МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Политехнический институт
Кафедра «Технологические системы пищевых, полиграфических
и упаковочных производств»

Утверждено на заседании кафедры
«Технологические системы пищевых,
полиграфических и упаковочных
производств»
«26» января 2022 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой
______________________________В.В. Прейс

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«Моделирование технических систем и технологических процессов»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
29.03.03 Технология полиграфического и упаковочного производства

с направленностью (профилем)
Технология полиграфического производства

Формы обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 290303-01-22

Тула 2022 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
лабораторных работ дисциплины (модуля)

Разработчик:

Проскуряков Н.Е., профессор, докт. техн. наук, профессор
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1. Исследование статистических характеристик случайных величин

Цель работы:

1. Ознакомление с методикой расчета оценок параметров распределения вероятностей случайной величины – математического ожидания и дисперсии.
2. Ознакомление с методикой проверки гипотезы о виде закона распределения вероятностей случайной величины.

Задание:

1. Определить статистические оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой выборки случайной величины.
2. Проверить гипотезу о нормальном законе распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

Основные теоретические положения

Статистическая оценка параметров

По выборке из генеральной совокупности получают выборочные статистические характеристики (выборочное среднее, выборочная дисперсия и т.п.), которые являются оценками соответствующих генеральных статистических характеристик.

Каждую выборочную характеристику также следует рассматривать как случайную величину, изменяющуюся от выборки к выборке.

Среди возможных оценок особую ценность представляют состоятельные и несмещенные оценки.

Оценка называется состоятельной, если с увеличением объема выборки она стремится (по вероятности) к оцениваемому параметру.

Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно оцениваемому параметру.

Состоятельными несмещенными оценками являются средние арифметическое наблюдаемых значений величины x:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad (1)$$

а также среднее квадратическое отклонение случайной величины x

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \qquad (2)$$

Величины $\bar{x}$ и S^2 являются оценками математического ожидания и дисперсии случайной величины x.

Расчет оценок по формулам (1), (2) становится громоздким с увеличением объема выборки. В этом случае целесообразно применять приближенную методику. Она состоит в том, что выборка преобразуется в формулу вариационного ряда:

- диапазон изменения случайной величины в выборке (x_{min}, x_{max}) делится на k интервалов, где число k находят по полуэмпирической формуле

$$k=1+3{,}2\ lg\ n, \tag{3}$$

число k округляется до ближайшего целого. Длины интервалов обычно выбираются одинаковыми, равными

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}; \tag{4}$$

- затем определяется количество n_m элементов выборки, попавших в каждый интервал $[x_{m-1}, x_m]$ и рассчитывается относительная частота p_m попадания случайной величины в соответствующий интервал

$$p_m = \frac{n_m}{n}; \tag{5}$$

-вариационный ряд записывается в виде таблицы 1, причем элементам выборки, попавшим в m-ный интервал, приписывается значение x_m^*

$$x_m^* = \frac{x_{m-1} + x_m}{2}; \tag{6}$$

ТАБЛИЦА 1

M	(x_{m-1}, x_m)	X_m^*	n_m	$p_m = \frac{n_m}{n}$
1	(x_{min}, x_1)	X_1^*	n_1	p_1
2	(x_1, x_2)	X_2^*	n_2	p_2
3		x_k^*		
k	(x_{k-1}, x_{max})		n_k	p_k
Σ			n	1

- вариационный ряд может изображаться в виде графика (гистограммы).

Замечание: Предложенную процедуру построения вариационного ряда не следует считать единственно возможной. Количество интервалов, их длины могут варьироваться по усмотрению исследователя в зависимости от решаемой задачи.

По данным построенного вариационного ряда вычисляются оценки параметров распределения случайной величины x:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{k} x_m^* n_m = \sum_{m=1}^{k} x_m^* p_m; \tag{7}$$

$S^2=$

$$\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{m-1}^{k} n_m(x_m^*-\bar{x})^2=\frac{n}{n-1}\Sigma(x_m^*-\bar{x})^2\;p_m{}^2. \qquad (8)$$

Кроме того находятся доверительные интервалы математического ожидания m_x и дисперсии σ_x^2 в предположении нормального закона расширения. Построение доверительного интервала для m_x при неизвестной дисперсии σ_x^2 основано на том, что величина t

$$t=\sqrt{n}\left(\frac{\bar{x}-m_x}{S}\right) \qquad (9)$$

имеет распределение Стьюдента с $v=n$-1 степенями свободы.

Очевидно, что величина m_x лежит в пределах интервала с границами $\bar{x}\pm t_T\frac{S}{\sqrt{n}}$ (рис.1):

$$\bar{x}-t_T\frac{S}{\sqrt{n}}< m_x <\bar{x}+t_T\frac{S}{\sqrt{n}}\,. \qquad (10)$$

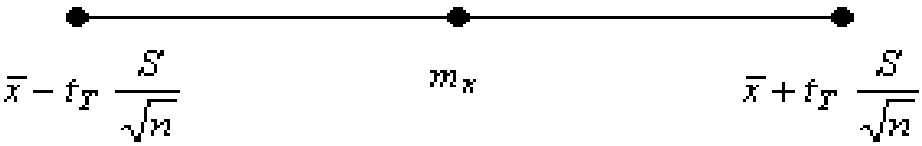


Рис. 1

Величина t_T находится по таблице t–распределения (распределения Стьюдента) (рис.2) случайной величины при вероятности надежной оценки p=0,95 и степени свободы v=n-1.

Доверительный интервал для σ_x^2 строится на основании того, что величина

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} \qquad (11)$$

распределена по закону χ^2 (хи-квадрат) с v=n-1 степеням свободы (рис.3). В этом случае находятся такие два числа χ_1^2 и χ_2^2, что вероятности:

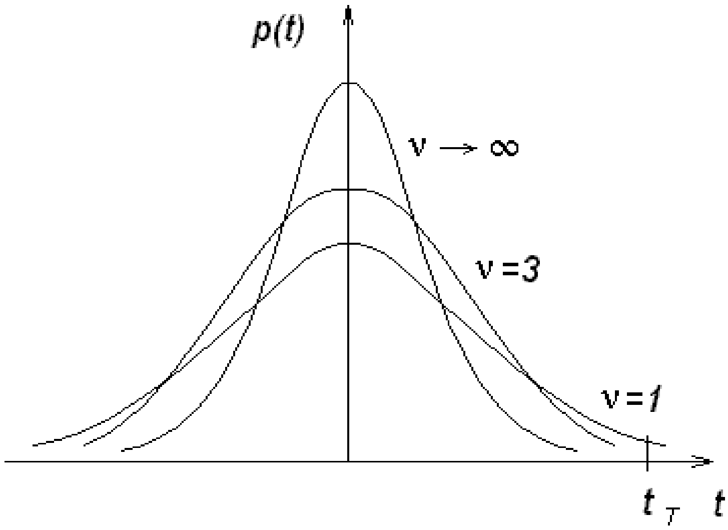


Рис. 2

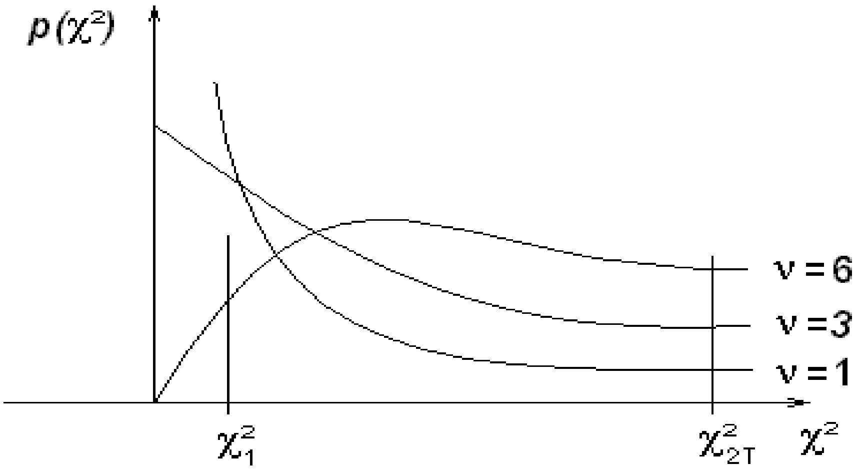


Рис. 3

$$P\,\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} < \chi_1^2\} = \frac{1}{2}\alpha \;\; (\alpha = \; 0{,}05 \ldots 0{,}1) \qquad (12)$$

$$P\,\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} > \chi_2^2\} = \frac{1}{2}\alpha\,. \qquad (13)$$

Следовательно,

$$P\,\{\,\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} < \chi_2^2\} = 1 - \alpha \qquad (14)$$

При этом доверительный интервал для σ_x^2 равен:

$$[\frac{(n-1)S^2}{x_1^2}, \frac{(n-1)S^2}{x_2^2}\;]\,. \qquad (15)$$

Значения χ_1^2 и χ_2^2 находят из таблицы χ^2 - распределение по известному числу степеней свободы ν=n-1и вычисленным уровням значимости P_1 и P_2

$$P_1 = \{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} > \chi_1^2\} = 1 - P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} < \chi_1^2\} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (16)$$

$$P_2 = \{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_x^2} > \chi_2^2\} = \frac{\alpha}{2} \quad (17)$$

Статистическая проверка гипотез

Под статистическими гипотезами понимают некоторые предположения относительно значений генеральных статистических характеристик и генеральных распределений вероятности.

Проверка гипотезы заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей (критериев проверки), вычисляемых по данным выборки, со значениями этих показателей, определенными теоретически в предположении, что проверяемая гипотеза верна.

Для критериев проверки выбираются определенные уровни значимости (α=0,1; 0,05; 0,02 и т.д.), отвечающие событиям, которые при проводимых исследованиях считаются (с некоторым риском) практически невозможными.

Следующим этапом является определение критической области применяемого критерия, вероятность попадания, в которую в случае, если гипотеза верна, в точности равна уровню значимости. Если α -уровень значимости, то вероятность попадания критерия в область допустимых значений равна 1 - α. Если значение критерия , вычисленное по данным выборки, окажется в критической области, то гипотеза бракуется.

При значениях критерия, принадлежащих области допустимых значений, можно лишь сделать заключение о том, что данные выборки не противоречат гипотезе.

Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению c.

Одна из наиболее часто встречающихся задач математической проверки гипотез заключается в сравнении центров распределения двух или более нормально распределенных величин X и Y или о равенстве математического ожидания какому-либо постоянному значению $m_x = c$.

Такого рода предположения называют «нулевой» гипотезой (H_0). При отсутствии конкурирующей гипотезы критической областью при проверке нулевой гипотезы является область больших по абсолютной величине значений. В качестве критерия проверки берётся величина

$$t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - c}{S}, \quad (18)$$

называемая t – критерием. Величина t распределена по закону Стьюдента.

Если вычисленное значение t не превышает критического $t_T = t_{\nu,\alpha}$, найденного по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости α и числу степеней свободы $v=n$-1, то исходная гипотеза не отвергается. [1, 2].

Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий

Пусть по данным двух выборок получены оценки дисперсий s_1^2 и s_2^2 со степенями свободы $v_1=n_1$-1 и $v_2=n_2$ -1.

Требуется выяснить, взяты ли данные выборки из генеральных совокупностей, имеющих одинаковые дисперсии

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 . \tag{19}$$

Для проверки указанной гипотезы применяется F – критерий (дисперсионное отношение)

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \tag{20}$$

где S_1^2 является бóльшей из двух оценок, т.е. S_1^2=max (S_1^2, S_2^2). Величина F – отношения имеет F – распределения (распределение Фишера) со степенями свободы $v_1=n_1$-1 и $v_2=n_2$ -1. (рис.4).

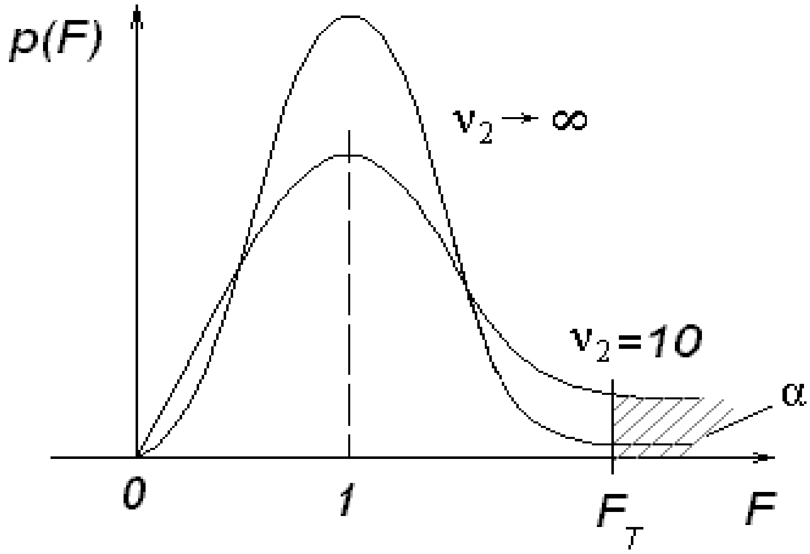


Рис. 4

Критическая область для F – критерия состоит из двух интервалов: больших значений, удовлетворяющих неравенству

$$F>F_2 \tag{21}$$

и интервала малых значений

$$0<F<F_1. \tag{22}$$

критические точки подбираются так, что при уровне значимости q

$$P(F>F_2)= \frac{\alpha}{2} \text{ и } P(F<F_1)= \frac{\alpha}{2}. \tag{23}$$

Поскольку левая критическая точка F – распределения соответствует правой критической точке $F' = \dfrac{1}{F}$ - распределения, то для определения F_1 и F_2 необходимо найти только правые точки для F и F'.

Ввиду указанного свойства табулированы только правые критические точки F – распределения для различных значений свободы f_1 и f_2 [1,2].

Принято отбрасывать гипотезу, когда величина F $(F>1)$ превосходит верхнее критическое значение для уровня значимости α. Таким образом, если выполняется неравенство

$$F > F^{теор}_{\alpha;f_1;f_2} \tag{24}$$

то гипотеза о равенстве дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 не принимается.

Проверка гипотезы относительно вида закона распределения вероятностей.

Для проверки гипотезы о том, что данная величина x подчинена закону распределения $F(x)$, используются «критерии соответствия», основанные на выборе определенной меры расхождения между теоретическим (гипотетическим) и эмпирическим распределениями.

Если такая мера расхождения (т.е. критерий) для рассматриваемого случая превосходит установленный предел, то гипотеза не принимается.

Одним из наиболее распространенных критериев является критерий χ^2 (критерий Пирсона).

Пусть по данным выборки построена таблица 1, где n_m количество попаданий случайной величины x в m-ный интервал.

Пусть $\tilde{p}_m$ - вероятность попадания в m-ный интервал, вычисленная с использованием гипотетического распределения. Тогда критерий Пирсона запишется так:

$$\chi^2 = \sum_{m=1}^{k} \frac{(n_m - n\tilde{p}_m)^2}{n\tilde{p}_m}, \tag{25}$$

здесь k–число интервалов, n–объем выборки. Величина χ^2 имеет $f=k-l-1$ степеней свободы, где l – число оцениваемых параметров в законе распределения. Так, при нормальном распределении $l=2$.

В случае

$$\chi^2 > \chi^2_{T;\,f=k-3;\,\alpha=0,05} \tag{26}$$

гипотеза о виде закона распределения не принимается.

Порядок выполнения работы.

Создать выборку значений случайной величины V - средней скорости движения пневмосистемы, изменяющейся в пределах от V_{min} до V_{max} (принять, что $V_{min}=0,4$ *м/с*, $V_{max}=0,6$ *м/с*). Для этого следует использовать последовательность целых случайных чисел 0,1,… 9, полученную у преподавателя.

Числам 0,1,2,… 9 должны соответствовать определенные значения параметра V, находящиеся внутри диапазона от V_{min} до V_{max}. Для этого интервал значений V разбивают на 9 равных отрезков. Длина отрезка равна Δ:

$$\frac{V_{max} - V_{min}}{9} = \Delta$$

В таблице 2 указаны значения V_I в м/с на концах отрезков, обозначенных числами 0, 1, 2,…9.

ТАБЛИЦА 2

V_i (i=0…9)	,4									,6

После этого составляют ряд случайных значений параметра V, параллельный заданному ряду случайных чисел от 0 до 9. Например, выборке чисел (0….9) 0, 9, 1, 1, 5, 1, 8, 6, 3, 5, 1, 2, 2, 5, 3… соответствует ряд значений параметра R (0,4…0,6) м/с….

Найти оценку математического ожидания $\overline{R}$, оценку дисперсии $S^2\{R\}$ и проверить гипотезу о нормальном распределении вероятностей величины R.

Для этого применить приближенную методику, которая состоит в следующем:

а) диапазон изменения случайной величины (V_{min}, V_{max}) делится на k интервалов, где k находится по формуле k=1+3,2$lg\ n$, где n - объем выборки.

Полученное число k округляют до ближайшего целого; в нашем случае следует взять k=(5…7)<9;

б) длины интервалов выбирают одинаковыми, равными

$$\Delta = \Delta_m = \frac{V_{max} - V_{min}}{k};$$

в) затем определяют количество n_m значений V, попавших в каждый интервал, и относительную частоту

$$p_m = \frac{n_m}{n}$$

попадания величины V в соответствующий интервал.

г) после этого выборочные данные записывают в виде таблицы 3 и строят гистограммы

ТАБЛИЦА 3

m	(V_{m-1}, V_m)	V_m^*	n_m	$p_m = \frac{n_m}{n}$

д) оценки параметров распределения вычисляют по формулам (7)-(8)

ж) затем проверяют гипотезу о нормальном распределении.

С этой целью находят величину χ^2

$$\chi^2 = \sum_{m=1}^{k} \frac{(n_m - n\tilde{p}_m)^2}{n\tilde{p}_m}, \qquad (25a)$$

и сравнивают ее с табличным значением

$$\chi^2_{T;\, f=k-2-1;\, \alpha=0{,}05}$$

В случае неравенства $\chi^2 < \chi^2_T$ гипотеза о нормальном распределении не отвергается.

Результаты проверки гипотезы удобно представить в виде таблицы 4.

В таблице 4:

t – центрированная переменная, равная

$$t = \frac{R - \bar{R}}{S\{R\}}; \qquad \text{при } i=1,2,\ldots k$$

$\tilde{p}_m$ - вероятность попадания случайной величины t в m-ный интервал при гипотетическом распределении

$$\tilde{p}_m = P(t_m) - P(t_{m-1})$$

В случае проверки гипотезы о нормальном распределении значения функции $P(t_m)$и $P(t_{m-1})$ находят в таблице нормального распределения вероятностей [1,2].

ТАБЛИЦА 4

m	n_m	t_{m-1}, t_m	$P(t_{m-1})$, $P(t_m)$	$\tilde{p}_m$	$n\tilde{p}_m$	$n_m - n\tilde{p}_m$	$(n_m - n\tilde{p}_m)^2$	$\frac{(n_m - n\tilde{p}_m)^2}{n\tilde{p}_m}$
1	n_1	$-\infty, \frac{R_1-\bar{R}}{S\{R\}}$	0, …					
2	n_2	$\frac{R_1-\bar{R}}{S\{R\}}, \frac{R_2-\bar{R}}{S\{R\}}$	…,…					
3	n_3	$\frac{R_2-\bar{R}}{S\{R\}}, \frac{R_3-\bar{R}}{S\{R\}}$	…,…					
4	n_4	$\frac{R_3-\bar{R}}{S\{R\}}, \frac{R_4-\bar{R}}{S\{R\}}$	…,…					
5	n_5	$\frac{R_4-\bar{R}}{S\{R\}}, \infty$	…,1					
	$\sum_{m=1}^{k} n = n$			$\sum \tilde{p}_m = 1$				

Контрольные вопросы

1. Какова кривая плотности вероятностей нормального закона распределения? Какова кривая нормального распределения вероятностей?
2. Какие характеристики распределения вероятностей случайных величин Вы знаете?
3. Какими параметрами полностью определяется нормальное распределение и каковы их статистические оценки?
4. Как проверяется гипотеза о равенстве двух дисперсий?
5. Как проверяется гипотеза о виде закона распределения?

6. Что такое нормальный закон распределения вероятности и его параметры? Кривая распределения плотности вероятности.
7. Что такое распределение χ^2?
8. Что такое распределение Стьюдента (t-распределение)?
9. Что такое распределение Фишера (F-распределение)?

Литература

1. *Ветцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.
2. *Гмурман В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: В. ш., 2002.
3. *Смирнов Н.В., Дунин – Барковский И.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в технике. – М.: Физматгиз, 1965.

