МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 21 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
__________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий по дисциплине (модулю) «*Математика*»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

с направленностью (профилем)
Инженерная защита окружающей среды

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 200301-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

<u>Белая Л.А., доцент, к.т.н.</u> ______________________

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Первый семестр

Задача 1.

Теоретические сведения.

В прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* положение любой точки задается тремя числами – *координатами* : $A(x_A, y_A, z_A)$ (рисунок 1).

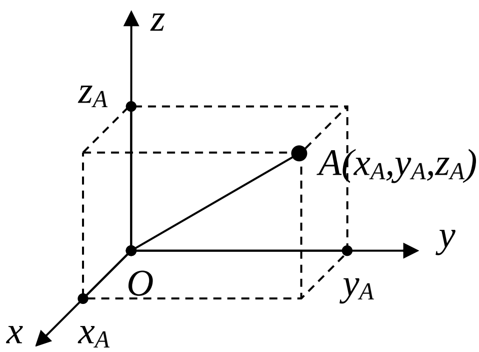


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{1}$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка *M(x; y)* делит отрезок M_1M_2 ($M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$) в отношении λ, то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ ,\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ , \tag{2}$$

если же точка *M(x; y)* - середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \tag{3}$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\, y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \qquad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \qquad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется по формуле

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \qquad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид $k_1 = k_2$, а условие перпендикулярности $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$; (7)

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением* $Ax+By+C=0$, то $k_1 = -\dfrac{A}{B}$ - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на $C \neq 0$, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A},\; b = -\frac{C}{B}; \qquad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \qquad (9)$$

Уравнение окружности с центром в точке $E(a, b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (10)$$

Пример выполнения задания.

Даны вершины треугольника ABC: $A(-4;8)$, $B(5;-4)$, $C(10;6)$.

Найти: 1) длину стороны *AB*; 2) уравнения сторон *AB* и *AC* в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол *A* в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты *CD* в общем виде и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота *CD* есть диаметр.

Решение:

1) Расстояние *d* между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек *A* и *B* (положим $z_1 = z_2 = 0$), тогда

$$AB = \sqrt{\left(5-(-4)\right)^2 + \left(-4-8\right)^2} = \sqrt{81+144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек *A* и *B*, получим уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)} = \frac{y-8}{-4-8}, \quad \frac{x+4}{9} = \frac{y-8}{-12}, \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y-8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой *AB* разрешим полученное уравнение относительно *y*: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB} = -\frac{4}{3}$. Подставив в формулу (5) координаты точек *A* и *C*, найдем уравнение прямой *AC*: $\frac{x-(-4)}{10-(-4)} = \frac{y-8}{6-8}$,

$$\frac{x+4}{14} = \frac{y-8}{-2}, \quad \frac{x+4}{7} = \frac{y-8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда $k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2, определяется по формуле (6). Угол *A*, образованный прямыми *AB* и *AC*, найдем по формуле (6), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, $k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

$$tgA = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = arctg1 = 45^\circ \approx 0{,}79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*, то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом *k* направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки *C* и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты *CD*:

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины *CD* определим координаты точки *D*, решив систему уравнений *(AB)* и *(CD)*:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad x = 2, y = 0, \quad \text{то есть} \quad D\,(2;0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек *C* и *D*, находим:

$$CD = \sqrt{(10-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как *CD* является диаметром искомой окружности, то ее центр *E* есть середина отрезка *CD*. Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно, *E (6; 3)* и $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности: $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$.

<u>Задача 2.</u>

Теоретические сведения.

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1, \tag{11}$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{12}$$

Вектор $\vec{a}$ с координатами (x, y, z) может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{13}$$

Если α, β, γ – углы, которые вектор $\vec{a}$ образует с положительными направлениями осей координат, то cosα, cosβ, cosγ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha\,,\ y = |\vec{a}|\cdot\cos\beta\,, \quad z = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma\,,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вводятся операции с*ложения* и *умножения на число* такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где λ – любое число.

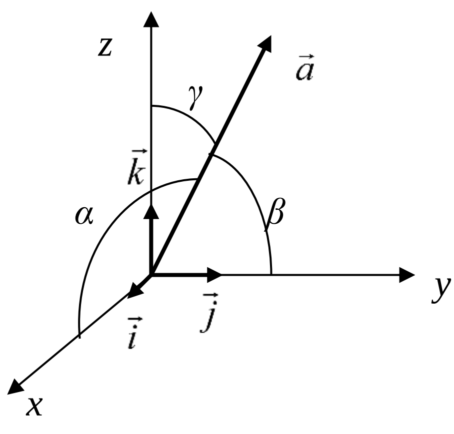


Рисунок 2.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}. \qquad (15)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, то $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется соотношением:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\left(A,B,C\right)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (17)$$

Пример выполнения задания.

Даны координаты трех точек: $A(3; 0; -5)$, $B(6; 2; 1)$, $C(12; -12; 3)$.

Требуется: 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

Решение:

1) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, подставив в формулу (11) координаты точек *A* и *B*, и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\overrightarrow{AB} = (6-3)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1+5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}\ .$$

Подобным образом

$$\overrightarrow{AC} = (12-3)\vec{i} + (-12-0)\vec{j} + (3+5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}\ .$$

Модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51\ .$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos\varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0{,}4286, \qquad \varphi \approx 64^{\circ}37' \approx 1{,}13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку *C(12; –12; 3)* перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB} = (3{,}2{,}6)$. Подставляя в (17) *A= 3, B= 2, C= 6,* $x_0 = 12$, $y_0 = -12$, $z_0 = 3$, получим:

$$3(x-12) + 2(y+12) + 6(z-3) = 0,$$

или $3x + 2y + 6z - 30 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

<u>Задача 3.</u>

Теоретические сведения.

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ выполняется условие $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$, то они образуют базис, и любой четвертый вектор $\overleftarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3, \qquad (19)$$

где α, β, γ – координаты вектора $\vec{b}$ в базисе, образованном векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Координаты α, β, γ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (20)$$

Пример выполнения задания.

