МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 21 » января 2022 г., протокол №5

Заведующий кафедрой

_____В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
" Математический анализ "
основной профессиональной образовательной программы

высшего образования – программы специалитета

по специальности
10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

со специализацией
Разработка автоматизированных систем в защищённом исполнении

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 100503-01-22

Тула 2022 год

Разработчик(и) методических указаний

Боницкая О.В., доцент, к.ф.м.н. _____

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

ПРЕДЕЛЫ

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

<u>Определение 1.1.</u> Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

<u>Определение 1.2.</u> Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $(f(x) \to A)$ при стремлении к a $(x \to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

   а) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

   б) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

   в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x\to\infty$ или n при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

а) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{3+0+0}{5+0+0} = \frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4$, делится на x^4.

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+\frac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m=2,$ делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{12\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}} = \frac{12\cdot 3}{1+1} = 18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены $x,$ $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0,$ то предел рациональной дроби P/Q при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

а) $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 12}=\frac{1}{108}.$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x}=1.$$

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[ctg^2 3x-ctg^2 5x\right]\cdot\dfrac{tg^2 4x\cdot\arcsin^2 x}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}-\frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}16x^2\cdot\left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}-\frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos^2 3x\cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}-\frac{\cos^2 5x\cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2\cdot 1^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}\cos 3x-\frac{16}{25}\cos^2 5x\right]=\frac{16}{9}\cdot 1-\frac{16}{25}\cdot 1=\frac{256}{225}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 2x\cdot\sqrt{1-\cos 4x}}{x^2\cdot\arcsin 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2\sin^2 2x}}{x^2\cdot\left(\frac{\arcsin 3x}{3x}\right)\cdot 3x}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x\to a$ и $a\neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x-a=y$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(x-3=y,\ y\to 0\ \text{ при }\ x\to 3)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=-\frac{\pi}{6}\cdot 1=-\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A=\lim\limits_{x\to a}f(x),\ \ B=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x),$

   то $c=A^B\ \ (A>0);$

2) если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty,$ то вопрос о нахождении

   предела c решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty,$ то следует воспользоваться

   «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}=e,$ где

   $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e=2{,}718\ldots$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}}=0,\ \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}=\frac{3}{2},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3}=4^3=64,\ \text{ т.к. }\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4=4,$$

$$\lim_{x\to 0}(x+3)=3.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{2x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}} =$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

<u>Пример 2.1.</u> При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx\left(\frac{1}{cosx}-1\right)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x^n\,cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\,sinx\cdot sin^2\frac{x}{2}}{x^n\,cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{4\,sin^3\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}{x^n\,cosx} = 4\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{cos\frac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot 1 = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot 2^n} = \frac{4}{2^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3,$ следовательно, функция $tgx - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \to 0.$

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно x при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \to 0.$

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$ то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad tgx \sim x, \quad \arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\cdot\ln a \ (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

а)
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7arctg^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3\arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x\cdot\ln 3 - 3\arcsin^2 3x\cdot\ln 5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\ln 3\cdot x^2 - 3\ln 5\cdot(3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\,arcsin\,2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{ln(3-5x)-ln(3+7x)}{2\,sin\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left[3\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right]-ln\left[3\left(1+\frac{7}{3}x\right)\right]}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln\,3+ln\left(1-\frac{5}{3}x\right)-ln\,3-ln\left(1+\frac{7}{3}x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}x}{2x} = -2.$$

<u>Определение 2.4.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

<u>Пример 2.4.</u> Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n=4$.

<u>Определение 2.5.</u>

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$$

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x<a$ и $x\to a$, то условно пишут $x\to a-0$, аналогично, если $x>a$ $x\to a$, то $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

Определение 3.2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

1) она определена в этой точке;

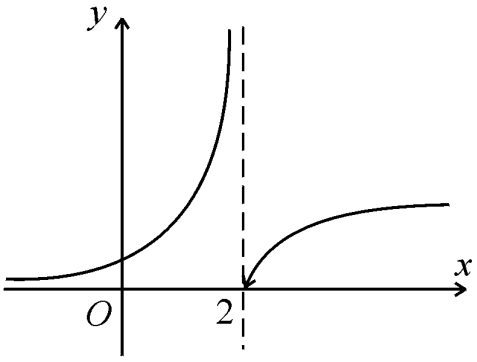
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a).$

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

<u>Пример 3.1.</u>

а) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2,$ т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3,$ т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$\lim\limits_{x\to -3+0} \dfrac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1,$ т.к. при $x \to -3 + 0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \le 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

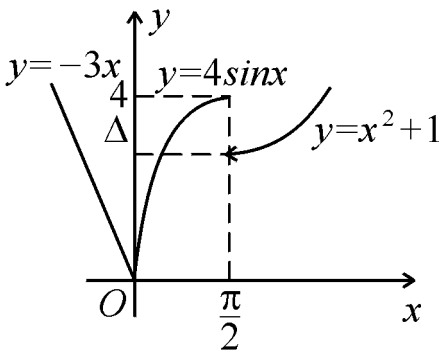
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-3x) = 0; \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\Big|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (4 \sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \left(x^2 + 1\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3{,}467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва.

