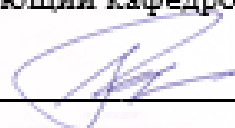


**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Вычислительная механика и математика»**

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«14» января 2021 г., протокол № 5  
Заведующий кафедрой

 В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по самостоятельной работе студентов  
по дисциплине (модулю)  
«Математика»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы специалитета**

**по специальности  
38.05.02 Таможенное дело**

**с направленностью (профилем)  
Таможенная деятельность**

**Форма обучения: заочная**

**Идентификационный номер образовательной программы: 380502-01-21**

**Тула 2021 год**

## Разработчик методических указаний

Дудина Ю.В., доцент, к.т.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

## Линейная алгебра и аналитическая геометрия

### Задача 1.

*Теоретические сведения.*

В прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  положение любой точки задается тремя числами – *координатами* :  $A(x_A, y_A, z_A)$  (рисунок 1).

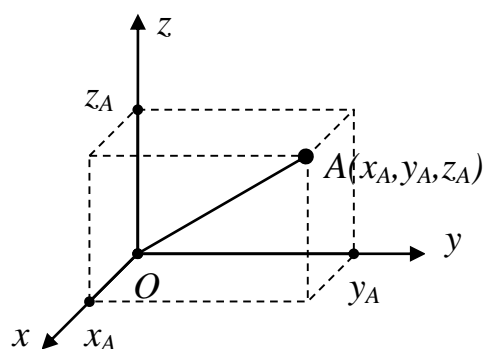


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка  $M(x; y)$  делит отрезок  $M_1M_2$  ( $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ ) в отношении  $\lambda$ , то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2)$$

если же точка  $M(x; y)$  - середина отрезка  $M_1M_2$ , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad (3)$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$  и имеющей данный угловой коэффициент  $k$ , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \quad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид  $k_1 = k_2$ , а условие

перпендикулярности  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ ; (7)

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением*  $Ax + By + C = 0$ , то  $k_1 = -\frac{A}{B}$  - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на  $C \neq 0$ , получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Уравнение окружности с центром в точке  $E(a, b)$  и радиусом  $R$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (10)$$

**Пример выполнения задания.**

Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-4; 8)$ ,  $B(5; -4)$ ,  $C(10; 6)$ .

Найти: 1) длину стороны  $AB$ ; 2) уравнения сторон  $AB$  и  $AC$  в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол  $A$  в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты  $CD$  в общем виде и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота  $CD$  есть диаметр.

*Решение:*

1) Расстояние  $d$  между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек  $A$  и  $B$  (положим  $z_1 = z_2 = 0$ ), тогда

$$AB = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек  $A$  и  $B$ , получим уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad \frac{x + 4}{3} = \frac{y - 8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента  $k_{AB}$  прямой  $AB$  разрешим полученное уравнение относительно  $y$ :  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ . Отсюда  $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ . Подставив в формулу (5)

координаты точек  $A$  и  $C$ , найдем уравнение прямой  $AC$ :  $\frac{x - (-4)}{10 - (-4)} = \frac{y - 8}{6 - 8},$

$$\frac{x + 4}{14} = \frac{y - 8}{-2}, \quad \frac{x + 4}{7} = \frac{y - 8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда  $k_{AC} = -\frac{1}{7}$ .

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны  $k_1$  и  $k_2$ , определяется по формуле (6). Угол  $A$ , образованный прямыми  $AB$  и  $AC$ , найдем по

формуле (6), подставив в нее  $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}, \quad k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \approx 0,79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота  $CD$  перпендикулярна стороне  $AB$ , то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом  $k$  направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки

$C$  и  $k_{CD} = \frac{3}{4}$ , получим уравнение высоты  $CD$ :

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины  $CD$  определим координаты точки  $D$ , решив систему уравнений  $(AB)$  и  $(CD)$ :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x = 2, y = 0, \quad \text{то есть } D(2; 0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек  $C$  и  $D$ , находим:

$$CD = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как  $CD$  является диаметром искомой окружности, то ее центр  $E$  есть середина отрезка  $CD$ . Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно,  $E(6; 3)$  и  $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ . Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности:  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

## Задача 2.

*Теоретические сведения.*

Если известны начало вектора  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и конец  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1, \quad (11)$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (12)$$

Вектор  $\vec{a}$  с координатами  $(x, y, z)$  может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (13)$$

Если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, которые вектор  $\vec{a}$  образует с положительными направлениями осей координат, то  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  называются *направляющими косинусами* вектора  $\vec{a}$  (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  вводятся операции сложения и умножения на число такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где  $\lambda$  – любое число.

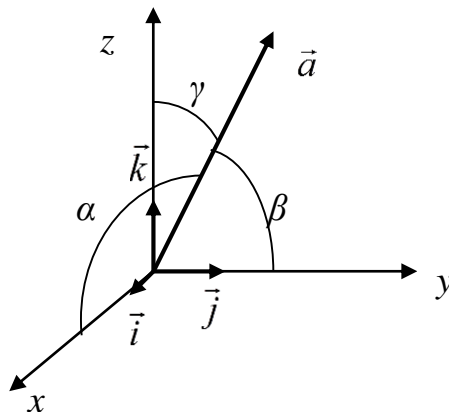


Рисунок 2.

Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (15)$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны, то  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ . Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяется соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{N} = (A, B, C)$ , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (17)$$

### **Пример выполнения задания.**

Даны координаты трех точек:  $A(3; 0; -5)$ ,  $B(6; 2; 1)$ ,  $C(12; -12; 3)$ .

Требуется: 1) записать векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB}$ .