Показать, что векторы $\vec{a}_1(3;\ 1;\ 4)$, $\vec{a}_2(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{a}_3(1;\ -1;\ 5)$ образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора $\overleftarrow{b}$ (5; 0; 3) в этом базисе.

Решение:

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некомпланарны и образуют базис. Координаты вектора $\overleftarrow{b}$ в этом базисе найдем, разложив его по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3,$$

а координаты вектора $\overleftarrow{b}$ в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}.$$

После этого умножим первое уравнение на (–3) и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на (–4) и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}.$$

Затем умножаем второе уравнение на (−5) и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения имеем *γ= 2*. Подставляем это значение во второе уравнение, получаем *β= 3* и, наконец, из первого уравнения находим *α= –1*.

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора $\overleftarrow{b}$, получим

$\overleftarrow{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$.

<u>Задача 4.</u>

Теоретические сведения.

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{H}, \tag{21}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ матрица-столбец свободных членов.

Если матрица **A** – *невырожденная*, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица $\mathbf{A}^{-1}$, обратная к **A**, так что $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$ (**E** - единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на $\mathbf{A}^{-1}$ и получим

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot \mathbf{H}, \tag{23}$$

поскольку $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X}$.

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице **A**, находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

где A_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, которое является произведением $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем i-й строки и j-го столбца в определителе матрицы **A**; Δ – определитель матрицы **A**.

Пример выполнения задания.

Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных **A** и столбец свободных членов **H**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ и алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы **A**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица **A** имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad \mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3,\quad \mathrm{A}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\quad \mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1,$$

$$\mathrm{A}_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad \mathrm{A}_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3,\quad \mathrm{A}_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -5 & 1 & 3\\ -5 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{H}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -5 & 1 & 3\\ -5 & -1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 8\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}5\cdot 1+3\cdot 8+(-1)\cdot(-1)\\ -5\cdot 1+1\cdot 8+3\cdot(-1)\\ -5\cdot 1-1\cdot 8+7\cdot(-1)\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 0\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -2\end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -2.$

Задача 5.

Теоретические сведения.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\ \text{если}\ \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\forall x:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Вычисление пределов арифметических выражений $f_1(x)/f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $f_1(x)-f_2(x)$ по пределам функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, из которых они составлены, не всегда возможно. В этих случаях говорят, что возникают неопределенности следующих видов:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty), \left(1^{\infty}\right).$$

Для нахождения пределов таких неопределенных выражений нужно учитывать конкретный вид функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{C}{x^n}=0; \tag{25}$$

предел отношения двух многочленов $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если } n=m\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases}$;

первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1;$ (26)

второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left(1\right)^{\infty}=e\,.$ (27)

Величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Две бесконечно малые величины называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1, то есть $\alpha(x)\sim\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$. Под знаком предела любая бесконечно малая величина может быть заменена на эквивалентную ей. Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$ величин:

$$\sin x\sim x,\qquad \arcsin x\sim x,\qquad a^x-1\sim x\cdot\ln a\qquad e^x-1\sim x,$$

$$\operatorname{tg} x\sim x,\qquad \operatorname{arctg} x\sim x,\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}. \tag{28}$$

Пример выполнения задания.

Вычислить пределы:
а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{arctg5x}$,	г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$.

Решение:

а) Подстановка предельного значения аргумента *x*=*-3* приводит к неопределенному выражению вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель *(x+3)*. Такое сокращение здесь возможно, так как множитель *(x+3)* отличен от нуля при $x\to -3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\frac{4\cdot(-3)^2+11\cdot(-3)-3}{3\cdot(-3)^2+10\cdot(-3)+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{8}.$$

б) При $x\to\infty$ выражение $\sqrt{x^2+3x}-x$ дает неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Для ее устранения умножим и разделим это выражение на $\sqrt{x^2+3x}+x$, после чего разделим числитель и знаменатель полученной дроби на x, учитывая формулу (25):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}.$$

в) При $x\to 0$ получим неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Обозначим $arctg5x=y$. Тогда $5x=tgy$ и $y\to 0$ при $x\to 0$. Применяя свойства пределов и формулу (26), имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{arctg5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2\left(\frac{1}{5}tgy\right)}{y}=\frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Эту задачу можно решить, используя эквивалентные замены бесконечно малых величин (28). Поскольку при $x \to 0$ эквивалентны $arctg 5x \sim 5x$, можно записать

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{arctg 5x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

г) При $x \to \infty$ выражение $\left(\dfrac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида $\left(1^{\infty} \right)$. Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой (при $x \to \infty$) величины; после чего применим формулу второго замечательного предела (27):

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{\left(\frac{2x+1}{-4} \right) \cdot \left(\frac{-4}{2x+1} \right) \cdot (4x+5)} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{-4}{2x+1} \cdot (4x+5)} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{-16x-20}{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} e^{\frac{-16}{2}} = \lim_{x \to \infty} e^{-8} = \frac{1}{e^8}.$$

Второй семестр

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Теоретические сведения.

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная есть скорость изменения функции в точке x.

Отыскание производной называется дифференцированием функции.

Основные правила дифференцирования:

1. $(C)' = 0$, где C=*Const*.
2. $(x)' = 1$
3. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
4. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, $\quad (C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$
5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $\left(\dfrac{C}{v(x)}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $\left(\dfrac{u(x)}{C}\right)' = \dfrac{u'(x)}{C}$
6. $F'(u(x)) = F'_u \cdot u'(x)$

Таблица производных элементарных функций ($u = u(x)$):

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, 4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $\quad (e^u)' = e^u \cdot u'$, 5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\cdot \ln a}\cdot u'$, 6. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$, 7. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$,

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$, $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

9. $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$, $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Если в таблице положить $u(x) = x$, то $u' = 1$.

***Пример выполнения задания*.**

Найдите производные функций:
а) $y = \ln\left(2+\sin 3x\right)$; б) $y = (3^{arctg\sqrt{x}}+1)^4$; в) $\cos(xy^2) - 3y^2 + 4x = 0$.

