценки дисперсий средних арифметических. Для оценки ошибки воспроизводимости все опыты дублировались.

Практическое занятие №4. Полный факторный эксперимент по исследованию послепечатных процессов

Изучение влияния величины зазора на качество поверхности среза, силу операции, а также определение оптимальной величины зазора при высечке, вырубке, вырезке полиграфических материалов (кашированный картон, ламинированный картон, бумага или пластик).

Теоретические сведения о планировании эксперимента и обработке его результатов.

Изучаемый объект представляют в виде некоторого "черного ящика", выходные параметры которого зависят от входных параметров. Математическая модель отражает связь между выходными и входными параметрами. Поскольку на систему влияют также неконтролируемые факторы, то даже при фиксированных значениях входных факторов величина на выходе ведет себя случайным образом. Поэтому ставится задача нахождения её математического ожидания и дисперсии или доверительных интервалов.

При записи модели греческие буквы применяют для обозначения "истинных" значений соответствующих неизвестных:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \sum_{i<j}^{n} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} x_i^2 + \ldots,$$

где β - коэффициенты регрессии. По результатам эксперимента можно найти только выборочные значения выходной функции коэффициентов:

$$y, b_0, b_i, b_{ij}, \ldots$$

Уравнение регрессии принимает вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i<j}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \ldots$$

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Факторы могут быть количественными и качественными, их уровни могут быть равноотстоящими между собой и неравно отстоящими, поэтому S уровней фактора X_i удобно при планировании эксперимента представить в кодовом масштабе F_i значениями $0,1,2,\ldots,S-1$. В планы входит также фиктивная переменная F_0, необходимая для расчета свободного члена регрессии и имеющая во всех опытах уровень 0.

Запись матрицы планирования полного факторного эксперимента 3^2 приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Матрица плана ПФЭ 3^2

№ опыта	F_0	F_1	F_2	F_1F_2	F_1^2	F_2^2	$F_1^2F_2^2$	$F_1F_2^2$	$F_1^2F_2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	2	0	2	1	2
3	0	2	0	2	1	0	1	2	1
4	0	0	1	1	0	2	2	2	1
5	0	1	1	2	2	2	1	0	0
6	0	2	1	0	1	2	0	1	2
7	0	0	2	2	0	1	1	1	2
8	0	1	2	0	2	1	0	2	1
9	0	2	2	1	1	1	2	0	0

Значения уровней для эффектов взаимодействий определены сложением уровней взаимодействующих факторов и делением суммы на число уровней варьирования факторов в эксперименте. Остаток от деления дает значения уровня. Например, уровни для пятого столбца матрицы определены из соотношения:

$$F_1F_2 = (F_1 + F_2)/3.$$

Для опыта № 9 сумма в скобках равна 4. Остаток от деления ее на 3 равен 1. Следовательно, в опыте N9 уровнем эффекта взаимодействия F_1F_2 является 1.

Приведенный выше кодированный масштаб применяется при составлении планов, в частности, при выборе стандартных планов по каталогам их преобразований для применяемых в эксперименте чисел уровней варьирования факторов.

Для обработки данных эксперимента применяют другой кодированный масштаб.

Будем строить модель

$$y = b_0 + \sum_{1\le i\le 3} b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j + \sum_{1\le i\le 3} X_i X_j + b_{111} X_1^3, \tag{1.1}$$

где X_i - факторы в натуральном масштабе, т.е. в МПа, м, кг и т.д.

В кодированном масштабе модель представим в виде:

$$y = b_1 + \sum_{1\le i\le 3} b_i x_i + \sum_{1\le i\le 3} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1\le i\le 3} b_{ii} z_{i_j} + b_{111} q_1, \tag{1.2}$$

где x_i - линейная функция от X_i ; z_i - квадратичная функция от X_i ; q_1 - кубическая функция от X_1.

Планы факторного эксперимента должны обладать следующими свойствами:

1. Симметричность, т.е. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0$, где i - номер опыта; j - номер фактора;

2. Соответствие условию нормировки $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = n$;

3. Ортогональность - сумма почленных произведений любых двух фактор - столбцов равна 0:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{i_u} = 0;$$

4. Ротатабельность - точность предсказания значений y одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента. При этом точность с ростом числа независимых переменных увеличивается по сравнению с однофакторным экспериментом.

Этому явлению можно дать геометрическое истолкование. Известно, что в линейных задачах коэффициенты регрессии определяются тем точнее, чем больше радиус обследуемой сферы. В однофакторной задаче это легко иллюстрируется графиком (рисунок 1.1.)

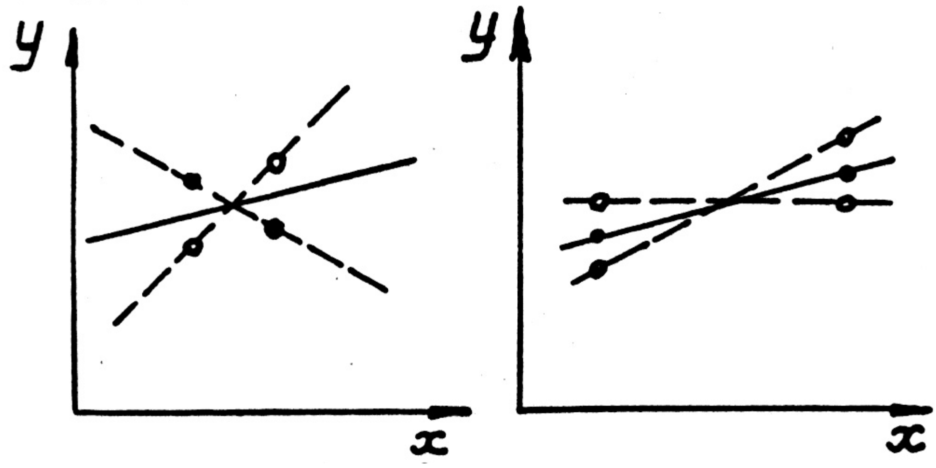

Рисунок 1.1 - Зачерненные кружки - истинные значения, светлые кружки – значения, отсчитанные с ошибкой.

