МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительной механики и математики»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021 г., протокол № 5
Заведующий кафедрой

________________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
«Основы системного анализа»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета

по специальности
38.05.02 Таможенное дело

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 380502-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Дудина Ю.В., доцент, к.т.н.___________________________ ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

1. Системы с отказами

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

A – абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени,

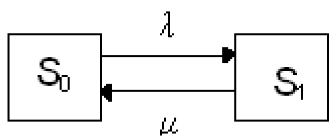
Q – относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк}$ – вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\bar{k}$ – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

1. 1. Одноканальная система с отказами

Рассмотрим задачу. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ. Система S имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1– канал занят. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности. Размеченный граф состояний представлен на след рис.



В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}, \qquad (8)$$

т.е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировочное условие $p_0+p_1= 1$, найдем из (8) предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \qquad (9)$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0 (когда канал свободен) и S_1 (когда канал занят), т.е.

определяют соответственно пропускную способность Q системы и вероятность отказа $P_{отк}$.

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \qquad (10)$$

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \qquad (11)$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока заявок λ:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \qquad (12)$$

Пример. Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $t_{об}$ = 2 мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Решение. Имеем λ=90 (1/ч), $t_{об}$ =2 мин. Интенсивность потока обслуживаний μ=1/$t_{об}$=1/2=0,5(1/мин)=30(1/ч). По (10) относительная пропускная способность СМО Q=30/(90+30)=0,25, т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа в обслуживании составит $P_{отк}$=0,75 (см (11)). Абсолютная пропускная способность СМО по (12) A=90·0,25=22,5, т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

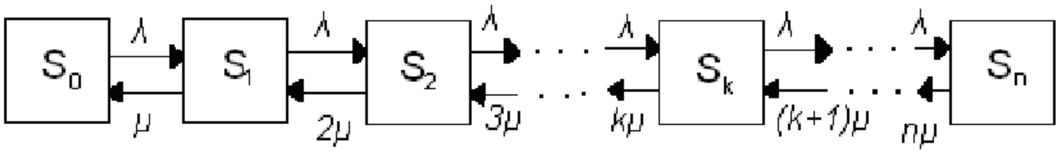
1.2. Многоканальная система с отказами

Рассмотрим классическую задачу Эрланга. Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): S_1, S_2, ..., S_k , ..., S_n, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов.

Для многоканальной (n каналов, на которые поступает поток заявок интенсивности λ, поток обслуживания имеет интенсивность μ) СМО также можно найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности. Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): S_1, S_2, ..., S_k , ..., S_n. Здесь S_k – состояние системы, когда в ней находится k, т.е. занято k каналов.

Граф состояний СМО, соответствующий процессу гибели и размножения изображен на следующем рисунке:



Поток заявок переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое. Интенсивность потока обслуживания, наоборот переводит систему из любого правого состояния в соседнее левое.

Для этой задачи в стационарном режиме Эрлангом были найдены следующие зависимости:

1. Вероятность того, что обслуживания заняты k каналов:

$$p_k = \frac{\rho^k \cdot \frac{1}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \rho^k}, k = 0,1,\dots,n \qquad (13)$$

где $\rho^k = \frac{\lambda}{\mu}$, λ – плотность потока заявок;

n – число каналов (приборов),

$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обс}}$ – параметр обслуживания одним прибором (каналом).

2. Частными случаями (1) будут:

а) вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}; \tag{14}$$

б) вероятность того, что все приборы заняты. Это одновременно и вероятность отказа в обслуживании вновь поступившего требования в систему:

$$P_{отк} = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = p_0 \cdot \frac{\rho^k}{n!}. \tag{15}$$

3. Среднее число приборов, занятых обслуживанием $N_з = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0$.

4. Коэффициенты загрузки приборов $K_з = \frac{N_з}{n}$.

5. Среднее число каналов, свободных от обслуживания $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k \cdot (n-k)}{k!} \cdot p_0$.

6. Коэффициент простоя каналов: $K_n = \frac{N_0}{n}$. Очевидно $N_з + N_0 = n$.

Данные формулы Эрланга справедливы для произвольного абсолютно непрерывного закона распределения обслуживания (при условии конечности его математического ожидания).