Решение:

а) последовательно применяя правила дифференцирования сложной функции, правила и формулы дифференцирования, имеем:

$$y' = (\ln(2+\sin 3x))' = \frac{1}{2+\sin 3x}\cdot(2+\sin 3x)' = \frac{1}{2+\sin 3x}\cdot(2' + (\sin 3x)') =$$

$$= \frac{1}{2+\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot(3x)' = \frac{3\cos 3x}{2+\sin 3x};$$

б) $$y' = ((3^{arctg\sqrt{x}}+1)^4)' = 4(3^{arctg\sqrt{x}}+1)^3\cdot(3^{arctg\sqrt{x}}+1)' =$$

$$= 4(3^{arctg\sqrt{x}}+1)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot(arctg\sqrt{x})' =$$

$$= 4(3^{arctg\sqrt{x}}+1)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' =$$

$$= 4(3^{arctg\sqrt{x}}+1)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\ln 3}{(1+x)\sqrt{x}}\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot(3^{arctg\sqrt{x}}+1)^3$$

в) в данном случае функциональная зависимость задана в *неявном* виде. Для нахождения производной y' нужно продифференцировать по переменной x обе части уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение разрешить относительно y':

$$-\sin(xy^2)\cdot(xy^2)'-3\cdot 2yy'+4=0;$$

$$-\sin(xy^2)\cdot(x'y^2+x(y^2)')-6yy'+4=0;$$

$$-\sin(xy^2)\cdot(y^2+2xyy')-6yy'+4=0;$$

$$-y^2\sin(xy^2)-2xyy'\sin(xy^2)-6yy'+4=0;$$

Из последнего уравнения находим y':

$$2yy'\left(x\sin(xy^2)+3\right)=4-y^2\sin(xy^2);$$

$$y'=\frac{4-y^2\sin(xy^2)}{2y\left(x\sin(xy^2)+3\right)}.$$

<u>Задача 2.</u>

Теоретические сведения. Исследование функции одной независимой переменной будем проводить по следующей схеме:

1. Найдем область определения функции.
2. Исследуем функцию на непрерывность.
3. Установим, является ли данная функция четной, нечетной или функцией общего вида.
4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки ее перегиба.
6. Найдем асимптоты кривой.

***Пример выполнения задания*.**

Исследовать функцию $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Реализуем приведенную схему исследования функции:

1. Функция определена при всех значениях аргумента x, кроме x=1.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, то есть на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$.

В точке x=1 функция терпит разрыв.

3. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств $f(-x)=f(x)$ (тогда $f(x)$ − четная функция) или $f(-x)=-f(x)$ (для нечетной функции) для любых x из области определения функции: $f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}$

, $-f(x)=-\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

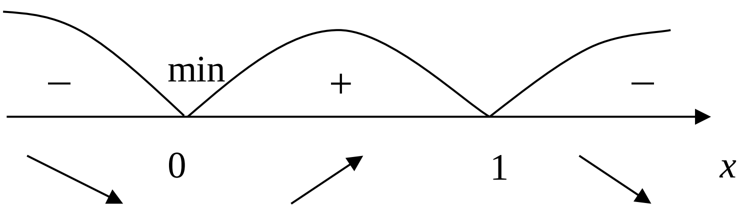
Следовательно, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то есть данная функция является функцией общего вида.

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y'=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Определим критические точки функции: $y'=0$ при $x=0$, y' не существует при $x=1$. Тем самым имеем две критические точки: x=0, x=1. Но точка x=1 не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$.

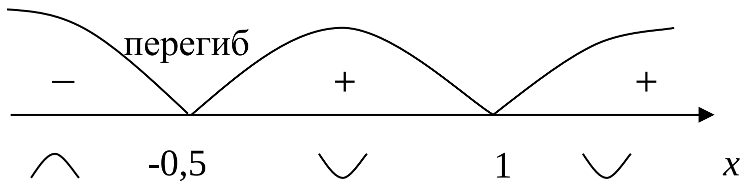


В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает, во втором интервале − положительна, и данная функция возрастает. При переходе через точку x=0 первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{\min}=y(0)=-1$. Значит, А(0;−1) является точкой минимума.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -2 \cdot \frac{(x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Для второй производной $y'' = 0$ при $x = -0{,}5$ и y'' не существует при x=1. Разобьем числовую ось на три интервала $(-\infty;-0{,}5)$, $(-0{,}5;1)$, $(1;+\infty)$.



На первом интервале вторая производная y'' отрицательна и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах $y'' > 0$, поэтому график является вогнутым. При переходе через точку $x = -0{,}5$ вторая производная меняет свой знак, поэтому в этой точке кривая имеет перегиб: $y_{пер} = y(-0{,}5) = -\frac{8}{9}$.

Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ − точка перегиба графика функции.

6. В точке $x = 1$ функция терпит разрыв, причем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика функции. Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

Тогда $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2 x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$.

При найденных значениях k и b прямая $y = 0$ есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рисунке 1.