Величина скачка

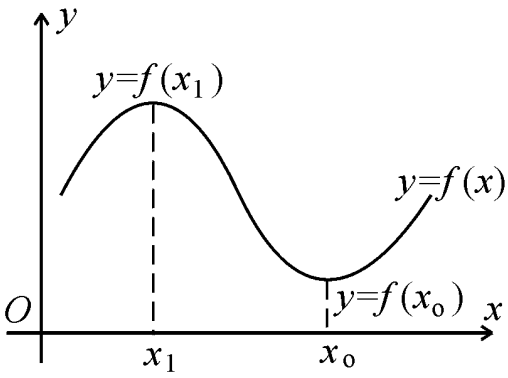
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при $a < x < b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_o, что для всякой точки $x \neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка x_o называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o) = 0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o) = 0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

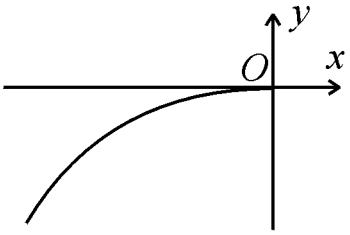
Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ критической точки x_o, что $f'(x) > 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) < 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка

максимума функции $f(x)$; если же $f'(x)<0$ при $x_o-\delta<x<x_o$ и $f'(x)>0$ при $x_o<x<x_o+\delta$, то x_o – точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o-\delta<x<x_o+\delta$, то точка x_o не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;\,b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a;\,b]$.

<u>Пример 1.1.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y=x\cdot\sqrt{-5x}.$$



Область существования: $-5x\ge 0 \;\Rightarrow\; x\le 0.$

Находим критические точки:

$$y'=\sqrt{-5x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{-5x}}\cdot(-5)=\sqrt{-5x}-\frac{5x}{2\sqrt{-5x}}=$$

$$=\frac{-10x-5x}{2\sqrt{-5x}}=\frac{-15x}{2\sqrt{-5x}}=\frac{3\cdot(-5x)}{2\sqrt{-5x}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{-5x}\ge 0.$$

При $x\le 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x=0$: $y(0)=0.$

<u>Пример 1.2.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y=\sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x\in(-\infty;\,+\infty)$.

Находим критические точки:

$$y'=\frac{(2-x)^2-2(2-x)(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}}=\frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}}=\frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

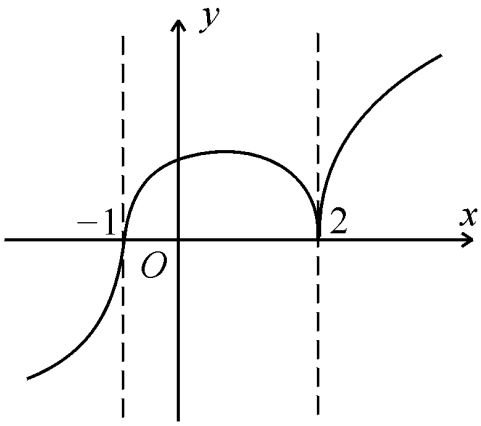
$y'=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,$

y' не существует $\Rightarrow x_2=-1;\; x_3=2.$ Получили три критические точки.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ \ 0)$	0	$(0;\ \ 2)$	2	$(2;\ \ +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	↗		↗	max	↘	min	↗

$$\lim_{x\to 2+0} y'(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x\to 1-0} y'(x) = \lim_{x\to 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где k – угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox.

$y(-1) = 0;\quad y(0) = \sqrt[3]{4};\quad y(2) = 0.$

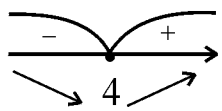
<u>Пример 1.3.</u> Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть a – сторона квадрата основания, h – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \quad\Rightarrow\quad a^2 = \frac{256}{h},\quad a = \frac{16}{\sqrt{h}},\quad h > 0;$$

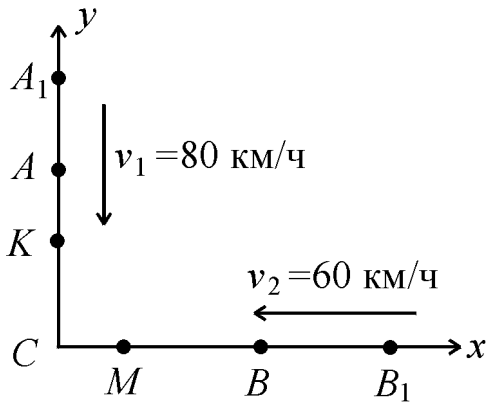
$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4\cdot\frac{16}{\sqrt{h}}\cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$



$F'(h) = 0 \quad\Rightarrow\quad h^{3/2} = 8;\qquad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C, причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?



Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками K и M.

$AK = 80t; \quad BM = 60t;$

$CK = AC - AK = 800 - 80t;$

$CM = CB - BM = 700 - 60t;$

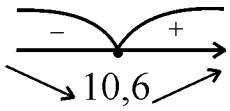
$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$

$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$ KM минимально, если минимальна величина

$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$

$F(t) = 2(800 - 80t)\cdot(-80) + 2(700 - 60t)\cdot(-60) =$

$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10{,}6;$



$t = 10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - k_1 x \right] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$ и $\lim\limits_{x\to-2}\left[f(x)-k_2x\right]=b_1$, то прямая $y=k_2x+b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y=f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

<u>Пример 2.1.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=2x+\dfrac{3\cos(x-1)}{x-1}$.

Область существования: $x\neq 1$.

Ищем вертикальные асимптоты.

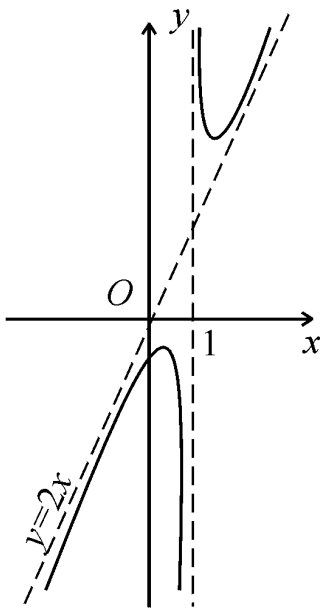
Функция имеет разрыв в точке $x=1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to1-0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{-0}=2-\infty=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{+0}=2+\infty=+\infty;$$

следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$.



$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=$$

$$=2+0=2;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cos(x-1)}{x-1}=0.$$

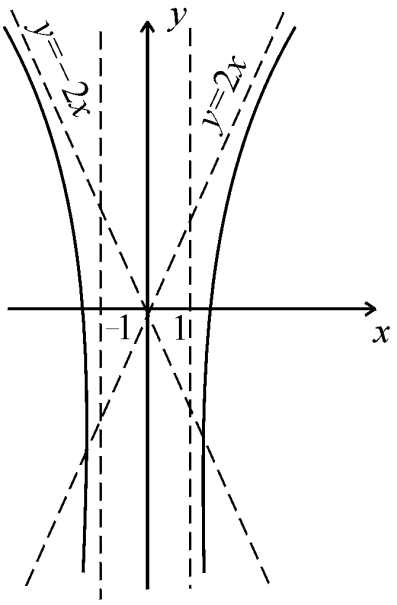
Следовательно, при $x\to\pm\infty$ существует асимптота $y=2x$.

<u>Пример 2.2.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.

Область существования: $x^2-1>0;\quad x^2>1;\quad x>1$ и $x<-1$.

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\quad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy.



$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to 1+0$.

Пусть $x\to 1+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

При $x\to+\infty$ получаем асимптоту $y=2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2-9=0$, т.е. в точках $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 2.3.</u> Найти асимптоты и построить график функции

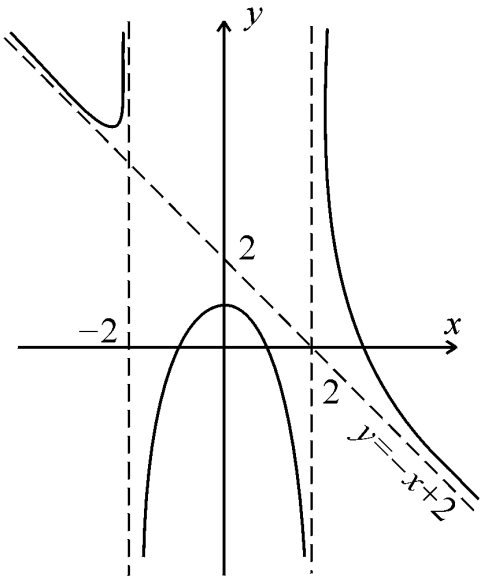
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x\neq 2$ и $x\neq -2$.