*Решение:*



1) Найдем координаты вектора  $\vec{AB}$ , подставив в формулу (11) координаты точек  $A$  и  $B$ , и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\vec{AB} = (6 - 3)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом

$$\vec{AC} = (12 - 3)\vec{i} + (-12 - 0)\vec{j} + (3 + 5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модули векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos \varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0,4286, \quad \varphi \approx 64^\circ 37' \approx 1,13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку  $C(12; -12; 3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB} = (3, 2, 6)$ . Подставляя в (17)  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 6$ ,  $x_0 = 12$ ,  $y_0 = -12$ ,  $z_0 = 3$ , получим:

$$3(x - 12) + 2(y + 12) + 6(z - 3) = 0,$$

или  $3x + 2y + 6z - 30 = 0$  – искомое уравнение плоскости.

### **Задача 3.**

*Теоретические сведения.*

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов  $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  выполняется условие  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$ , то они образуют базис, и любой четвертый вектор  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3, \quad (19)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – координаты вектора  $\vec{b}$  в базисе, образованном векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ .

Координаты  $\alpha, \beta, \gamma$  находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases} \quad (20)$$

### ***Пример выполнения задания.***

Показать, что векторы  $\vec{a}_1(3; 1; 4)$ ,  $\vec{a}_2(2; 1; -1)$ ,  $\vec{a}_3(1; -1; 5)$  образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора  $\vec{b}(5; 0; 3)$  в этом базисе.

*Решение:*

Вычислим смешанное произведение векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некомпланарны и образуют базис. Координаты вектора  $\vec{b}$  в этом базисе найдем, разложив его по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3,$$

а координаты вектора  $\vec{b}$  в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

После этого умножим первое уравнение на  $(-3)$  и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на  $(-4)$  и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}$$

Затем умножаем второе уравнение на  $(-5)$  и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем  $\gamma = 2$ . Подставляем это значение во второе уравнение, получаем  $\beta = 3$  и, наконец, из первого уравнения находим  $\alpha = -1$ .

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора  $\vec{b}$ , получим

$$\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

**Задача 4.***Теоретические сведения.*

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  - матрица-столбец неизвестных,

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$  матрица-столбец свободных членов.

Если матрица  $\mathbf{A}$  – невырожденная, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , обратная к  $\mathbf{A}$ , так что  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  - единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на  $\mathbf{A}^{-1}$  и получим

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad (23)$$

поскольку  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$ .

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице  $\mathbf{A}$ , находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , которое является произведением  $(-1)^{i+j}$  на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца в определителе матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\Delta$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Пример выполнения задания.**

Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

*Решение:*

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных  $\mathbf{A}$  и столбец свободных членов  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель  $\Delta$  и алгебраические дополнения  $A_{ij}$  элементов матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -2$ .

## Введение в анализ

### Теоретические сведения.

Число  $A$  называют пределом функции  $y=f(x)$  в точке  $a$ , если эта функция определена в некоторой окрестности точки  $a$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ , и для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Вычисление пределов арифметических выражений  $f_1(x)/f_2(x)$ ,  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ,  $f_1(x) - f_2(x)$  по пределам функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , из которых они составлены, не всегда возможно. В этих случаях говорят, что возникают неопределенности следующих видов:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^\infty).$$

Для нахождения пределов таких неопределенных выражений нужно учитывать конкретный вид функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0; \quad (25)$$

предел отношения двух многочленов  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$

первый замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1;$  (26)

второй замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1)^\infty = e.$  (27)

Величина  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ . Две бесконечно малые величины называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1, то есть  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$ . Под знаком предела любая бесконечно малая величина может быть заменена на эквивалентную ей. Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых при  $x \rightarrow 0$  величин:

$$\begin{aligned} \sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad e^x - 1 \sim x, \\ \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

**Пример выполнения задания.**

Вычислить пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3}, & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x), \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arctg 5x}, & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}. \end{array}$$

*Решение:*

а) Подстановка предельного значения аргумента  $x = -3$  приводит к неопределенному выражению вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$ .

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель  $(x+3)$ . Такое сокращение здесь возможно, так как множитель  $(x+3)$  отличен от нуля при  $x \rightarrow -3$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3} &= \frac{4 \cdot (-3)^2 + 11 \cdot (-3) - 3}{3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) + 3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4 \cdot (-3) - 1}{3 \cdot (-3) + 1} = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

б) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\sqrt{x^2 + 3x} - x$  дает неопределенность вида  $(\infty - \infty)$ . Для ее устранения умножим и разделим это выражение на  $\sqrt{x^2 + 3x} + x$ , после чего разделим числитель и знаменатель полученной дроби на  $x$ , учитывая формулу (25):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

в) При  $x \rightarrow 0$  получим неопределенность  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . Обозначим  $\arctg 5x = y$ . Тогда  $5x = \operatorname{tg} y$

и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Применяя свойства пределов и формулу (26), имеем:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \left( \frac{1}{5} \operatorname{tgy} \right)}{y} = \frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Эту задачу можно решить, используя эквивалентные замены бесконечно малых величин (28). Поскольку при  $x \rightarrow 0$  эквивалентны  $\operatorname{arctg} 5x \sim 5x$ , можно записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

г) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}$  является неопределенностью вида  $(1^\infty)$ . Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой (при  $x \rightarrow \infty$ ) величины; после чего применим формулу второго замечательного предела (27):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{\left( \frac{2x+1}{-4} \right) \cdot \left( \frac{-4}{2x+1} \right) \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4}{2x+1} \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16x-20}{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-8} = \frac{1}{e^8}. \end{aligned}$$

### **Задача 1.**

*Теоретические сведения.*

Производной от функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$ , когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная есть скорость изменения функции в точке  $x$ .

Отыскание производной называется дифференцированием функции.