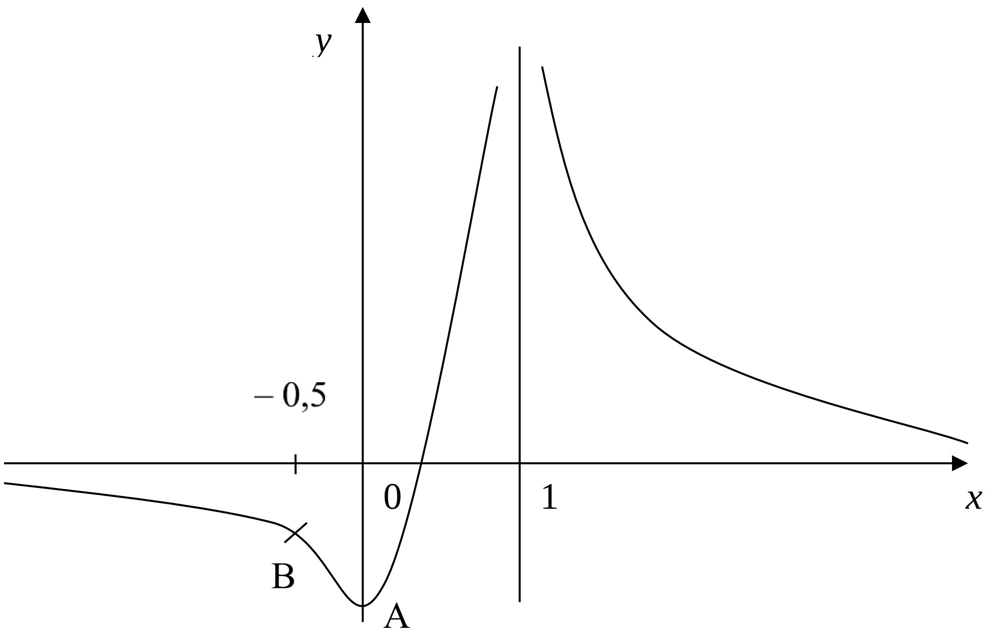


Рисунок 1. График исследуемой функции.

Задача 3.

***Пример выполнения задания*.**

Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара при его емкости 108 *дм*^{3}, чтобы затраты на его лужение были наименьшими?

Решение. Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при данной вместимости площадь его поверхности будет минимальной.

Обозначим через *a (дм)* − сторону основания, *b (дм)* − высоту резервуара. Тогда площадь его поверхности $S = a^2 + 4ab$, а объем $V = a^2 b$, или, согласно условия, $108 = a^2 b$. Поэтому

$$b = \frac{108}{a^2} \quad \text{и} \quad S = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{108}{a^2} = a^2 + \frac{432}{a}.$$

Полученное соотношение устанавливает зависимость между площадью поверхности резервуара S (функция) и стороной основания a (аргумент). Область определения этой функции $a > 0$, так как a – сторона основания. Исследуем функцию S на экстремум. Найдем первую производную S', приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$S' = 2a - \frac{432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0.$$

Отсюда $a = 6$. Производная $S'(a)$ не существует при $a = 0$, но это значение аргумента не принадлежит области определения функции. При $0 < a < 6$ производная $S'(a) < 0$, при $a > 6$ $S'(a) > 0$. Следовательно, при $a = 6$ функция S имеет минимум. Если $a = 6$, то $b = 3$. Таким образом, затраты на лужение резервуара емкостью 108 *л* будут наименьшими, если он имеет размеры $6(\partial м) \times 6(\partial м) \times 3(\partial м)$.

<u>Задача 4</u>.

Теоретические сведения.

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой паре значений (x,y) из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке M_0 больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки M_0.

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*. Обозначим

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то M_0 есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то M_0 есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример выполнения задания.

Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

Решение.

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке M достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке $M(1;2)$ $A = -2, B = 0, C = -2$ и $\Delta = (-2)\cdot(-2) - 0 = 4$. Поскольку $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z\big|_M = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$.

<u>Задача 5</u>.

Теоретические сведения.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной линией $\varphi(x, y) = 0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области D, либо на границе этой области.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в заданной области D решается по следующему плану:

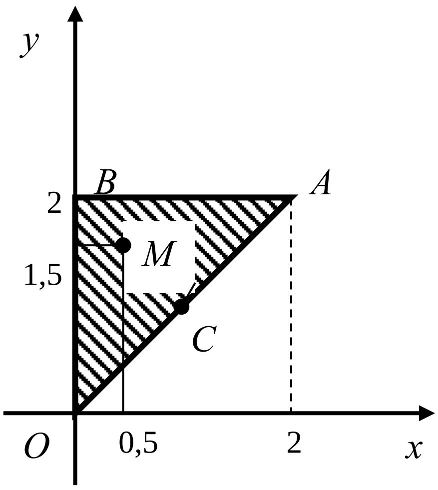
1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области D, и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x, y) = 0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

***Пример выполнения задания*.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 2$, $y = x$.

Решение.

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0{,}5;1{,}5)$ лежит внутри заданной области OAB.

Значение функции в точке M равно

$$z|_M = 0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5 - 4\cdot 0{,}5 - 1{,}5 = -1{,}75\,.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе OA $y = x$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x\cdot x - 4\cdot x - x$ или $z = 3x^2 - 5x$;

$z' = 6x - 5$, $z' = 0$ при $x = \dfrac{5}{6}$, тогда $y = \dfrac{5}{6}$ (так как y=x).

В точке $C\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$ значение функции равно $z|_C = 3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{5}{6} = -\dfrac{25}{12}$.

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка OA.

В точке $O(0;0)$ $z|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$$z|_A = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 = 2\,.$$

б) на границе BA $y = 2$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x\cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, а $y = 2$ согласно уравнению прямой BA.

В точке $B(0;2)$ значение функции равно $z|_B = 3\cdot 0^2 - 2 = -2$.

в) на границе OB $x = 0$, $0 \le y \le 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \ne 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии OB нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z|_A = 2$ − наибольшее значение функции в области OAB

$z|_C = -\frac{25}{12}$ − наименьшее значение функции в области OAB

<u>Задача 6</u>.

Теоретические сведения.

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $F(x)$ − результат интегрирования, C − произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A − постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \neq 0)$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x))$;

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int u dv = uv - \int v du$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x) dx$, $u = P_n(x)$, $dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x) dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin ax dx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x) dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos ax dx$,

г) $\int \ln ax \cdot P_n(x) dx$, $u = \ln ax$, $dv = P_n(x) dx$,

д) $\int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx$, $u = \arcsin ax$, $dv = P_n(x) dx$,

е) $\int \mathrm{arctg} ax \cdot P_n(x) dx$, $u = \mathrm{arctg} ax$, $dv = P_n(x) dx$,

где $P_n(x)$ − многочлен n-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, где $x = \varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; б) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$; в) $\int (3x + 4) e^{3x} dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 17 & \underline{x^2 - 4x + 3} \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & x + 4 \\ 4x^2 - 3x - 17 & \\ \underline{4x^2 - 16x + 12} & \\ 13x - 29 & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \int\left(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}\right)dx = \int x dx + \int 4dx + \int \frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит $\quad 13x-29 = A(x-3)+B(x-1)$.