Приложение

Таблица случайных чисел от 0 до 9

1	0	26	2	51	9	76	0	101	6	126	4
2	9	27	4	52	7	77	3	102	7	127	0
3	1	28	0	53	2	78	4	103	3	128	2
4	1	29	2	54	6	79	0	104	9	129	0
5	5	30	4	55	6	80	5	105	1	130	1
6	1	31	3	56	4	81	6	106	2	131	5
7	8	32	9	57	8	82	0	107	0	132	0
8	6	33	4	58	1	83	9	108	5	133	6
9	3	34	3	59	5	84	0	109	5	134	7
10	5	35	6	60	1	85	5	110	8	135	2
11	1	36	4	61	6	86	7	111	7	136	4
12	2	37	9	62	3	87	5	112	2	137	2
13	2	38	6	63	2	88	2	113	5	138	3
14	5	39	7	64	1	89	6	114	3	139	5
15	3	40	6	65	6	90	7	115	4	140	8
16	6	41	3	66	5	91	5	116	6	141	7
17	5	42	2	67	7	92	5	117	0	142	6
18	9	43	1	68	2	93	4	118	3	143	5
19	1	44	7	69	7	94	6	119	3	144	6
20	3	45	4	70	3	95	6	120	4	145	1
21	4	46	5	71	4	96	8	121	4	146	9
22	7	47	1	72	2	97	0	122	3	147	1
23	7	48	1	73	7	98	3	123	3	148	6
24	4	49	0	74	8	99	4	124	2	149	4
25	4	50	9	75	2	100	9	125	1	150	9

Лабораторная работа № 2 Нахождение минимума функции методом золотого сечения

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

1. Изучение основных определений и положений одномерной минимизации.
2. Изучение основных методов численного решения задач одномерной минимизации.
3. Разработка и решение на ЭВМ задачи минимизации функций одной переменной.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

1. Основные определения.

Задача нахождения минимума функции f(x), $x \in [a,b]$ состоит в нахождении такой точки $\bar{x} \in [a,b]$, что

$$f(\bar{x}) = \underbrace{\min}_{x \in [a,b]} f(x), \quad \bar{x} \in [a,b]. \tag{1}$$

Пусть задана функция f(x) на отрезке [a,b]. Точка $\bar{x} \in [a,b]$ называется точкой глобального минимума, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется условие:

$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in [a,b], \quad \bar{x} \in [a,b]. \tag{2}$$

Точка $\bar{x}$ называется точкой локального минимума, если существует δ - окрестность этой точки, что выполняется условие:

$$f(\bar{x}) \le f(x), \quad \forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]. \tag{3}$$

Если для $\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$ выполняется условие $f(\bar{x}) < f(x)$, то говорят, что $\bar{x}$ является точкой строгого локального минимума.

2. Унимодальные функции.

Если на отрезке [a,b] определена функция f(x) с одной точкой локального минимума $\bar{x}$ и при этом для всех $x < \bar{x}$ функция строго убывает, $\left[f(x) > f(\bar{x}), \bar{x} < x\right]$, а для всех $x > \bar{x}$ функция строго возрастает $\left[f(x) > f(\bar{x}), x > \bar{x}\right]$, то такая функция называется унимодальной.

3. Обусловленность задачи минимизации.

Погрешность определения точки минимума $\bar{x}$ связана с предельной абсолютной погрешностью вычисления значения функции в точке $f(\bar{x})$ следующим образом:

$$\bar{\Delta} \bar{x} = \nu_{\Delta} * \bar{\Delta} f(\bar{x}), \tag{4}$$

где $\nu_{\Delta} = 2 / \sqrt{\left|f^{(2)}(\bar{x})\right| \cdot \bar{\Delta} f(\bar{x})}$ - число обусловленности задачи минимизации.

Отсюда следует, что погрешность в определении x увеличивается в ν_Δ по сравнению с погрешностью вычисления функции $\bar{\Delta}f(x)$. Так как при $\bar{\Delta}f \to 0$, имеем $\nu_\Delta >> 1$, то задача минимизации является плохо обусловленной.

4. Этапы поиска минимума.

Так же, как и в задаче поиска корня, задача поиска минимума разделяется на два этапа: этап локализации и этап итерационного уточнения.

На этапе локализации выделяется отрезок минимальной длины, содержащий одну точку локального минимума, на котором функция является унимодальной. На втором этапе используется один из методов поиска точки минимума.

5. Методы прямого поиска:

а) оптимальный пассивный поиск. На отрезке [a,b] задается последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, таких, что $x_k = x_0 + kh$, $k=1,\ldots,n$; $x_0 = a$, $x_n = b$. В этих точках вычисляется значение функции $f(x_k)$. За точку минимума $\bar{x}$ принимается та точка x_k, для которой выполняется соотношение: $f(x_k) = \underbrace{\min}_{0 \le i \le n} f(x_i)$. Следовательно: $x_{k-1} \le \bar{x} \le x_{k+1}$. Отсюда $\bar{\Delta}x = h$.

б) метод деления отрезка пополам. На отрезке $[a_0, b_0]$ выбирается две точки: $\alpha_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} - \delta$, $\beta_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} + \delta$. Вычисляются значения $f(\alpha_0)$ и $f(\beta_0)$. Если $f(\alpha_0) < f(\beta_0)$, то точка минимума находится на отрезке $[a_0, \beta_0]$,если $f(\alpha_0) > f(\beta_0)$, то точка минимума находится на отрезке $[\alpha_0, b_0]$, т.к. функция является унимодальной. Отрезок с точкой минимума принимается за новый отрезок $[a_1, b_1]$,на котором опять выбираются две точки и т.д., до отрезка $[a_n, b_n]$ длина которого $\le \varepsilon$.Следовательно: $\bar{\Delta}x = \varepsilon$.

в) метод золотого сечения. Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две части, так что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению большей части к меньшей (принцип подобия). Золотое сечение отрезка $[a, b]$ можно произвести двумя симметрично расположенными точками:

$$x_1 = a + (1-\tau)(b-a) = b - (b-a)\tau,$$

$$x_2 = b - (1-\tau)(b-a) = a + (b-a)\tau, \tag{5}$$

где $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180339$, $x_2 > x_1$.

Сечение называется золотым, потому, что точка x_1 в свою очередь производит золотое сечение отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 - золотое сечение отрезка $[x_1, b]$.

6. Методы поиска минимума для гладких функций.

Пусть f(x) является унимодальной функцией на отрезке [a,b] и имеет непрерывную производную на этом отрезке, а точка $\bar{x}$ является точкой минимума. Следовательно, в точке $\bar{x}$ имеем:

$$f'(\bar{x}) = 0, \;\; \bar{x} \in [a,b]; \tag{6}$$

при этом $f''(\bar{x}) > 0$.

Следовательно задачу поиска минимума (1) мы можем заменить на задачу поиска корня уравнения (6), т.е. применить методы решения нелинейных уравнений к уравнению относительно производной функции.

а) метод бисекции. Так как $f'(\bar{x}) = 0$ и $f''(\bar{x}) > 0$, то в точке минимума производная .меняет знак. Поэтому для поиска минимума отрезок делится на две части и исключается тот отрезок, где производная не меняет знак. Продолжая этот процесс уменьшается отрезок $l_n = \dfrac{a-b}{2^n}$ внутри которого функция достигает минимума. Метод бисекции сходится по закону:

$$|x - \bar{x}| \le (a-b)/2^{n+1}. \tag{7}$$

б) метод Ньютона. Применение метода Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ дает следующую расчетную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}. \tag{8}$$

Он имеет квадратичную сходимость и итерационный процесс заканчивается при выполнении условия: $(x_n - x_{n-1}) < \varepsilon$.

Для сходимости метода необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$f^{(2)}(x) \ne 0, \qquad f^{(3)}(x) \ne 0;$$

т.е. вторая и третья производные были знако постоянны на отрезке локализации.

III. ЗАДАНИЕ.

1. Написать основные соотношения для минимизации методом золотого сечения функции из таблицы заданий.
2. Провести оценку числа обусловленности задачи минимизации для указанной в таблице относительной погрешности функции и определить максимально возможную точность вычисления точки минимума.
3. Написать программу и на ЭВМ рассчитать с максимально возможной точностью точку минимума функции.

IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

Задание. Вычислить точку минимума функции $f(x) = ch\ x + \ln^2 x$ с максимально возможной точностью если $\delta f(x)=10^{-7}$. Оценить число обусловленности для данной функции, если $\delta f(x)=10^{-7}$ и определить максимально возможную точность вычисления точки минимума.

1. Проводим грубую локализацию точки минимума. Так как область определения логарифма лежит от x=0 до $x \to \infty$,то точка минимума лежит на отрезке $[0,\infty]$. При $x_1=0.1$ имеем:

$$y_1 = f(0.1) = \frac{e^{0.1} + \frac{1}{e^{0.1}}}{2} + \ln^2 0.1 \approx 1 + 6 \approx 7;$$

при $x_2=1$ имеем:

$$y_2 = f(1) = \frac{e^1 + \frac{1}{e^1}}{2} + 0 \approx 1.5;$$

при $x_3=3$ имеем:

$$y_3 = f(10) = \frac{e^3 + \frac{1}{e^3}}{2} + 1{,}5 \approx 8.$$

Отсюда следует: $y_2<y_1$ и $y_2<y_3$. Следовательно, точка минимума лежит в интервале $0.1 \div 3$,т.е. на отрезке [0.1,3].

2. Согласно (5) для отрезка [0.1,3] золотое сечение дается точками:

$$x_1=b-(b-a)\tau,\ x_2=a+(b-a)\tau,$$

где:

$$a=0.1;\ b=3.0;\ \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{9}$$

3. Вычисляем значения $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ и сравниваем их. Если $y_1>y_2$, то точка минимума находится на отрезке $[x_1,b]$, при этом точка x_2 является точкой золотого сечения для этого отрезка. Если $y_1<y_2$, то точка минимума находится на отрезке $[a,x_2]$, а точка x_1 является точкой золотого для этого отрезка.

4. Если $y_1>y_2$, то отрезок [a,b] заменяем на отрезок $[x_1,b]$ меньшей длины и пере обозначаем:

$$a=x_1,\ x_1=b-(b-a)\tau=x_2,\ y_1=y_2, \tag{10}$$

Вычислить новые значения:

$$x_2=a+(b-a)\tau \text{ и } y_2=f(x_2). \tag{11}$$

5. Если $y_1<y_2$, то отрезок [a,b] заменяем на отрезок $[a,x_2]$ меньшей длины и

пере обозначаем:

$$b=x_2,\ x_2=a+(b-a)\tau=x_1,\ y_2=y_1, \qquad (12)$$

Вычисляем новые значения:

$$x_1=b-(b-a)\tau \text{ и } y_1=f(x_1). \qquad (13)$$

6. Сравниваем новые значения y_1, y_2 и выбираем один из двух отрезков т.д. Процесс закончим, когда $(b-a)\le\varepsilon$.

7. Проводим оценку числа обусловленности задачи минимизации для функции:

$$y = ch\ x + \ln^2 x.:$$

$$\nu_\Delta = 2/\sqrt{|f''(x)|\cdot\overline{\Delta}f(x)}, \qquad (14)$$

Имеем:

$$\overline{\Delta}f(x) = \delta f(x)\cdot|f(x)| \approx 10^{-7}\cdot|f(x)|;$$

$$f''(x) = ch\ x + \frac{2-2\ln\ x}{x^2}.$$

На отрезке [0.1;3] получаем следующие оценки:

$$|f(x)\approx 1, \qquad \||f''(x)| \approx 10.$$

Следовательно:

$$\Delta f(x) = 10^{-7}, \qquad \nu_\Delta = \frac{2}{\sqrt{10^{-7}\cdot 10}} \approx 2\cdot 10^3.$$

8. Определяем ε. Согласно (4) имеем

$$\varepsilon \le \varepsilon_{\max} = \nu_\Delta\cdot\Delta f(x) \approx 2\cdot 10^3\cdot 10^{-7} = 2\cdot 10^{-4}.$$

7. Пример программы для нахождения минимума функции методом золотого сечения:

```
program lab_zlato;
   {Нахождение минимума функции методом золотого сечения}
   {a -нижняя, b- верхняя граница отрезка локализации}
   {e-точность вычисления}
   {x - точка минимума}
   {i - число итераций}
    var a,b,e,t,x,x1,x2, y1,y2 : real;
    var i : integer;
        function f(y : real) : real;
        {функция для заданного нелинейного уравнения}
              begin
                 f:=(exp(y)+exp(y))/2+ln(y)*ln(y);
```

```
        end;      {f}
begin
 writeln('Введите значение нижней границы отрезка локализации a');
readln (a);
 writeln('Введите значение верхнего границы отрезка локализации b');
readln (b);
 writeln('Введите точность вычислений e');
readln (e);
  begin
    i:=0;
    t:=(sqrt(5)-1)/2;                              вычисление по (9)
    x1:=b-(b-a)*t;
    x2:=a+(b-a)*t;
    y1:=f(x1);
    y2:=f(x2);
      while abs(b-a)>=e do begin
       i:=i+1;
        if y1>y2 then begin
            a:=x1;
            x1:=x2;                                vычисление по (10)
            y1:=y2;
            x2:=a+(b-a)*t;                         вычисление по (11)
            y2:=f(x2);
           end else begin
            b:=x2;
            x2:=x1;                                вычисление по (12)
            y2:=y1;
            x1:=b-(b-a)*t;                         вычисление по (13)
            y1:=f(x1);
           end;
       end;
      x:=(a+b)/2;
   writeln('Значение точки минимума x=',x,'....','число итераций i=',i);
end.
```

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.

1. Название лабораторной работы.
2. Индивидуальное задание.
3. Теоретическая часть.
4. Текст программы.
5. Результаты расчета.

Пункты 1-4 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Этапы поиска минимума функции.
2. Что такое локальный и глобальный минимум?
3. Определение унимодальной функции.
4. Абсолютное число обусловленности задачи минимизации.
5. Метод оптимально пассивного поиска.
6. Метод деления отрезка пополам.
7. Метод золотого сечения.
8. Метод бисекции.
9. Метод Ньютона.
10. Необходимое и достаточное условие сходимости метода Ньютона.

VII.ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

№	Функция f(x)	Характер экстремума	Относительная погрешность δf(x)
1	2	3	4
1	$\frac{x^2}{2}+5\cos x$	min	10^{-8}
2	$2e^x-\frac{5}{2}x^2$	min	10^{-8}
3	$e^{-x}+x^2$	min	10^{-9}
4	$\frac{x^2}{(x-1)^2}+x^4$	min	10^{-9}
5	$\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{1+x^2}$	min	10^{-8}
6	$arctg(\sin x-\cos x)$	max	10^{-9}
7	$\frac{x^2-6x+4}{3x-2}+e^{2x}$	min	10^{-9}
8	$\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}+x^4$	min	10^{-8}
9	sh^2x+e^x	min	10^{-9}
10	$\frac{1}{\ln x}+x^2$	min	10^{-8}
11	$\frac{1}{x}+chx$	min	10^{-8}
12	$\frac{1}{x^2}+tgx$	max	10^{-9}
13	$\sin x^2+\sin^2 x$	max	10^{-10}
14	$\frac{1}{shx}+x^4$	min	10^{-8}
15	$\frac{e^{x-3}}{x-3}+\ln x$	min	10^{-9}

Лабораторная работа № 3. Исследование объектов методом дисперсионного анализа

Цель работы: ознакомление с методом дисперсионного анализа и вычислительным алгоритмом для обработки экспериментальных данных.

Задание: методом однофакторного анализа оценить влияние одного фактора на разброс значений исследуемой случайной величины (выборку случайных величин получить у преподавателя).

Основные теоретические положения

1. Задача дисперсионного анализа**.** Во многих областях практической деятельности встречаются объекты исследования, состояние которых определяется факторами, не имеющими количественного описания.

Например, рассматривается процесс измерения какой-либо физической величины рядом операторов параллельно нескольким приборам (или нескольким методам); причем каждый оператор измеряет эту величину всеми приборами (методами). Средние значения наблюдаемой величины, полученные операторами, отличаются друг от друга. Эти различия средних значений может быть связано со случайной погрешностью, систематической приборной (методической) ошибкой и влиянием оператора.

Требуется определить, насколько существенно влияние на результат измерения двух факторов: прибора (метода) и оператора.

Аналогичная задача возникает при использовании деталей из нескольких партий, при этом надо определить существенно ли отличаются параметры деталей различных партий. Итак, для изучения влияния факторов, не имеющих количественного описания, на исследуемую величину применятся метод дисперсионного анализа.

2. Однофакторный дисперсионный анализ. В общем виде задача однофакторного дисперсионного анализа ставится следующим образом. Пусть наблюдают m независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots x_i \dots x_j$, аспределенных нормально с центрами $m_{x1}, m_{x2}, \dots m_{xm}$ и неизвестной, но одинаковой для всех x_i дисперсией, b^2.

Пусть над каждыми переменными x_i производится серия из n наблюдений. Данные i-ой серии следующие:

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{ij}, \dots x_{in} \ (i=1,2,\dots m;\ j=1,2\dots n).$$

Опираясь на эти статистические данные требуется роверить нуль – гипотезу (H_0) о равенстве математических ожиданий

$$m_{x1}=m_{x2}=\dots m_{xm}.$$

Если проверяемая гипотеза верна, то сопоставление средних $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_m$ в каждой серии не должно дать значимого расхождения между ними. И наоборот, если такое расхождение обнаружено, то нулевую гипотезу следует отбросить.

Возвращаясь к рассмотренному примеру, положим, что число операторов равно m и каждый из них производит n замеров некоторой физической величины

x (табл.1).

Каждая серия из n измерений $x_{i1}, x_{i2,\dots} x_{in}$ (i=1,2,...m) представляет собой выборку объема n из генеральной совокупности измерений отдельного оператора x_i (i=1,2,...m).

Итак, общее число измерений величины x_{ij} (i=1,2,...m – номер оператора, j=1,2,...n – номер измерения) равно mn.

ТАБЛИЦА 1

№ оператора № измерений	x_1	x_2	…	X_j	…	
1 2 . . . j . . . n	x_{11} x_{12} x_{1j} x_{1n}	x_{21} x_{22} x_{2j} x_{2n}		X_{j1} x_{i2} x_{ij} x_{in}		x_{m1} x_{m2} X_{mn}
Среднее значение в серии	x_1	x_2		X_i		X_m
Общее среднее	$\bar{x} =$					

Среднее арифметическое из n измерений i – го оператора обозначим через x_i

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (1)$$

Обозначим через $\bar{x}$ общее среднее арифметическое значение всех mn измерений –

$$\bar{x} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (2)$$

Все наблюдаемые значения x_{ij} образуют выборку объемом mn из генеральной совокупности x, имеющей также нормальное распределение с центром m_x и дисперсией σ^2

Очевидно, что значение x (2) является оценкой математического ожидания m_x по данным выборки.

Согласно методу однофакторного дисперсионного анализа надо сумму квадратов отклонений значений от общего среднего Q_0 разложить на составные части, одна из которых соответствует фактору изменчивости – Q_f (здесь: оператор), другая – Q_R –влиянию случайных причин (здесь: приборы или методы).

При этом указанные суммы находят по формулам:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x})^2 \tag{3}$$

$$Q_f = n \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \tag{4}$$

$$Q_R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 \tag{5}$$

Известно [1], что

$$Q_0 = Q_f + Q_R \tag{6}$$

Итак, величина Q_0 представляет собой сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений x от общего среднего $\overline{x}$ и называется “общей” или “полной” суммой квадратов.

Величина Q_f это сумма квадратов отклонений средних по группам (сериям) $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ... \overline{x}_m$ от общего среднего $\overline{x}$, она называется суммой квадратов отклонений между группами. Q_R является суммой квадратов отклонений значений x_{ij} от средних $\overline{x}_i$, в группах и называется сумой квадратов внутри групп (серий).

В практических расчетах обычно вычисляют только общую сумму Q_0 и сумму квадратов между группами Q_f, сумму квадратов внутри групп получают по формуле (6):

$$Q_R = Q_0 - Q_f \tag{7}$$

и поэтому её называют “остаточной” суммой.

Суммы квадратов Q_0, Q_f, Q_R, деленные на соответствующие числа степеней свободы $v_1 = mn-1$, $v_F = m-1$, $v_R = m(n-1)$, дадут три несмещенные оценки дисперсии σ^2 в общей выборке x:

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{mn-1} \text{ - общая оценка дисперсии} \tag{8}$$

$$S_F^2 = \frac{Q_F}{m-1} \text{ - оценка дисперсии между группами} \tag{9}$$

$$S_R^2 = \frac{Q_R}{m(n-1)} \text{ - оценка дисперсии внутри групп} \tag{10}$$

Выполнение дисперсного анализа заключается в сравнивании оценки S_F^2 дисперсии, вызванной изучаемым фактором изменчивости F, и оценкой достаточной дисперсии S_R^2, имеющей место уже после того, как влияние фактора F было устранено (т.е. обусловленной исключительно случайными факторами – погрешностью измерений).