Пример. Оценить работу АТС, которая имеет n =5 линий связи. Предполагаем, что поток требований простейший с интенсивностью λ = 2 вызова/ед.времени. Продолжительность разговоров распределена экспоненциально, причем $\bar{t}_{обс}$= 1 ед. времени.

Решение. Определим коэффициент загрузки $\rho = \lambda/\mu = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 2$. Вероятность того, что все линии связи свободны,

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!}} = 0{,}138 .$$

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = p_0 \cdot \frac{\rho^k}{n!} = 0{,}138 \cdot \frac{2^5}{5!} = 0{,}037 .$$

Среднее число занятых линий связи:

$$N_3 = \sum_{k=0}^{5} k p_k = \left(1 \cdot \frac{2^1}{1!} + 2 \cdot \frac{2^2}{2!} + 3 \cdot \frac{2^3}{3!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 5 \cdot \frac{2^5}{5!}\right) \cdot p_0 . = 1{,}93 \text{ линий.}$$

Коэффициент загрузки линий связи:

$$K_з = \frac{N_з}{n} = \frac{1{,}93}{5} = 0{,}386 \approx 0{,}39 .$$

Среднее число свободных линий связи:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cdot p_k = \sum_{k=0}^{4} \frac{\rho^k \cdot (5-k)}{k!} \cdot p_0 = 3{,}05$$

Коэффициент простоя равен:

$$K_n = \frac{N_0}{n} = \frac{3{,}05}{5} = 0{,}61 .$$

2. Системы массового обслуживания с ожиданием

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме показателей абсолютной A и относительной Q пропускной способности, вероятности отказа $P_{отк}$, среднего числа занятых каналов $\vec{k}$ (для многоканальной системы) будем рассматривать также следующие: $L_{сист}$ – среднее число заявок в системе; $T_{сист}$ – среднее время пребывания заявки в системе; $L_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длина очереди); $T_{оч}$ – среднее время пребывания заявки в очереди; $P_{зан}$ – вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

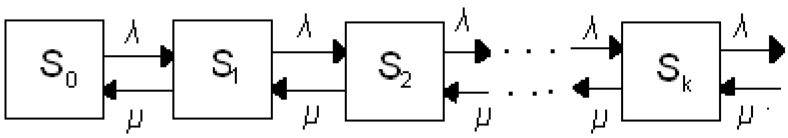
2.1. Одноканальная система с неограниченной очередью

На практике часто встречаются одноканальные СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат).

Пусть имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживания – интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находится в одном из состояний S_1, S_2, ..., S_k по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят (обслуживает заявку), очереди нет, S_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди,…, S_k – канал занят, (k-1) заявок стоят в очереди и т.д.

Граф состояний представлен на следующем рисунке:



Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний, в котором интенсивность потока заявок равна λ, а интенсивность потока обслуживания μ. Пусть ρ есть отношение среднего числа приходящих заявок к среднему числу обслуживаемых заявок (в единицу времени). Доказано, что если $\rho<1$, то предельные вероятности существуют; если же $\rho\geq1$, то очередь растет до бесконечности.

Для вычисления предельных вероятностей справедливы следующие формулы: $p_0 = 1-\rho$; $p_1 = \rho\cdot(1-\rho)$; $p_2 = \rho^2\cdot(1-\rho)$;…; $p_k = \rho^k\cdot(1-\rho)$, среди которых p_0 будет наибольшей. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $\rho<1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе. Выразим другие характеристики:

- среднее число заявок в системе: $L_{сист} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k$. При $\rho<1$ $L_{сист} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$;
- среднее число заявок в очереди: $L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$;

- среднее число заявок, находящихся под обслуживанием: $L_{об} = P_{зан} = \rho$;

- среднее время пребывания заявки в системе (очереди): $T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)}$ ($T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$). Данные формулы называются ***формулами Литтла***.

Пример. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 судов в сутки. Среднее время разгрузки одного судна составляет двое суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Решение. Заметим, что $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$. Так как ρ=0,8 <1, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, как было показано ранее,

$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность того, что он занят

$P_{зан} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Найдем вероятности того, что у причала находятся 1, 2, 3 судна, т.е ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна (это и есть предельные вероятности):

$$p_1 = 0{,}8 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}16;\; p_2 = 0{,}8^2 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}128;\; p_3 = 0{,}8^3 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}1024.$$

Вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем два судна равна:

$p = p_1 + p_2 + p_3$ = 0,16+0,128+0,1024= 0,3904.