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29 = B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29 = A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx = \int \frac{8}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-3}dx = 8\int \frac{d(x-1)}{x-1} + 5\int \frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$$= 8\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C\right)' = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} =$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C\,; \qquad \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} + C\,,\ (k = 2,3,\ldots).$$

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x+4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C\,.$$

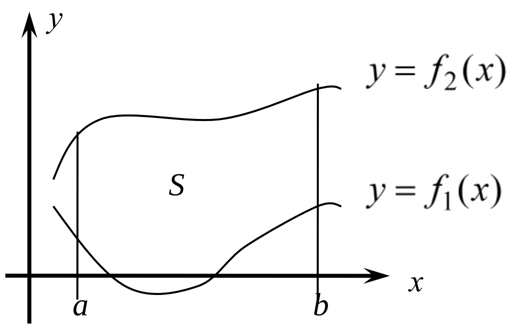
Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}\big(3(x+1)+1\big) = e^{3x}(3x+4)\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Задача 7.

Теоретические сведения.



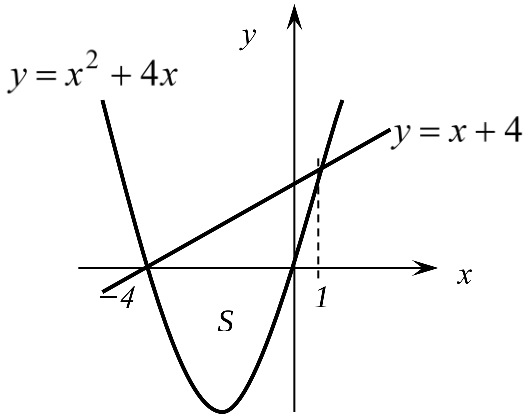
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a,b]$.

***Пример выполнения задания*.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{).}$$

<u>Задача 8</u>.

Теоретические сведения.

Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

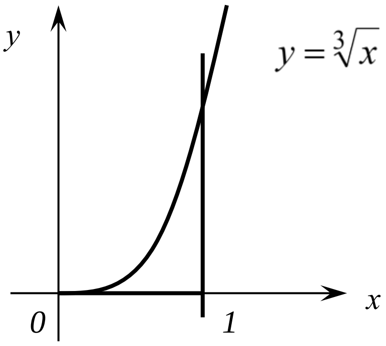
1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

***Пример выполнения задания*.**

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y=\sqrt[3]{x}$, осью *Ox* и прямой $x=1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox*, равен

$$V_x=\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi\left.\frac{x^{5/3}}{5/3}\right|_0^1=\frac{3\pi}{5}\ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy*, равен

$$V_y=2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx=2\pi\left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1=\frac{6\pi}{7}\,(\textit{куб. ед.}).$$

Третий семестр

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Задача 1</u>.

Теоретические сведения.

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x)}{f_1(y)}\to f_1(y)dy=f_2(x)dx\,, \tag{1}$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)\,f_4(y)dy=0\,. \tag{2}$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций $f_2(y)\,f_3(x)$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=0 \tag{2'}$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C\,.$$

При делении на $f_2(y)\,f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y=y_0$ имеем $f_2(y_0)=0$, тогда функция $y=y_0$ является решением уравнения (2′), т.к. $dy=dy_0=0$. Решением может также быть функция $x=x_0$, если $f_3(x_0)=0$.

Пример выполнения задания.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка $$x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0\,.$$

Решение:

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x)=x;\quad f_2(y)=y+1;\quad f_3(x)=x^2+1;\quad f_4(y)=-y$. Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)\,f_3(x)=(y+1)\left(x^2+1\right)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{ydy}{y+1}=0\,.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d\left(y+1\right)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| = C.$$

При делении на $f_2\left(y\right) = y+1$ потеряно частное решение: $y=-1$.

<u>Задача 2.</u>

Теоретические сведения.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p\left(x\right)y = q\left(x\right), \tag{3}$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y = u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)$. Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u\cdot v$ находим $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p\left(x\right)uv = q\left(x\right)$ или $u'v + u\left(v' + p\left(x\right)v\right) = q\left(x\right)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p\left(x\right)v = 0, \tag{4}$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q\left(x\right). \tag{5}$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p\left(x\right)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p\left(x\right)dx \text{ и } v = e^{-\int p\left(x\right)}dx.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v = q\left(x\right) \;\Rightarrow\; du = e^{\int p\left(x\right)dx}q\left(x\right)dx, \text{ тогда } u = \int q\left(x\right)e^{\int p\left(x\right)dx}dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p\left(x\right)dx}\left[\int q\left(x\right)e^{\int p\left(x\right)dx}dx + C\right].$$

***Пример выполнения задания*.**

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2y = 1$.

Решение.

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y = u\left(x\right)\cdot v\left(x\right), \text{ тогда } y' = u'\cdot v + u\cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u'v + u\left(v' - 2v\right) = 1$$

и, приравнивая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0 \qquad\qquad u'v = 1$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx \qquad\qquad \frac{du}{dx}e^{2x} = 1$$

$$\ln v = 2x \qquad\qquad du = e^{-2x}dx$$

$$v = e^{2x} \qquad\qquad u = \int e^{-2x}dx,$$

$$u = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)\cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}.$$

<u>Задача 3</u>.

Теоретические сведения.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f\left(x\right) \tag{6}$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_1 и a_2.

Общее решение этого уравнения $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$– общее решение соответствующего однородного уравнения; y^* – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{7}$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней r_1 и r_2:

1) *корни характеристического уравнения действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

2) *корни характеристического уравнения действительные и равные*: $r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;

3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа* $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i,\ \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Частное решение y^* неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$

.

Первый случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f\left(x\right) = P\left(x\right)e^{mx}$, где $P\left(x\right)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q\left(x\right)e^{mx}, \tag{8}$$

где $Q\left(x\right)$ – полный многочлен той же степени от x, что и $P\left(x\right)$, но с неопределенными коэффициентами;

k = 0, если число m не является корнем характеристического уравнения;

k = 1, если число m является простым корнем характеристического уравнения;

k = 2, если число m является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при m = 0, когда $f(x)=P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q\left(x\right)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения.