На рисунке показано, что если две точки, в которых производятся измерения, располагаются близко друг к другу, то даже небольшая ошибка в эксперименте вызывает большую ошибку в оценке коэффициента регрессии. Чем дальше разнесены точки, тем точнее оцениваются коэффициенты регрессии при тех же ошибках в эксперименте. Однако в реальной исследовательской работе нельзя сколь угодно увеличивать радиус обследуемого пространства, поскольку границы интервалов варьирования часто бывают жестко заданы, исходя из соображений, связанных с техникой эксперимента.

Применяя многофакторные планы, мы увеличиваем радиус обследуемой сферы за счет свойств многомерного пространства, не увеличивая при этом интервалов варьирования по каждой переменной в отдельности. Рассмотрим задачу с тремя переменными. Если каждая из переменных варьируется на двух уровнях, а именно, -1 и $+1$, то объём обследуемого пространства ограничен кубом, координаты вершин которого задаются перестановкой чисел $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (рисунок 1.2).

План объединяет вершины куба таким образом, что получается правильный тетраэдр, а в общем виде - симплекс.

Опишем мысленно вокруг симплекса сферу - её радиус, очевидно, равен

$r = \sqrt{3}$. Для задачи с шестью переменными план задается координатами вершин правильного симплекса в шестимерном пространстве, и радиус обследуемой сферы уже равен $r = \sqrt{6}$.

Таким образом, с ростом числа независимых переменных растет радиус обследуемой сферы, хотя интервалы варьирования по каждой независимой переменной остаются по-прежнему теми же. Увеличение радиуса происходит за счёт свойств многофакторного пространства, и в результате резко повышается эффективность эксперимента.

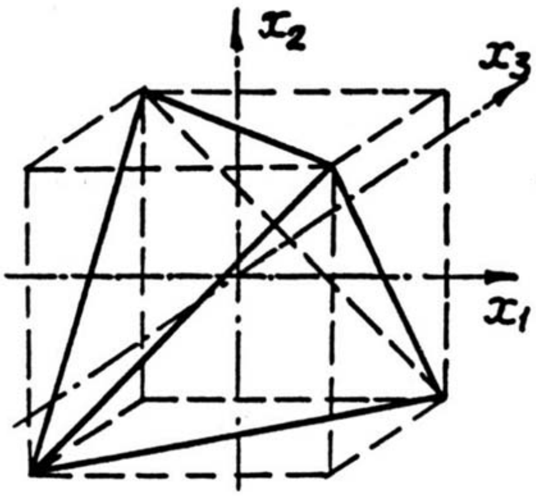

Рисунок 1.2 - Схема представления факторного пространства

Запишем линейную функцию от X_i в виде

$$x_i = k_i\left(X_i + A_i\right), \tag{1.3}$$

где k_i и A_i - константы.

Из условия симметричности плана

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i_u} = k_i \sum_{u=1}^{N}\left(X_{i_u} + A_i\right) = 0$$

или

$$\sum_{u=1}^{N} X_{i_u} + NA_i = 0,$$

отсюда

$$A_i = -\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} X_{i_u}.$$

После подсчёта A_i коэффициенты k_i подбирают таким образом, чтобы уровни x_i представляли собой небольшие числа, лучше целые.

Далее запишем z_i как квадратичную функцию от x_i:

$$z_i = k_i'\left(x_i^2 + a_i x_i + c_i\right), \tag{1.4}$$

где k_i', a_i, c_i - константы.

Из условия симметричности плана

$$\sum_{u=1}^{N} z_{i_u} = k_i'\left(\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + a_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} + N \cdot c_i\right) = 0,$$

и, поскольку, $\sum_{u=1}^{N} x_{i_u} = 0$, то и $\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + N \cdot c_i = 0$. Отсюда $c_i = -\frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2$.

Из условия ортогональности плана

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u} z_{i_u} = 0. \qquad (1.5)$$

После подстановки (1.3) и (1.4) в (1.5) получим

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u} z_{i_u} = \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 + a_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + c_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} = 0.$$

Из последнего выражения, с учётом условия симметричности плана,

$$a_i = -\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 .$$

Коэффициенты k_i' выбираются из условия, чтобы уровни z_i представляли собой небольшие числа, лучше целые.