В точках $x_1=-2$ и $x_2=+2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{+0}=-\infty;$$



$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{-0}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b.$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)}=$$

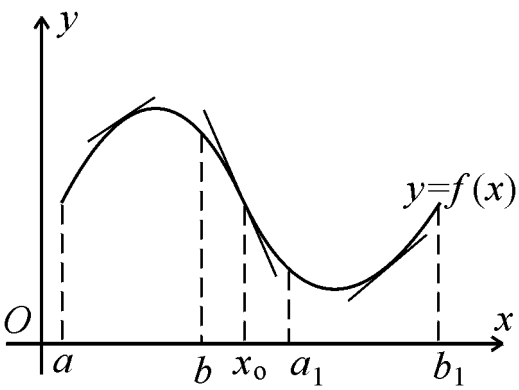
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+2}{4-x^2}=2.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-x+2.$

НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y=f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a<x<b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1<x<b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y=f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства



$f'(x)<0\qquad \left(f'(x)>0\right).$

Точка $\left(x_o,\ f(x_o)\right)$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для

абсциссы точки перегиба x_o графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода.* Критическая точка 2-го рода x_o является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где $\delta -$ некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

<u>Пример.</u> Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty; \quad +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

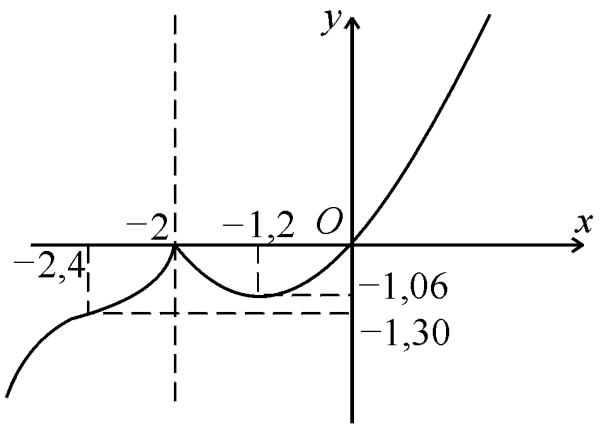
$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}\right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 6 = 0, \quad x = -1{,}2;$

y' не существует $\quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0, \quad x = -2.$

x	$(-\infty; \ -2)$	-2	$(-2; \ -1{,}2)$	$-1{,}2$	$(-1{,}2; \ +\infty)$
y'	+	не сущ.	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2 \cdot \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}}\right] =$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2{,}4)$	$-2{,}4$	$(-2{,}4;\ -2)$	-2	$(-2;\ +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30; \qquad y(0) = 0.$$

<u>Пример 4.2.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2$.

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \ \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to 2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0}\right)^2 = +\infty; \qquad \lim_{x \to 2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0}\right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow \ x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 4.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

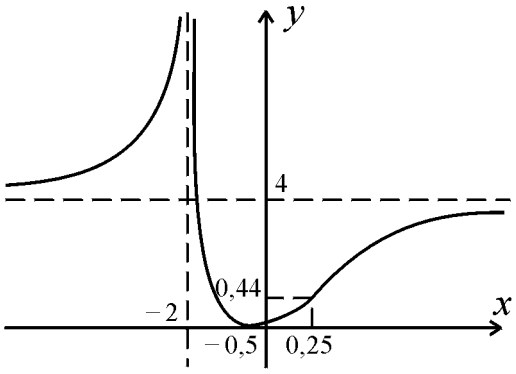
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y' = 0 \ \Rightarrow \ 2x + 1 = 0, \ \ x = -0{,}5;$

y' не существует $\ \Rightarrow \ x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;\ +\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$



$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = 0; \qquad x = 0{,}25;$

y'' не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ 0{,}25)$	$0{,}25$	$(0{,}25;\ \ +\infty)$
y''	+	+	0	–
y	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

<u>Пример 4.3.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

Область существования: $x - 3 \neq 0; \qquad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = -\infty, \\ &\lim_{x \to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = +\infty \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty,$$ следовательно, при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty$,

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x-4=0,\; x=4;$ $\quad y'$ не существует $\;\Rightarrow\; x = 3.$

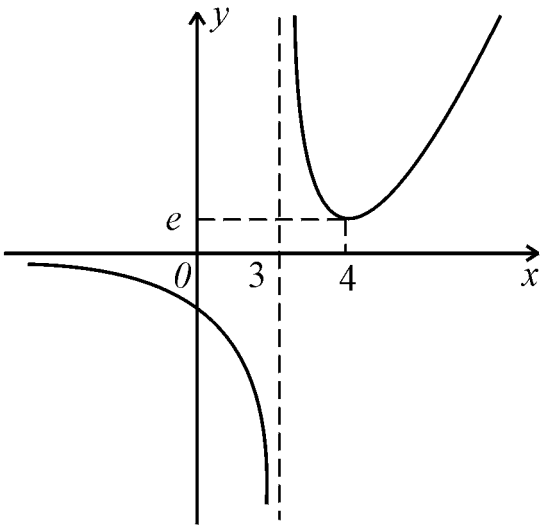
x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ 4)$	4	$(4;\ \ +\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2-(x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2}\cdot\frac{x^2-7x+12-x+5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2-8x+17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$



y'' не существует $\Rightarrow$ $x = 3.$

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -,02.$$

<u>Пример 4.4.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0,\ \ x < -6.$

Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -6 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -0 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ln\dfrac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -1.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1.$

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ \ +\infty)$
y'	$-$	$-$
y	$\searrow$	$\searrow$

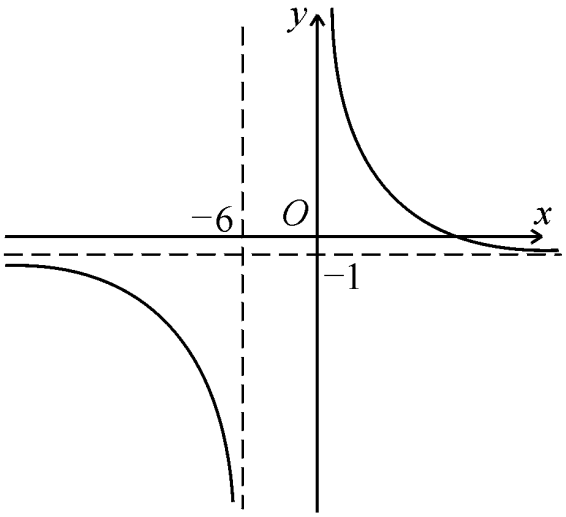
$$y' = \frac{x}{x+6}\cdot\frac{x - x - 6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y'' = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x+3=0; \quad x=-3$ – не входит в область существования.



x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

Точек перегиба нет.

$$ln\frac{x+6}{x} - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$

Определенный и неопределенный интегралы

Теоретические сведения.

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \;.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, $F(x)$ – результат интегрирования, C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.

2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A – постоянная.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \neq 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

   а) под знаком дифференциала можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) + A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x)=\frac{1}{A}d(Af(x))$; в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx=df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int udv=uv-\int vdu$, где $u=u(x), v=v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=a^x dx$.

б) $\int \sin ax\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=\sin axdx$.

в) $\int \cos ax\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=\cos axdx$,

где $P_n(x)$ – многочлен *n*-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x=\varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$; в) $\int(3x+4)e^{3x}dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int(\arcsin x)^2 d(\arcsin x)+(-0{,}5)\int(1-x^2)^{-0{,}5}d(1-x^2)=$$

$$=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-0{,}5\cdot\frac{(1-x^2)^{0{,}5}}{0{,}5}+C=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-\sqrt{1-x^2}+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3(\arcsin x)^2\cdot(\arcsin x)'-0{,}5(1-x^2)^{-0{,}5}(1-x^2)'+C'=$$

$$=\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+0=\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) в этом случае подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-17 & \underline{x^2-4x+3} \\
\underline{x^3-4x^2+3x} & x+4 \\
4x^2-3x-17 & \\
\underline{4x^2-16x-12} & \\
13x-29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\int\left(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}\right)dx=\int xdx+\int 4dx+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},\ 13x-29=A(x-3)+B(x-1).$$

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29=B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29=A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx=\int\frac{8}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=8\int\frac{dx}{x-1}+5\int\frac{dx}{x-3}=8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+C$$

и окончательно получаем

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C.$$

Проверим результаты дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C\right)'=\frac{2x}{2}+4+\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3}=\frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int\frac{A_1}{x-a}dx=A_1\ln|x-a|+C;\qquad \int\frac{A_k}{(x-a)^k}dx=\frac{A_k}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1}+C,\ (k=2,3,...);$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

в) этот интеграл находим методом интегрирования по частям.

Примем $u=3x+4$, $dv=e^{3x}dx$, тогда $du=3dx$, $v=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int(3x+4)e^{3x}dx=(3x+4)\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3dx=\frac{3x+4}{3}e^{3x}-\int e^{3x}dx=$$

$$=\frac{3x+4}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C=\frac{3x+4-1}{3}e^{3x}+C=e^{3x}(x+1)+C.$$

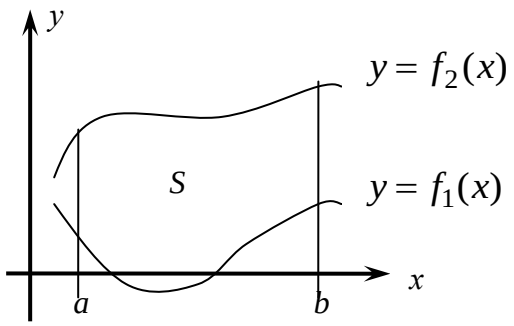
Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)'=3e^{3x}(x+1)+e^{3x}=e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Приложения определенных интегралов

Теоретические сведения.