Среднее число судов, ожидающих разгрузки (среднее число заявок в очереди)

$$L_{оч} = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2.$$

Среднее время ожидания разгрузки (среднее время пребывания заявки в очереди)

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{1}{0{,}8} \cdot 3{,}2 = 4 \text{ (суток).}$$

Среднее число судов, находящихся у причала: $L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4$ (суток), а среднее время пребывания судна у причала:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{1}{0{,}8} \cdot 4 = 5 \text{ суток.}$$

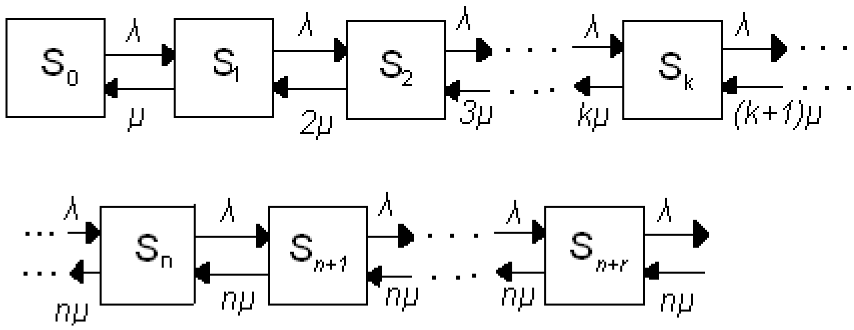
Очевидно, что эффективность выгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\bar{t}_{обс}$, либо увеличение числа причалов *n*.

2.2. Многоканальные СМО с неограниченной очередью

Пусть имеется *n*-канальная СМО с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживания – интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

Система может находится в одном из состояний S_1, S_2, ..., S_k , ..., S_n, ..., нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 – в системе нет заявок (все каналы свободны), S_1 – канал занят, S_2 – заняты два канала, остальные свободны,…, S_k – занято *k* каналов, остальные свободны,…, S_n – заняты все *n* каналов (очереди нет); S_{n+r} – заняты все *n* каналов, *r* заявок в очереди.

Граф этой системы изображен на рисунке:



Интенсивность потока обслуживания по мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до *n* увеличивается от величины μ до величины $n\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. Когда число заявок в системе больше *n*, интенсивность потока обслуживания сохраняется раной $n\mu$.

В том случае, когда $\frac{\rho}{n} \geq 1$, очередь неограниченно растет. Из соотношения $\frac{\rho}{n} < 1$ следует? что предельные вероятности существуют.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0, \ldots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, \ldots, \quad p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \ldots, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0$$

Для *n*-канальной СМО с неограниченной очередью можно найти:

- вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho) \cdot n!} \cdot p_0;$$

- среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;$$

- среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \frac{\rho}{n})^2};$$

- среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho;$$

- относительная величина затрат, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди заявок может быть задана например следующим образом:

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} \cdot n + 3T_{оч}$$

- среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе вычисляются также по формулам Литтла.

Для систем с неограниченной очередью при $\rho<1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, т.е. вероятность отказа $P_{отк}$=0, относительная пропускная способность Q=1, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, те. $A=\lambda$.

Пример. В супермаркете к расчетному центру поступает поток покупателей с интенсивностью λ=81 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя равна $\bar{t}_{обс}$=2 мин. Определить минимальное количество контролеров-кассиров n_{min} при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$.

Решение. По условию λ=81 (1/ч)= 81/60=1,35 (1/мин). Тогда

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7 .$$

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии, что $\rho/n<1$, т.е. при $n>\rho$=2,7. Таким образом, минимальное число кассиров n_{min}=3.