Запишем q_i как кубическую функцию от x_i :

$$q_i = k_i'' \cdot \left(x_i^3 + d_i x_i^2 + l_i x_i + n_i\right),$$

где k_i'', d_i, l_i, n_i - константы. Из условия симметричности и ортогональности

$$\sum_{u=1}^{N} q_{i_u} = \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + l_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} + N \cdot n_i = 0,$$

$$\sum_{u=1}^{N} q_{i_u} x_{i_u} = \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^4 + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 + l_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + n_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} = 0,$$

$$\sum_{u=1}^{N} q_{i_u} z_{i_u} = \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 z_{i_u} + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 z_{i_u} + l_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} z_{i_u} + n_i \sum_{u=1}^{N} z_{i_u} = 0,$$

после преобразований из тех же условий

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 + N \cdot n_i = 0,$$

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^4 + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 + l_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 = 0,$$

$$\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 z_{i_u} + d_i \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 z_{i_u} = 0.$$

Решив эту систему, получим

$$d_i = -\frac{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 z_{i_u}}{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 z_{i_u}}, \quad l_i = -\frac{1}{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2}\left(\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^4 - \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 z_{i_u}}{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 z_{i_u}}\right),$$

$$n_i = -\frac{1}{N}\left(\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 - \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^3 z_{i_u}}{\sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2 z_{i_u}}\right).$$

Таким образом совершен переход к кодированному масштабу, в котором план эксперимента симметричен и ортогонален. Поэтому коэффициенты модели (1.2) считают по формуле

$$b_i = \sum_{u=1}^{N} x_{i_u} y_u \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2, \tag{1.6}$$

где $i = 0,1,2,...,k$ - номер фактора.

Дисперсии оценок коэффициентов определяются по формуле

$$S_{b_i}^2 = S_y^2 \Big/ \sum_{u=1}^{N} x_{i_u}^2, \tag{1.7}$$

где S_y^2 - дисперсия воспроизводимости эксперимента.

Если все опыты, заданные планом, выполняют по одному разу, а один из них дублируют несколько раз, то дисперсию воспроизводимости рассчитывают по формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{q=1}^{n} \left(y_q - \bar{y}\right)^2}{f_1}, \tag{1.8}$$

где y_q - результат q-го повтора; $\bar{y}$ - среднее арифметическое значений всех n дублей опыта; f_1 - число степеней свободы.

Число степеней свободы - понятие, учитывающее в статистических исследованиях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Это число определяется как разность между числом выполненных опытов и числом констант, подсчитанных по результатам тех же опытов. В данном случае требуется подсчитать одну константу $\bar{y}$. Поэтому в данном случае

$$f_1 = n - 1.$$

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определяют по выражению

$$\Delta_{b_i} = t_{\alpha; f_1} S_{b_i}, \tag{1.9}$$

где t - критерий Стьюдента, берется из таблицы П.1 (см. приложение) в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы f_1 при определении дисперсии воспроизводимости эксперимента S_y^2; S_{b_i} - среднеквадратичная ошибка в определении коэффициента регрессии.

Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина больше доверительного интервала или равна ему, т.е.

$$|b_i| \geq \Delta_{b_i}.$$

Смысл этого равенства заключается в том, что абсолютная величина коэффициента должна быть в t раз больше, чем ошибка его определения.

Коэффициенты, которые по абсолютной величине меньше своих доверительных интервалов, в модель можно не включать.

3.Содержание работы

Величина зазора при вырубке варьируется на трех уровнях, материал заготовки - на двух. План полного факторного эксперимента в кодах F_i представлен в таблице 1.2.

Таблица 1.2 - Матрица плана $3 \times 2//6$ в кодах F_i

Номер опыта	F_1	F_2	Номер опыта	F_1	F_2
1	0	0	4	0	1
2	1	0	5	1	1
3	2	0	6	2	1

Вырубаются кружки из стали 45 и меди в матрице диаметром 25 мм. Толщина заготовок 7 мм. Уровни варьирования зазора, по отношению к толщине заготовки, выбраны с учётом литературных данных и составляют 0,03; 0,05; 0,1.

Запишем этот план в натуральном масштабе, оставив уровням качественного фактора X_2 обозначения уровней F_2 (таблица 1.3). В последнем столбце таблицы 1.3 приведен порядок реализации опытов, выбранный по таблице случайных чисел.

Таблица 1.3 - Матрица плана $3 \times 2//6$ в натуральном масштабе

Номер опыта	X_1	X_2	Порядок реализации	Номер опыта	X_1	X_2	Порядок реализации
1	0,03	0	3	4	0,03	1	1
2	0,05	0	4	5	0,05	1	5
3	0,10	0	2	6	0,10	1	6

Для обработки данных эксперимента совершен переход к новому кодированному масштабу. По изложенной выше методике формулы перехода от

X_i к x_i и z_i получены следующими:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 100(X_1 - 0{,}06), \\ z_1 &= \left(x_1^2 - 1{,}4x_1 - 8{,}7\right), \\ x_2 &= 2(X_2 - 0{,}5). \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

План эксперимента в кодированном масштабе представлен в таблице 1.4.

Таблица 1.4 - Матрица плана $3 \times 2//6$ в кодированном масштабе

№ опыта	x_0	x_1	x_2	z_1	x_1x_2	x_1z_1	x_2z_1	Качество среза	Усилие операции
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	-3	-1	4,5	3	-13,5	-4,5		
2	1	-1	-1	-6,3	1	6,3	6,3		
3	1	4	-1	1,8	-4	7,2	-1,8		
4	1	-3	-1	4,5	-3	-13,5	4,5		
5	1	-1	-1	-6,3	-1	6,3	-6,3		
6	1	4	-1	1,8	4	7,2	1,8		

Столбец x_0, служащий для определения коэффициента b_0 модели, состоит только из $+1$. Уровни эффектов взаимодействий получены перемножением уровней соответствующих главных эффектов.

В результате эксперимента определяют качество среза и усилие при вырубке. Результаты заносят в таблицу 1.4 .