Если нуль-гипотеза о равенстве центров распределения верна,

$$m_{x1} = m_{x2} = ... m_{xm}, \tag{11}$$

то оценки дисперсий S_F^2 и S_R^2 должны различаться между собой лишь случайно. Проверка данной гипотезы выполняется по критерию Фишера. Для этого находят F – отношение и сравнивают величину F с предельным значением

Fm, которое находят по таблице F – распределения при степенях свободы $\nu_F = m-1$ и $\nu_R = m(n-1)$, $\alpha = 0{,}05$[2,3].

В случае

$$F < Fm \tag{12}$$

расхождения между оценками S_F^2 и S_R^2 несущественны (с вероятностью $p \geq 0{,}05$). Это означает, что нуль-гипотеза подтверждается. Исследователь может считать опытные данные однородными – это означает, что фактор изменчивости не оказывает существенное влияние на среднее значение измеряемых величин в группах.

При

$$F > Fm \tag{13}$$

следует, что фактор изменчивости оказывает существенное влияние на данные измерений в группах. Влияние фактора изменчивости значимо.

Порядок выполнения работы.

1. Получить у преподавателя данные нескольких выборок случайной величины x.
2. Данные выборок представить в виде таблицы 1.
3. Вычислить среднее значение в сериях $\bar{x}_i$ (i=1,2,…m) и общее среднее $\bar{x}$
4. Определить значение сумм квадратов Q_R, Q_0, Q_f

Для удобства вычислений рекомендуется перейти к новым переменным y_{ij} по формуле

$$y_{ij} = x_{ij} - \bar{x}, \tag{14}$$

где $\bar{x}$ - ближайшее к общему среднему целое число.

При таком преобразовании переменных формул для сумм квадратов примут следующий вид:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \frac{1}{mn}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{m} S_i - \frac{(\sum_{i=1}^{m} T_i)^2}{mn} \tag{15}$$

$$Q_F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} - \frac{1}{mn}(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} T_i^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^{m} T_i)^2}{mn}; \tag{16}$$

$$Q_R = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} y_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{m} S_i - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{m} T_i)^2 \tag{17}$$

В формулах (15), (16), (17) введены следующие обозначения:

$$S_i = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2\ ;\ T_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\ .$$

Результаты вычислений представляют в виде таблицы 2.

ТАБЛИЦА 2.

Номер испытаний (j)	Фактор изменчивости					
	1- ый оператор		2- ой оператор		…	m- ый оператор	
	y_{1j}	y_{1j}^2	y_{2j}	y_{2j}^2		y_{mj}	y_{mj}^2

1 . . . n							
s_i		S_1		s_2		s_m	$\sum_{i=1}^{m} S_i =$
t_i	t_1		t_2			t_m	$\sum_{i=1}^{m} T_i =$
t_i^2	t_1^2	t_2^2				t_m^2	$\sum_{i=1}^{m} T_i^2 =$

Затем по формуле (15), (16) с помощью полученных сумм

$$\sum_{i=1}^{m} S_i,\ \sum_{i=1}^{m} T_i,\ \sum_{i=1}^{m} T_i^2$$

находят величины Q_0, Q_f. Остаточную сумму квадратов Q_R вычисляют по формуле

$$Q_R = Q_0 - Q_f$$

5. Полученные степени свободы $\nu_0,\ \nu_F,\ \nu_R$ по формулам:

$$\nu_0 = mn-1$$

$$\nu_F = m-1$$

$$\nu_R = m(n-1)$$

6. Вычислить несмещенные оценки $S_0^2,\ S_F^2,\ S_R^2$

$$S_0^2 = \frac{Q_0}{\nu_0};$$

$$S_F^2 = \frac{Q_F}{\nu_F};$$

$$S_R^2 = \frac{Q_R}{\nu_R};$$

7. Подсчитать значение F- отношения

$$F = \frac{S_F^2}{S_R^2}.$$

При формировании F- отношения в числителе ставится большая из двух оценок дисперсий, т.е. в нашем случае $S_F^2 > S_R^2$

8. Найти из таблицы F – распределения случайной величины предельное значение Fm, соответствующее уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и степеням свободы ν_F и ν_R.

9. Сравнить полученное значение F(n.7) с табличными F_T и сделать заключение о проверяемой нуль-гипотезе H_0 .Если $F \le F_{Табл}$,то гипотеза принимается.

Пример:

Определить, однородны ли результаты измерения напряжения (в вольтах), тремя операторами при использовании измерительных приборов различных типов. Результаты измерений даны в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3

Номер измерений, (j)	1-ый оператор	2-ой оператор	3-ий оператор
1	221	222	212
2	222	224	214
3	226	226	220
4	227	228	222
$\overline{x}_i$	224	225	217
$\overline{x} = 222$			

ТАБЛИЦА 4.

Номер измерений (j)	1- ый оператор		2- ой оператор		3- ий оператор		
	y_{1j}	y_{1j}^2	y_{2j}	y_{2j}^2	y_{3j}	y_{3j}^2	
1	-1	1	0	0	-10	100	
2	0	0	2	4	-8	64	
3	4	16	4	16	-2	4	
4	5	25	6	36	0	0	
S_i		42		56		168	$\sum_{i=1}^{m} Si = 266$
T_i	8		12		-20		$\sum_{i=1}^{m} Ti = 0$
T_i^2	64		144		400		$\sum_{i=1}^{m} Ti^2 = 608$

В таблице 4 показаны промежуточные вычисления, позволяющие очень просто найти суммы квадратов Q_R, Q_0, Q_f :

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{m} S_i - \frac{(\sum_{i=1}^{m} T_i)^2}{mn} = 226 - 0 = 226;$$

$$Q_F = \frac{\sum_{i=1}^{m} T_i^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^{m} T_i)^2}{mn} = \frac{608}{4} \text{-}0 = 152;$$

$$Q_R = Q_0 \text{-} Q_f = 268 - 152 = 114.$$

Оценки дисперсии при этом:

$$S_F^2 = \frac{Q_F}{m-1} = \frac{608}{4} = 266;$$

$$S_R^2 = \frac{Q_R}{m(n-1)} = \frac{114}{3(4-1)} = 12{,}7\,;$$

F – отношение примера равно;

$$F = \frac{S_F^{\,2}}{S_R^{\,2}} = \frac{76}{12{,}7} = 6$$

Табличное значение F – отношения:

$Fm = 4{,}26$ при $\alpha = 0.05$, $f_{\mathrm{F}} = m\text{-}1$, $f_{\mathrm{R}} = m(n\text{-}1) = 9$

Так как

$$F = 6 > Fm = 4.26,$$

то считают измерения неоднородными, т.е. Фактор изменчивости (оператор) играет существенную роль в расхождении средних значений показаний приборов.

Контрольные вопросы.

1. Что называется фактором изменчивости и случайности?
2. Какого типа практические задачи обычно решаются методом дисперсионного анализа?
3. Как математически формируется задача однофакторного анализа?
4. Как формируются оценки дисперсий (общей, между сериями, остаточная)? Разброс каких случайных величин они характеризуют?
5. В чем заключается смысл F – критерия Фишера?
6. Как применяется критерий Стьюдента для оценки значимости расхождения средних значений двух выборок?
7. В чем состоит критерий Фишера и его применение для проверки нуль-гипотезы H_0?

Литература.

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. - М.: Высшая школа, 2005
2. *Гмурман В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2008.

Лабораторная работа № 4. Экспериментальные методы ранжирования переменных

Цель работы: Ознакомление с методами ранговой корреляции

Задание:

1. Проверить гипотезу о наличии связи между несколькими рядами рангов, присвоенных объектам в связи с изучаемым явлением (процессом, качеством и т. д.). применить различные методы ранговой корреляции (по Кендалу и по Спирмэну).
2. Применить метод конкордации для выяснения степени согласия исследователей в связи с ранжировкой объектов по изучаемому признаку.

Основные теоретические положения.

При изучении сложных процессов, не поддающихся количественному описанию, приходится использовать практический опыт специалистов, работающих в этих областях. При большом числе влияющих факторов мнения специалистов относительно степени влияния этих факторов на процесс могут расходиться. Поэтому возникает задача объективной обработки субъективной информации, которая может быть решена методами ранговой корреляции.

Методы ранговой корреляции.

Ранжирование.

Если n объектов какой-либо совокупности N пронумерованы в соответствии с возрастанием или убыванием какого-либо признака X, количественно неизмеримого, то говорят, что объекты ранжированы по признаку X.

Ранг x_i указывает то место, которое занимает i-й объект среди других n объектов, расположенных в соответствии с признаком X (i=1,2,..n).

Ранжирование является менее точным выражением упорядоченной связи объектов относительно какого-либо измеримого или подсчитываемого качества и в этом случае представляет собой замену переменной порядковым номером в прикидочных размерах в целях экономии времени и уменьшения трудоемкости вычислений.

Коэффициент ранговой корреляции.

Коэффициент ранговой корреляции оценивает связь между качественными признаками объектов, не поддающимися точной количественной оценке.

Пусть n объектов ранжированы дважды в соответствии со свойствами X и

Y:

$$x_1 \qquad x_2 .. x_i .. x_j .. x_n$$
$$y_1 \qquad y_2 .. y_i .. y_j .. y_n \tag{1}$$

Для объекта i свойства X и Y имеют ранги x_i, y_i; для объекта j - x_j, y_j. Пусть связь между рангами x_i и x_j определяется как a_{ij}, а между рангами y_i и y_j - как b_{ij}. Наложим такие условия:

$$a_{ij} = -a_{ji} \ \ (i \neq j); a_{ij} = 0 \ \ (i = j);$$
$$b_{ij} = -b_{ji} \ (i \neq j); \ b_{ij} = 0 \quad (i = j); \tag{2}$$

Тогда коэффициент ранговой корреляции определяется как

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2}} \tag{3}$$

Свойства коэффициента ранговой корреляции следующие:

1. $-1 \leq \Gamma \leq 1$;
2. Г=0 означает, что признаки X и Y для n объектов не связаны (не коррелированы);
3. Г=1 означает, что ранжирование объектов по признаку X полностью совпадает с ранжированием по признаку Y;
4. Г=-1 означает, что ранжирования объектов по признакам X и Y противоположны.

В зависимости от способа определения связи между рангами, выраженного коэффициентами a_{ij} и b_{ij}, можно получить различные модификации коэффициента ранговой корреляции Г.

Коэффициент ранговой корреляции по Кендаллу.

Определим величину a_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \quad \text{при} \quad x_i = x_j; \\ a_{ij} &= +1 \quad \text{при} \quad x_i < x_j; \\ a_{ij} &= -1 \quad \text{при} \quad x_i > x_j; \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично запишем значения b_{ij}:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 0 \quad \text{при} \quad y_i = y_j; \\ b_{ij} &= +1 \quad \text{при} \quad y_i < y_j; \end{aligned} \tag{5}$$

$$b_{ij} = -1 \quad \text{при} \quad y_i > y_j \ ;$$

Тогда

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} = a_{ij}^2 \frac{1}{2} n(n-1) \quad \text{при} \quad i<j;$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij}^2 = \frac{1}{2} n(n-1) \quad \text{при} \quad i<j; \tag{6}$$

и коэффициент ранговой корреляции по Кендаллу примет вид:

$$\Gamma = \varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}}{\frac{1}{2} n(n-1)} = \frac{S}{\frac{1}{2} n(n-1)}, \ i<j \tag{7}$$

где величина S равна

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \ , i<j \tag{8}$$

Пример. Определить, существует ли связь между двумя факторами – производительностью оборудования и степенью его износа. Для этого произведем ранжировку оборудования, обозначенного как №1, №2, №3, №4, №5, №6, по производительности (ряд ***X***) и по степени износа (ряд ***Y***). Результаты ранжирования приведены в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

Оборудование	№1	№2	№3	№4	№5	№6
X	2	4	3	1	5	6
Y	1	4	2	3	6	5

Приведем места по производительности оборудования (***X***) к натуральному ряду чисел (табл. 2).

ТАБЛИЦА 2

Оборудование	№4	№1	№3	№2	№5	№6
X	1	2	3	4	5	6
Y	3	1	2	4	6	5

Все коэффициенты $a_{ij} = +1$, т. к. ряд *X* приведен к натуральному ряду чисел. Коэффициенты b_{ij} даны в таблице 3.

ТАБЛИЦА 3.

I<j	12	13	14	15	16	23	25	26	34	35	36	45	46	56
b_{ij}	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Рассчитав величину $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = 13 - 2 = 11$, найдем коэффициент τ для *n=6*:

$$\tau = \frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{11}{\frac{6\cdot 5}{2}} = 0,74\,.$$

Для ответа на вопрос о связи этих факторов необходимо оценить значимость полученной величины $\tau = 0,74$.

Оценка значимости коэффициента ранговой корреляции по Кендаллу.

Величины S и τ являются случайными. Кривая распределения плотности вероятности величины S симметрична относительно оси, проходящей через $S=0$, что соответствует отсутствию связи факторов

Для оценки значимости полученной величины S=1 при n=6 необходимо сравнить её с предельной величиной Sтабл , определяемой по таблице 1 Приложения при уровне значимости $\alpha = 0,05$, когда $n=6$. Если S>Sтабл , то гипотезе об отсутствии связи отвергается. При S<Sтабл гипотеза об отсутствии связи факторов принимается.

В рассматриваемом примере Sтабл ≈ 10 при $\alpha = 0,05$ и n=6.

Так как S=11> Sтабл=10, то гипотеза об отсутствии связи факторов не принимается. Это означает, что степень износа оборудования (фактор Y) и производительность оборудования (фактор X) взаимосвязаны.

Коэффициент ранговой корреляции по Спирмэну.

Если определить коэффициенты так:

$$a_{ij} = x_j - x_i\,,$$

при $i \neq j$

$$b_{ij} = y_j - y_i\,, \tag{11}$$

то коэффициент ранговой корреляции по Спирмэну примет вид

$$\Gamma = \rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_i)^2}} \tag{12}$$

Очевидно, что если ряды X и Y совпадают и представляют натуральные ряды чисел, т. е. если $x_i = 1,2,..n$; $y_j = 1,2,..n$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_i)^2 \tag{13}$$

Тогда коэффициент ρ равен

$$\Gamma = \rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)^2} \tag{14}$$

Приведем эту формулу к более удобному виду. Так как x_i и y_i числа натурального ряда, то

$$\sum^{n}\sum^{n}\left(x_j - x_i\right)\left(y_j - y_i\right) = \sum^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)2n\ , \tag{15}$$

где $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$;

Учитывая формулу (15), преобразуем числитель формулы (14)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2 , \tag{16}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ - сумма n членов натурального ряда (17)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{18}$$

тогда числитель формулы (14) принимает вид формулы (19):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)(y_j - y_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})2n =$$

$$= 2n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n}{n}\left[\frac{n(n+1)}{n}\right]^2 - 2n\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_j)^2 =$$

$$= \frac{2n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - n\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 =$$

$$= \frac{n^2(n^2-1)}{6} + nS\ (d^2) \tag{19}$$

где

$$S\ (d^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \tag{20}$$

Знаменатель формулы (14):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_i)^2 = 2n\sum x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j =$$

$$= 2n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6} \tag{21}$$

Итак, коэффициент ранговой корреляции по Спирмэну равен:

$$\Gamma = \rho = \frac{\frac{1}{6}n^2(n^2-1) - nS\ (d^2)}{\frac{1}{6}n^2(n^2-1)} = 1 - \frac{6S\ (d^2)}{n(n^2-1)} \tag{22}$$

При оценке значимости коэффициента ранговой корреляции ρ находим вероятность случайного появления данной или меньшей величины $S(d^2)$, полученную при объёме выборки *n*, по таблице 2 Приложения. Полученную вероятность сравниваем с принятым уровнем значимости α, равным 0,05. Если вероятность окажется больше α=0,05, то гипотеза об отсутствии связи между рядами рангов принимается.

Согласно таблице 4 получен коэффициент ранговой корреляции ρ, равный 0,77

$$\rho = 1 - \frac{6S(d^2)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 8}{6(6^2-1)} = 0.77 .$$

ТАБЛИЦА 4

Производительность оборудования (*x*)	1	2	3	4	5	6
Степень износа (*y*)	3	1	2	4	6	5
$d = x_i - y_i$	-2	1	1	0	-1	1
d^2	4	1	1	0	1	1

Оценим значимость коэффициента ρ=0,77, полученную в примере, при $S(d^2)$=8 и *n*=6.

Из таблицы П2 (см. приложение) находим, что вероятность $P[S(d^2) \le 8] \approx 0{,}05$. Так как эта величина находится практически на границе значимости, то примем гипотезу о наличии связи между рядом рангов (таблица 4).

Конкордация (лат. *concordare* – быть согласным)

Наиболее интересным практическим приложением ранговой корреляции является вопрос о корреляционной связи нескольких ранжированных рядов.

ТАБЛИЦА 5

объект (*i*) / исслед-ль (j)	1	2	…	*i*	…	*n*
1	x_{11}	x_{21}		x_{i1}		x_{n1}
2	x_{12}	x_{22}		x_{i2}		x_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
j	x_{ij}	x_{2j}		x_{ij}		x_{nj}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
m	x_{1m}	x_{2m}		x_{im}		x_{nm}
$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$	$\sum_{j=1}^{m} x_{1j}$	$\sum_{j=1}^{m} x_{2j}$		$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$		$\sum_{j=1}^{m} x_{nj}$

$\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} - a\right]^2$	$\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{1j} - a\right]^2$	$\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{2j} - a\right]^2$		$\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} - a\right]^2$		$\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{nj} - a\right]^2$
$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} - a\right]^2 =$						

Пусть имеется ряд объектов 1,2,…,*n* в различной степени обладающих одним и тем же качеством *X*, *m* исследователей ранжируют эти объекты в соответствии с этим качеством. Получается таблица 5 рангов

Можно было найти коэффициент корреляции (τ или ρ) для каждой пары рядов рангов. Пришлось бы вычислять C_m^2 коэффициентов. При этом результат получился бы ненаглядным.

Лучшим способом является определение общего коэффициента ранговой корреляции для всей группы из *m* исследователей.

В этом случае рассматривают ряд, состоящий из суммарных рангов исследователей для каждого объекта:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{1j} \quad \sum_{j=1}^{m} x_{2j} \; \cdots \; \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \; \cdots \; \sum_{j=1}^{m} x_{nj} \tag{23}$$

Этот ряд рассматривают относительно ряда из *n* членов, каждый из которых равен среднему значению суммарных рангов ряда (23). Среднее значение суммарных рангов *a* равно:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}}{n} = \frac{1m + 2m + ... + im + ... + nm}{n} =$$

$$= \frac{mn(n+1)}{2n} = \frac{m(n+1)}{2} \tag{24}$$

В формуле (2) учитывается, что каждый ранг (*i*=1,2,…,*n*) повторяется у *m* исследователей.

Затем находят сумму квадратов отклонений рангов ряда (1) относительно среднего значения рангов:

$$S(d^2) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - a\right]^2 \tag{25}$$

Максимальное значение $S(d^2)$ примет тогда, когда исследователи дадут одинаковые ранги, ряды рангов имеют вид натуральных рядов чисел. Тогда ряд из суммарных рангов примет вид:

$$m \; 2m \; \ldots \; im \; \ldots \; nm \tag{26}$$

Вычтем из ряда (4) среднее значение *a* и получим ряд (5)

$$\frac{1}{2}m(1-n) \;\; \frac{1}{2}m(3-n) \;\; \ldots \;\; \frac{1}{2}m(n-1) \tag{27}$$

Сумма квадратов членов ряда (27) равна

$$S_{\max}(d^2) = \frac{1}{12}m^2(n^3 - n) \tag{28}$$

Величина W

$$W = \frac{S(d^2)}{S_{\max}(d^2)} = \frac{12\,S(d^2)}{m^2(n^3 - n)} \qquad (29)$$

называется *коэффициентом конкордации*. Он оценивает степень согласия мнений исследователей о ранжировании объектов по данному признаку и изменяется в пределах от 0 до 1:

W=0 означает, что связи между ранжировками исследователей не существует;

W=1 означает, что все исследователи одинаково ранжируют объекты.

Величина $m(n\text{-}1)W$ имеет χ^2-распределение с $\nu=n$-1 степенями свободы:

$$\chi^2 = \frac{S(d^2)}{\frac{1}{12}mn(n+1)} \qquad (30)$$

Для оценки значимости коэффициента W, полученного с помощью величины $S(d^2)$ для m исследователей, находят предельное значение $\chi^2_{\text{табл.}}$, соответствующее α=0,05 при ν=n-1.