Пример выполнения задания.

Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1,\quad y\big|_{x=0} = 2,\quad y'\big|_{x=0} = 3.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2-3r-4=0$ имеет два различных действительных корня $r_1=-1,\ r_2=4$, следовательно, $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x)=4x-1=(4x-1)\cdot e^{0\cdot x}$, где $m=0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k=0$ ищем в виде $y^*=x^0\cdot(Ax+B)\cdot e^{0\cdot x}=Ax+B,\ \ (y^*)'=A,\ \ (y^*)''=0.$ После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$0-3A-4(Ax+B)=4x-1;$$
$$-3A-4Ax-4B=4x-1;$$
$$-4A\cdot x+(-3A-4B)=4\cdot x+(-1);$$
$$x^1:\ -4A=4; \qquad A=-1$$
$$x^0:\ -3A-4B=-1, \quad -4B=-1+3A=-4, \quad B=1$$

Частным решением является функция $y^*=Ax+B=-1\cdot x+1=1-x.$ Общим решением является функция $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-x+1.$

Найдем значение констант C_1,C_2 из начальных условий. Для этого определим $y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}-1.$

Тогда $$\begin{aligned} y|_{x=0}&=C_1+C_2+1=2,\\ y'|_{x=0}&=-C_1+4C_2-1=3, \end{aligned} \qquad \begin{cases} C_1=0,\\ C_2=1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция $y=e^{4x}-x+1.$

***Пример выполнения задания*.**

Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y''-4y'+4y=e^{2x},\ \ y\|_{x=0}=2,\ \ y'\|_{x=0}=3.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2-4r+4=0$ имеет двукратный корень $r_1=2$, следовательно, $\bar{y}=e^{2x}(C_1+C_2x)$. Правая часть уравнения имеет вид

$f(x)=e^{2x}$, $m=2$ является двукратным ($k=2$) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^*=x^2\cdot Ae^{2x},\quad \left(y^*\right)'=x^2\cdot 2Ae^{2x}+2x\cdot Ae^{2x}=2Ae^{2x}\left(x^2+x\right),$$

$$\left(y^*\right)''=4Ae^{2x}\left(x^2+x\right)+2Ae^{2x}(2x+1)=Ae^{2x}\left(4x^2+8x+2\right).$$

После подстановки y^* и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}\left(4x^2+8x+2\right)-4\cdot 2Ae^{2x}\left(x^2+x\right)+4Ae^{2x}\cdot x^2=e^{2x},$$

$$Ae^{2x}\left(\cancel{4x^2}+\cancel{8x}+2\cancel{-8x^2}\cancel{-8x}+\cancel{4x^2}\right)=e^{2x},$$

$$2Ae^{2x}=e^{2x},$$

$$2A=1,\quad A=\frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^*=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2$. Общим решением является функция $y=\bar{y}+y^*=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)+\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2$.

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y'=e^{2x}\left(2C_1+2C_2x+C_2\right)+e^{2x}\left(x^2+x\right),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0}=e^0\cdot C_1=2,\quad C_1=2$$

$$y'\big|_{x=0}=e^0\left(2C_1+C_2\right)=3,\quad C_2=-1$$

Искомым решением является функция $y=\bar{y}+y^*=e^{2x}(2-x)+\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2$.

Второй случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x)=a\cos nx+b\sin nx$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^*=A\cos nx+B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = \left(A\cos nx + B\sin nx\right)\cdot x.$$

В частных случаях, когда a или b равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

***Пример выполнения задания*.**

Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 3x,\ y\big|_{x=0} = \frac{1}{8},\quad y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i\,,$$

тогда $\bar{y} = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$

Числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A\sin 3x + B\cos 3x,$$

$$\left(y^*\right)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x,$$

$$\left(y^*\right)'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 4\left(3A\cos 3x - 3B\sin 3x\right) + 13\left(A\sin 3x + B\cos 3x\right) = C,$$
$$(4A - 12B)\sin 3x + (4B + 12A)\cos 3x = 5\cdot\sin 3x + 0\cdot\cos 3x;$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3x:&\ \ 4A - 12B = 5\\ \cos 3x:&\ 4B + 12A = 0\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}A &= \frac{1}{8}\\ B &= -\frac{3}{8}\end{aligned}\right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \frac{1}{8}\sin 3x - \frac{3}{8}\cos 3x\,.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{-2x}\left(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x\right) + \\ + \frac{3}{8}\cos 3x + \frac{9}{8}\sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

$$y'\big|_{x=0} = -2e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) + e^0\left(C_1\cdot 0 + 3C_2\right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{3}{8}\sin 3x\right) + \frac{1}{8}\sin 3x - \frac{3}{8}\cos 3x\,.$$

<u>Задача 4</u>.

Теоретические сведения.

Степенным рядом называют ряд вида

$$a_0 + a_1\left(x-a\right) + a_2\left(x-a\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-a\right)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n, \tag{9}$$

расположенный по степеням двучлена $(x-a)$.

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале $x \in \left(a-R, a+R\right)$, а для всех x, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (при $x = a - R$ и при $x = a + R$) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R = 0$), у других охватывает всю ось Ox ($R = \infty$).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (10)$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Пример выполнения задания.

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на краях интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$

Решение.

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^{n-1}}\right|=10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=10.$$

На концах интервала: при $x=-10$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\dots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. При $x=10$ получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x\in[-10;10)$.

<u>Задача 5.</u>

Теоретические сведения.

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням *x,* которые представлены ниже:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{21}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad\forall x\in(-\infty,\infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \ \forall x \in (-1,1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \forall x \in (-1,1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad \forall x \in (-1,1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакочередующийся, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

Пример выполнения задания.

> Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда: $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение.

Используем разложение в ряд для функции $\sin x$ и подставим его в подынтегральное выражение

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{0,5} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3 3!3}+\frac{1}{2^5 5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\approx$$

$$\approx 0,5-0,0069+0,00005\approx 0,5-0,0069\approx 0,4931\approx 0,493.$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет $0,001$. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности $(0,00005)<0,001$. В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

Четвертый семестр

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Задача 1</u>.