Для исключения влияния на окончательный результат эксперимента навыка, появляющегося в процессе работы, или усталости опыты проводят в порядке, указанном в таблице 1.3. Для подсчёта дисперсии воспроизводимости эксперимента один из опытов повторяют 4 раза. При этом дубли одного опыта проводят не один за другим, а перемежая с проведением остальных опытов.

Заготовки после вырубки (рисунок 1.3) осматривают и оценивают качество среза по 3-х бальной шкале. Наилучшим срезом, оцениваемым в 3 бала, считается состоящий из трёх зон: I - зона скругления, II - блестящий поясок, III - зона скалывания. При этом зона I должна иметь незначительный размер. Если эта зона возрастает по сравнению с наименьшей, полученной при вырубке заготовки из данного материала, или вырубаемый образец имеет заметный прогиб, то качеству среза присваивают оценку 2 балла. Если поверхность рваная, с дополнительными поясками, то качеству среза присваивают оценку 1 балл.

Рисунок 1.3 - заготовка после вырубки

Усилия при вырубке берутся из таблицы у преподавателя по номеру заготовки.

Результаты 4 дублей одного опыта проверяют на отсутствие промахов. Для этого применяют следующий способ.

Пусть имеется $n+1$ результатов наблюдений, где значение x_{n+1} резко выделяется. Тогда для n результатов находят

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,; \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

и рассчитывают отклонение $x_{n-1} - \bar{x}$. Затем находят предельное отклонение

$$\varepsilon = t_{\alpha;n-1} \cdot S\,,$$

где $t_{\alpha;n-1}$ - критерий Стьюдента, берется из таблицы П.1. (см. приложение) в зависимости от уровня значимости и числа степеней свободы $n-1$. Далее сравнивают $\left(x_{n+1} - \bar{x}\right)$ с ε. Если $\left(x_{n+1} - \bar{x}\right) > \varepsilon$, то с вероятностью $P = 1 - \alpha$ значение x_{n+1} считают промахом и отбрасывают.

Если промах отсутствует, то находят среднее арифметическое результатов четырех дублей, и это значение заносят в таблицу 1.4 как результат опыта. Если имеется промах, то результатом опыта считают среднее арифметическое результатов трех дублей, оставшихся после исключения промаха.

После проведения всех опытов определяют коэффициенты модели (1.2) по формуле (1.6). Дисперсии коэффициентов вычисляют по формуле (1.7), затем определяют выборочные среднеквадратичные отклонения S_i для каждого коэффициента как корень квадратный из соответствующей дисперсии.

Дисперсию воспроизводимости эксперимента определяют по результатам четырех дублей одного опыта по формуле (1.8).

Доверительные интервалы оценок коэффициентов определяют по формуле (1.9) при $\alpha = 0{,}05$ и $n = 3$, поскольку контрольный опыт дублировался четыре раза.

Коэффициенты, которые по абсолютной величине больше своих доверительных интервалов, признают статистически значимыми при 5% - ном уровне значимости и включают в модель (1.2).

Таким образом получают два уравнения, одно из которых описывает зависимость качества среза, а другое - усилие при вырубке от величины зазора, материала заготовки и взаимодействия этих двух факторов.

Однако полученные уравнения записаны в кодированном масштабе и неудобны для практического использования. Для перевода их в натуральный масштаб используют уравнения (1.10). В начале члены, содержащие z_1 , раскрывают в форме функции от x_1, а затем все члены раскрывают в форме функции от X_1 и X_2. В процессе раскрытия выражений приводят подобные члены.

Полученные уравнения анализируют для установления оптимальной величины зазора. Анализ проводят отдельно для заготовок из стали 45 и из меди.

Для этого в уравнения подставляют значения фактора $X_2 = 0$ для стали 45 и $X_2 = 1$для меди. Получают зависимости качества среза и усилия операции как функции величины зазора. Их дифференцируют по этому аргументу и производные приравнивают к нулю. Таким образом, выявляют оптимум. По результатам анализа делают выводы.

4. Содержание расчетов

В расчетах приводят матрицы плана в натуральном и кодированном масштабах (таблицы 1.3 и 1.4) с заполненными графами результатов опытов, формулы перехода от натурального масштаба к кодированному.

Описываются методики и результаты проверки дублей опыта на отсутствие промахов, расчетов дисперсии воспроизводимости эксперимента, оценок коэффициентов моделей и их дисперсий, доверительных интервалов оценок коэффициентов.

Приводятся модели в кодированном и натуральном масштабах и их анализ.

Даются рекомендации по оптимизации величин зазоров при вырубке образцов из картона.

Расчеты заканчивается выводами по проведенной работе.

5. Контрольные вопросы

1. Как при составлении ПФЭ определяются значения уровней для эффектов взаимодействий факторов?
2. В чем заключается свойство симметричности плана.?
3. Что такое соответствие плана условию нормировки?
4. Как план называется ортогональным?
5. Что такое ротатабельность плана?
6. Для чего и как определяется дисперсия воспроизводимости эксперимента.
7. Как рассчитываются оценки коэффициентов модели?
8. Как определяются доверительные интервалы оценок коэффициентов.
9. В каком случае коэффициент считается значимым.
10. Как проводится выявление и отсев промахов в результатах наблюдений.

Практическое занятие №5. Постановка факторного эксперимента при исследовании качества полиграфических изделий (часть 1)

Цель работы:

Освоить математические методы планирования полного факторного эксперимента (ПФЭ); научиться определять математические модели I и II порядков при исследовании качества полиграфических изделий

Содержание работы

1 .Планирование полного факторного эксперимента и обработка результатов.