При $\chi^2 > \chi^2_{\text{табл.}}$ гипотезу об отсутствии связи между ранжировками отвергаем.

При $\chi^2 < \chi^2_{\text{табл.}}$ гипотезу об отсутствии связи принимаем.

Найдём коэффициент конкордации для трёх ранжированных рядов (табл. 6)

ТАБЛИЦА 6

объект (i) исслед. (j)	1	2	3	4	n=5
1	1	2	4	5	3
2	2	1	4	3	5
m=3	4	3	2	1	5
$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$	7	6	10	9	13
$d_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - a$	-2	-3	1	0	4
d_i^2	4	9	1	0	16
$a = m\frac{n(n+1)}{2}$	9				
$S(d^2)$	30				

В последней строке таблицы 6 указана сумма $S(d^2) = \sum_{i=1}^{n=5} d_i^2 = 30$.

Для формирования критерия W найдём $S_{\max}(d^2)$ (табл. 7).

Коэффициент W при этом равен

$$W=\frac{S(d^2)}{S_{\max}(d^2)}=\frac{30}{90}=0{,}33$$

Для оценки значимости коэффициента W используем данные таблицы П4 приложения, где указаны предельные значения сумм $S_{табл}(d^2)$ для различных значений m и n при α=0,05. Так, для m=3, n=5 $S_{табл}(d^2)$=64.

ТАБЛИЦА 7

Суммарные ранги для натуральных рядов	$m=3$	$2m=6$	$3m=9$	$4m=12$	$5m=15$
d_i^1	$m-a=-6$	$2m-a=-3$	$3m-a=0$	$4m-a=3$	$5m-a=6$
d_i^2	$(m-a)^2=36$	$(2m-a)^2=9$	$(3m-a)^2=0$	$(4m-a)^2=9$	$(5m-a)^2=36$
$S_{\max}(d^2)$	$\frac{1}{12}m^2(n^3-n)=90$				

Так как $S(d^2)=30$ меньше $S_{табл}(d^2)$, то гипотеза об отсутствии связи(согласия) подтверждается.

Порядок выполнения работы.

1. Указать факторы, влияющие на качество печати на цифровой печатной машине (температура, влажность воздуха, краска и т.п.).
2. Составить ряды рангов указанных факторов.
3. Применяя различные методы ранговой корреляции проверить гипотезу об отсутствии связи между рядами рангов.

Для этого найти значения коэффициентов τ, ρ для двух произвольно выбранных рядов рангов. Найти коэффициент конкордации W.

Оценить на значимость полученные величины τ, ρ, W и сделать выводы в отношении принятых гипотез.

Результаты исследований представить в виде таблиц 1, 2, 3, 4, 5 и формул (7), (22), (29).

Контрольные вопросы.

1. В каких случаях применяют метод ранжирования переменных?
2. Как записывается формула для коэффициента ранговой корреляции Г и каковы пределы его измерения? Что означает, если Г=0, +1, -1?
3. Как проверяется на значимость коэффициент ранговой корреляции τ?
4. Каков смысл коэффициента конкордации W?
5. Как оценивается величина W на значимость?

Приложение.

Таблица П1-Вероятность того, что данная величина S (для τ) будет достигнута или превышена

S	n				S	n		
	4	5	8	9		6	7	10
0	0,625	0,592	0,548	0,540	1	0,500	0,500	0,500
2	0,375	0,408	0,452	0,460	3	0,360	0,386	0,431
4	0,167	0,242	0,360	0,381	5	0,235	0,281	0,364
6	0,042	0,117	0,274	0,306	7	0,136	0,191	0,300
8		0,042	0,199	0,238	9	0,068	0,119	0,242
10		0,0083	0,138	0,179	11	0,028	0,068	0,190
12			0,089	0,130	13	0,0083	0,035	0,146
14			0,054	0,090	15	0,0014	0,015	0,108
16			0,031	0,060	17		0,0054	0,078
18			0,016	0,038	19		0,0014	0,054
20			0,0071	0,022	21		0,00020	0,036
22			0,0028	0,012	23			0,023
24			0,00087	0,0063	25			0,014
26			0,00019	0,0029	27			0,0083
28			0,000025	0,0012	29			0,0046
30				0,00043	31			0,0023
32				0,00012	33			0,0011
34				0,000025	35			0,00047
36				0,0000028	37			0,00018
					39			0,000058
					41			0,000015
					43			0,0000028
					45			0,00000028

Таблица П2 - Вероятность возникновения данной (или меньшей) величины $S(d^2)$ (для ρ)

n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P	$S(d^2)$ P
10 0,542	20 0,525	34 0,500	56 0,518	84 0,512	120 0,509	164 0,500
8 0,458	18 0,475	32 0,460	54 0,482	82 0.488	118 0,491	162 0,486
6 0,375	16 0,392	30 0,401	52 0,453	80 0,467	116 0,474	160 0,473
4 0,208	14 0,342	28 0,357	50 0,420	78 0,411	114 0,455	158 0,459
2 0,167	12 0,258	26 0,320	48 0,391	76 0,420	112 0,440	156 0,446
0 0,042	10 0,225	24 0,282	46 0,357	74 0,397	110 0,422	154 0,433
	8 0,175	22 0,249	44 0,331	72 0,376	108 0,405	152 0,419
	6 0,117	20 0,210	42 0,297	70 0,352	106 0,388	150 0,406
	4 0,067	18 0,178	40 0,278	68 0,332	104 0,372	148 0,393
	2 0,042	16 0,149	38 0,249	66 0,310	102 0,354	146 0,379
			8 0,012	36 0,076	71 0,146	116 0,203

			6 0,0062	34 0,066	70 0,0135	114 0,193
			4 0,0034	32 0,057	68 0,125	112 0,184
			2 0,0014	30 0,048	66 0,0115	110 0,174
			0 0,00020	28 0,042	64 o,10б	108 0,165
				26 0,035	62 0,097	106 0,156
				24 0,029	60 0,0b9	104 0,148
				22 0,023	58 0,081	102 0,139
				20 0,018	56 0,074	100 0,132
				18 0,014	54 0,066	98 0,124
				16 0,011	52 0,060	96 0,116
				14 0,0077	50 0,054	94 0,109
				12 0,0054	48 0,048	92 0,102
				10 0,0036	46 0,043	90 0,096
				8 0,0023	44 0,038	88 0,089
				6 0,0011	42 0,033	86 0,083
				4 0,00057	40 0,029	84 0,077
				2 0,00020	38 0,025	82 0,072
				0 0,000025	36 0.022	80 0,06
					34 0.018	78 0,062
					32 0,016	76 0,057
					30 0,013	74 0.052
					28 0.011	72 0,048
					26 0,0086	70 0,044
					24 0,0069	68 0,040
					22 0,0054	66 0,037
					20 0,0041	64 0,033
					18 0,0030	62 0,030
					16 0,0022	60 0,027
					14 0,0055	58 0,025
					12 0,0010	56 0,022
					10 0,00066	54 0,019
					8 0,00037	52 0,017
					6 0,00018	50 0,015
					4 0,000083	48 0,013
					2 0,000025	46 0,012
					0 0,0000028	44 0,010
						42 0,0087
						40 0,0075
						38 0,0073
						36 0,0053
						34 0,0044
						32 0,0036
						31 0,0029
						28 0.0024
						26 0,0019
						24 0,0014
						22 0,0011
						20 0,00080
						18 0,00057
						16 0,00040

						14 0,00027
						12 0,00017
						10 0,00010
						8 0,000054
						6 0,000025
						4 0,000010
						2 0,0000028
						0,00000028

Таблица П3а - Коэффициент конкордации. Вероятность того, что, данная величина S будет достигнута или превышена (для n=3)

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,833	0,944	0,931	0,954	0,956	0,964	0,967	0,971	0,974
6	0,500	0,528	0,653	0,691	0,740	0,768	0,794	0,814	0,8o0
8	0,167	0,361	0,431	0,522	0,570	0.620	0,654	0.685	0,710
14		0,194	0,273	0,367	0,430	0,486	0,531	0,569	0,601
18		0,028	0,125	0,182	0,252	0,305	0,355	0,398	0,436
24			0,069	0,124	0,184	0,237	0,285	.,328	0,368
26			0,042	0,093	0,142	0,192	0.236	0,278	0,316
32			0,0046	0,039	0,072	0.112	0,149	0,187	0,222
38				0,024	0,052	0,085	0,120	0,154	0,187
42				0,0085	0,029	0,051	0,079	0,107	0,135
50				0,00077	0,012	0,027	0,047	0,069	0,092
54					0,00я1	0,021	0.038	0.057	0,078
56					0,0055	0,016	0,030	0 048	0,066
62					0,0017	0,0084	0,018	0,031	0.046
72					0,0001	0,0036	0,0099	0.019	0,0£0
74						0,0027	0,0080	0,016	0,026
78						0,0012	0,0048	0.010	0,018
86						0,00032	0,0024	0,0060	0.012
96						0,00032	0,0011	0,0035	0,0075
98						0,000021	0,00086	0,0029	0,0063
104							0,00026	0,0013	0,0034
114							0,000061	0,00066	0,0020
122							0,000061	0,00035	0,0013
12J							0.000061	0.00020	0,00083
128							0,0000036	0,000097	0,00051
134								0,000054	0,00037
146								0,000011	0,00018
150								0,000011	0,00011
152								0,000011	0,000085
158								0,000011	0,000044
162								0,0000060	0,000020
168									0,000011
182									0,0000021
100									0,000000099

Таблица 3b - Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина S будет достигнута или превышена (для n = 4)

S	*m*=3	*m*=5	*S*	*m*=5
1	1.000	1.000	61	0,055
3	0,958	0,975	65	0,044
5	0,910	0,944	67	0.034
9	0,727	0,857	69	0,031
11	0.108	0,771	73	0,023
13	0,524	0,709	75	0,020
17	0,446	0,652	77	0,017
19	0,342	0.561	81	0,012
21	0,300	0,521	83	0,0087
25	0,207	0,445	85	0,0067
27	0,175	0,408	89	0,0055
29	0,148	0,372	91	0.0031
33	0,075	0,298	93	0,0023
35	0,054	0,260	97	0,0018
37	0,033	0,226	99	0,0016
41	0,017	0,210	101	0,0014
43	0,0017	0,162	105	0,00064
45	0,0017	0,141	107	0,00043
49		0,123	109	0,00021
51		0,107	113	0,00014
53		0,093	117	0,000048
57		0.075	125	0,0000030
59		0,067		

Таблица 3с - Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина S будет достигнута или превышена
(для n = 4)

S	m=2	*m*=4	*m*=6	*S*	*m*=6
0	1,000	1,000	1,000	82	0,035
2	0,958	0,992	0,996	84	0,032
4	0,833	0,928	0,957	86	0,029
6	0,792	0,900	0,940	88	0,023
8	0,625	0,800	0,874	90	0,022
10	0,542	0.754	0,844	94	0,017
12	0,458	0,677	0,789	96	0,014
14	0,375	0,649	0,772	98	0,013
16	0,208	0,524	0,679	100	0,010
18	0,167	0,508	0,668	102	0,0096
20	0,042	0,432	0,609	104	0,0085
22		0,389	0,574	106	0,0073
24		0,355	0,541	108	0,0061
26		0,324	0,512	110	0,0057

30		0,242	0,431	114	0,0040
32		0.200	0,386	116	0,0033
34		0,190	0,375	118	0,0028
36		0,158	0,338	120	0,0023
38		0,141	0,317	122	0,0020
40		0,100	0,270	126	0,0015
42		0,094	0,256	128	0,00090
44		0,077	0,230	130	0,00087
46		0.068	0,218	132	0,00073
48		0,054	0,197	134	0.00065
50		0,052	0,194	136	0,03040
52		0,036	0.163	138	0,00036
54		0,033	0,155	140	0,00028
56		0,019	0.127	144	0,00024
58		0.014	0,114	146	0,00022
62		0,012	0,108	148	0,00012
64		0,0069	0,089	150	0,000095
66		0,0062	0,083	152	0,000062
68		0,0027	0,073	154	0,000046
70		0,0027	0,066	158	0,000024
72		0,0016	0,060	160	0,000016
74		0,00094	0,056	162	0,000012
76		0,00094	0,043	164	0,0000080
78		0,00094	0,041	170	0.0000024
80		0,00072	0,037	180	0,00000013

Таблица 3d - Коэффициент конкордации. Вероятность того, что данная величина S будет достигнута или превышена (для $n = 5$)

S	$m=3$	S	m=3
0	1,000	44	0,236
2	1,000	46	0,213
4	0,988	48	0,172
6	0,972	50	0,163
8	0.941	52	0,127
10	0,914	54	0,117
12	0,845	56	0,096
14	0,831	58	0,080
16	0,768	60	0,063
18	0,720	62	0,056
20	0,682	64	0,045
22	0.649	66	0,038
24	0,595	68	0,028
26	0,559	70	0,026
28	0.493	72	0,017
30	0.475	74	0,015

32	0,432	76	0,0078
34	0.406	78	0,0053
36	0,347	80	0,0040
38	0,326	82	0,0028
40	0,291	86	0,00090
42	0,253	90	0,000069

Лабораторная работа № 5. Исследование факторных планов на основе латинских квадратов.

Основные теоретические положения.

Латинские квадраты. Основные определения.

Множество букв латинского алфавита *a, b, c,...* или целых чисел, расположенных в виде квадратной таблицы $n\times\ n$ (*n* строк, *n* столбцов), называется квадратом размера n .

Квадрат называется латинским, если каждое целое число или буква встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце.

Примером латинского квадрата 2×2 является квадрат на рис.1, а на рис.2 изображен латинский квадрат 3×3.

1 0	0 1 2	0 1 2 3
0 1	1 2 0	1 2 3 0
	2 0 1	2 3 0 1
		3 0 1 2
Рис. 1	*Рис. 2*	*Рис. 3*

На рис.3 - латинский квадрат 4×4. Размер латинского квадрата вообще неограничен.

Простой способ построения латинского квадрата состоит в одношаговой циклической перестановке *0, 1, 2,...* или букв *a, b,* c,..., например, справа налево. При этом крайний элемент слева передвигается в крайнее положение справа, остальные элементы передвигаются на одно положение влево. Данный способ применяется при построении латинских квадратов, изображенных на рис. 1, 2, 3.

В общем случае $n \times n$ латинский квадрат может быть построен путем n-1 одношаговых циклических перестановок элементов.

Латинский квадрат называется стандартным, если элементы первой строки и первого столбца построены в стандартном порядке, т.е. в порядке натурального ряда, если элементами квадрата являются числа, или в алфавитном порядке, если элементы - буквы.

Стандартный квадрат называется канонической формой латинского квадрата. На рис.1, 2, 3 показаны стандартные квадраты.

Число канонических форм можно найти в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1 - Число канонических форм

Размер квадрата	2	3	4	5	6	7

Число канонических форм	1	1	4	56	9408	16942080

На рис.4 показаны четыре канонические формы квадрата 4 × 4

0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
1 2 3 0	1 3 0 2	1 0 3 2	1 0 3 2
2 3 0 1	2 0 3 1	2 3 0 1	2 3 1 0
3 0 1 2	3 2 1 0	3 2 1 0	3 2 0 1

Рис.4

Число латинских квадратов зависит от размеров квадрата и для $n > 3$ оно достаточно велико.

Для подсчета числа квадратов существует формула

$$N = I_n T_n,$$

где N - число квадратов; I_n - число канонических форм; T_n – число различных квадратов в одной и той же канонической форме. Формула квадратов в одной и той же канонической форме

$$T_n = n!(n - 1)!$$

эта формула получается следующим образом: из стандартного $n\times n$ латинского квадрата можно получить $n!(n - 1) - 1$ квадратов, сделав $n!$ перестановок столбцов и $(n - 1)!$ перестановок строк, оставляя первую строку на месте.

Так, для латинского квадрата 4×4 имеются четыре различные стандартные формы. Из каждой канонической формы могут быть построены 4!х3! - 1=143 различных нестандартных квадратов. Четырем различным каноническим формам соответствует 4 ×144 = 576 латинских квадратов 4×4.

Для латинского квадрата 3×3, имеющего одну каноническую форму, можно построить 3!×2!—1=11 различных нестандартных квадратов.

Два квадрата одного и того же размера называются ортогональными, если при наложении их друг на друга каждая упорядоченная пара целых чисел встречается ровно один раз.

Существует пара ортогональных квадратов, называемых стандартными, которым ортогонален любой латинский квадрат этого же размера. Один из этих квадратов содержит первую строку из числа нулей, вторую из единиц и т.д. другой квадрат - транспонированный первый.

Число ортогональных латинских квадратов размера n не более, чем n - 1. Множество n - 1 попарно ортогональных латинских квадратов размера n называется полным множеством ортогональных латинских квадратов.

Вместе со стандартными квадратами попарно ортогональные квадраты образуют множество из n +1 попарно ортогональных квадратов.

На рис. 5-7 показано полное множество из n+1=3 попарно ортогональных латинских квадратов размера n = 2.

1 0	0 0	0 1
0 1	1 1	0 1

Рис.5 *Рис.6* *Рис.7*

Если элементами латинского квадрата являются греческие буквы, то такой квадрат называется греческим.

Квадрат, полученный в результате наложения двух ортогональных квадратов - латинского и греческого - называется греко-латинским.

Элементы греко-латинского квадрата - это неповторяющиеся парные комбинации из n элементов. Примером такого квадрата может служить квадрат размера $n = 3$ (рис. 8).

$a\alpha$	$\delta\gamma$	$c\beta$		00	12	21
$\delta\beta$	$c\alpha$	$a\gamma$		11	20	02
$c\gamma$	$a\beta$	$\delta\alpha$		22	01	10

Рис.8 *Рис.9*

При обозначении элементов греко-латинского квадрата, показанного на рис. 8, числами получиться квадрат, изображенный на рис. 9.

Квадратная таблица, полученная при наложении более чем двух попарно ортогональных латинских квадратов, называется гипер-греко-латинским квадратом.

Факторные планы типа латинских квадратов.

Латинские квадраты применяются в теории эксперимента для построения факторных планов. Планы эксперимента, составленные на основе попарно ортогональных латинских и стандартных квадратов, имеют:

а) неповторяющиеся комбинации уровней факторов в каждом опыте (строке таблицы);

б) одинаковое число различных уровней каждого фактора.

Это позволяет получить факторные планы типа полного и дробного факторного эксперимента. При этом таблица (матрица) факторного плана для n факторов формируется из вектор-столбцов $x_1, x_2, \dots x_n$.

Вектор-столбец составляется из столбцов квадрата следующим образом: сначала записывается первый столбец квадрата, затем второй столбец записывается под первым, третий под вторым и т.д. Таблица (рис.10), имеющая два столбца и четыре строки, получена из двух ортогональных квадратов размера n= 2 (рис.6 , 7). Данная таблица представляет собой план полного двухуровневого факторного эксперимента $N = 2^2 = 4$, который применяется для получения математического описания исследуемой системы в виде полинома:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 , \qquad (1)$$

№	x_1	x_2
1	0	0
2	1	0
3	0	1

№	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	0	1
3	0	1	1

4	1	1

Рис.10

4	1	1	0

Рис.11

Если дополнить таблицу (рис.10) третьим столбцом x_3, представляющим латинский квадрат размера $n = 2$ (рис. 11), то получиться матрица плана $4{:}2^3$**.**

Указанное обозначение плана эксперимента следует понимать так: двухуровневый план для трех факторов состоит из четырех опытов. Он предназначен для получения зависимости исследуемой функции от трех переменных факторов в виде линейного уравнения:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \tag{2}$$

На основе двух ортогональных латинских квадратов размера $n = 3$ (рис. 8-9) получена матрица плана $9{:}3^2$ (рис. 12).

№	x_1	X_2
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	1	2
5	2	0
6	0	1
7	2	1
8	0	2
9	1	0

Рис. 12

№	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	1	0
3	2	2	0
4	1	2	1
5	2	0	1
6	0	1	1
7	2	1	2
8	0	2	2
9	1	0	2

Рис.13

№	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
2	1	1	0
3	2	2	0
4	1	0	1
5	2	1	1
6	0	2	1
7	2	0	2
8	0	1	2
9	1	2	2

Рис.14

План (рис. 12) состоит из девяти опытов, в которых два фактора x_1 и x_2 изменяются на трех уровнях 0,1,2, Но применяется для получения математической модели в виде неполного кубического уравнения:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{112} x_1^2 x_2 + a_{122} x_1 x_2^2 \tag{3}$$

Если таблицу (рис.12) дополнить столбцом x_3, который является развернутым по вертикали стандартным квадратом размера $n = 3$ (рис.7), то получится план $9{:}3^2$**.** Этот план применяется при изучении влияния на исследуемую функцию трех факторов, изменяющихся на трех уровнях. Аналогичный план (рис.14) составлен из латинского квадрата и двух стандартных квадратов. Этот же план представлен в виде таблицы (рис. 15). где фактор *A* соответствует фактору x_1 (рис.14), фактору *B* - x_2 , *C* - x_3 . Различные уравнения фактора *A* обозначены как a_1, a_2, a_3 и т.д.