Найдем характеристики СМО при n=3. Вероятность того, что в центре расчета будет очередь:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho)\cdot n!} \cdot p_0 = \frac{2{,}7^4}{(3-2{,}7)\cdot 3!} \cdot 0{,}025 = 0{,}735 .$$

(Вычисление предельных вероятностей опускаем, как заранее вычисленные, p_0 = 0,025); среднее число покупателей, находящихся в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! (1-\frac{\rho}{n})^2} = \frac{2{,}7^4 \cdot 0{,}025}{3 \cdot 3! (1-\frac{2{,}7}{3})^2} = 7{,}35 ;$$

среднее время ожидания в очереди:

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{1}{1{,}35} \cdot 7{,}35 = 5{,}44 \text{ мин.}$$

Среднее число покупателей в узле расчета:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho = 7{,}35 + 2{,}7 = 10{,}05 ,$$

а среднее время нахождения покупателей в центре расчета:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{1}{1{,}35} \cdot 10{,}05 = 7{,}44 \text{ мин.}$$

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 2{,}7\,;$$

коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров:

$$\bar{k}_з = \frac{\rho}{n} = \frac{2{,}7}{3} = 0{,}9\,.$$

Абсолютная пропускная способность узла расчета A =1,35 (1/мин), или 81 (1/час), т.е. 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

2.3. СМО с ограниченной очередью

Эти системы отличаются от рассмотренных лишь тем, что число заявок в очереди ограниченно, т.е. не может превосходить некоторого числа m. Если в очередь поступает m +1 заявка, она покидает систему необслуженной, т.е. получает отказ. Предельные вероятности и показатели эффективности рассмотрим в таблице.

Показатели обслуживания	**Одноканальная СМО с ограниченной очередью**	**Многоканальная СМО с ограниченной очередью**
Предельные вероятности	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}$, $p_1 = \rho \cdot p_0$, $p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \ldots, p_k = \rho^k \cdot p_0$	$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^m}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1}$, $p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots,$ $p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$,

		$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0$, …, $p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0$; $r = 1,\dots,m$
Вероятность отказа	$P_{отк} = p_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot p_0$	$P_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - \rho^{m+1} \cdot p_0)$	$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0\right)$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \rho^{m+1} \cdot p_0$	$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0$
Среднее число заявок в очереди	$L_{оч} = \rho^2 \cdot \frac{\left[1 - \rho^m \cdot (m + 1 - m\rho)\right]}{(1 - p^{m+2})(1 - \rho)}$	$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0 \cdot \left[1 - \left(m + 1 - m \cdot \frac{\rho}{n}\right) \cdot \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$
Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов0	$L_{об} = 1 - p_0$	$\bar{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot p_0\right)$
Среднее число заявок в системе	$L_{сист} = L_{оч} + L_{об}$	$L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}$
Среднее время пребывания	$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1 - \rho)}$	$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1 - \rho)}$

заявки в системе		
Среднее время пребывания заявки в очереди	$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$	$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}$

Пример. В условиях задачи о разгрузке судов определим показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очередь на разгрузку стоят более 3-х судов.

Решение. По условию m =3. Используем формулы, приведенные выше в таблице. Вероятность того, что причал свободен:

$$p_0 = \frac{1-0,8}{1-0,8^{3+1}} = 0,297 .$$

Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки:

$$P_{отк} = 0,8^{3+1} \cdot 0,297 = 0,122 .$$

Относительная пропускная способность причала:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,122 = 0,878 .$$

Абсолютная пропускная способность причала:

$$A = \lambda \cdot Q = 0,4 \cdot 0,878 = 0,351 .$$

Среднее число судов, ожидающих разгрузки:

$$L_{оч} = 0,8^2 \cdot \frac{\left[1-0,8^3 \cdot (3+1-3 \cdot 0,8)\right]}{(1-0,8^{3+2})(1-0,8)} = 0,861 .$$

Среднее время ожидания разгрузки:

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{оч} = \frac{1}{0,8} \cdot 0,861 = 1,076 .$$

Среднее число судов, находящихся у причала:

$$L_{сист} = L_{оч} + L_{об} = 0,861 + (1-0,297) = 1,564 .$$

Среднее время пребывания судна у причала:

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{сист} = \frac{1}{0,8} \cdot 1,564 = 1,955 \text{ суток.}$$

2.4. СМО с ограниченным временем ожидания

На практике часто встречаются системы с ограниченным временем ожидания, например, городские транспортные системы, в которых пассажиры ожидают транспортного обслуживания данным транспортным средством ограниченное время, а далее могут предпочесть другой вид транспорта, технологические системы, в которых длительное ожидание обработки сырья приводит к потере качества продукции в системах оперативного управления, когда важна срочность передачи информации и т.д.