2. Определение линейной модели ПФЭ.
3. Проверка адекватности уравнения I порядка.
4. Планирование многофакторного эксперимента II порядка.
5. Определение уравнения регрессии II порядка.
6. Проверка адекватности уравнения II порядка.
7. Анализ результатов работы. Формулировка выводов.

Пособия и инструменты: таблицы значений критериев Стьюдента, Фишера; микрокалькулятор.

Вариант №4

Определяли воздухопроницаемость материалов с различными значениями плотности - (X1), (П0=180), и коэффициентом уплотненности - X2, (C0=0,7) с интервалами изменения соответственно 50 и 0,2. Определить уровни варьирования факторов, построить рабочую матрицу планирования. Провести обработку ПФЭ, найти уравнение регрессии, проверить его адекватность, результаты расчёта представить графически.

Матрица эксперимента

№ опыта	X0	X1	X2	X1X2	Y дм/м *с
1	+	+	-	-	200
2	+	-	-	+	380
3	+	+	+	+	150
4	+	-	+	-	300

Общие сведения

Качество полиграфических изделий зависит от целого ряда факторов (свойства используемых материалов, качество соединений и др.). Поэтому при исследовании качества изделий решают многофакторную задачу, в которой изучаемое свойство объекта (Y) зависит от нескольких факторов (X_1 , X_2, X_3, X_4 и т.д.).

С той целью проводится полный факторный эксперимент (ПФЭ), в котором реализуются все возможные комбинации рассматриваемых уравнений факторов, а результаты оцениваются с помощью статистического анализа.

Планирование ПФЭ связано с построением линейных моделей вида

$$\overline{y} = b_0 + \sum_{1}^{k} b_i x_i + \sum_{1}^{k} b_{ij} x_i y_j$$

где $\overline{y}$ - значение критерия;

b_i - линейные коэффициенты;

b_{ij}— коэффициенты двойного взаимодействия факторов.

Многофакторный эксперимент представляет собой сложную задачу, поэтому очень часто линейная математическая модель является неадекватной реальному процессу.

В данном случае переходят к планированию второго и более высоких порядков. Уравнение регрессии при этом представляет полином второй или более высокой степени. Так, при планировании второго порядка изучаемый процесс описывается уравнением второго порядка, общий вид которого представлен ниже

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2$$

Порядок статистической обработки результатов эксперимента при многофакторном планировании соответствует последовательности обработки при однофакторном планировании.

Выполнение работы

1.1. Определение коэффициентов уравнения регрессии.

1.1.1. Свободный член уравнения регрессии определяем по формуле:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{1}^{N} \overline{y}_u$$

$$b_0 = 257{,}5$$

где n - число опытов;

$\overline{y}_u$ - средний результат в каждом опыте.

1.1.2. Линейные коэффициенты определяют по формуле:

$$b_i = \frac{1}{n} \sum_{1}^{N} x_{iu} \overline{y}_u$$

$$b_1 = -82{,}5$$

$$b_2 = -32{,}5$$

где x_{iu} - кодированное значение i-го фактора в каждом отдельном опыте.

1.1.3. Коэффициенты парного взаимодействия.

$$b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot \overline{y}_u$$

$b_{12} = 7,5$

1.2. Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

1.2.1 Определение дисперсии результатов эксперимента:

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_{uj} - \bar{y}_u)^2}{n(N-1)}$$

где $\sum_1^N \sum_1^n (y_{uj} - \bar{y}_u)^2$ – сумма среднеквадратических отклонений результатов эксперимента от среднего значения в каждом определенном опыте;

N - повторность опытов.

$S^2\{y\} = 1,581$

1.2.2 Определение дисперсии (ошибки) коэффициентов уравнения регрессии по формуле

$$S^2_{\{b_i\}} = \frac{S^2\{\bar{y}\}}{N - n_0}$$

1.2.3. Определение доверительного интервала для коэффициентов уравнения.

$$\Delta b_i = \pm t_T \cdot S_{\{b_i\}}$$

где t_T = 3,18-табличное значение критерия Стьюдента для n=4.

$\Delta b_1 = 1,124$

$\Delta b_2 = -1,124$

После определения доверительного интервала сравниваем его величину с коэффициентами регрессии. Величина доверительного интервала меньше (по модулю) величины коэффициента, следовательно, данный коэффициент уравнения значим и не исключается из уравнения регрессии.

1.3. Составление уравнения регрессии

После оценки значимости коэффициентов студенты составляют уравнение регрессии в виде.

$$\hat{y}_u = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_ix_i + b_{12}x_1x_2 + ... + b_{ij}x_ix_j$$

$\hat{y}_u = 257,5 \ \ - 82,5x_1 - 32,5x_2 + ..7,5x_1x_2$

где - $b_0 = 257,5$

$$b_1 = -82,5$$

$$b_2 = -32,5$$

$$b_{12} = 7,5$$

1.4. Проверка адекватности уравнения регрессии

Адекватность полученного уравнения регрессии определяем с помощью критерия Фишера. Для этого рассчитывают значения критерия по уравнению регрессии, подставляя вместо x_u кодированное значение каждого фактора в данном опыте. После этого определяют квадраты отклонений между расчетными и экспериментальными значениями $(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$.

Результаты заносим в таблицу 1.

Таблица 1.