Планы эксперимента, показанные на рис.13 и 14, применяются для получения квадратного уравнения:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 , \tag{4}$$

Если создать таблицу из двух пар попарно ортогональных латинских и стандартных квадратов одинакового размера (n=3) (рис. 16), то получается четырехфакторный план 9:3^4. Данный план применяется для получения квадратного уравнения (5):

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2, \qquad (5)$$

B	*C*		
	c_1	c_2	c_3
b_1	a_1	a_2	a_3
b_2	a_2	a_3	a_1
b_3	a_3	a_1	a_2

Рис.15

№	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0	0
2	1	1	1	0
3	2	2	2	0
4	1	2	0	1
5	2	0	1	1
6	0	1	2	1
7	2	1	0	2
8	0	2	1	2
9	1	0	2	2

Рис. 16

Рассмотренные планы эксперимента, составленные на основе латинских квадратов размера *n,* называются латинскими квадратами. На рис. 17 показан четырехуровневый пятифакторный план 16:4^5. По результатам данного эксперимента получают кубическое уравнение связи.

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 +$$
$$+ a_{44} x_4^2 + a_{55} x_5^2 + a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + a_{444} x_4^3 + a_{555} x_5^3, \qquad (6)$$

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	*0*	0	0
2	2	0	2	1	3
3	3	0	3	3	1
4	1	0	1	2	2
5	0	2	2	3	2
6	2	2	0	2	1
7	3	2	1	0	3
8	1	2	3	1	0
9	0	3	3	2	3
10	2	3	1	3	0
11	3	3	0	1	2
12	1	3	2	0	1

13	0	1	1	1	1
14	2	1	3	0	2
15	1	1	0	3	3

Рис. 17

Ортогональные факторные планы.

Для получения независимых друг от друга значений коэффициентов модели системы факторные планы должны удовлетворять условию ортогональности.

Условием ортогональности линейного (двухуровневого) плана, применяемого для получения уравнения (7):

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \ , \qquad (7)$$

являемся ортогональность вектор-столбцов x_i - главных эффектов матрицы факторов.

$$\sum_{j-1}^{N} x_{ij} x_{kj} = 0 \qquad (i \neq k) \qquad (8)$$

Для выполнения условия (8) требуется переход от условного обозначения уровня x_i, заданного числами 0,1,... к нормированному значению x_i , симметричному относительно среднего значения:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0 \qquad (9)$$

При этом значение x_i определяется по формуле:

$$x_i = k_1 \left| x_i - \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}}{N} \right| ; \qquad (10)$$

где k_i - коэффициент, выбираемый из условия получения x в виде целого числа.

Если применить условие (10) к двухфакторному плану (рис. 10), то получится ортогональная матрица факторов x :

$$x = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Информационная матрица $x^T x$ этого плана диагональна:

$$x^T x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты линейного уравнения (7) при этом находятся из простого математического соотношения:

$$\begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{N} y_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^{N} x_{2j} y_j \end{vmatrix} ;$$

Дисперсии коэффициентов одинаковы и равны:

$$\sigma^2\{a_0\} = \sigma^2\{a_1\} = \sigma^2\{a_2\} = \sigma^2\{y\}\ /4$$

Факторный план второго порядка, имеющий три уровня 0,1,2, предназначен для получения квадратного уравнения:

$$y_p = a_0 + \Sigma\, a_i x_i + \Sigma\, a_{ii} z_i, \text{ где } z_i = f(x_i^2)$$

Условиями ортогональности факторного плана второго порядка, имеющего три уровня 0,1,2, являются:

- ортогональность вектор - столбцов x_i , главных эффектов первого порядка матрицы факторов x:

$$\sum_{j-1}^{N} x_{ij} x_{kj} = 0 \qquad (i \neq k)\ (11)$$

- ортогональность вектор - столбцов главных эффектов первого и второго рода:

$$\sum_{j-1}^{N} x_{ij} z_{ij} = 0 \qquad (12)$$

В формулах (11, 12) x_i - нормальное значение фактора. Оно подчиняется условию:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0 \ ; \qquad (13)$$

при этом x_i равно:

$$x_i = k_i\ (x_i - \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}}{N}) \ ; \qquad (14)$$

z_i - нормальное значение фактора, соответствующее главному эффекту второго порядка. Оно подчиняется условию:

$$\sum_{j=1}^{N} z_{ij} = 0 \qquad (15)$$

при этом выражение z_i имеет следующий вид

$$z_i = M_i (x_i^2 - A_{1i} x_i - A_{0i}), \qquad (16)$$

где A_{1i} , A_{0i}, M_i - коэффициенты , определяемые из условий (11), (12),(15).

Условия ортогональности применим к факторному плану $9{:}3^4$ для получения модели в виде уравнения:

$$y_{ip} = a_0 + \sum_{j-1}^{d=4} a_i x_i + \sum_{j=1}^{d=4} a_i z_{ij} \qquad (17)$$

Получение значений факторов для получения главных линейных эффектов определяется по формуле:

$$x_{ij} = x_{2j} - 1 \quad (i = 1,2,3,4).$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	2	2
0	1	1	2
1	1	2	0
2	1	0	1
0	2	2	1
1	2	0	2
2	2	1	0

Рис. 18

Нормированные уровни факторов для получения главных эффектов второго порядка получаются по формулам:

$$z_i = 3x_{ij}^{\ 2} - 2 \quad (i = 1,2,3,4) \qquad (18)$$

Ортогональная матрица факторов x имеет вид:

$$x = \begin{array}{ccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

Информационная матрица диагональна :

$$x^T x = \begin{array}{ccccccccc} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18
\end{array}
$$

Коэффициенты уравнения (17) определяются по следующим формулам:

$$a_1=\frac{1}{9}\sum_{j=0}^{N=9} y_j \quad , \quad a_1=\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\, y_j \quad , \quad a_n=\frac{1}{16}\sum_{j=1}^{N} z_{ij}\, y_j \quad (i=1,2,3,4) \qquad (19)$$

Оценки коэффициентов дисперсии при этом равны:

$$\sigma^2\{a_0\}\frac{\sigma^2\{y\}}{9}\ ,\ \sigma^2\{a_1\}\frac{\sigma^2\{y\}}{6}\ ,\sigma^2\{a_{ij}\}\frac{\sigma^2\{y\}}{18}\ \ (i=1,2,3,4)\ \ (20)$$

Задание на выполнение работы «Исследование факторных планов на основе латинских квадратов».

1.Составить таблицу плана эксперимента $9{:}3^2$ для получения квадратичной модели исследуемой функции.

2.Применить данный план для исследования механического маятника. Получить зависимость возбуждающей силы *F(V,m)* – от скорости движения и массы груза вблизи резонанса в виде квадратного уравнения. Провести статистический анализ. Сделать выводы из анализа модели о степени влияния переменных факторов *V, m* на исследуеме. силу и определить параметры $m_{рез}$.

Порядок выполнения работы:

1. Нарисовать таблицу факторного плана для двух переменных параметров, изменяющихся на трех уровнях (рис. 12).

2. Данный план применить для исследования механического маятника с целью получения зависимости возбуждающей силы F от скорости движения V и массы груза m.

3. Рекомендуется провести исследование вблизи резонанса, приняв следующие значения базисных уровней и шагов варьирования параметров:

$V \pm \Delta V = 5 \pm 1$ [м/с] ;

$m^* \pm \Delta m = 10 \pm 3$[кг].

4. При переходе к нормированным уровням факторов (параметров) план $9{:}3^2$ имеет вид, показанный в таблице.

ТАБЛИЦА

j	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	0	0	y_2
3	1	1	y_3
4	-1	1	y_4
5	0	-1	y_5

6	1	0	y_6
7	-1	0	y_7
8	0	1	y_8
9	1	-1	y_9

5. По результатам этого плана получить квадратное уравнение:

$$y_p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{11} z_1 + a_{22} z_2 ,$$

где $z_1 = 3x_1^{\,2} - 2; \qquad z_2 = 3x_2^{\,2} - 2.$

6. Формулы для коэффициентов следует вывести на основе матрицы $\left|x^T x\right|^{1}$, где x - матрица параметров:

x_0	x_1	x_2	$z_1 = 3x_1^{\,2} - 2$	$z_2 = 3x_2^{\,2} - 2$	x_1x_2
1	-1	-1	1	1	1
1	0	0	-2	-2	0
1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	-1
1	0	-1	-2	1	0
1	1	0	1	-2	0
1	-1	0	1	-2	0
1	0	1	-2	1	0
1	1	-1	1	1	-1

Матрица $\left|x^T \ x\right|$:

	x_1	x_2	$z_1 = 3x_1^{\,2} - 2$	$z_2 = 3x_2^{\,2} - 2$	x_1x_2
9	0	0	0	0	0
0	6	0	0	0	0
0	0	6	0	0	0
0	0	о	18	0	0
0	0	о	0	18	0
0	0	0	0	0	4|

Матрица $\left|x^T x\right|^{-1}$:

x_0	x_1	x_2	$z_1 = 3x_1^{\,2} - 2$	$z_2 = 3x_2^{\,2} - 2$	x_1x_2
1/9	0	0	0	0	0
0	1/6	0	0	0	0
0	0	1/6	0	0	0
0	0	0	1/18	0	0

0	0	0	0	1/18	0
0	0	0	0	0	1/4

Итак,

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N=9} x_{0j} y_j}{9}\;;\; a_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{1j} y_j}{6}\;;\; a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{2j} y_j}{6}\;;\; a_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{1j} x_{2j} y_j}{4}$$

$$a_{11} = \frac{\sum_{j=1}^{N} z_{1j} y_j}{18} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(3x_{1j}^2 - 2\right) y_j}{18}\;;\; a_{22} = \frac{\sum_{j=1}^{N} z_{2j} y_j}{18} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(3x_{2j}^2 - 2\right) y_j}{18}\;;$$

7. Рассчитать коэффициенты квадратного уравнения, проверить значимость коэффициентов и адекватность модели.

8. Произвести анализ уравнения.

9.Решить систему уравнении, получаемую после приравнивания к нулю производных по переменным параметрам :

$\frac{\delta y}{\delta} = 0$; $y = 0$; $(y \sim F\,;\, x_1 \sim V;\, x_2 \sim m)$;

Найти параметры, соответствующие F_{min} (резонанс сил).

Контрольные вопросы

1. Какой квадрат называется латинским?
2. Каково условие ортогональности латинских квадратов?
3. Как получить трехуровневый план для случая двух факторов?
4. Какими свойствами обладает план, составленный на основе латинских квадратов? Покажите на примере план $9{:}3^2$.
5. Как получить коэффициенты квадратного полинома по результатам плана $9{:}\ 3^2$?

Литература.

1. *Налимов В.В., Чернова Н.А.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.-М.:Наука,1966.

Лабораторная работа №6. Предварительное изучение объекта исследований методом экспертных оценок

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию любого процесса, машины или информационной системы обычно предшествует их анализ – предварительное изучение предполагаемого объекта исследования с целью получения информации, необходимой для постановки задачи и принятия решения о первоначальном этапе работы.

Целью любого исследования является оценка качества технической или информационной системы. При этом различают показатели качества самой системы как объекта, а также процесса её функционирования, характеризующего степень приспособленности системы для решения поставленной перед ней задачи, для достижения цели операций, реализуемой этой системой, т.е. её эффективности.

Особенностью большинства исследований в промышленности является необходимость в изучении свойств процессов, выбора способов их реализации, или разработки технологии и оборудования, что характеризуется учётом большого числа требований, предъявляемых к информации, как конечному продукту. Данное обстоятельство заставляет проводить исследование для отбора наиболее значимых требований, необходимых, прежде всего для правильной постановки задачи, а также проведения необходимых исследовательских и конструкторских работ. Поэтому особое значение приобретает предварительное изучение объекта исследования.

2. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ОБЪЕКТУ ИССЛЕДОВАНИЯ.

При разработке новых процессов, изделий промышленности, машин и аппаратов, перед исследователями, технологами и конструкторами встают задачи выполнения ряда требований, предъявляемых к объекту исследования. Анализ всей совокупности таких требований и выбор наиболее значимых, на основе которых будет осуществляться дальнейшая разработка (выбор метода проектирования, материала, обоснование конструкции, технологии изготовления и т.п.) является неотъемлемой частью научно–исследовательской работы и характеризует этап предварительного изучения объекта исследования.

Выполняя настоящую лабораторную работу, студенту предстоит самостоятельно разработать требования к объекту исследования и выделить наиболее важные из них.

Каждой группе студентов выдается система в виде кибернетической модели «черного ящика» (см. рис.1).

Исследуемая функция y в процессе эксперимента испытывает влияние не только переменных факторов $x_1,...x_i,...x_n$, но и влияние помехи (рис. 1), обозначенной через e:

$$y = f(x_1, ... x_n) + e$$

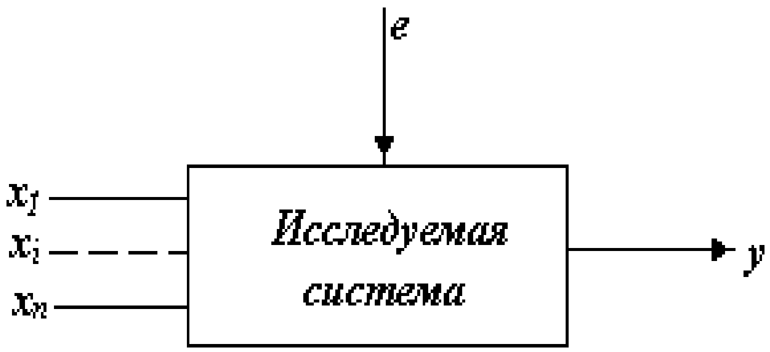


Рис. 1

Полагают, что помеха e является случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения с параметрами $m\{e\}=0$, $\sigma^2\{e\}=\sigma^2\{y\}$. В силу влияния помехи по экспериментальным данным y получают не истинное значение коэффициентов, а их статистические оценки.

Согласно этой схеме из всего перечня входных параметров (17 параметров) студенты, разбившись на подгруппы из 3-х человек, после обсуждения, отбирают до 6 входных параметров, которые им предстоит ранжировать.

Структура выходных параметров, а также критериев и требований, предъявляемых к разрабатываемой системе, задается преподавателем.

Далее, задаваясь 10-20% интервалом варьирования по выбранным факторам, каждый студент самостоятельно строит матрицу влияния входных факторов.

При таком подходе каждому фактору соответствует свой уровень влияния, по которому можно оценить значимость того или иного входного фактора, применительно к конкретной заданной системе.

Использование теоретических знаний из учебников [1, 2] и лекций должно помочь студентам сформулировать совокупность конкретных требований к объекту исследования.

Для оценки значимости требований может использоваться метод априорного ранжирования факторов.

3. МЕТОДИКА АПРИОРНОГО РАНЖИРОВАНИЯ ФАКТОРОВ

Целью априорного ранжирования факторов является исследование, проводимое на начальной стадии экспериментальной работы, в тех случаях, когда из большого числа требований нужно выделить наиболее важные для дальнейшего изучения и отсеять остальные.

Особенность метода априорного ранжирования факторов заключается в том, что требования ранжируются в порядке убывания по значимости для изделия. Вклад каждого из них оценивается по величине ранга – места, которое отведено исследователем (специалистом при опросе) данному требованию при ранжировании. При сборе мнений путём опроса специалистов каждому из них предлагается заполнить анкету, в которой перечислены требования, их размерность и предполагаемые интервалы варьирования. Заполняя анкету, специалист определяет место каждого из них в ранжированном ряду. Результаты опроса специалистов (или ранжирования по литературным данным) обрабатываются следующим образом.

3.1. Определяем сумму рангов по факторам – требованиям:

$$\sum_{1}^{m} a_{ij},$$

где a_{ij} – ранг каждого i-го фактора и j-го исследователя;

m – число исследователей.

3.2. Определяют разность (Δ_i) между суммой каждого фактора и средней суммой рангов

$$\Delta_i = \sum_{1}^{m} a_{ij} - \frac{\sum_{1}^{k}\sum_{1}^{m} a_{ij}}{k},$$

где k – количество факторов.

3.3. Определяют сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{1}^{m} (\Delta_i)^2,$$

3.4. Определяют степень согласованности мнений исследователей:

$$\omega = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m\sum_{1}^{m} T_j},$$

$$T = \sum (t_j^3 - t_j),$$

где tj – число одинаковых рангов в j- ом ранжировании.

3.5. Если исследователи неодинаково ранжируют факторы (ω значительно отличается от единицы), определяют значение χ^2 – критерия:

$$\chi^2 = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1}\sum_{1}^{m} T_j},$$

3.6. Используя таблицу в приложении находят значение χ^2 – критерия для степеней свободы, *f = k-1*.

3.7. Гипотеза о наличии согласия исследователей принимается, если табличное значение χ^2 – критерия меньше расчётного, найденного по приведенной выше формуле, для 5% уровня значимости.

3.8. Оценив согласованность мнений всех исследователей, строят среднюю диаграмму рангов, откладывая по одной оси факторы, а по другой – соответствующие суммы рангов.

3.9. В случае неравномерного экспоненциального убывания распределения часть факторов можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Если же распределение равномерное, рекомендуется в дальнейшем использовании включать все факторы.

Граница значимости факторов M_{min} может быть определена, исходя из предположения о равнозначности всех факторов.

$$M_{min} = \frac{1}{k}$$

4.ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

4.1. Согласно выданному преподавателем заданию, студенты, используя соответствующую иерархическую структуру требований, формулируют всю совокупность требований к объекту исследования, присваивая каждому порядковый индекс x, x, ….., x.

4.2. Выбирается группа экспертов (исследователей), которыми могут быть все, присутствующие на занятии студенты. Каждому эксперту присваивается порядковый номер.

4.3. Составляется таблица по следующей форме:

Таблица 1. - Матрица рангов

Исследователи	Факторы (к)							T_j=
m	1	2	3	4	5	i	k	T_j=
1								T_j=
2								T_j=
j								T_j=
m								T_j=
Σa_{ij}								ΣT_j=
Δ								
$(\Delta)^2$								S=

4.4. Каждый эксперт назначает каждому фактору (требованию) величину ранга по пятибальной шкале, вписывая его в таблицу 1.

4.5. Производится обработка результатов исследования по методике, приведённой в работе №4 настоящих методических указаний. Результаты вычислений вписываются в таблицу.

4.6. Оценив согласованность мнений экспертов, строится диаграмма рангов, и в соответствии с границей значимости определяются наиболее значимые из них.

4.7. Составляется отчёт по лабораторной работе.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА ПО РАБОТЕ.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать:

- формулировку выданного задания;
- совокупность требований к объекту исследования в соответствии с порядковыми индексами:

x_1-

x_2-

.

.

.

$x_к$-

- фамилии экспертов и их соответствующие номера;
- матрицу рангов в форме таблицы 1;
- вычисления по формулам и в порядке указанном в разделе 3 данной работы;
- диаграмму рангов с указанием границы значимости требований;
- перечень наиболее значимых требований к объекту исследования.
- выводы и рекомендации по результатам работы.

Отчёт подписывается всеми экспертами.

Литература

1. **Рыков, А.С.** Модели и методы системного анализа: принятие решений и оптимизация : учебное пособие для вузов / А.С.Рыков .— М. : МИСИС: Руда и металлы, 2005 .— 352 с.

2. **Аттетков, А.В.** Методы оптимизации : учебник для втузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин; под ред.: В.С., Зарубина,А.П. Крищенко .— 2-е изд., стер. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003 .— 440 с.

Лабораторная работа № 7. Экспертные системы для выбора технологии упаковочного производства: проектирование базы знаний

1. Краткие теоретические сведения

Экспертные системы можно рассматривать как информационные модели процесса принятия решений.

В состав любой экспертной системы входит база знаний, машина вывода и интерфейс пользователя.

База знаний (БЗ) в символьном виде (максимально приближенном к естественному языку) содержит факты и сведения об исследуемой области и набор логических правил, которые построены на основании опыта экспертов и справочной информации.

База знаний условно может быть разделена на две части. Первая часть включает перечень фактов: разрешенные значения, т. е. возможные параметры технологического процесса, и вопросы, используемые экспертной системой в диалоге для выбора конкретного значения. Вторая часть состоит из правил вывода. Это логические правила (так называемые «продукции»), в которых используются конкретные значения разрешенных параметров для получения некоторых выводов.