В простейших математических моделях таких систем предполагается, что заявка может находится в очереди случайное время, распределенное по показательному закону с некоторым параметром γ, т.е. можно считать, что каждая заявка, стоящая в очереди на обслуживание, может покинуть систему с интенсивностью γ.

Кроме рассмотренных СМО, существуют еще и замкнутые системы, у которых входящий поток существенно зависит от состояний самой СМО. Для замкнутых СМО характерно ограниченное число источников заявок, причем каждый источник блокируется на время обслуживания его заявки (т.е. он не выдает новых заявок). Примером может служить ситуация городского парка автобуса, куда поступают на ремонт неисправные транспортные средства с мест эксплуатации. Чем больше автобусов находятся в состоянии ремонта, тем меньше автобусов эксплуатируются и тем меньше их интенсивность поступления для ремонта. В таких системах при конечном числе состояний СМО предельные вероятности будут существовать при любых значениях интенсивностей потоков заявок и обслуживаний.

3. Основы статистического моделирования

Рассмотренные ранее методы анализа СМО корректны в том случае, когда все потоки событий, переводящие их из состояния в состояние, являются простейшими. При нарушении этих требований аналитических методов для таких систем не существует. В этой ситуации используют универсальный метод статистического моделирования или, метод Монте-Карло.

Основы этого метода состоит в том, что вместо аналитического описания обслуживающей системы с помощью датчика случайных чисел производится имитация случайного процесса.

В результате этого получается каждый раз новая, отличная от предыдущих реализация случайного процесса. Эти реализации можно использовать как статистические данные, которые могут быть обработаны методами математической статистики.

После того, как такая обработка произведена, могут быть получены приближенно любые характеристики обслуживания.

4. Практическое применение теории массового обслуживания

Практическое применение теории массового обслуживания предполагает:

1. выбор подходящей математической модели, адекватно представляющей реальную систему (необходимо исследовать ограничения, в рамках которых применимы результаты теории массового обслуживания, иначе упрощающие предположения могут быть грубы, а процесс моделирования некорректным);

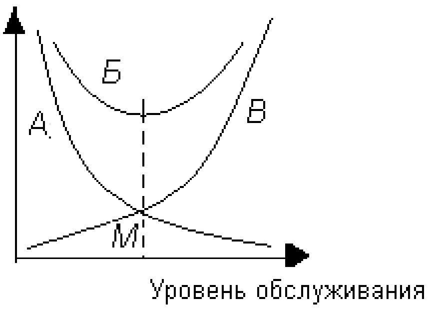
2. внедрение поученных результатов на конкретном объекте (для конструирования или усовершенствования обслуживающей системы, Для чего может понадобиться оптимизационная модель).

В экономических системах массового обслуживания часто превалирует стоимостный характер. Эти модели массового обслуживания направлены на определение такого уровня функционирования СМО (который задается либо скоростью обслуживания, либо числом обслуживающих приборов), при котором достигается «компромисс» между двумя показателями:

1. прибылью, получаемой за счет оказанных услуг (связан с степенью функциональной активности системы);

2. потерями прибыли, обусловленной задержками в предоставлении услуг (связан с пребыванием СМО в состоянии простоя или неспособностью системы удовлетворить все потребности в обслуживании).

По мере того, как затраты, связанные с обслуживанием, увеличением функциональной мощности СМО, возрастают из-за повышения уровня обслуживания, выраженные в экономических терминах потери, связанные с ожиданием (сокращение пребывания клиентов в очереди), должны уменьшаться.



На графике функций уровня обслуживания изображены следующие кривые:

А – задает стоимость ожидания;

В – стоимость обеспечения функционирования обслуживающей системы;

Б – суммарный стоимостный показатель;

М – оптимальный уровень обслуживания.

Из рассмотренных двух стоимостных показателей труднее всего оценить «цену» ожидания, т.к. в качестве клиента могут выступать не только, например, поломанные станки, но и люди в очереди продовольственного магазина.