№ опыта	Результат эксперимента $\bar{y}_u$	Расчётное значение $\hat{y}_u$	$\bar{y}_u - \hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
1	200	142.5	-7.5	56.25
2	380	307.5	7.5	56.25
3	150	142.5	7.5	56.25
4	300	307.5	-7.5	56.25

После этого определяем дисперсию адекватности по формуле:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_1^N n(\bar{y}_u - y_u)^2}{N - k - 1}$$

где *n*– число повторов опыта;

k - количество факторов.

Тогда расчётное значение критерия Фишера:

$$F_p = \frac{S^2_{ад}}{S^2\{\bar{y}\}}$$

$$F_p = 21,213$$

$$Fт = 19,45$$

$$Fp > Fт$$

Определив расчётное значение критерия Фишера и сравнивая его с табличным, определяют адекватность уравнения регрессии изучаемому процессу. Если $F_p > F_т$, то гипотеза об адекватности отвергается, и уравнение регрессии не соответствует реальному процессу, т.е. связь между критерием и факторами нелинейная.

Вывод: В данном практическом занятии освоили математические методы планирования полного факторного эксперимента (ПФЭ), научились определять математические модели I порядка, при исследовании качества изделий.

Изучив алгоритм выполнения работы и выполнив ее, определили, что адекватность отвергается ($F_p > F_T$) и уравнение регрессии не соответствует реальному процессу, т.е. связь между критериями и факторами нелинейная. Следовательно, уравнение будет иметь степенную зависимость. Переходим к планированию эксперимента высшего порядка.

Практическое занятие №6. Постановка факторного эксперимента при исследовании качества полиграфических изделий (часть 2).

Определяли воздухопроницаемость тканей с различными значениями плотности нитей по основе (X1)(П0=180), и коэффициентом уплотненности (X2)(C0=0,7) с интервалами изменения соответственно 50 и 0,2. Определить уровни варьирования факторов, построить рабочую матрицу планирования. Провести обработку ПФЭ, найти уравнение регрессии, проверить его адекватность, результаты расчёта представить графически.

№ опыта	X0	X1	X2	X1X2	$X^2 11$	$X^2 22$	Y дм/м •с
ядро							
1	+	+	-	-	+	+	200
2	+	-	-	+	+	+	380
3	+	+	+	+	+	+	150
4	+	-	+	-	+	+	300
звёздные							
5	+	-1,414	0	0	2,0	0	270
6	+	1,414	0	0	2,0	0	340
7	+	0	-1,414	0	0	2,0	180
8	+	0	1,414	0	0	2,0	330
центральные							
9	+	0	0	0	0	0	190
10	+	0	0	0	0	0	200
11	+	0	0	0	0	0	230
12	+	0	0	0	0	0	180
13	+	0	0	0	0	0	220

2.1. Определение коэффициентов уравнения регрессии

2.1.1 Свободный член уравнения определяем по формуле:

$$b_0 = a_1 \sum_1^N y_u - a_2 \sum_1^k \sum_1^N x_{iu}^2 \cdot y_u$$

$$b_0 = 204{,}068$$

где y_u - среднее экспериментальное значение в каждом u-том опыте;

x - кодированное значение уровня k-го фактора в u-том опыте;

k - количество факторов;

a_1, a_2 - числовые константы, берутся из таблицы.

Число факторов (k)	Число опытов	Коэффициенты						
		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7

2	13	0,200	0,100	0,125	0,250	0,125	0,0187	0,100
3	20	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0069	0,0568
4	31	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5	32	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341

2.1.2 Линейные коэффициенты определяем по формуле:

$$b_i = a_3 \sum_{1}^{N} x_{iu} \cdot y_u$$

$b_1 = 53{,}623$

$b_2 = 10{,}262$

2.1.3. Коэффициенты парного взаимодействия:

$$b_{ij} = a_4 \sum_{1}^{N} x_{iu} \cdot x_{ju} \cdot y_u$$

$b_{12} = -7{,}5$

где x_{iu}, x_{ju}-кодированные значения уровней i-го и j-го факторов соответственно и в u-том опыте.

2.1.4 Коэффициенты при квадратичных членах уравнения регрессии определяют:

$$b_{ii} = a_5 \sum_{1}^{N} x_{iu}^2 \cdot y_u + a_6 \sum_{1}^{k} \sum_{1}^{N} x_{iu}^2 \cdot y_u - a_7 \sum_{1}^{N} y_u$$

$b_{11} = 20{,}66$

$b_{22} = -4.34$

После вычисления коэффициентов уравнения регрессии переходят к оценке их значимости.

2.2. Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

2.2.1 Определяем дисперсию воспроизводимости $S^2\{y\}$ по формуле (дублирование опытов проводится только в нулевой точке).

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_{1}^{n_0} (y_{0j} - \bar{y}_0)^2}{n_0 - 1} = 82.5$$

где $n_0 = 5$ – число опытов в нулевой точке;

$\bar{y}_0 = 252$ – средний результат в нулевой точке;

y_{0j} - каждый отдельный результат в нулевой точке.