В используемой в лабораторной работе экспертной системе установлена следующая структура базы знаний.

Каждому *k*-ому параметру соответствует строка с перечислением всех его *n* разрешенных значений:

разрешзн(*параметр_k*)=*значение*_1,*значение*_2,...,*значение_n*

Например:

разрешзн(оригинал)=типографский,рукописный,электронный

разрешзн(текст)=в_электрон_виде,на_бумаге

разрешзн(есть_иллюстр)=да,нет

разрешзн(текст_сканир)=да,нет

Конкретное значение этого параметра может быть определено системой на основании правил вывода или определено в ходе непосредственного диалога с пользователем. В случае диалога в БЗ должна быть следующая строка:

вопрос(параметр_*k*)= текст вопроса

В рассматриваемом примере к таким параметрам относятся первые три, вопросы к ним могут иметь вид:

вопрос(текст)= В каком виде представлен текстовый оригинал?

вопрос(оригинал)= Каково качество текстового оригинала?

вопрос(есть_иллюстр)= Имеются ли в издании иллюстрации?

В процессе работы экспертной системы необходимые вопросы будут заданы пользователю именно в такой редакции, а в качестве ответов предложены все разрешенные значения соответствующего параметра.

При проектировании базы знаний необходимо учитывать то, что текст вопросов и ответов (разрешенных значений) должен быть понятен пользователю. Названия параметров являются внутренней информацией системы и задаются разработчиком по собственному усмотрению. В предлагаемой студенту на лабораторной работе экспертной системе все наименования могут состоять из букв русского и латинского алфавита. При записи значений пробелы не допускаются, при необходимости можно использовать значок нижнего подчеркивания, одно значение не должно занимать более 17 символов. При записи текста вопросов можно использовать пробелы.

Правила вывода, составляющие вторую часть БЗ, имеют формат:

правило*N*: если
параметр_k=значение_i
то *следствие*.

Правило заканчивается точкой. В условии может использоваться логическая операция **«и»** (см. пример далее). Следствие представляет собой равенство, где присваивается определенное значение либо очередному параметру, либо выходной величине, которая является результатом работы.

В рассматриваемой системе такими выходными величинами являются «технология» и «продукция». Для определения значений каждой из них необходим свой набор правил. Таким образом, в базе знаний должны быть две группы правил, в каждой из которых нумерация начинается с нуля. Первые правила каждой группы являются стандартными:

правило0: если
старт=неизвестен
то продукция=неизвестна**.**
...
правило0: если
старт=неизвестен
то технология=неизвестна**.**

Для записи конкретного значения выходного параметра отводится не более 70 символов, пробелы использовать нельзя.

Примеры некоторых правил для определения промежуточных параметров («текст_сканир») и выходной величины («технология») приведены ниже. Необходимо отметить, что для рассматриваемых параметров этот набор правил является неполным.

правило4: если
текст=в_электрон_виде **и**
есть_иллюстр=нет
то технология=Печать_Корректура1_Верстка_Корректура2_Вывод_фотоформ**.**
правило5: если
текст=на_бумаге **и**
оригинал=типографский
то текст_сканир=да**.**

правило6: если
текст_сканир=да **и**
есть_иллюстр=нет
то технология=Сканир_Распозн_Печать_Коррект1_ Верстка_ Коррект2_Выв_фотоформ**.**

При составлении базы знаний необходимо следить за тем, чтобы одинаковые величины везде (в разрешенных значениях, вопросах и правилах) были записаны абсолютно одинаково (с точностью до каждого символа и его начертания). При записи цепочки технологических операций не нужно самостоятельно делать переносы на следующую строку.

2. Содержание работы

1. Проанализировать исходную технологическую схему (при необходимости — дополнить ее). Указать условия выбора определенной операции там, где технологическая схема имеет разветвления (т. е. возможны различные варианты выполнения определенной стадии изготовления продукции или некоторая операция может отсутствовать). Записать в тетради все соответствующие схеме возможные цепочки технологических операций (линейные).

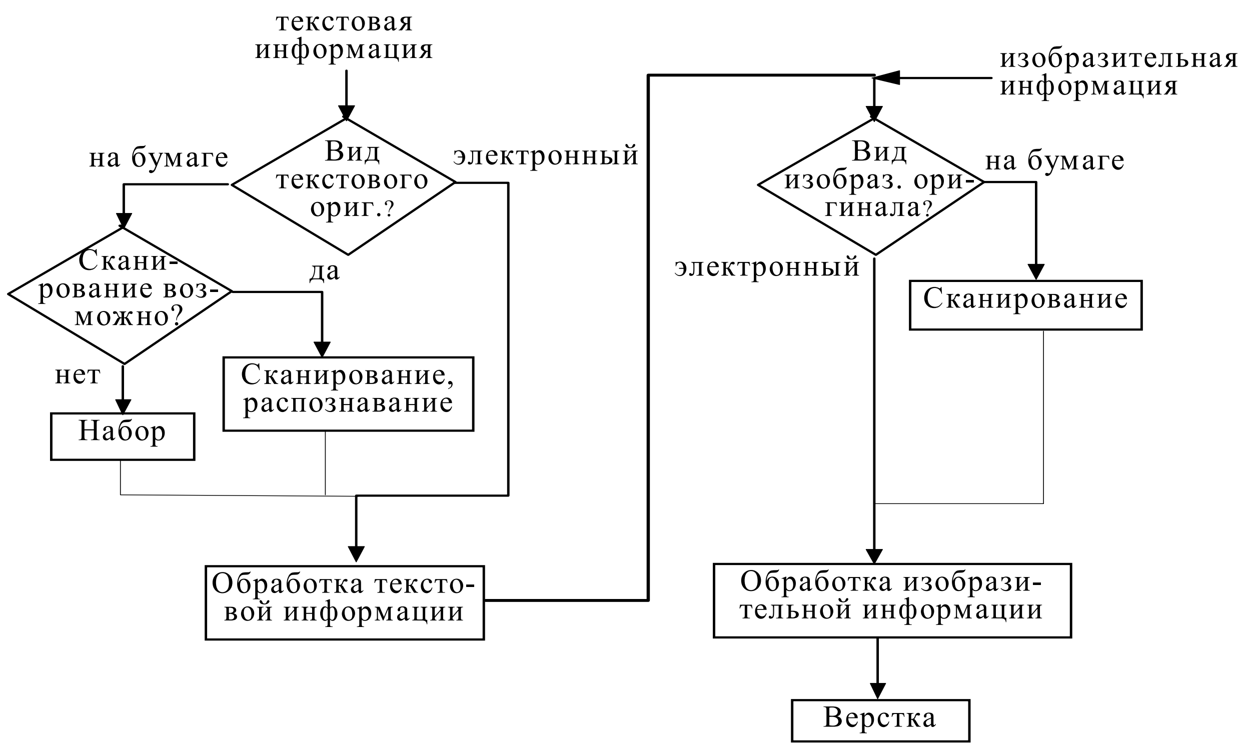
2. Составить текст вопросов и перечень разрешенных значений параметров в соответствии с условиями выбора операций. Записать все необходимые правила вывода для определения нужных промежуточных параметров и для получения значения выходного параметра «технология». Составленные ранее цепочки технологических операций и являются этими выходными значениями.

Рассматриваемой технологии должен соответствовать полный набор разрешенных значений и правил вывода.

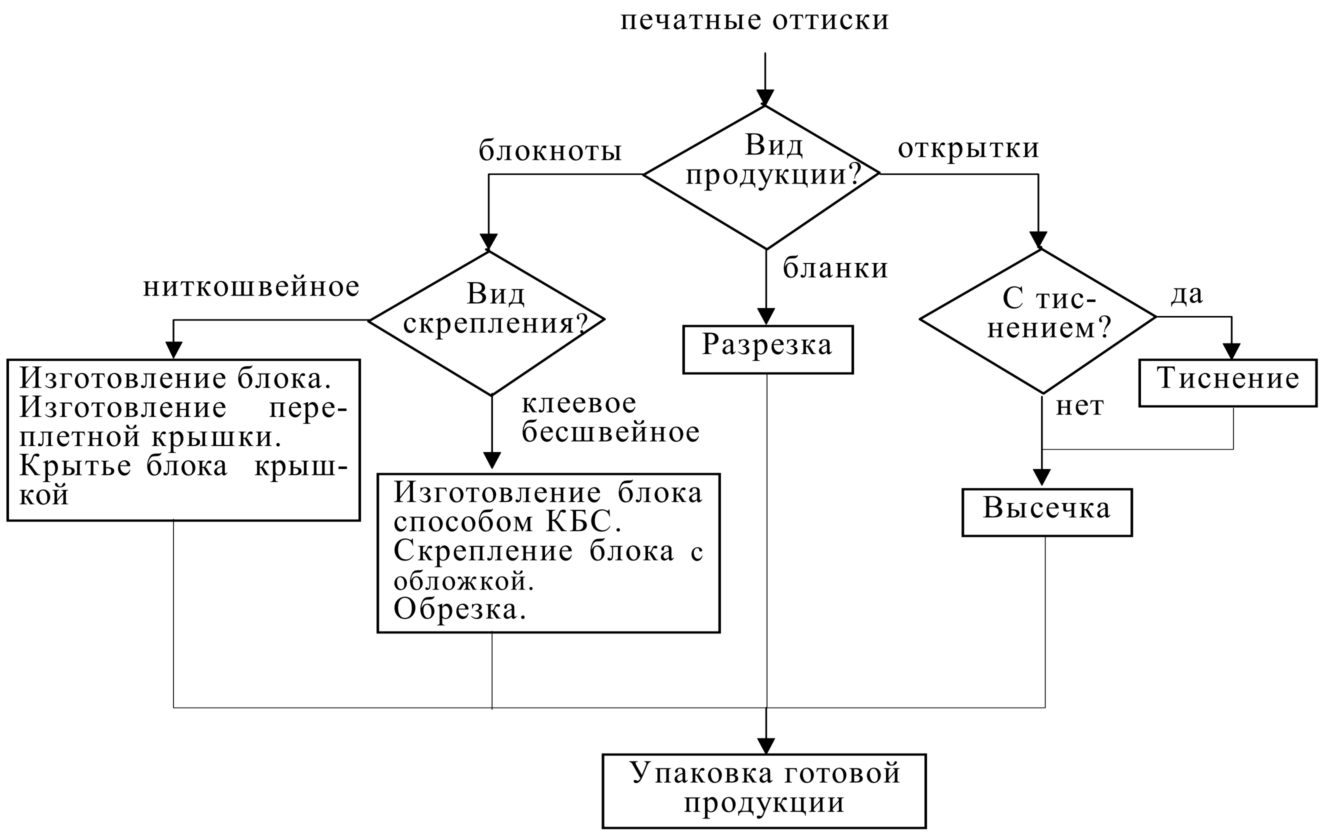
3. После контроля преподавателем выполнения предыдущих этапов все разработанные элементы БЗ записываются в специальный файл. На этапе проверки работы экспертной системы необходимо проверить все возможные варианты диалога.

3. Исходные данные

1. При изготовлении оригинал-макета журнала может быть использована следующая технологическая схема:



2. Технологическая схема брошюровочно-переплетных процессов:



3. Вариант технологии допечатных процессов при изготовлении рекламной продукции:

4. Контрольные вопросы

1. Что такое база знаний экспертной системы, какова ее структура?
2. Какова структура правила вывода? Какие логические операции используются в правилах?
3. Как машина вывода находит для диалога возможные ответы на конкретный вопрос?
4. Чем обусловлен порядок задания вопросов в ходе диалога?
5. В каких областях упаковки целесообразнее использовать экспертные системы?

Лабораторная работа № 8. Выбор критерия оптимальности

технологии по методу ранговой корреляции

1. Краткие теоретические сведения

Для того, чтобы обеспечить выбор наиболее рационального технологического варианта, необходимо знать критерий, по которому будут сравниваться возможные варианты изготовления продукции. Для разных видов изданий и конкретных производственных условий эти критерии (целевые установки) различны.

К числу наиболее важных критериев чаще всего относят: себестоимость К1, прибыль К2, качество К3, потребность в количестве и ассортименте изданий К4, производительность процесса К5, использование производственной мощности К6, использование сырья и материалов К7, стоимость реализованной продукции К8, производительность труда К9, соблюдение установленных сроков изготовления К10, затраты рабочего времени К11, непрерывность технологического процесса К12, показатель эффективности производства К13.

В зависимости от поставленной задачи, можно выбирать наиболее важный критерий для каждого вида издания или для группы изданий. Число критериев и их состав может изменяться в зависимости от характера производства.

Для определения критерия оптимальности может быть использован экспертный опрос. Качество такого опроса во многом зависит от числа и квалификации экспертов.

Метод ранговой корреляции основан на том, что каждый из m экспертов, участвующих в опросе, присваивает каждому из оцениваемых n объектов (критериев) некоторое ранговое число. При этом наиболее важный критерий занимает 1-ое место (получает ранг 1), следующий — ранг 2 и т. д. в порядке убывания предпочтения. Число рангов k может не совпадать с числом объектов n, в этом случае эксперт присваивает разным объектам один и тот же ранг.

Обозначим через u_{ij} ранговое число, которое i-ый эксперт присвоил j-му объекту, причем $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$. Пусть, например, 5 экспертов оценивают 6 критериев по четырехбалльной системе (наименее важному критерию присваивается ранг, равный 4). По результатам опроса заполняется специальная таблица (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1 - Таблица экспертного опроса по методу ранговой корреляции

Эксперты	№ критерия					
	1	2	3	4	5	6
1	2 3	3 4	1 1	4 6	1 2	3 5
2	1 1	2 2	2 3	3 5	2 4	4 6
3	1	4	1	3	2	4
4	2	3	1	4	3	2
5	2	2	1	3	2	4

Чаще всего число рангов меньше, чем число оцениваемых объектов ($k < n$), поэтому для обеспечения возможности применения метода ранговой корреляции объектам присваивают так называемые нормированные ранги.

В каждой строке ранговым числам присваиваются последовательно неповторяющиеся места, а затем определяется среднее арифметическое суммы мест, которые занимают объекты с одинаковыми рангами. Это значение записывается в новую нормированную матрицу на место соответствующего ранга.

Например, для первого эксперта ранг 1 повторяется два раза, он присвоен третьему и пятому критериям, которые, таким образом, имеют места 1 и 2. Значит, нормированный ранг этих объектов, представляющий собой среднее арифметическое их мест, равен (1 + 2) / 2 = 1,5. Это число записывается в новой матрице (табл. 4.2) в первой строке третьей и пятой ячейке.

Для удобства места можно подписывать в исходной матрице, как в первой и второй строке табл. 4.1, в верхнем правом углу ячейки.

Ранговое число 2 повторяется в первой строке один раз, ему присваивается следующее место — 3, которое и будет новым нормированным рангом (первая ячейка). Рангу 3 будут присвоены места 4 и 5, поэтому значение (4 + 5)/2 = 4,5 займет в новой матрице вторую и шестую ячейки.

Аналогично определяются нормированные ранги и для остальных критериев. В результате нормирования матрица приобретает следующий вид (табл. 4.2). Последняя строка этой таблицы содержит суммы нормированных рангов для каждого критерия.

Таблица 4.2 - Таблица нормированных рангов

Эксперты	Критерии						T_i
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	3	4,5	1,5	6	1,5	4,5	12
2	1	3	3	5	3	6	24
3	1,5	5,5	1,5	4	3	5,5	12
4	2,5	4,5	1	6	4,5	2,5	12
5	3	3	1	5	3	6	24
Сумма	11	20,5	8	26	15	14,5	84

В табл. 4.2 введен столбец T_i, который будет далее использован для оценки достоверности полученных результатов. Величины T_i рассчитываются по формуле

$$T_i = \sum_{t_j} \left(t_j^{\,3} - t_j\right), \qquad (4.1)$$

где t_j — число повторений j-го рангового числа в i-ой строке.

В примере с четырехбалльной системой оценок число слагаемых этой формулы равно 4. Для первого эксперта ранги 1, 2, 3 и 4 повторялись 2, 1, 2 и 1 раз, соответственно,

$$T_1 = (2^3 - 2) + (1^3 - 1) + (2^3 - 2) + (1^3 - 1) = 12.$$

Поскольку более важный критерий имеет меньший ранг (это условие при нормировании сохраняется), то наиважнейшему критерию будет соответствовать минимальная сумма нормированных рангов. Как видно из приведенного примера, первое место и наибольшее предпочтение должны быть отданы третьему критерию, второе место — первому и т. д.

Степень согласованности мнений экспертов оценивается с помощью коэффициента конкордации Кендалла, который рассчитывается по формуле

$$W = \frac{12s}{m^2\left(n^3 - n\right) - b}, \tag{2}$$

где величина s вычисляется по формуле

$$s = \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} u_{ij} - \frac{1}{2}m\left(n+1\right)\right\}^2, \quad b = m\sum_{i=1}^{m} T_i. \tag{3}$$

Используемые в (2) и (3) суммы $\sum_{i=1}^{m} u_{ij}$ и $\sum_{i=1}^{m} t_i$ берутся из последней строки табл. 4.2.

Коэффициент Кендалла может изменяться от 0 до 1, причем, чем ближе его значение к единице, тем выше согласованность мнений экспертов. При $W > 0{,}5$ (мнение экспертов согласовано более чем на 50%), результаты опроса могут быть использованы в дальнейшем. При $W \le 0{,}5$ (мнение не согласовано) необходимо проводить новый экспертный опрос.

Для приведенного примера $m(n + 1)/2 = 5(6 + 1)/2 = 17{,}5$.

Тогда

$$s = (11 - 17{,}5)^2 + (20{,}5 - 17{,}5)^2 + (8 - 17{,}5)^2 + (26 - 17{,}5)^2 + (15 - 17{,}5)^2 + (14{,}5 - 17{,}5)^2 = 229;$$

$$b = 5 \times 84 = 420;$$

$$W = (12 \times 229) / (5^2(6^3 - 6) - 420) = 0{,}57.$$

Мнение экспертов в этом случае согласовано на 57%.

2. Содержание работы

1. Для заданного вида упаковочной продукции составить в тетради таблицу метода ранговой корреляции (см. табл. 4.1) с тринадцатью предложенными выше критериями, т. е. $n = 13$. В заголовке таблицы указать оцениваемый вид продукции (исходные данные).

2. Заполнить первую строку таблицы в качестве первого эксперта, используя пятибалльную систему ранговых чисел.

3. В качестве остальных экспертов должны выступить другие студенты (не менее семи человек ($m \ge 7$)). Таким образом, каждый студент оценивает различные виды продукции (для этого удобно последовательно меняться тетрадями с соседями по учебной группе). Экспертную работу необходимо проводить с учетом специфики каждого из оцениваемых объектов.

4. Далее каждый студент обрабатывает результаты одного экспертного опроса (таблицу в своей тетради) по методу ранговой корреляции. Первые две строки таблицы следует пронормировать вручную для лучшего понимания операции нормирования.

5. Провести автоматизированную обработку результатов, используя программу на языке Паскаль (приложение 1), или самостоятельно составив программу в пакете MathCAD (приложение 2 содержит пример процедуры нормирования). В качестве элементов исходной матрицы выступают все соответствующие числа исходной таблицы.

6. Сверить ручные и автоматизированные результаты нормирования первых строк. Проанализировать результаты.

3. Исходные данные

1. Школьный учебник по математике для средних классов.

2. Художественная литература из серии «Библиотека классики».

3. Учебник для вузов.

4. Каталог-проспект к автомобильной выставке.

5. Бланочная продукция, которая не является основной продукцией в общей производственной программе предприятия.

6. Ежедневная газета.

7. Разговорник на иностранном языке.

8. Блокноты, выпускаемые на предприятии, не специализирующемся на беловых товарах.

9. Полиэтиленовая упаковка для пищевых продуктов.

4. Контрольные вопросы

1. В чем суть метода ранговой корреляции на основе экспертного опроса?

2. Поясните на примере процедуру нормирования.

3. Как выбирается наиважнейший критерий оптимальности? Почему?

4. Что такое коэффициент согласованности, какие значения он может принимать?

5. Когда мнение экспертов считается согласованным, как оно используется в дальнейшем?

Лабораторная работа № 9. Метод парных сравнений для выбора наилучшего технологического варианта

1. Краткие теоретические сведения

Критерии оптимальности по своему характеру могут быть как количественными, так и качественными. Количественные критерии могут быть выражены численно в конкретных единицах измерения: себестоимость продукции, время изготовления и т. д. Качественные критерии оцениваются довольно субъективно: удобство использования, эстетический вид и др., которые никаким числом не выражаются.