*Основные правила дифференцирования:*

1.  $(C)' = 0$ , где  $C = \text{Const}$ .
2.  $(x)' = 1$
3.  $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
4.  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ ,  $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$
5.  $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ ,  $\left(\frac{C}{v(x)}\right)' = \frac{-C \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ ,  $\left(\frac{u(x)}{C}\right)' = \frac{u'(x)}{C}$
6.  $F'(u(x)) = F'_u \cdot u'(x)$

*Таблица производных элементарных функций ( $u = u(x)$ ):*

1.  $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ,
4.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
2.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ,  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ,
5.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
3.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ , 6.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ , 7.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ ,
8.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ,  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
9.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ,  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Если в таблице положить  $u(x) = x$ , то  $u' = 1$ .

**Пример выполнения задания.**

Найдите производные функций:

а)  $y = \ln(2 + \sin 3x)$ ; б)  $y = (3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^4$ ; в)  $\cos(xy^2) - 3y^2 + 4x = 0$ .

*Решение:*

а) последовательно применяя правила дифференцирования сложной функции, правила и формулы дифференцирования, имеем:

$$y' = (\ln(2 + \sin 3x))' = \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot (2 + \sin 3x)' = \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot (2' + (\sin 3x)') =$$

$$= \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \frac{3 \cos 3x}{2 + \sin 3x};$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad y' &= ((3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^4)' = 4(3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot (3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)' = \\ &= 4(3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot (\arctg \sqrt{x})' = \\ &= 4(3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= 4(3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 \ln 3}{(1 + x)\sqrt{x}} \cdot 3^{\arctg \sqrt{x}} \cdot (3^{\arctg \sqrt{x}} + 1)^3 \end{aligned}$$

в) в данном случае функциональная зависимость задана в *неявном* виде. Для нахождения производной  $y'$  нужно продифференцировать по переменной  $x$  обе части уравнения, считая при этом  $y$  функцией от  $x$ , а затем полученное уравнение разрешить относительно  $y'$ :

$$\begin{aligned} -\sin(xy^2) \cdot (xy^2)' - 3 \cdot 2yy' + 4 &= 0; \\ -\sin(xy^2) \cdot (x'y^2 + x(y^2)') - 6yy' + 4 &= 0; \\ -\sin(xy^2) \cdot (y^2 + 2xyy') - 6yy' + 4 &= 0; \\ -y^2 \sin(xy^2) - 2xyy' \sin(xy^2) - 6yy' + 4 &= 0; \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим  $y'$ :

$$2yy'(x \sin(xy^2) + 3) = 4 - y^2 \sin(xy^2);$$

$$y' = \frac{4 - y^2 \sin(xy^2)}{2y(x \sin(xy^2) + 3)}.$$

## **Задача 2.**

*Теоретические сведения.* Исследование функции одной независимой переменной будем проводить по следующей схеме:

1. Найдем область определения функции.
2. Исследуем функцию на непрерывность.
3. Установим, является ли данная функция четной, нечетной или функцией общего вида.
4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки ее перегиба.
6. Найдем асимптоты кривой.

**Пример выполнения задания.**

Исследовать функцию  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$  и построить ее график.

*Решение.*

Реализуем приведенную схему исследования функции:

1. Функция определена при всех значениях аргумента  $x$ , кроме  $x=1$ .
2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, то есть на интервалах  $(-\infty;1)$  и  $(1;+\infty)$ .

В точке  $x=1$  функция терпит разрыв.

3. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств  $f(-x) = f(x)$  (тогда  $f(x)$  – четная функция) или  $f(-x) = -f(x)$  (для

нечетной функции) для любых  $x$  из области определения функции:  $f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2}$

$$, \quad -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

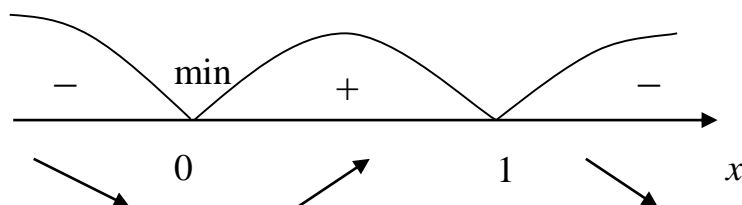
Следовательно,  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то есть данная функция является функцией общего вида.

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Определим критические точки функции:  $y' = 0$  при  $x = 0$ ,  $y'$  не существует при  $x = 1$ . Тем самым имеем две критические точки:  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Но точка  $x = 1$  не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

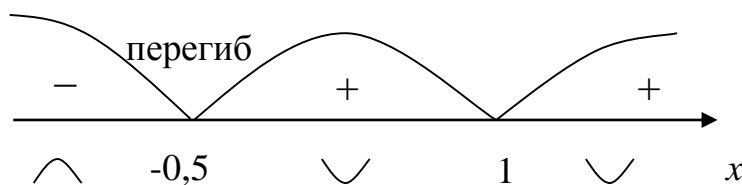


В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает, во втором интервале — положительна, и данная функция возрастает. При переходе через точку  $x = 0$  первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум:  $y_{\min} = y(0) = -1$ . Значит,  $A(0; -1)$  является точкой минимума.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -2 \cdot \frac{(x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Для второй производной  $y'' = 0$  при  $x = -0,5$  и  $y''$  не существует при  $x = 1$ . Разобьем числовую ось на три интервала  $(-\infty; -0,5)$ ,  $(-0,5; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .



На первом интервале вторая производная  $y''$  отрицательна и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах  $y'' > 0$ , поэтому график является

вогнутым. При переходе через точку  $x = -0,5$  вторая производная меняет свой знак, поэтому в этой точке кривая имеет перегиб:  $y_{пер} = y(-0,5) = -\frac{8}{9}$ .

Следовательно,  $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$  – точка перегиба графика функции.

6. В точке  $x=1$  функция терпит разрыв, причем  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$ . Прямая  $x=1$  является вертикальной асимптотой графика функции. Для определения уравнения наклонной асимптоты  $y=kx+b$  воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Тогда  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2 x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$

При найденных значениях  $k$  и  $b$  прямая  $y=0$  есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рисунке 1.