2.2.2 Дисперсию (среднеквадратическую ошибку) в определении коэффициентов определяют для свободного члена:

$$S^2_{\{b_0\}} = \frac{2 \cdot A \cdot \lambda \cdot (k+2)}{N} \cdot S^2\{\overline{y}\} = 1.154$$

для линейных коэффициентов:

$$S^2_{\{b_i\}} = \frac{S^2\{\overline{y}\}}{N - n_0}$$

$$S^2_{\{b_1\}} = S^2_{\{b_2\}} = 10.313$$

для коэффициентов парного взаимодействия:

$$S^2_{\{b_{ij}\}} = \frac{C^2}{N} \cdot S^2\{\overline{y}\}$$

$$S^2_{\{b_{12}\}} = 16.758$$

для квадратичных коэффициентов:

$$S^2_{\{b_{ii}\}} = \frac{AC^2[(k+1) \cdot \lambda - (k-1)]}{N} \cdot S^2\{\overline{y}\}$$

$$S^2_{\{b_{11}\}} = S^2_{\{b_{22}\}} = 1.079$$

Формулы для подсчёта постоянных C, A, λ приведены ниже:

$$C = \frac{N}{N - n_0} = 1.625$$

$$A = \frac{1}{2\lambda - [(k+2) \cdot \lambda - k]} = 0.003788$$

$$\lambda = \frac{(k+2)(k+1)]}{2} = 6$$

где N – общее число опытов;
k – число факторов в эксперименте.

2.2.2 Определение доверительных интервалов для оценки значимости коэффициентов уравнения.

Доверительные интервалы для b_0, b_i, b_{ji} и b_{ii} соответственно определяют по формулам:

$$\Delta b_0 = \pm 2S_{\{b_0\}} = \pm 2.148$$

$$\Delta b_i = \pm 2S_{\{b_i\}} = \pm 6.423$$

$$\Delta b_{ij} = \pm 2S_{\{b_{ij}\}} = \pm 8.187$$

$$\Delta b_{ii} = \pm 2S_{\{b_{ii}\}} = \pm 2.07$$

Проверяем значимость коэффициентов уравнения, сравниваем соответствующий доверительный интервал с величиной коэффициента. $|b_i|<|\Delta b_i|$. Итак, коэффициенты парного взаимодействия незначимы, т.к. их числовые значения меньше по модулю их доверительного интервала, следовательно, эти коэффициенты исключаются из уравнения регрессии. А все остальные коэффициенты значимы, т.к. их числовые значения больше по модулю их доверительного интервала.

2.3. Составление уравнения регрессии.

Адекватность уравнения проверяем по критерию Фишера:

$$F_p = \frac{S^2_{ад}}{S^2\{\overline{y}\}}$$

где дисперсию адекватности определяем по формуле:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_1^N (\overline{y}_{ui} - \hat{y}_u) - \sum_{n_0}^N (y_{0j} - \overline{y}_0)^2}{N - \lambda - (n_0 - 1)}$$

где $\overline{y}_{uj}$ - среднее экспериментальное значение критерия в каждом опыте;

$\hat{y}_u$ - расчётное значение критерия;

y_{0j} - значение критерия в каждой нулевой точке;

$\overline{y}_0$ - среднее значение критерия в нулевой точке.

№ опыта	Результат эксперимента $\overline{y}_{uj}$	Расчётное значение $\hat{y}_u$	$\overline{y}_{ui} - \hat{y}_u$	$(y_{0i} - \hat{y}_0)^2$
1	200	204.497	-4.497	–
2	380	311.743	68.257	–
3	150	225.021	-75.021	–
4	300	332.267	-32.267	–
5	270	217.547	52.453	–
6	340	369.192	-29.192	–
7	180	228.874	-48.874	–
8	330	257.895	72.105	–
9	240	252.062	-12.062	144
10	255	252.062	2.938	9
11	260	252.062	7.938	64
12	245	252.062	-7.062	49
13	260	252.062	7.938	64

$S^2_{ад} = -109{,}115$

$F_p = -1{,}323$

$F_T = 2{,}69$

$F_p < F_T$

Определив расчётное значение критерия Фишера и сравнив его с табличным, определили адекватность уравнения регрессии изучаемому процессу. Расчётное значение критерия Фишера меньше табличного $F_p < F_T$, следовательно, гипотеза об адекватности не отвергается, и уравнение регрессии соответствует реальному процессу, т.е. связь между критерием (y) и факторами (x) линейная.

Вывод: В данном практическом занятии по результатам экспериментальных данных, содержащихся в 1 части задания, мы достроили рабочую матрицу эксперимента, и перешли к планированию многофакторного эксперимента второго порядка. Уравнение регрессии при этом представляет полином второй степени.

Получили следующее уравнение регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_1^2$$

$b_0 = 204{,}068$, $b_1 = 53{,}623$

$b_2 = 10{,}262$, $b_{11} = 20{,}66$

$b_{22} = -4.34$

$$\hat{y} = 204{,}068 + 53{,}62 x_1 + 10{,}262 x_2 + 20{,}66 x_1^2 + 4{,}34 x_1^2$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1 - Значения t - критерия Стьюдента
при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения - критерия	Число степеней свободы	Значения - критерия	Число степеней свободы	Значения - критерия
1	12,710	11	2,201	21	2,080
2	4,303	12	2,179	22	2,074
3	3,182	13	2,160	23	2,069
4	2,776	14	2,145	24	2,064
5	2,571	15	2,131	25	2,060
6	2,644	16	2,120	26	2,056
7	2,365	17	2,110	27	2,052
8	2,306	18	2,101	28	2,048
9	2,262	19	2,093	29	2,045
10	2,228	20	2,086	30	2,042
					1,960

П2. Значение критерия Кохрена G_{1-q} для q = 0,05*

n	f													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8332	8159	801	788	7341	6602	5813	5
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5365	5175	5017	4884	4366	372	3093	25
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4564	4387	4241	4118	3645	3066	2513	2
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	7271	5612	48	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	6798	5157	4377	391	3595	3362	3185	3043	2926	2829	2462	2022	1616	125
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568	2226	182	1446	1111
10	602	445	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1
12	541	3924	3264	288	2624	2439	2299	2187	2098	202	1737	1403	11	833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	191)	1815	1736	1671	1429	1144	889	667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303	1108	879	675	5
30	2929	198	1593	1377	1237	1137	1061	1002	958	921	771	604	457	333
40	237	1576	1259	1082	968	887	827	78	745	713	595	462	347	25
60	1737	1131	895	765	682	623	583	552	520	497	411	316	234	167
∞	998	632	495	419	371	337	312	292	279	266	218	165	12	83

* Все значения G_{1-q} меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь знаки, следующие после запятой.