Для того чтобы выбрать технологический вариант, отвечающий критерию оптимальности, можно непосредственно рассчитать значения критерия, а также использовать сравнение вариантов методами регрессии. Однако все это довольно трудоемко и не всегда возможно, если недостаточно данных или критерии оптимальности вообще не поддаются количественному описанию. В этом случае целесообразно использовать экспертный опрос.

Метод парных сравнений основан на том, что эксперты попарно оценивают предложенные технологические варианты в соответствии с целевой установкой — критерием оптимальности. Число экспертов — m, количество вариантов — n.

Каждый эксперт заполняет одну таблицу (см. табл. 5.1), элементы которой $a_{ij} = 1$, если i-ый вариант с точки зрения критерия оптимальности лучше j-го, если i-ый вариант хуже j-го — $a_{ij} = 0$. Таким образом, всегда выполняется условие $a_{ij} + a_{ji} = 1$, и эксперт может заполнить только часть таблицы (выше или ниже диагонали), а в оставшейся части таблицы можно записать соответствующие противоположные элементы.

Таблица 5.1

Таблица парных сравнений 1-го эксперта

Технолог. вариант	1	2	3	4
1	–	1	0	0
2	0	–	1	1
3	1	0	–	0
4	1	0	1	–

Все m заполненных таблиц поэлементно складываются (табл. 5.2). В результате получается таблица с элементами b_{ij}, где максимальный элемент не больше m. Для результирующей таблицы выполняется условие $b_{ij} + b_{ji} = m$.

Возможный результат опроса 6 экспертов представлен в табл. 5.2.

Таблица 5.2 -Сводная таблица парных сравнений

Технолог. вариант	1	2	3	4	Сумма	Ранг

1	–	5	4	2	11	2
2	1	–	6	5	12	1
3	2	0	–	2	4	4
4	4	1	4	–	9	3

Сумма в каждой строке показывает, сколько всего раз этот вариант предпочли всем остальным. Максимальное значение суммы соответствует наилучшему варианту технологии, которому присваивается первый ранг и далее по порядку. Может оказаться, что несколько вариантов равнозначны, тогда для выбора используют следующий по важности критерий (с рангом, равным 2).

Степень согласованности мнений экспертов оценивается с помощью коэффициента, который рассчитывается по формуле

$$V = \frac{4Q}{m \cdot n(m-1)(n-1)}, \qquad (5.1)$$

где величина Q вычисляется по формуле

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \left(b_{ij}\right)^2 - m \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-}{2} \qquad (5.2)$$

.

Следует обратить внимание, что при вычислении Q суммируются элементы, для которых номер столбца j больше номера строки i — это элементы, расположенные выше диагонали.

Мнение экспертов считается согласованным, если $V > 0{,}5$.

2. Содержание работы

1. Для анализируемого ранее вида продукции (см. исходные данные к лабораторной работе № 4) составить не менее 4-х возможных вариантов изготовления. Варианты можно представить в виде схем, технологических цепочек, пооперационных карт или словесного описания технологии.

2. Сравнивая технологии с точки зрения удовлетворения критерию оптимальности, заполнить первую таблицу вида 1 (только выше диагонали). Остальными экспертами, как и ранее, будут другие студенты группы. Экспертов должно быть не менее семи. Предоставляя экспертам таблицы для заполнения, следует указать критерий оптимальности для сравнения технологических вариантов.

4. Составить результирующую таблицу и выбрать оптимальный технологический вариант вручную.

5. Провести автоматизированную обработку результатов, составив программу в пакете Mathcad (пример приведен в приложении 3). В качестве элементов исходных матриц выступают все соответствующие числа таблиц, заполненных экспертами.

6. Сверить ручные и автоматизированные результаты. Проанализировать найденную величину критерия согласованности.

3. Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность метода парных сравнений на основе экспертного опроса?

2. Почему эксперты могут заполнять лишь одну часть таблицы?

3. Как выбирается наилучшая технология? Почему?

4. Если в результате опроса 8-ми экспертов $b_{3,5} = 6$, то чему равен элемент $b_{5,3}$?

5. В каких случаях целесообразно использовать метод парных сравнений для выбора оптимального технологического варианта?

Лабораторная работа № 10. Оптимальный порядок запуска упаковки в производство

1. Краткие теоретические сведения

Технологический процесс представляет собой определенную последовательность операций. Порядок прохождение заказов по цехам, участкам, операциям, машинам не может быть изменен (могут только отсутствовать некоторые операции). Однако при выполнении пакета заказов есть возможность оптимизировать производственный процесс по времени, путем изменения очередности выполнения заказов.

Для каждой из возможных последовательностей заказов определяется продолжительность всего производственного процесса и выбирается наименее продолжительный вариант. Кроме общей продолжительности процесса, при оценке каждого варианта рассматриваются и другие показатели ритмичности производства.

Пусть известно время обработки каждого i-го заказа ($i = 1, 2,..., m$) на j-ой машине ($j = 1, 2,..., n$) — t_{ij}. Время обычно задается в часах, тогда все характеристики производственного процесса рассчитываются в часах. Но, если рассматриваемые машины имеют разную сменность работы, то необходимо перевести время обработки t_{ij} в рабочие дни, иначе можно получить неверные результаты (см. пример ниже).

Матрица затрат времени на обработку (в часах) имеет структуру, аналогичную табл. 6.1.

Таблица 6.1

Время обработки, ч

Заказы	Машины		
	1	2	3
1	16	56	24
2	64	40	48
3	32	64	72

Таблица 6.2

Время обработки, дн.

Заказы	Машины		
	1	2	3
1	1	7	3
2	4	5	6
3	2	8	9

Затраты времени в днях будут получены делением времени в часах на число рабочих часов в день для соответствующей машины. Пусть (для примера из табл. 6.1) первая машина работает в две смены, а вторая и третья — в одну, т. е. в день они работают по 16, 8 и 8 ч соответственно. Затраты времени в днях представлены в табл. 6.2

Рассмотрим вычисление продолжительности обработки d_{ij}.

Продолжительность обработки — это время окончания обработки i-го заказа на j-ой машине от начала производственного процесса (см. табл. 6.3 и 6.4).

Таблица 6.3

Продолжительность обработки, ч

Заказы	Машины		
	1	2	3
1	16	72	96
2	80	120	168
3	112	184	256

Таблица 6.4

Продолжительность обработки, дн.

Заказы	Машины		
	1	2	3
1	1	8	11
2	5	13	19
3	7	21	30

Понятно, что $d_{11} = t_{11}$. После окончания обработки первого заказа на первой машине он поступит на вторую и выйдет из нее через t_{12} часов (дней) в момент $d_{12} = d_{11} + t_{12} = t_{11} + t_{12}$. Добавив к этому значению время его обработки на третьей машине t_{13}, получим момент полного завершения обработки первого заказа $d_{13} = d_{12} + t_{13} = t_{11} + t_{12} + t_{13}$.

Второй заказ поступит на первую машину тогда, когда на ней закончится обработка первого заказа (d_{11}), завершится его обработка на этой машине в момент $d_{21} = d_{11} + t_{21} = t_{11} + t_{21}$; с этого времени на первой машине начнется обработка третьего заказа и закончится через t_{31} часов в момент $d_{31} = d_{21} + t_{31} = t_{11} + t_{21} + t_{31}$.

Второй заказ поступит на вторую машину после того, как будет обработан на первой и когда вторая машина станет свободна после выполнения первого заказа. Т. е. процесс обработки i-го заказа на j-ой машине начнется в зависимости от того, что произойдет позже: освободится эта машина от предыдущего заказа $d_{i-1,j}$ или завершится обработка рассматриваемого заказа на предыдущей машине $d_{i,j-1}$. В первом случае i-ый заказ пролеживает между j–1-ой и j-ой операциями, во втором — простаивает машина в ожидании очередного заказа. Тогда окончание обработки вычисляется по формуле $d_{i,j} = \max(d_{i-1,j}, d_{i,j-1}) + t_{i,j}$.

Например, для рассматриваемой задачи:

$$d_{22} = \max(d_{12}, d_{21}) + t_{22} = \max(72, 80) + 40 = 120 \text{ ч};$$

$$d_{32} = \max(d_{22}, d_{31}) + t_{32} = \max(13, 7) + 8 = 21 \text{ дней}.$$

Время окончания обработки последнего заказа на последней машине d_{mn} — есть общая продолжительность процесса. В примерах она равна 256 ч и 30 дней. Заметим, что при односменной работе 256 ч будут эквивалентны 256 / 8 = 32 рабочим дням.

На основании матриц времени и продолжительности обработки (t и d) рассчитываются следующие <u>показатели ритмичности производственного процесса</u>.

Чистое время обработки i-го заказа — это сумма элементов в соответствующей строке:

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \quad (1)$$

Общая продолжительность обработки i-го заказа — это разница между моментом завершения обработки заказа на последней (n-ой) машине и моментом начала его обработки на первой машине (т. е., когда первая машина освободилась от предыдущего заказа):

$$D_i = d_{i,n} - d_{i-1,1}. \tag{2}$$

Время пролеживания i-го заказа в процессе обработки:

$$L_i = D_i - T_i. \tag{3}$$

Доля эффективной работы в процессе обработки i-го заказа a_i — это отношение чистого времени обработки к продолжительности с учетом простоев; среднее арифметическое этого показателя по всем заказам есть значение доли эффективной работы над заказами:

$$a_i = T_i / D_i, \qquad a_{\text{ср}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{4}$$

Понятно, что для первого заказа, перед которым машины не заняты, эффективность обработки 100%-ная: $L_1 = 0$, $a_1 = 1$.

Аналогичным образом вводятся формулы, характеризующие работу j-ой машины.

Чистое время работы j-ой машины (сумма времен в соответствующем столбце):

$$M_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij}. \tag{5}$$

Общая загрузка j-ой машины от начала ее работы над первым заказом (момент окончания обработки первого заказа на предыдущей машине) до завершения обработки последнего заказа (m-го):

$$B_j = d_{m,j} - d_{1,j-1}. \tag{6}$$

Простои j-ой машины:

$$S_j = B_j - M_j. \tag{7}$$

Уровень использования j-ой машины p_i и средний уровень использования мощностей всех машин:

$$p_j = M_j / B_j, \quad p_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j. \tag{8}$$

2. Содержание работы

1. Для матрицы времени обработки (при последовательности 1—2—3, 1—2—3—4 или 1—2—3—4—5) записать матрицу продолжительности обработки, определить общую продолжительность процесса в часах (вручную).

2. Используя математический пакет Mathcad, найти матрицы продолжительности для всех заданных вариантов запуска упаковки в производство (приложение 4 содержит пример вычисления продолжительности). При изменении порядка запуска упаковки соответствующим образом переставляются строки исходной матрицы.

3. Сравнить ручные и автоматизированные расчеты для последовательности 1—2—3, 1—2—3—4 или 1—2—3—4—5. Среди рассматриваемых вариантов выбрать наименее продолжительный.

4. Для выбранного оптимального порядка запуска заказов рассчитать все показатели ритмичности производства в часах (с использованием пакета MathCad). Найти аналогичные показатели и продолжительность этого процесса в днях с учетом заданной сменности работы оборудования. Сравнить соответствующие коэффициенты.

3. Исходные данные

1. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)		
	1 (2)	2 (1)	3 (1)
1	48	32	96
2	32	36	64
3	32	48	88
4	48	32	72

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

2–3–1–4

1–3–2–4

2–4–1–3

2. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)		
	1 (1)	2 (2)	3 (1)
1	56	32	8
2	48	16	16
3	40	32	12
4	40	48	14
5	48	32	14

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

1–2–4–5–3

3–1–5–4–2

5–4–2–1–3

3. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)			
	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4(2)
1	16	8	48	16
2	8	24	16	32
3	8	12	32	32

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

2–3–1

1–3–2

2–1–3

4. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)		
	1 (1)	2 (1)	3 (2)
1	48	8	48
2	64	16	32
3	40	28	32
4	32	24	40

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

1–2–4–3
3–1–4–2
4–2–1–3

5. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)			
	1 (1)	2 (2)	3 (2)	4(1)
1	16	24	48	16
2	24	16	32	32
3	32	32	64	40

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

3–2–1
1–3–2
3–1–2

6. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)			
	1 (1)	2 (1)	3 (2)	4(1)
1	40	16	48	16
2	48	16	48	32
3	32	24	64	40
4	40	40	48	24

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

3–2–1–4
1–3–4–2
3–4–1–2

7. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)				
	1 (1)	2 (2)	3 (2)	4(1)	5(1)
1	16	24	48	16	16
2	24	16	32	32	8
3	32	32	64	40	8

Возможные последовательности запуска заказов в про изводство:

2–1–3
2–3–1
3–2–1

8. Время обработки, ч

Заказы	Машины (число смен)			
	1 (2)	2 (2)	3 (1)	4(1)
1	64	16	40	16
2	48	16	32	32

Возможные последовательности запуска заказов в производство:

2–3–1–4
1–2–4–3
4–1–3–2

3	32	32	40	8
4	64	32	48	16

4. Контрольные вопросы

1. Что означает элемент матрицы t?
2. Что такое продолжительность обработки $d_{i,j}$, каким образом она находится?
3. Как определить оптимальный порядок запуска упаковки в производство?
4. Чему равна общая продолжительность производственного процесса?
5. Какие параметры характеризуют ритмичность работы оборудования? Что характеризуют величины a_i и $a_{ср}$?
6. Может ли быть p_1 меньше единицы, почему?
7. В каких единицах определяют показатели программы выпуска, есть ли разница при их использовании?

Лабораторная работа № 11. Составление технико-экономической модели производства

1. Теоретические сведения

Основой для построения модели служит схема технологического процесса (рис. 7.1), в которой показаны связи между элементами (стрелки), количество продукции, произведенной на каждой операции техпроцесса (цифры внутри прямоугольников), и количество продукции, переданной на последующую операцию в качестве полуфабриката (цифры около стрелок). Операции одной технологической стадии не связаны друг с другом. Выходом последней стадии является готовая продукция.

На рис. 7.1 укрупненно представлены три технологические стадии: Е1, Е2 и Е3 — допечатная подготовка (например, обработка и изготовление форм для текста, для штриховых изображений и для полноцветных

растровых изображений соответственно); Е4 и Е5 — печать (например, текста на односекционной машине и вклеек на четырехсекционной машине); Е6 — брошюровочно-переплетные процессы. Таким образом, число участков (технологических операций) $n = 6$.

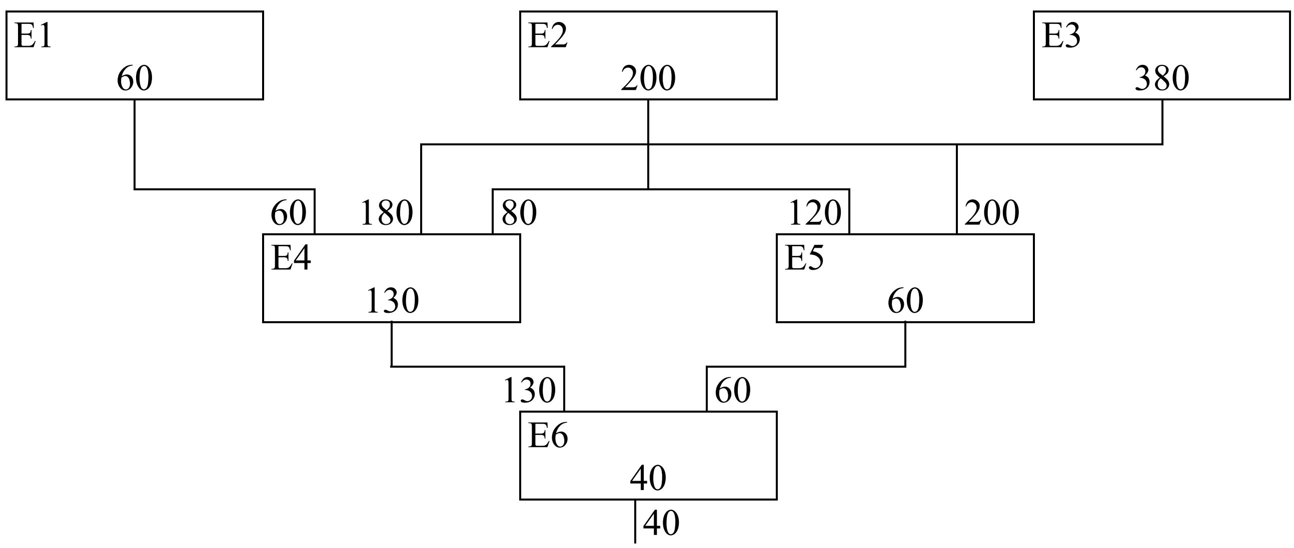


Рис. 7.1. Схема технологического процесса

Схеме технологического процесса соответствует таблица производственных связей (табл. 7.1), где, кроме количества продукции, переданной с одной операции на другую, указывается общий объем производства по операциям — вектор x, включающий количество производимых полуфабрикатов — вектор p, и готовой продукции — вектор w. Все векторы имеют n элементов.

Таблица 7.1

Таблица производственных связей

Передача от Ei к Ej			

Ej / Ei	E1	E2	E3	E4	E5	E6	p_i	w_i	x_i
E1				60			60		60
E2				80	120		200		200
E3				180	200		380		380
E4						130	130		130
E5						60	60		60
E6								40	40
x_j	60	200	380	130	60	40			

Понятно, что $\vec{x} = \vec{p} + \vec{w}$. На основании таблицы производственных связей составляется матрица связей M с числом элементов $n \times n$, элемент которой $m_{i,j}$ — расход полуфабриката с операции E_i на единицу продукции, производимой на E_j, т. е. соответствующий элемент таблицы связей следует разделить на x_j . Для табл. 7.1 матрица связей будет следующей:

$$M = \begin{pmatrix} 0000,4600 \\ 0000,6220 \\ 0001,383,330 \\ 000003,25 \\ 000001,5 \\ 000000 \end{pmatrix}.$$

Производство конечной продукции связано с количеством произведенных полуфабрикатов производственным уравнением

$$\vec{w} = (E - M)\vec{x}\ , \qquad (1)$$

где $(E - M)$ — производственная матрица (E — единичная матрица).

Для определения объема производства полуфабрикатов для выпуска заданного планом количества готовой продукции используется следующая модель планирования производства:

$$\vec{x} = (E - M)^{-1}\,\vec{w}\ , \qquad (2)$$

где $(E - M)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных затрат (матрица плана), которая является обратной матрицей для производственной матрицы. Элементы матрицы полных затрат — это необходимый объем производства на каждой операции, чтобы в результате получить одну единицу готовой продукции (расход полуфабриката на единицу готового изделия). Для рассматриваемого примера:

$$(Ѓ-M)=\begin{pmatrix}100-0{,}4600\\010-0{,}62-20\\001-1{,}38-3{,}330\\00010-3{,}25\\00001-1{,}5\\000001\end{pmatrix},\ (Ѓ-M)^{-1}=\begin{pmatrix}1000{,}4601{,}5\\0100{,}6225\\0011{,}383{,}339{,}5\\000103{,}25\\000011{,}5\\000001\end{pmatrix}.$$

В модель планирования производства необходимо ввести ресурсы для получения полной технико-экономической модели.

Расход некоторых ресурсов пропорционален количеству выпускаемой продукции, а расход других — времени, затраченному на производство. Расход ресурсов первого вида, необходимых для выпуска единицы продукции, и количество ресурсов второго вида, используемых в единицу времени, — есть коэффициенты прямых затрат. Эти коэффициенты для всех технологических операций составят матрицы Q_1 и Q_2 — матрицы прямых затрат по статьям, зависящим от объема производства и времени соответственно. Число столбцов матриц равно n, число строк — количеству соответствующих затратных статей m.

Полные затраты на производство, зависящие от его объема и времени (вектора a_1 и a_2 соответственно) определятся из уравнений:

$$\vec{a}_1 = Q_1\vec{x}\,, \quad \vec{a}_2 = Q_2\vec{t}\,, \tag{3}$$

где $\vec{t}$ — вектор времени выполнения каждой операции (длиной n).

С использованием соотношения (2) первое уравнение из (3) примет следующий вид:

$$\vec{a}_1 = Q_1\left(E-M\right)^{-1}\vec{w}\,. \tag{4}$$

В общем случае вопрос об обеспеченности ресурсами программы выпуска конечной продукции в заданном объеме $\vec{w}$ решается с использованием (2) и (4).

Рассчитанные объем производства по участкам $\vec{x}$ и потребность в ресурсах $\vec{a}_1$ сравнивают с наличными мощностями $\vec{k}$ и имеющимися ресурсами $\vec{r}$ (с учетом затрат, не зависящих от объема производства).