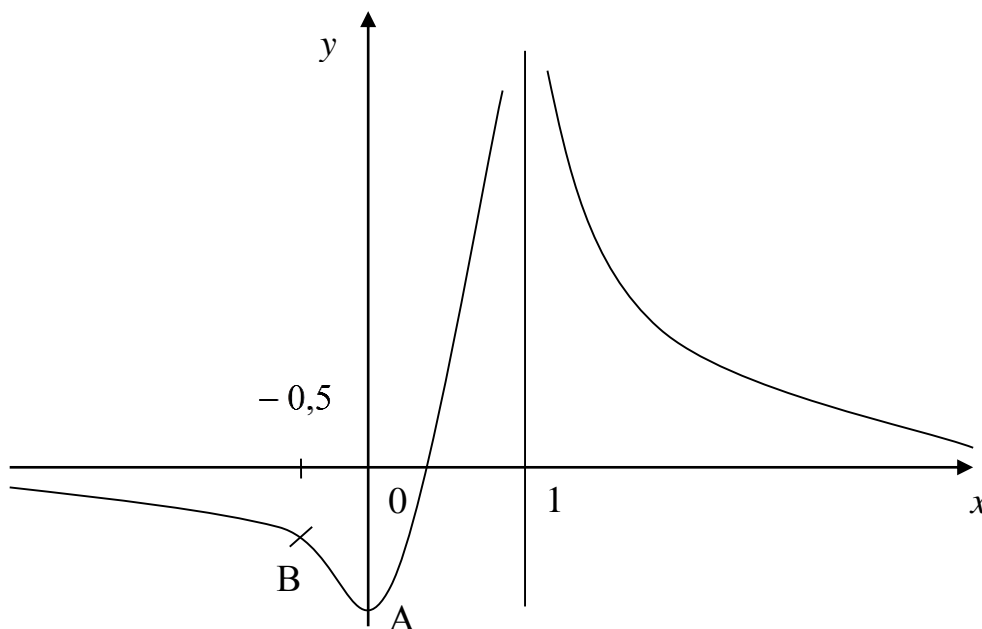


Рисунок 1. График исследуемой функции.

### Задача 3.

**Пример выполнения задания.**

Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара при его емкости  $108 \text{ дм}^3$ , чтобы затраты на его лужение были наименьшими?

*Решение.* Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при данной вместимости площадь его поверхности будет минимальной.

Обозначим через  $a$  (дм) – сторону основания,  $b$  (дм) – высоту резервуара. Тогда площадь его поверхности  $S = a^2 + 4ab$ , а объем  $V = a^2b$ , или, согласно условия,  $108 = a^2b$ . Поэтому

$$b = \frac{108}{a^2} \quad \text{и} \quad S = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{108}{a^2} = a^2 + \frac{432}{a}.$$

Полученное соотношение устанавливает зависимость между площадью поверхности резервуара  $S$  (функция) и стороной основания  $a$  (аргумент). Область определения этой функции  $a > 0$ , так как  $a$  – сторона основания. Исследуем функцию  $S$  на экстремум. Найдем первую производную  $S'$ , приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$S' = 2a - \frac{432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0.$$

Отсюда  $a = 6$ . Производная  $S'(a)$  не существует при  $a = 0$ , но это значение аргумента не принадлежит области определения функции. При  $0 < a < 6$  производная  $S'(a) < 0$ , при  $a > 6$   $S'(a) > 0$ . Следовательно, при  $a = 6$  функция  $S$  имеет минимум. Если  $a = 6$ , то  $b = 3$ . Таким образом, затраты на лужение резервуара емкостью  $108 \text{ л}$  будут наименьшими, если он имеет размеры  $6(\text{дм}) \times 6(\text{дм}) \times 3(\text{дм})$ .

**Задача 4.**

*Теоретические сведения.*

Переменная величина  $z$  называется *функцией двух переменных*  $x$  и  $y$ , если каждой паре значений  $(x, y)$  из данной области соответствует единственное определенное значение  $z = f(x, y)$ .

Для функции  $z = f(x, y)$  вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M_0(x_0, y_0)$  *максимум (минимум)*, если значение этой функции в точке  $M_0$  больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки  $M_0$ .

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции  $z = f(x, y)$ . Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Если в стационарной точке  $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$ , то  $M_0$  есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$ , то  $M_0$  есть точка максимума;

$\Delta < 0$ , то в точке  $M_0$  нет экстремума;



$\Delta = 0$ , то требуется дополнительное исследование.

**Пример выполнения задания.**

Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$ .

*Решение.*

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка  $M(1;2)$  является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке  $M$  достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке  $M(1;2)$   $A = -2, B = 0, C = -2$  и  $\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4$ . Поскольку  $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$ , точка  $M(1;2)$  является точкой максимума. Значение функции в этой точке  $z|_M = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$ .

**Задача 5.**

*Теоретические сведения.*

Функция двух независимых переменных  $z = f(x, y)$  принимает наибольшее и наименьшее значения в области  $D$ , ограниченной линией  $\varphi(x, y) = 0$ , либо в стационарных точках, расположенных внутри области  $D$ , либо на границе этой области.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции  $z = f(x, y)$  в заданной области  $D$  решается по следующему плану:

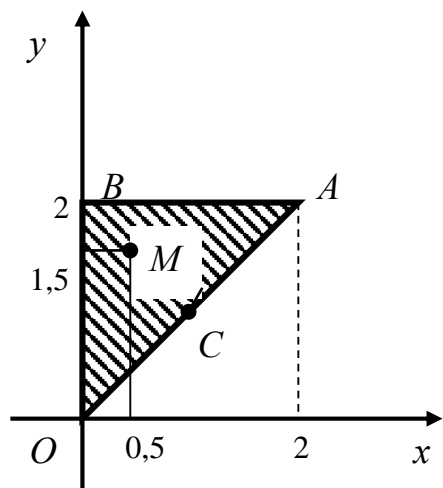
1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области  $D$ , и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе  $\varphi(x, y) = 0$  области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

**Пример выполнения задания.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - 4x - y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = x$ .