Теоретические сведения.

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$P(A)=m/n$,

где m – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события A, n – общее число элементарных исходов испытания.

Числом сочетаний из l элементов по k называют количество комбинаций, составленных из l элементов по k, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k=\frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

***Пример выполнения задания*.**

В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть $n = C_{15}^{3}$;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть $m = C_{10}^{3}$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = \frac{\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}}{\dfrac{15!}{3!\cdot 12!}} = \frac{10!\cdot 12!}{7!\cdot 15!} = \frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!}\cdot \cancel{12!}\cdot 13\cdot 14\cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

Пример выполнения задания.

В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть $n = C_{10}^{5}$;

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей C_{7}^{3} способами; при этом остальные (5–3=2) детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из (10–7=3) нестандартных деталей, имевшихся в партии, C_{3}^{2} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = C_{7}^{3} \cdot C_{3}^{2}$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_7^3\cdot C_3^2}{C_{10}^5}=\frac{\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}}{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}}=\frac{7!\cdot 5!\cdot 5!}{2!\cdot 4!\cdot 10!}=\frac{\cancel{7!}\cdot\cancel{4!}\cdot 5\cdot 5!}{2\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{5!}{4\cdot 8\cdot 10}=\frac{3}{8}=0{,}375$$

Теоретические сведения.

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+....+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A),$$

где $P(H_1)+P(H_2)+....+P(H_n)=1$.

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

***Пример выполнения задания*.**

Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

Решение:

а) обозначим через A событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы): H_1 – деталь выбрана из первой партии; H_2 – деталь выбрана из второй партии; H_3 – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой парии, $P_{H_1}(A)=0$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй парии, $P_{H_2}(A)=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей парии, $P_{H_3}(A)=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$.

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Теоретические сведения.

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q=1-p$ – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

***Пример выполнения задания*.**

Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

Решение:

а) пусть событие A – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие B – из 4 семян взойдут 3 семени; событие C – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A)=P(B)+P(C).$$

б) вероятности событий B и C определим по формуле Бернулли:

$$P(B)=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot 0{,}9^3\cdot(1-0{,}9)=0{,}2916,$$

$$P(C)=P_4(4)=C_4^4 p^4 q^{4-4}=0{,}9^4=0{,}6561.$$

в) искомая вероятность $P(A)=0,2916+0,6561=0,9477$.

<u>Задача 2</u>.

Теоретические сведения.

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности p для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую *формулу Пуассона*

$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$, где $e=2,7182...;\ \lambda=np$.

Эта формула используется при $\lambda\le 10$, причем чем меньше p и больше n, тем результат точнее.

***Пример выполнения задания*.**

Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p=0,9;\ q=1-0,9=0,1;\ n=400;\ k=350$. Тогда $x=\frac{350-400\cdot0,9}{\sqrt{400\cdot0,9\cdot0,1}}=-\frac{10}{6}\approx-1,67$;

б) из таблицы в приложении 1 находим $\varphi(-1,67)=\varphi(1,67)=0,0989$;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

***Пример выполнения задания*.**

Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

Из условия задачи $p = 0,0002;\ n = 10000; k = 6$. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$.

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

<u>Задача 3</u>.

Теоретические сведения.

Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $\alpha = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении 2 даны значения этой функции для $0 \le x \le 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Пример выполнения задания.

Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 500; k_1 = 400; k_2 = 440$.

Тогда $\alpha = \dfrac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45$; $\beta = \dfrac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49$.

б) из таблицы в приложении 2 находим

$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319$; $\Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5$.

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \le k \le 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

<u>Задача 4</u>.

Теоретические сведения.

Дискретной называют *случайную величину*, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными возможностями. *Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Этот закон может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (1)$$

Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной;
2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания;
3) математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей;
4) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 \,. \qquad (2)$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \,. \qquad (3)$$

Свойства дисперсии:

1) дисперсия постоянной величины равна нулю;
2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат;

3) дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины характеризует рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения.

***Пример выполнения задания*.**

Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

X	40	42	41	44
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Решение.

а) Вычислим математическое ожидание по заданному закону распределения дискретной случайной величины, пользуясь формулой (1):

$M(X) = 40 \cdot 0{,}1 + 42 \cdot 0{,}3 + 41 \cdot 0{,}2 + 44 \cdot 0{,}4 = 42{,}4$;

б) вычислим дисперсию, воспользовавшись формулой (3). Для этого составим закон распределения квадрата случайной величины:

X^2	40^2	42^2	41^2	44^2
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Тогда $M(X^2) = 40^2 \cdot 0{,}1 + 42^2 \cdot 0{,}3 + 41^2 \cdot 0{,}2 + 44^2 \cdot 0{,}4 = 1799{,}8$;

$D(X) = 1799{,}8 - 42{,}4^2 = 2{,}04$.

в) среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (4):

$\sigma(X) = \sqrt{2{,}04} \approx 1{,}43$.

<u>Задача 5</u>.

Теоретические сведения.

Функцией распределения (интегральной функцией распределения) называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$F(x) = P(X < x)$.

Свойства интегральной функции распределения:

1) значения функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$;
2) функция распределения есть неубывающая функция;
3) вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;
4) вероятность того, что случайная величина X примет одно определенное значение, например, x_1, равна нулю;
5) если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$F(x) = 0 \quad \forall x \le a;\; F(x) = 1 \quad \forall x \ge b.$$

Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины называю первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \qquad (5)$$

Если задана дифференциальная функция распределения $f(x)$, вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx. \qquad (6)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2.$$

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_a^b\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx \qquad \text{или} \qquad D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2. \qquad (7)$$

Пример выполнения задания.

Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0 \text{ ï ðè } x<0,\\ x^3 \text{ ï ðè } 0\le x\le 1,\\ 1 \text{ ï ðè } x>1.\end{cases}$

Требуется найти дифференциальную функцию распределения математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

а) По определению (5) найдем дифференциальную функцию распределения $f(x)$ как производную от заданной интегральной функции распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ ï ðè } x<0,\\ 3x^2 \text{ ï ðè } 0\le x\le 1,\\ 0 \text{ ï ðè } x>1.\end{cases}$$

б) математическое ожидание вычислим по формуле (6). Так как функция $f(x)$ при $x<0$ и $x>1$ равна нулю, то имеем

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

в) вычислим дисперсию по формуле (7)

$$D(X)=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 3x^2dx=3\int_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=$$

$$=3\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{8}+\frac{3x^3}{16}\right]_0^1=3\cdot\left[\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right]=\frac{3}{80}.$$

<u>Задача 6</u>.

Теоретические сведения.

Если задана дифференциальная функция распределения $f(x)$, вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

Вероятность выполнения строгих неравенств $a<X<b$ определяется той же формулой.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, дифференциальная функция распределения которого имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(\alpha;\beta)$, равна

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \tag{9}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа (приведена в приложении 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, определяется по формуле

$$P(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{10}$$

Пример выполнения задания.

Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм. Определить вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем 1,5 мм.

Решение.

а) По условию задачи $a = 40, \alpha = 34, \beta = 43, \sigma = 3$. Тогда по формуле (9)

$$P(34 < X < 43) = \Phi\left(\frac{43-34}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34-40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$
$$= \Phi(1) + \Phi(2) \approx 0,3413 + 0,4772 \approx 0,8185.$$

б) вероятность того, что $a - \delta < X < a + \delta$, где $a = 40, \delta = 1,5$, вычислим по формуле (10):

$$P(|X-40|<1,5) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0,5) \approx 2 \cdot 0,1915 \approx 0,383.$$

<u>Задача 7.</u>

Теоретические сведения.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{11}$$

где x, y - вещественные (действительные) числа,

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Число x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, а число y - *мнимой частью* числа z: $y = \operatorname{Im} z$. Мнимая единица i представляет собой корень квадратного уравнения $z^2 + 1 = 0$, то есть $i^2 = -1$. Запись комплексного числа в форме (11) называют *алгебраическим представлением* комплексного числа. Число $\overline{z} = x - iy$ называют сопряженным комплексному числу (11).

Модулем комплексного числа называют величину $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *аргументом* комплексного числа называют величину $\varphi = \arg z$ такую, что $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{y}{x}$, где угол φ, отсчитываемый против часовой стрелки, считается положительным, в противном случае – отрицательным. Комплексное число $z = x + iy$ можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \tag{12}$$

Обозначим $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда можно перейти от тригонометрической формы представления комплексного числа (12) к *показательной форме*:

$$z = |z|e^{i\varphi}\,. \tag{13}$$

Рассмотрим основные алгебраические операции над комплесными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. Вычитание: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

3. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

4. Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.

5. Возведение комплексного числа в степень: в этом случае удобно от алгебраической формы представления числа $z = x + iy$ перейти к показательной

форме: $z=|z|e^{i\varphi}$. Тогда $z^n=|z|^n e^{in\varphi}$, и, записывая результат в тригонометрической форме, получим так называемую *формулу Муавра*:

$$z^n=|z|^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \tag{14}$$

6. Извлечение корня из комплексного числа: корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, что при возведении его в n-ую степень получим z: $\sqrt[n]{z}=w$, если $w^n=z$.

Для каждого комплексного числа можно найти n значений корня n-ой степени по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k+1}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{15}$$

Пример выполнения задания.

Заданы комплексные числа. Требуется а) выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме; б) найти все значения корня и представить ответ в алгебраической форме: а) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-i^3$; б) $\sqrt[5]{-i}$.

Решение.

а) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-i^3=\left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2-i\cdot i^2=\left(\frac{1-i-i+i^2}{1-i^2}\right)^2-i\cdot i^2=$

$$=\left(\frac{\cancel{1}-2i-\cancel{1}}{1-(-1)}\right)^2-i\cdot(-1)=\left(\frac{-2i}{2}\right)^2+i=-1+i,$$

В преобразованиях использовали тот факт, что $i^2=-1$.

б) для вычисления $\sqrt[5]{-i}$ представим число $-i$ в тригонометрической форме. Поскольку $|-i|=1$, $\cos\varphi=\frac{0}{1}=0, \sin\varphi=\frac{-1}{1}=-1, \varphi=270^\circ$, то $-i=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ$.

Найдем $\sqrt[5]{-i}$ по формуле (15):

$$\left(\sqrt[5]{-1}\right)_{k+1} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{270^\circ + 360^\circ k}{5} + i\sin\frac{270^\circ + 360^\circ k}{5}\right), \quad k = 0,1,2,3,4,$$

$$\left(\sqrt[5]{-1}\right)_{k+1} = 1\cdot\left(\cos(54^\circ + 72^\circ k) + i\sin(54^\circ + 72^\circ k)\right), \quad k = 0,1,2,3,4,$$

при $k = 0 \quad \left(\sqrt[5]{-1}\right)_1 = \cos 54^\circ + i\sin 54^\circ,$

при $k = 1 \quad \left(\sqrt[5]{-1}\right)_2 = \cos 126^\circ + i\sin 126^\circ,$

при $k = 2 \quad \left(\sqrt[5]{-1}\right)_3 = \cos 198^\circ + i\sin 198^\circ,$

при $k = 3 \quad \left(\sqrt[5]{-1}\right)_4 = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ,$

при $k = 4 \quad \left(\sqrt[5]{-1}\right)_5 = \cos 342^\circ + i\sin 342^\circ,$

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модулю)

Основная литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 18-е изд., перераб. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4916-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152643. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / Д. В. Клетеник ; под редакцией Н. В. Ефимова. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 224 с. — ISBN 978-5-8114-1051-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/130489. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-0574-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168472. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 : Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159505. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

7. Дерр, В. Я. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Я. Дерр. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 596 с. — ISBN 978-5-8114-6515-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159475. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433, Режим доступа: для авторизованных пользователей.
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5 :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498, Режим доступа: для авторизованных пользователей.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- https://tsutula.bibliotech.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.- http://www.iprbookshop.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.