Необходимым условием выполнения производственной программы является выполнение соотношений

$$\vec{x} \le \vec{k}\,, \qquad \vec{a}_1 \le \vec{r} - \vec{a}_2\,. \tag{5}$$

Рассмотрим пример планирования работы печатного и брошюровочно-переплетного участков по производству двух видов продукции. В отчетный период на первом участке было получено 1100 тыс. печатных листов за 1100 ч рабочего времени. Далее из 800 тыс. печатных листов получают 80 тыс. экз. книг первого вида, а из 300 тыс. листов получают 50 тыс. экз. книг второго вида. На изготовление 1 тыс. экз. этих книг затрачено, соответственно, 4 ч и 3 ч. При этом было израсходовано 2400 единиц печатных материалов и 110 единиц переплетных материалов.

Планируется увеличить выпуск продукции при тех же материальных ресурсах, но расходуя на изготовление 1 тыс. печатных листов 2 единицы печатных материалов и на 1 тыс. экземпляров книг по 1 и 0,5 единицы переплетного материала. Планируемый фонд времени на печать 1200 ч, на брошюровочно-переплетные работы — 500 ч.

Следует определить, возможен ли выпуск 82 тыс. экз. и 60 тыс. экз. книг, соответственно, первого и второго вида.

Для отчетного периода таблица производственных связей представлена в табл. 2.

Таблица 2 - Таблица производственных связей

Передача от E*i* к E*j*				p_i	w_i	x_i
E*j* / E*i*	E1	E2	E3			
E1		800	300	1100		1100
E2					80	80
E3					50	50
x_i	1100	80	50			

Соответственно, матрица связей M и матрица плана $(E-M)^{-1}$ будут иметь вид:

$$M=\begin{bmatrix}0&10&6\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad E-M=\begin{bmatrix}1&-10&-6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$(E-M)^{-1}=\begin{bmatrix}1&10&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Ниже представлены: объем выпуска конечной продукции для планового периода — вектор $\vec{W}$, матрица материальных затрат, зависящих от объема производства, — матрица Q_1 и имеющиеся ресурсы, зависящие от объема производства — вектор $\vec{r}$ (ресурсы, зависящие от времени не рассматриваем):

$$\vec{W}=\begin{bmatrix}0\\82\\60\end{bmatrix},\quad Q_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0.5\\1&0&0\\0&4&3\end{bmatrix},\quad \vec{r}=\begin{bmatrix}2400\\110\\1200\\500\end{bmatrix},$$

где первая статья расходов — печатные материалы на 1 тыс. печ. листов., вторая — переплетные материалы на 1 тыс. экз. книг, третья и четвертая — время, соответственно, на печатные и брошюровочно-переплетные операции по изготовлению 1 тыс. экз. книг,.

Тогда из (4)

$$a_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0.5\\1&0&0\\0&4&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&10&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\82\\60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2360\\112\\1180\\508\end{bmatrix}.$$

При сравнении $\vec{a}_1$ с $\vec{r}$ видно, что для выполнения плана не хватает 2-х единиц переплетных материалов и 8 ч фонда времени брошюровочно-переплетного участка.

2. Содержание работы

1. По заданной схеме технологического процесса составить таблицу производственных связей.

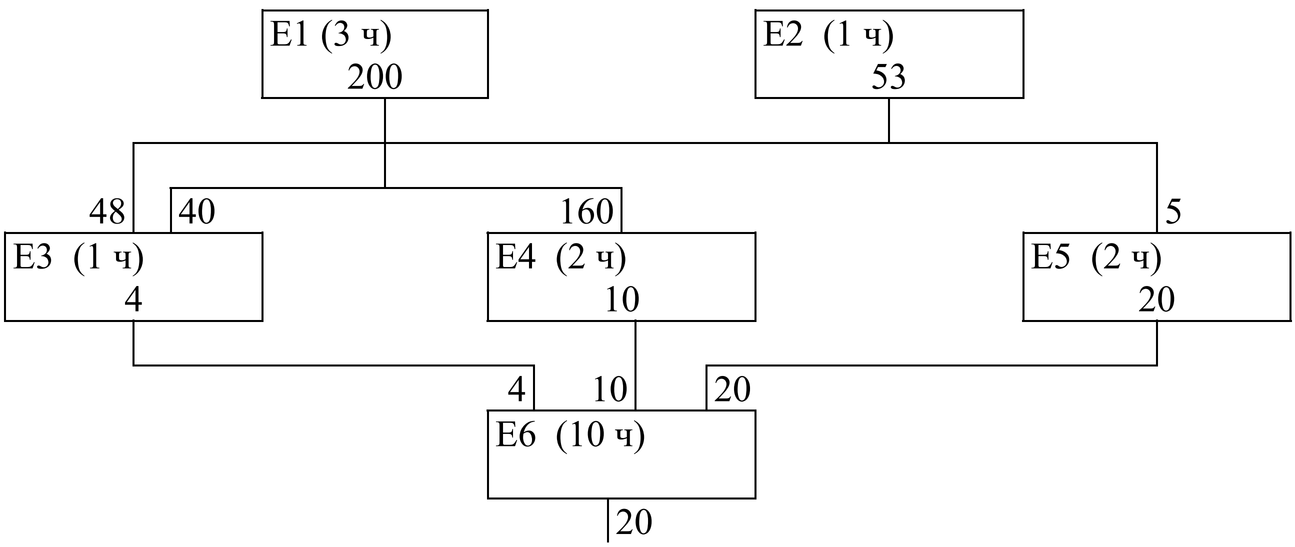
2. С использованием системы MathCad найти матрицу плана $\left(\acute{\Gamma} - M\right)^{-1}$. При этом в качестве исходных данных использовать векторы $\vec{p}$ и $\vec{w}$ и матрицу передачи от E_i к E_j (из таблицы производственных связей). Для расчета вектора $\vec{x}$ и матрицы связей M записать необходимые соотношения.

3. По таблице ресурсов, потребовавшихся на выпуск продукции в объеме $\vec{w}$, найти матрицы Q_1 и Q_2, записав для этого необходимые соотношения. При этом в качестве исходных данных использовать векторы $\vec{x}$ и $\vec{t}$ и матрицы общего количества ресурсов, зависящих от объема производства, а также ресурсов, зависящих от времени.

4. Используя найденные матрицы, определить может ли быть выполнена новая производственная программа выпуска продукции в объеме $\vec{W}$ за время $\vec{T}$ при имеющихся мощностях $\vec{k}$ и ресурсах $\vec{r}$.

3. Исходные данные

1. Схема технологического процесса при выпуске продукции объемом $\vec{w}$ имеет следующий вид:



Полные затраты на производство 20 ед. готовой продукции приведены в таблице

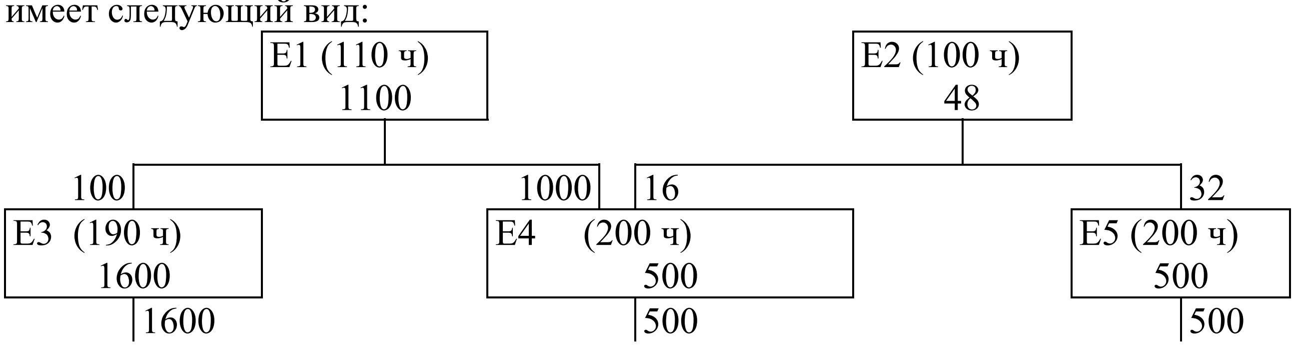
Затраты	Зависящие от объема произв.						Зависящие от времени произв.					
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E1	E2	E3	E4	E5	E6
Материалы	100	53	0,4	1	8	10	0,5	0,3	0,1	0,1	0,8	0,6

Трудоемкость	2	4	1	2,5	6	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Зарплата	10	20	5	12,5	6	4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Др. расходы	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0,5

Планируемый объем выпуска и имеющиеся производственные и материальные ресурсы:

$$\vec{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1000\end{pmatrix};\vec{T}=\begin{pmatrix}30\\9\\8\\30\\19\\20\end{pmatrix};\vec{r}=\begin{pmatrix}9000\\700\\3000\\30\end{pmatrix};\vec{k}=\begin{pmatrix}14000\\3000\\200\\500\\1000\\1000\end{pmatrix}.$$

2. Схема технологического процесса при выпуске продукции объемом $\vec{w}$ имеет следующий вид:



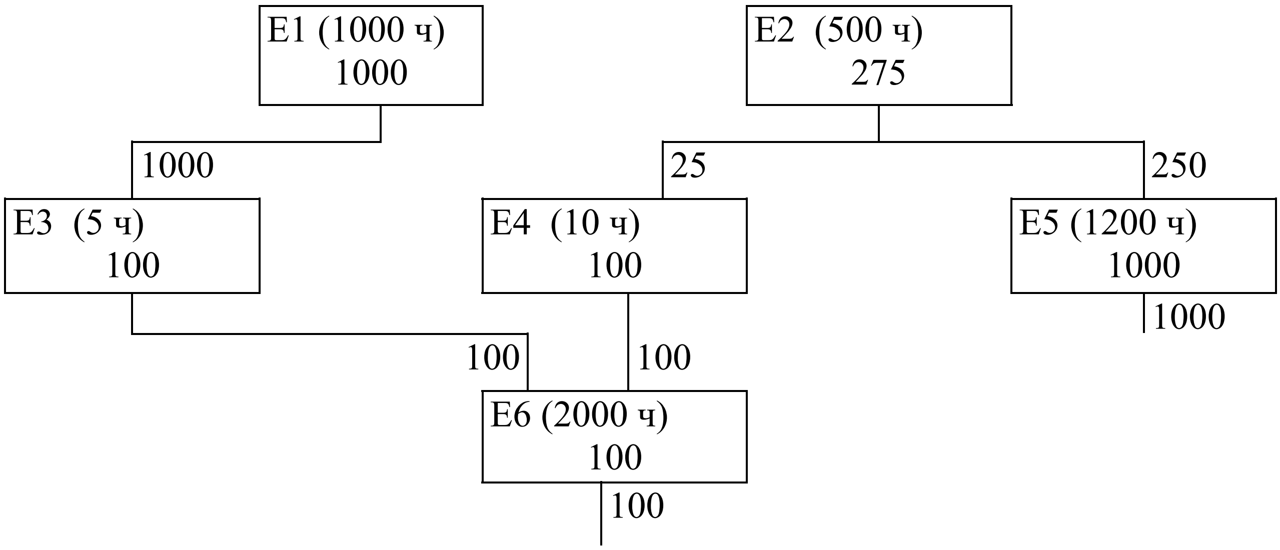
Полные затраты на производство 1600, 500 и 500 ед. готовой продукции различных видов приведены в таблице

Затраты	Зависящие от объема произв.					Зависящие от времени произв.				
	E1	E2	E3	E4	E5	E1	E2	E3	E4	E5
Материалы	55	4,8	0,1	100	0.3	0,3	0,5	0,1	0,8	0,2
Трудоемкость	2	8	0,5	1,5	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Зарплата	10	40	5	20	5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Др. расходы	2	4	0	3	0	1	1	0	0	0

Планируемый объем выпуска и имеющиеся производственные и материальные ресурсы:

$$\vec{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\3000\\1000\\2000\end{pmatrix};\vec{T}=\begin{pmatrix}200\\200\\210\\250\\250\end{pmatrix};\vec{r}=\begin{pmatrix}400\\35\\250\\35\end{pmatrix};\vec{k}=\begin{pmatrix}3000\\200\\4000\\1000\\2000\end{pmatrix}.$$

3. Схема технологического процесса при выпуске продукции объемом $\vec{w}$ имеет следующий вид:



Полные затраты на производство 1000 и 100 ед. готовой продукции двух видов приведены в таблице

Затраты	Зависящие от объема произв.						Зависящие от времени произв.					
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E1	E2	E3	E4	E5	E6
Материалы	10	27,5	10	5	1	1	0,2	0,3	0,1	0,1	0	0,6
Трудоемкость	2	5	2	2	0.5	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
Зарплата	20	50	15	15	2	4	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
Др. расходы	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0,5

Планируемый объем выпуска и имеющиеся производственные и материальные ресурсы:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 2000 \end{pmatrix}; \vec{T} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 900 \\ 7 \\ 15 \\ 2000 \\ 1900 \end{pmatrix}; \vec{r} = \begin{pmatrix} 600 \\ 160 \\ 1200 \\ 50 \end{pmatrix}; \vec{k} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 630 \\ 2000 \\ 2000 \\ 500 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

4. Контрольные вопросы

1. Что является основой для составления модели планирования производства?
2. Что такое коэффициенты прямых затрат?
3. Поясните использование производственного уравнения и уравнения планирования производства.
4. Что обозначают элементы матрицы плана?
5. Какие имеются виды ресурсов, как рассчитывается их потребное количество?
6. Какие условия необходимы для выполнения заданной производственной программы?

ЛИТЕРАТУРА

1) Ирзаев Г.Х. Экспертные методы управления технологичностью промышленных изделий [Электронный ресурс]: монография/ Ирзаев Г.Х.— Электрон. текстовые данные.— Вологда: Инфра-Инженерия, 2010.— 192 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/5063.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

2) Аверченков В.И. Основы математического моделирования технических систем [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Аверченков В.И., Федоров В.П., Хейфец М.Л.— Электрон. текстовые данные.— Брянск: Брянский государственный технический университет, 2012.— 271 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/7003.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

3) Сафонов А.В. Проектирование полиграфического производства : учебник / Сафонов А.В., Могинов Р.Г.. — Москва : Дашков и К, 2018. — 490 c. — ISBN 978-5-394-01747-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/85175.html (дата обращения: 07.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

4. Ершов А.К. Управление качеством [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ершов А.К.— Электрон. текстовые данные. — М.: Логос, Университетская книга, 2018. — 288 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/9102 . — ЭБС «IPRbooks», по паролю.

5. Проскуряков Н.Е., Ходов С.И. Основы методов планирования эксперимента. Учебное пособие. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – 76 с. (Электронно-библиотечная система «БИБЛИОТЕХ») - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.

6. Аттетков А.В. Методы оптимизации: учебник для втузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин; под ред.: В.С., Зарубина, А.П. Крищенко. — 2-е изд., стер. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 440 с.

7. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы планирования эксперимента / Н. Джонсон, Ф. Лион; под ред. Э. К. Лецкого, Е. В. Марковой. — М.: Мир, 1981. — 375 с..

8. Эконометрика [Электронный ресурс]: учебник/ К.В. Балдин [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: Дашков и К, 2011. — 562 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/5265. — ЭБС «IPRbooks», по паролю.

9. Шаронов В.Е. Компьютер для химика: Учебно-методическое пособие. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2006. – 44 с. — Режим доступа: Единое окно доступа к образовательным ресурсам [сайт] URL: http://window.edu.ru/resource/635/37635.

10. Проскуряков Н.Е., Кузовлева О.В. Основные полиграфические термины: учебно-методич. пособие. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – 144 с. (Электронный читальный зал "БИБЛИОТЕХ"). – Режим доступа: *https://tsutula.bibliotech.ru*, по паролю.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МЕТОД РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВАННЫХ РАНГОВ

```
program norm;
uses crt;
const n=6;     m=5;    r=4;
var i,j,k:integer; s:real;
   mt: array[1..m,1..n] of integer;
   nmt: array[1..m,1..n] of real;
   kr: array[1..m+1,1..r+1] of ineger;
   nr: array[1..m+1,1..r+1] of real;
begin clrscr;
mt[1,1]:=2; mt[1,2]:=3; mt[1,3]:=1; mt[1,4]:=4; mt[1,5]:=1;
mt[1,6]:=3; mt[2,1]:=1; mt[2,2]:=2; mt[2,3]:=2; mt[2,4]:=3;
mt[2,5]:=2; mt[2,6]:=4; mt[3,1]:=1; mt[3,2]:=4; mt[3,3]:=1;
mt[3,4]:=3; mt[3,5]:=2; mt[3,6]:=4; mt[4,1]:=2; mt[4,2]:=3;
mt[4,3]:=1; mt[4,4]:=4; mt[4,5]:=3; mt[4,6]:=2; mt[5,1]:=2;
mt[5,2]:=2; mt[5,3]:=1; mt[5,4]:=3; mt[5,5]:=2; mt[5,6]:=4;
{исходная матрица}
for i:=1 to m do begin
  for j:=1 to n do write(nmt[i,j]:6:1); writeln; end;
writeln;
for i:=1 to m do
  for j:=1 to n do
    for k:=1 to r do
      if mt[i,j]=k then kr[i+1,j+1]:= kr[i+1,j+1]+1;
for i:=2 to m+1 do
  for k:=2 to r+1 do
    if kr[i,k]=0 then nr[i,k]:=0
      else begin s:=(kr[i,k]+1)/2;
                 for j:=1 to k-1 do s:=s+kr[i,j];
                 nr[i,k]:=s;
           end;
for i:=1 to m do
  for j:=1 to n do nmt[i,j]:=nr[i+1,mt[i,j]+1];
{нормированная матрица}
for i:=1 to m do begin
  for j:=1 to n do write(nmt[i,j]:6:1); writeln; end;
     end.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МЕТОД РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ.
ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВАННЫХ РАНГОВ

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$$a := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

матрица экспертного опроса для метода ранговой корреляции

$n := 5$ **кол-во экспертов**

$m := 6$ **кол-во критериев**

$r := 4$ **кол-во рангов**

$i := 1 .. n \qquad j := 1 .. m$

$k := 1 .. r$

$t_{i+1,k+1} := 0$

$t_{i+1,k+1} := \mathrm{if}\left(a_{i,j} = k, t_{i+1,k+1} + 1, t_{i+1,k+1}\right)$

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k := 2 .. r + 1 \qquad i := 2 .. n + 1$

$$nn_{i,k} := \mathrm{if}\left(t_{i,k} = 0, 0, \sum_{u=1}^{k-1} t_{i,u} + \frac{t_{i,k} + 1}{2}\right)$$

$$nn = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 3 & 4.5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1.5 & 3 & 4 & 5.5 \\ 0 & 1 & 2.5 & 4.5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$i := 1 .. n$

$an_{i,j} := nn_{i+1, a_{i,j}+1}$

$$an = \begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1.5 & 6 & 1.5 & 4.5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 1.5 & 5.5 & 1.5 & 4 & 3 & 5.5 \\ 2.5 & 4.5 & 1 & 6 & 4.5 & 2.5 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

матрица нормированных рангов

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

МЕТОД ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРТНОГО ОПРОСА

$ORIGIN := 1$

$n := 4$ **кол-во технологий**

$m := 6$ **кол-во экспертов**

$$a1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a4 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a5 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad a6 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i := 1..m \qquad j := 1..n$

$$A := a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 \qquad As_j := \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

суммарная матрица парных сравнений

$$As = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$Q := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \left(A_{i,j}\right)^2 - m \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} A_{i,j} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

$$V := \frac{4 \cdot Q}{m \cdot n \cdot (m-1) \cdot (n-1)} \qquad Q = 56 \qquad V = 0.622$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ
ОБРАБОТКИ ЗАКАЗОВ

$ORIGIN := 1$

$n := 3$ **количество заказов**

$m := 3$ **количество машин**

$$t := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 56 & 24 \\ 0 & 64 & 40 & 48 \\ 0 & 32 & 64 & 72 \end{bmatrix}$$ **матрица затрат времени на обработку заказов**

$i := 2..\,n+1 \qquad j := 2..\,m+1$

$dd_{i,1} := 0 \qquad dd_{1,j} := 0$

$$dd_{i,j} := if\left(dd_{i,j-1} > dd_{i-1,j}, dd_{i,j-1}, dd_{i-1,j}\right) + t_{i,j}$$

$$d_{i-1,j-1} := dd_{i,j}$$

$$d = \begin{bmatrix} 16 & 72 & 96 \\ 80 & 120 & 168 \\ 112 & 184 & 256 \end{bmatrix}$$ **матрица продолжительности обработки заказов**

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица значения квантилей X21-α(m) в зависимости от числа степеней свободы **m** и вероятности **α**

m	α
	0.050
1	3.84146
2	5.99146
3	7.81473
4	9.48773
5	11.07050
6	12.59159
7	14.06714
8	15.50731
9	16.91898
10	18.30704