Таблица П.3 - Значения F - критерия Фишера
при 5%-ном уровне значимости.

		2	3	4	5	6	12	24	
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,5	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,9
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
28	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	1,9	1,6	1,3
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

П.4 Таблица случайных чисел.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0,94	0,8	1,1	0,9	0,86	1,2	1,21	1,14	0,87	1,13	1,2
1	1,11	1,15	0,96	1,1	1,21	0,92	0,9	0,93	1,15	1,14	0,85
2	0,86	1	0,99	0,9	1,11	0,98	0,85	1,1	1,12	1,2	0,96
3	0,94	1,05	1,12	1,1	0,97	0,93	0,97	1,07	1,15	1,12	0,94
4	0,94	1,08	1,06	1,14	1	1,2	1,17	0,9	0,8	1,08	0,91
5	1,19	0,91	0,9	0,86	1,19	1,2	1,15	1,12	1,19	0,86	0,95
6	0,85	1,17	1,2	0,94	1,14	1,16	1,1	0,87	0,9	1,02	1,19
7	1,19	0,99	1,12	1,02	1,11	1,15	1,21	1,16	1,05	1,1	0,91
8	1,2	0,91	1,1	1,13	0,95	1	0,95	0,96	1,15	1,1	0,98
9	0,96	0,87	0,97	0,85	0,95	1,07	1,17	0,86	1,1	0,92	1,1
	1,2	1,05	0,83	0,87	1,1	1,16	0,96	1,1	0,9	1,07	1,04

Например:

Шифру **74** по табл. случ, чисел будет соответствовать : 0,9; 0,8; 1,12; 1,19

Для серии реализации опытов используются любые соседние случ.числа.

(при условии что они пересекаются)

Например: 1,15; 1,12; 0,87;1,1 или 1,17; 0,9;1,12; 1,15 и т.д.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1) Проскуряков Н.Е., Ходов С.И. Основы методов планирования эксперимента. Учебное пособие. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – 76 с. (Электронно-библиотечная система «БИБЛИОТЕХ») - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.

2) Глаголев В.В. Математическое моделирование в системе MATLAB: учеб. пособие / В.В. Глаголев; ТулГУ.— Тула: Изд-во ТулГУ, 2009 .— 88 с.

3) Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Струченков В.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009.— 315 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/8722.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

4) Струченков В.И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие программы: учеб. пособие / В.И. Струченков .— М.: Экзамен, 2005.— 256 с.

5) Большаков А.А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учеб. пособие для вузов / А.А. Большаков, Р.Н. Каримов.— М.: Горячая линия-Телеком, 2007.— 522 с.

Дополнительная литература

1) Аттетков А.В. Методы оптимизации : учебник для втузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин; под ред.: В.С., Зарубина, А.П. Крищенко .— 2-е изд., стер. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003 .— 440 с.

2) Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский .— 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1976.— 279 с.

3) Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке : методы планирования эксперимента / Н. Джонсон, Ф. Лион ; под ред. Э. К. Лецкого, Е. В. Марковой .— М.: Мир, 1981 .— 375 с.

4) Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. (Планирование регрессионных экспериментов) / В.В. Федоров.— М.: Наука, 1971.— 311 с.

5) Шаронов В.Е. Компьютер для химика: Учебно-методическое пособие.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 2006. – 44 с. — Режим доступа: Единое окно доступа к образовательным ресурсам [сайт] URL: http://window.edu.ru/resource/635/37635

Периодические издания

1) Российская академия наук. Приборы и техника эксперимента / РАН. – М.: Наука

2) PUBLISH / Дизайн. Вёрстка. Печать (Журнал, посвящённый современным полиграфическим и издательским технологиям) / Учредитель ООО «Открытые системы». – М: Открытые системы, 2014. – Выходит ежемесячно. – ISSN 1560-5183.

Список Интернет-ресурсов, рекомендуемых для изучения

1) www.statsoft.ru – сайт программы «Статистика»
2) www.sciencefiles.ru – центр помощи научным исследованиям
3) http://vsegost.com – сборник ГОСТ-ов
4) http://www.gostedu.ru – сборник ГОСТ-ов и стандартов
5) Единое окно доступа к образовательным ресурсам [сайт] URL: http://window.edu.ru/window
6) Научные исследования и открытия в мире / http://www.km.ru/category/tegi/nauchnye-issledovaniya-i-otkrytiya-v-mire
7). http://www.publish.ru/ – Портал о полиграфии и издательских технологиях.
8) ЭБС *IPRBooks* универсальная базовая коллекция изданий. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.
9) http://www.nrap.ru/ – Сайт «Национальной Ассоциации полиграфистов НАП».
10) Научная Электронная Библиотека *eLibrary* – библиотека электронной периодики, режим доступа: *http://elibrary.ru/*, по паролю.
11) НЭБ КиберЛенинка: научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа *http://cyberleninka.ru/*, свободный.