*Решение.*

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

Стационарная точка  $M(0,5;1,5)$  лежит внутри заданной области  $OAB$ .

Значение функции в точке  $M$  равно

$$z|_M = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,5 - 1,5 = -1,75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе  $OA$   $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$  или  $z = 3x^2 - 5x$ ;

$$z' = 6x - 5, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{6}, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{5}{6} \quad (\text{так как } y=x).$$

$$\text{В точке } C\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right) \text{ значение функции равно } z|_C = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{25}{12}.$$

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка  $OA$ .

В точке  $O(0;0)$   $z|_O = 0$ , в точке  $A(2;2)$  значение функции равно

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2.$$

б) на границе  $BA$   $y = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$  или  $z = x^2 - 2$ ;

$z' = 2x$ ,  $z' = 0$  при  $x = 0$ , а  $y = 2$  согласно уравнению прямой  $BA$ .

В точке  $B(0;2)$  значение функции равно  $z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$ .

в) на границе  $OB$   $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $z = -y$ ;

$z' = -1 \neq 0$  при всех  $y \in [0;2]$ , следовательно, стационарных точек на линии  $OB$  нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z|_A = 2$  — наибольшее значение функции в области  $OAB$

$z|_C = -\frac{25}{12}$  — наименьшее значение функции в области  $OAB$

## Неопределенный и определенный интегралы

*Теоретические сведения.*

Первообразной функцией для функции  $f(x)$  называется такая функция  $F(x)$ , что  $F'(x) = f(x)$ .

Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция  $f(x)$  называется подынтегральной функцией,  $F(x)$  — результат интегрирования,  $C$  — произвольная постоянная.

*Свойства неопределенного интеграла:*

1.  $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$ .
2.  $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$ , где  $A$  – постоянная.
3. Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$ .

*Таблица простейших интегралов:*

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\int dx = x + C$ .  | 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ .                                      |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$ .         | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ .                                    |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ .                             | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ .                              |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C$ . | 10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ .           |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .                               | 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$ .           |
| 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$ .                                | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + A} \right  + C, (A \neq 0)$ . |

*Основные методы интегрирования:*

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную:  $df(x) = d(f(x) \pm A)$ ;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:  $f'(x)dx = df(x)$ .

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

$$\text{a) } \int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$$

$$\text{б) } \int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$$

$$\text{в) } \int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$$

$$\text{г) } \int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$\text{д) } \int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$\text{е) } \int \operatorname{arctg} ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \operatorname{arctg} ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

где  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ой степени.

### 3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \text{где } x = \varphi(t).$$

#### **Пример выполнения задания.**

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx; \quad \text{в) } \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

*Решение.*

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{3} (\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} (\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{3} (\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' = \\
& = \frac{1}{3} \cdot 3 (\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)' + C' = \\
& = \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x + 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left( x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби  $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$  и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит  $13x - 29 = A(x-3) + B(x-1)$ .

При  $x=3$  имеем  $13 \cdot 3 - 29 = B(3-1)$ , откуда  $B=5$ ;

при  $x=1$  имеем  $13 \cdot 1 - 29 = A(1-3)$ , откуда  $A=8$ .

Получаем  $\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3}$  и интегрируем

$$\begin{aligned}\int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} dx &= \int \frac{8}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = 8 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 5 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ &= 8 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C\end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\begin{aligned}\left( \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' &= \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} = \\ &= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^3-17}{x^2-4x+3},\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

*Замечание.*

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C, \quad (k=2,3,\dots).$$

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем  $u = 3x + 4$ ,  $dv = e^{3x} dx$ , тогда  $du = 3dx$ ,  $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ . По формуле

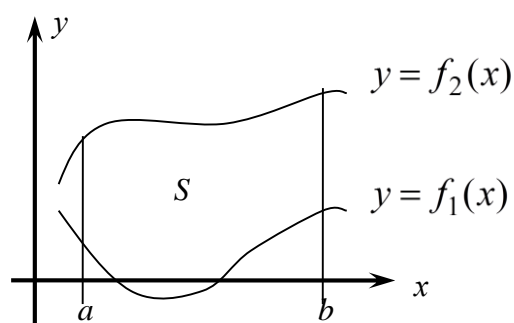
интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\int (3x+4)e^{3x} dx &= (3x+4) \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 3 dx = \frac{3x+4}{3} e^{3x} - \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{3x+4}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3} e^{3x} + C = e^{3x} (x+1) + C.\end{aligned}$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

**Задача 7.***Теоретические сведения.*

Если на плоскости  $Oxy$  задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  и вертикальными прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , то площадь  $S$  такой фигуры может быть вычислена по формуле

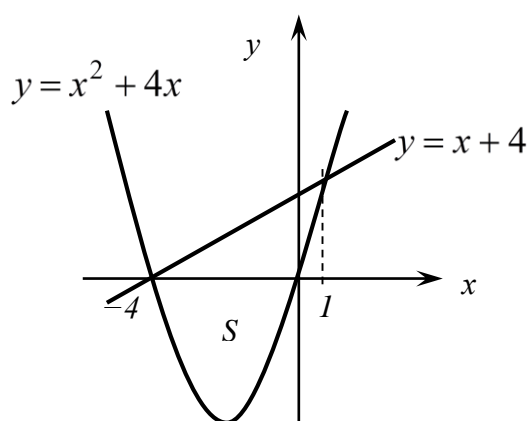
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

*Пример выполнения задания.*

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .

*Решение.*

Заданные линии ограничивают на плоскости  $Oxy$  криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений



$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left( 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-4}^1 = \\ &= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

### **Задача 8.**

*Теоретические сведения.*

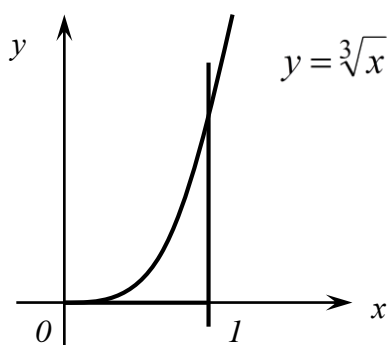
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой  $y = f(x) \geq 0$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,

- 1) вокруг оси  $Ox$ , вычисляются по формуле  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;
- 2) вокруг оси  $Oy$ , вычисляются по формуле  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

***Пример выполнения задания.***

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  криволинейного треугольника, ограниченного кривой  $y = \sqrt[3]{x}$ , осью  $Ox$  и прямой  $x = 1$ .

*Решение.*



1) объем тела, полученного вращением  
вокруг оси  $Ox$ , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$ , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

## Теория вероятностей и математическая статистика

### Задача 1.

*Теоретические сведения.*

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события  $A$ ,  $n$  – общее число элементарных исходов испытания.

*Числом сочетаний* из  $l$  элементов по  $k$  называют количество комбинаций, составленных из  $l$  элементов по  $k$ , которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

### ***Пример выполнения задания.***

В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

*Решение:*

- а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть  $n = C_{15}^3$ ;
- б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть  $m = C_{10}^3$ ;
- в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{10! \cdot 12!}{7! \cdot 15!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

**Пример выполнения задания.**

В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

*Решение:*

- а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть  $n = C_{10}^5$ ;
- б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей  $C_7^3$  способами; при этом остальные ( $5-3=2$ ) детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из ( $10-7=3$ ) нестандартных деталей, имевшихся в партии,  $C_3^2$  способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов  $m = C_7^3 \cdot C_3^2$ ;
- в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

*Теоретические сведения.*

Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$ .

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

### **Пример выполнения задания.**

Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

*Решение:*

а) обозначим через  $A$  событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы):  $H_1$  – деталь выбрана из первой партии;  $H_2$  – деталь выбрана из второй партии;  $H_3$  – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой партии,  $P_{H_1}(A) = 0$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она

взята из второй партии,  $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ; условная вероятность того, что деталь будет

бракованной, если она взята из третьей партии,  $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

### *Теоретические сведения.*

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ), событие наступит ровно  $k$  раз (безразлично в какой последовательности), определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $q = 1 - p$  – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

### *Пример выполнения задания.*

Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

### *Решение:*

а) пусть событие  $A$  – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие  $B$  – из 4 семян взойдут 3 семени; событие  $C$  – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

б) вероятности событий  $B$  и  $C$  определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1 - 0,9) = 0,2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

в) искомая вероятность  $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$ .

## **Задача 2.**

*Теоретические сведения.*

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  и  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ .

Значения функции  $\varphi(x)$  определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности  $p$  для вычисления  $P_n(k)$  применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при  $\lambda \leq 10$ , причем чем меньше  $p$  и больше  $n$ , тем результат точнее.

## ***Пример выполнения задания.***

Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$ . Тогда

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67;$$

б) из таблицы в приложении 1 находим  $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$ ;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} \cdot 0.0989 \approx 0.0165.$$

**Пример выполнения задания.**

Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

*Решение.*

Из условия задачи  $p = 0,0002$ ;  $n = 10000$ ;  $k = 6$ . Тогда  $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$ .

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

**Задача 3.**

*Теоретические сведения.*

Если вероятность наступления события  $A$  в каждом из  $n$  испытаний постоянна и равна  $p$ , то вероятность  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$  того, что событие  $A$  в таких испытаниях наступит не менее  $k_1$  раз и не более  $k_2$  раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где  $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$  и  $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $q = 1 - p$ .

Функция  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  называется функцией Лапласа. В приложении 2

даны значения этой функции для  $0 \leq x \leq 5$ . При  $x > 5$  функция  $\Phi(x) = 0,5$ . При

отрицательных значениях  $x$  в силу нечетности функции Лапласа  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

**Пример выполнения задания.**

Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9$ ;  $q = 1 - 0,9 = 0,1$ ;  $n = 500$ ;  $k_1 = 400$ ;  $k_2 = 440$ .

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45; \quad \beta = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49.$$

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5.$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

**Задача 4.**

*Теоретические сведения.*

*Дискретной* называют *случайную величину*, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными возможностями. *Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Этот закон может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные

значения  $x_i$ , а вторая – вероятности  $p_i$ , причем  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ :



$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (1)$$

Свойства математического ожидания:

- 1) математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной;
- 2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания;
- 3) математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей;
- 4) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

*Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (2)$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (3)$$

Свойства дисперсии:

- 1) дисперсия постоянной величины равна нулю;
- 2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат;

3) дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

*Средним квадратическим отклонением* случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины характеризует рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения.

***Пример выполнения задания.***

Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$ . Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$X$	40	42	41	44
$P$	0,1	0,3	0,2	0,4

*Решение.*

а) Вычислим математическое ожидание по заданному закону распределения дискретной случайной величины, пользуясь формулой (1):

$$M(X) = 40 \cdot 0,1 + 42 \cdot 0,3 + 41 \cdot 0,2 + 44 \cdot 0,4 = 42,4;$$

б) вычислим дисперсию, воспользовавшись формулой (3). Для этого составим закон распределения квадрата случайной величины:

$X^2$	$40^2$	$42^2$	$41^2$	$44^2$
$P$	0,1	0,3	0,2	0,4

$$\text{Тогда } M(X^2) = 40^2 \cdot 0,1 + 42^2 \cdot 0,3 + 41^2 \cdot 0,2 + 44^2 \cdot 0,4 = 1799,8;$$

$$D(X) = 1799,8 - 42,4^2 = 2,04.$$

в) среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (4):

$$\sigma(X) = \sqrt{2,04} \approx 1,43.$$

**Задача 5.**

*Теоретические сведения.*

*Функцией распределения* (интегральной функцией распределения) называют функцию  $F(x)$ , определяющую для каждого значения  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее  $x$ , то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства интегральной функции распределения:

- 1) значения функции распределения принадлежат отрезку  $[0;1]$ ;
- 2) функция распределения есть неубывающая функция;
- 3) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a;b)$ , равна приращению функции распределения на этом интервале:  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ ;
- 4) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет одно определенное значение, например,  $x_1$ , равна нулю;
- 5) если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a;b)$ , то

$$F(x) = 0 \quad \forall x \leq a; \quad F(x) = 1 \quad \forall x \geq b.$$

*Дифференциальной функцией распределения*  $f(x)$  непрерывной случайной величины называю первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (5)$$

Если задана дифференциальная функция распределения  $f(x)$ , вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a;b)$ , равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

*Математическое ожидание* непрерывной случайной величины  $X$ , возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx.$$

Если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a; b)$ , то

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \quad (6)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины  $X$ , возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a; b)$ , то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \quad (7)$$

### **Пример выполнения задания.**

Непрерывная случайная величина  $X$  задана интегральной функцией

$$\text{распределения } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Требуется найти дифференциальную функцию распределения математическое ожидание и дисперсию.

### **Решение.**

а) По определению (5) найдем дифференциальную функцию распределения  $f(x)$  как производную от заданной интегральной функции распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

б) математическое ожидание вычислим по формуле (6). Так как функция  $f(x)$  при  $x < 0$  и  $x > 1$  равна нулю, то имеем

$$M(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

в) вычислим дисперсию по формуле (7)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx = \\ &= 3 \cdot \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16} \right]_0^1 = 3 \cdot \left[ \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \right] = \frac{3}{80}. \end{aligned}$$

### **Задача 6.**

*Теоретические сведения.*

Если задана дифференциальная функция распределения  $f(x)$ , вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a;b)$ , равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (8)$$

Вероятность выполнения строгих неравенств  $a < X < b$  определяется той же формулой.

*Нормальным* называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $X$ , дифференциальная функция распределения которого имеет вид

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ , где  $a$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение  $X$ .

Если случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону, то вероятность того, что  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(\alpha;\beta)$ , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \quad (9)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Лапласа (приведена в приложении 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа  $\delta$ , определяется по формуле

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (10)$$

**Пример выполнения задания.**

Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм. Определить вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем 1,5 мм.

*Решение.*

а) По условию задачи  $a = 40, \alpha = 34, \beta = 43, \sigma = 3$ . Тогда по формуле (9)

$$\begin{aligned} P(34 < X < 43) &= \Phi\left(\frac{43-40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34-40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) \approx 0,3413 + 0,4772 \approx 0,8185. \end{aligned}$$

б) вероятность того, что  $a - \delta < X < a + \delta$ , где  $a = 40, \delta = 1,5$ , вычислим по формуле (10):

$$P(|X - 40| < 1,5) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0,5) \approx 2 \cdot 0,1915 \approx 0,383.$$

Ковариация и коэффициент корреляции двумерной случайной величины

Ковариацией (или корреляционным моментом)  $K_{xy}$  случайных величин  $X$  и  $Y$  называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$K_{xy} = M((X - MX)(Y - MY)) = M(XY) - MXMY.$$

Коэффициентом корреляции  $r_{xy}$  случайных величин  $X$  и  $Y$  называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

**Пример 1.** В урне лежат 100 шаров, из них 25 белых. Из урны последовательно вынимают два шара. Пусть  $X_i$  – число белых шаров, появившихся при  $i$ -м вынимании ( $i=1,2$ ).

Найти коэффициент корреляции между величинами  $X_1$  и  $X_2$ .

Решение. Составим таблицу распределения совместного появления данных случайных величин. Ясно, что  $X_i$  могут принимать значения или 0, или 1 (появился белый шар при одном вынимании или нет). Для простоты обозначим:

$$X_1 = X, X_2 = Y.$$

Найдем все вероятности.

$X=0, Y=0$  - при первом вынимании вынут черный шар с вероятностью  $75/100$ , при втором – также черный шар, с вероятностью  $74/99$ , итого получаем

$$P(X=0, Y=0) = 75/100 \times 74/99 = 37/66.$$

$X=0, Y=1$  - при первом вынимании вынут черный шар с вероятностью  $75/100$ , при втором – белый шар, с вероятностью  $25/99$ , итого получаем

$$P(X=0, Y=1) = 75/100 \times 25/99 = 25/132.$$

$X=1, Y=1$  - при первом вынимании вынут белый шар с вероятностью  $25/100$ , при втором – белый шар, с вероятностью  $24/99$ , итого получаем

$$P(X=1, Y=1) = 25/100 \times 24/99 = 2/33.$$

$X=1, Y=0$  - при первом вынимании вынут белый шар с вероятностью  $25/100$ , при втором – черный шар, с вероятностью  $75/99$ , итого получаем

$$P(X=1, Y=0) = 25/100 \times 75/99 = 25/132.$$

Получили таблицу:

$X \setminus Y$	0	1
0	37/66	25/132

1	25/132	2/33
---	--------	------

Найдем индивидуальные законы распределения  $X$  и  $Y$ , складывая вероятности по столбцам и строкам, получаем:

$x_i$	0	1
$p_i$	0,75	0,25

$y_i$	0	1
$p_i$	0,75	0,25

Найдем математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$$M(X) = \sum x_i \times p_i = 0,25$$

$$D(X) = \sum x_i^2 \times p_i - (M(X))^2 = 0,25 - 0,25^2 = 0,1875.$$

$$M(Y) = \sum y_i \times p_i = 0,25$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 \times p_i - (M(Y))^2 = 0,25 - 0,25^2 = 0,1875$$

Вычислим

$$M(XY) = \sum x_i \times y_j \times p_{ij} = 2/33$$

Тогда коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Найдем ковариацию

$$K_{xy} = M((X - MX)(Y - MY)) = M(XY) - MXMY$$

$$K_{xy} = \frac{2}{33} - 0,25 \cdot 0,25 = -0,0019$$



$$r_{xy} = \frac{-0,0019}{\sqrt{0,1875^2}} = -0,01$$

Коэффициент корреляции между величинами  $X_1$  и  $X_2$  равен -0,01.

### Статистические оценки параметров распределения

Составить статистическое распределение выборки и вычислить числовые характеристики:

1. выборочное среднее;
2. выборочную дисперсию;
3. подправленную дисперсию;
4. выборочное среднее квадратичное отклонение;
5. подправленное среднее квадратичное отклонение;
6. размах выборки;
7. медиану;
8. моде;
9. построить полигон частот.

Выборка задана следующими значениями

4, 9, 7, 4, 7, 5, 6, 3, 4, 5, 7, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4, 3, 4.

Решение: Записываем выборку в виде вариационного ряда (в порядке возрастания):

2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 9.

Запишем статистическое распределение выборки в виде дискретного статистического распределения частот:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9
$n_i$	1	3	5	3	2	4	1	1

Далее вычислим числовые характеристики статистического распределения выборки.

1. Выборочное среднее вычисляем по формуле

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{20} = \\ &= \frac{103}{20} = 5,15.\end{aligned}$$

2. Выборочную дисперсию вычисляем по формуле

$$\begin{aligned}D_B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 &= \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_k x_k^2}{n} = \\ &= \frac{4 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 36 \cdot 2 +}{20} = \\ &+ \frac{49 \cdot 4 + 64 \cdot 1 + 81 \cdot 1}{20} = \frac{599}{20} = 29,95.\end{aligned}$$

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 = 29,95 - (5,15)^2 = 3,43.$$

3. Подправленную дисперсию находим по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{20}{19} \cdot 3,43 = 3,61.$$

4. Выборочное среднее квадратичное отклонение вычисляем по формуле

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{3,43} = 1,85.$$

5. Подправленное среднее квадратичное отклонение находим по формуле

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,61} = 1,9.$$

6. Размах выборки вычисляем как разность между наибольшим и наименьшим значениями вариантов, то есть:

$$R = x_k - x_1 = 9 - 2 = 7.$$

7. Медиана – то срединное значение выборки.

Медиану вычисляют по формулам:

$$Me(X) = \frac{1}{2} \left( x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \text{ если число } n - \text{ четное;}$$

$Me(X) = x_{\frac{n+1}{2}}$  если число  $n$  - нечетное.

Здесь берем индексы в  $x[i]$  согласно нумерации вариант в вариационном ряду.

В нашем случае  $n=20$ , поэтому

$$Me(X) = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) = \frac{1}{2}(5 + 5) = 5.$$

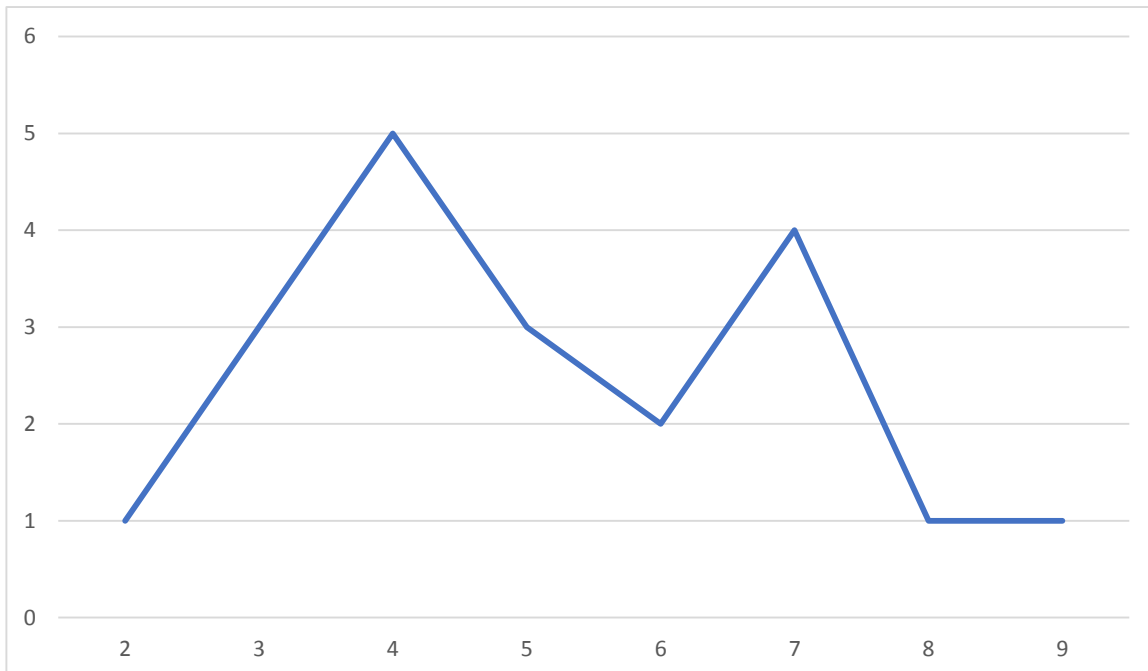
8. Мода - это варианта которая в вариационном ряду случается чаще всего, то есть

$$Mo(X) = 4.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{20} = \\ &= \frac{103}{20} = 5,15. \end{aligned}$$

9. Построим полигон частот. Полигоном частот называется ломаная линия, отрезки

которой соединяют точки с координатами  $(x_1; n_1)$ ,  $(x_2; n_2)$ , ...,  $(x_k; n_k)$ .



## Основная литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91080> — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. текстовые данные. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4549> — Загл. с экрана.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010 .— 416 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009 .— 544 с.
6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»

## Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :[https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000\\_8498](https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000_8498), по паролю