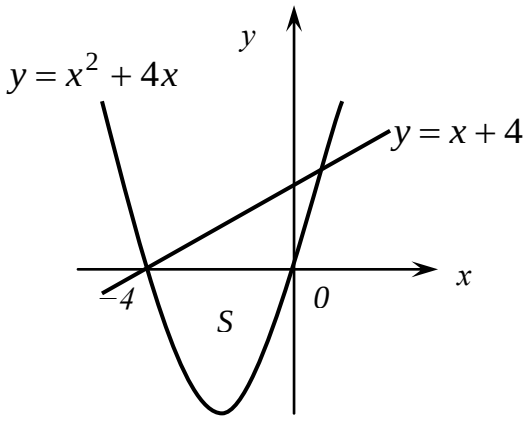
Если на плоскости *Oxy* задана фигура, ограниченная двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x$, $y=x+4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Oxy криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4,\ x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{)}.$$

Теоретические сведения.

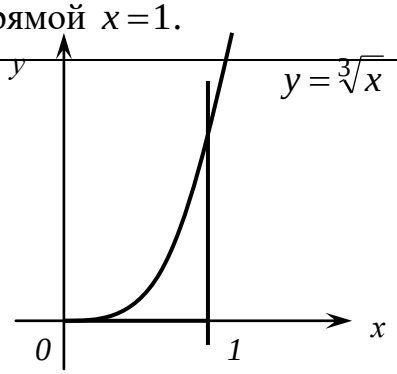
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси Ox, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси Oy, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy криволинейного треугольника, образованного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.



Решение.

1) объем тела, полученного вращением

вокруг оси Ox, равен

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi \left.\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, равен

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx = 2\pi \left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1 = \frac{6\pi}{7}\,(\textit{куб. ед.}).$$

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует определенное число $z \in E \subset \mathbf{R}$. Тогда z называется функцией двух переменных x и y, x, y – независимыми переменными или аргументами, D – областью определения или существования функции, а множество E всех значений функции – областью ее значений. Символически функция двух переменных записывается в виде равенства $z = f(x,y)$, в котором f обозначает закон соответствия. Этот закон может быть задан аналитически (формулой), с помощью таблицы или графика. Так как всякое уравнение $z = f(x,y)$ определяет, вообще говоря, в пространстве, в котором введена декартова система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под графиком функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x,y)$ (рис. 1).

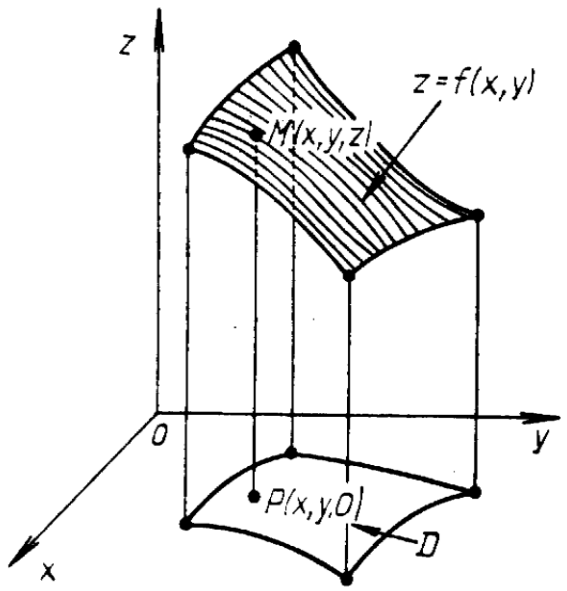


Рис. 1

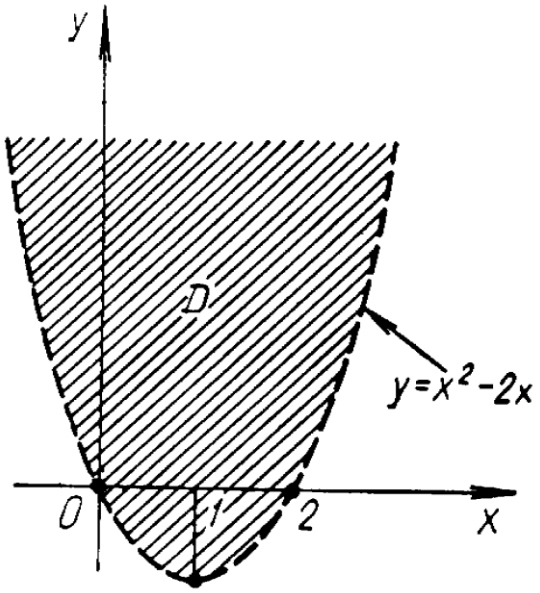


Рис. 2

Геометрически область определения функции D обычно представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется замкнутой и обозначается D, во втором – открытой.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и большего числа переменных. Величина y называется функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой совокупности ($x_1, x_2, ..., x_n$) переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определенное значение y, что символически записывается в

виде $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Так как совокупность значений независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ определяет точку n-мерного пространства $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, то всякую функцию нескольких переменных обычно рассматривают как функцию точек M пространства соответствующей размерности: $y = f(M)$.

Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при всех x, y, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Если A – предел функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{M \to M_0} f(x,y).$$

Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Например, функция $z = 1/(2x^2 + y^2)$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки $M(0, 0)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области D, называется непрерывной в данной области.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx а y оставить постоянной, то функция $z = f(x,y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое частным приращением функции z по переменной x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{x} \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \equiv z'_x \equiv f'_x(x,y),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{y} \equiv \frac{\partial z}{\partial y} \equiv z'_y \equiv f'_y(x,y),$$

они называются частными производными функции $z = f(x,y)$ по пе ременным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x,y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется полным дифференциалом функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (1)$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Для функции n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n. \qquad (2)$$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции, так как $\Delta z \approx dz$, т. е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Функция $z = f(u,v)$, где $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, называется сложной функцией переменных x и y. Для нахождения частных производных сложных функции используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \qquad (3)$$

В случае, когда $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, вторая из формул (3) исчезает (т. е. превращается в тождественный нуль), а первая пре образуется к виду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (4)$$

Если же $u = x$, $v = y = \psi(x)$, то формула (4) имеет вид

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (5)$$

В последней формуле $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Если уравнение $F(x,y)=0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в неявном виде и $F'_y(x,y)\neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \qquad (6)$$

Если уравнение $F(x,y,z)=0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x,y,z)=0$, то справедливы формулы:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (7)$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$ означает, что функция z k раз продифференцирована по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называются смешанными. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

Полный дифференциал второго порядка d^2z функции $z=f(x,y)$ выражается формулой

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) \qquad (8)$$

а канонические уравнения нормали, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (9)$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x,y,z) = 0$, и $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0, \qquad (10)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (11)$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x,y)$, если для всех точек $M(x, y)$, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)\big(f(x_0,y_0) \leq f(x,y)\big)$.

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется точкой экстремума функции.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x, y)$, то $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются стационарными или критическими. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ ($C < 0$) и точкой минимума при $A > 0$ ($C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а мажет и не быть. Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.

Экстремум функции $z = f(x,y)$, найденный при условии $\varphi(x,y) = 0$, называется условным. Уравнение $\varphi(x,y) = 0$ называется уравнением связи. Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремальных точек кривой, по которой поверхность $z = f(x,y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x,y) = 0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$ найти $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f(x,y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области D достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо в стационарной точке, лежащей внутри области D, либо на границе этой области. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области D необходимо найти все критические точки, лежащие внутри данной области и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, а затем путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

1. Найти область определения D и область значений E функции $z = ln\left(y - x^2 + 2x\right)$.

Данная функция определена в тех точках плоскости Oxy, в которых $y - x^2 + 2x > 0$, или $y > x^2 - 2x$. Точки плоскости, для которых $y = x^2 - 2x$, образуют границу области D. Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу (рис. 1, поскольку парабола не принадлежит области D, то она изображена штриховой линией). Далее, легко проверить непосредственно, что точки, для которых $y > x^2 - 2x$, расположены выше параболы. Область D является открытой (на рис. 2 она заштрихована) и ее можно задать с помощью системы неравенств:

$$D: \left\{ -\infty < x < +\infty,\ x^2 - 2x < y < +\infty \right\}.$$

Так как выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции

$$E:\{-\infty < z < +\infty\}.$$

2. Вычислить предел

$$A = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

Преобразовав выражение под знаком предела, получим

$$A = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2.$$

3. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$.

Рассмотрим функцию $z = x^y$. При $x_0 = 1$ и $y_0 = 3$ имеем $z_0 = 1^3 = 1$, $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$, $\Delta y = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$. Находим полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Вычисляем его значение в точке $M(2, 3)$ при данных приращениях $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = 0{,}01$:

$$dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

Тогда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$

4. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1, 2, -1)$.

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1, 2, -1)$:

$$\left.\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0, z_0) &= \left(3x^2 + yz\right) \\ F'_y(x_0, y_0, z_0) &= \left(3y^2 + xz\right) \\ F'_z(x_0, y_0, z_0) &= \left(3z^2 + xy\right) \end{aligned}\right| \begin{aligned} &_{M_0} = 1, \\ &_{M_0} = 11, \\ &_{M_0} = 5. \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнения (10) и (11), получаем соответственно уравнение касательной плоскости

$$(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0$$

и каноническое уравнение нормали

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z + 1}{5}.$$

5. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, полная поверхность которого имеет данную площадь S.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$, где x, y, z – измерения параллелепипеда, а площадь его поверхности $S = 2(xy + xz + yz)$, откуда

$$z = \frac{S - 2xy}{2(x+y)}, \quad V = \frac{Sxy - 2x^2y^2}{2(x+y)} = V(x,y).$$

Найдем экстремум функции $V = V(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{y^2\left(S - 2x^2 - 4xy\right)}{2(x+y)^2} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{x^2\left(S - 2y^2 - 4xy\right)}{2(x+y)^2} = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} S - 2x^2 - 4xy &= 0, \\ S - 2y^2 - 4xy &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из последней системы следует, что $x = y = \sqrt{S/6}$. Получили единственную стационарную точку $M_0\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$, которая является точкой максимума функции $V = V(x, y)$ (т. е. задача имеет решение), поэтому проверять выполнение достаточных условий максимума нет необходимости. Далее находим

$$z = \frac{S - S/3}{4\sqrt{S/6}} = \frac{2S/3}{4\sqrt{S/6}} = \sqrt{S/6}.$$

Таким образом, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\sqrt{S/6}$.

6. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\cos z$ в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}\cos z, \quad f'_x(1,1,\pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}\cos z, \quad f'_y(1,1,\pi/3) = 0{,}25,$$

$$f'_z(x,y,z) = -\sqrt{xy}\sin z, \quad f'_z(1,1,\pi/3) = -0{,}86.$$

7. Вычислить значение производной сложной функции $z = arccos\frac{x^2}{y}$,

где $x = 1 + ln\,t$, $y = -2e^{-t^2+1}$, при t_0 = 1 с точностью до двух знаков после запятой.

На основании формулы (4) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\frac{2x}{y}\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(-2e^{-t^2+1}\right)(-2t).$$

При t_0 = 1 получаем, что x = 1, y = –2,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

8. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$ в точке M_0(0, 1, –1) с точностью до двух знаков после запятой.

В данном случае $F(x,y,z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$, поэтому

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z, \quad F'_y = -9y^2 + 2xz, \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Следовательно по формулам (7):

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Вычисляем значения $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ в точке M_0(0, 1, –1):

$$\frac{dz(0,1,-1)}{dx} = 1, \quad \frac{dz(0,1,-1)}{dy} = -4{,}5.$$

9. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = xy(x + y - 2)$.

Находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = 2xy + y^2 - 2y, \quad z'_y = x^2 + 2xy - 2x.$$

Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(2x + y - 2) = 0, \\ x(x + 2y - 2) = 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой определяем стационарные точки данной функции: M_1(0, 0), M_2(2, 0), M_3(0, 2), M_4(2/3, 2/3). С помощью теоремы 2 из § 4 выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Для этого вначале найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = 2y, \quad z''_{xy} = 2x + 2y - 2, \quad z''_{yy} = 2x.$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума (см. § 4),

имеем: для точки M_1 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_2 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_3 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_4 $\Delta = 12/9 > 0$, $A = 4/3 > 0$, т. е. имеем точку локального минимума функции, в которой $z_{min} = z(2/3,\ 2/3) = -8/27$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$ (рис. 3).

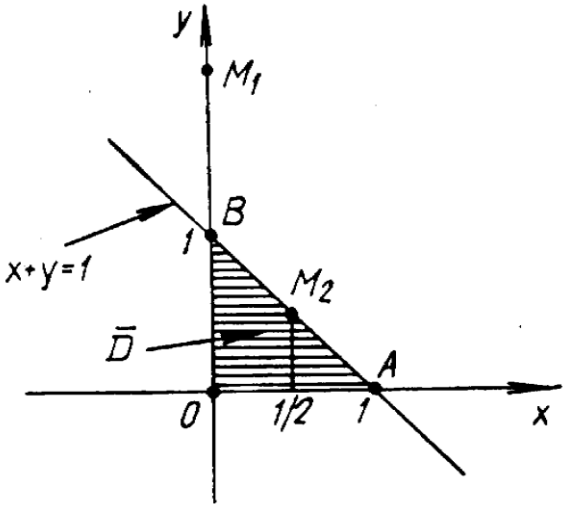


Рис. 3

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области $\overline{D}$, т. е. внутри треугольника *OAB*. Имеем:

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку $M(-10, -3)$. Она лежит вне области $\overline{D}$, следовательно, при решении задачи мы ее не учитываем. Исследуем значения функции на границе области $\overline{D}$. На стороне *OA* ($y = 0$, $0 \le x \le 1$) треугольника *OAB* функция z имеет вид $z = 3x$. Стационарных точек на отрезке *OA* нет, так как $z' = 3$. В точках *O* и *A* соответственно $z(0,\ 0) = 0$, $z(1,\ 0) = 3$. На стороне *OB* ($x = 0$, $0 \le y \le 1$) треугольника функция $z = -y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Находим стационарную точку из уравнения $-2y + 4 = 0$; получаем, что $y = 2$. Таким образом, точка $M_1(0, 2)$ не принадлежит области $\overline{D}$. Значение функции в точке *B* $z(0, 1) = 3$. Находим наибольшее и наименьшее значения на стороне *AB*: $x + y = 1$. Здесь $y = 1 - x$, $z = -2x^2 + 2x + 3$, тогда $z' = -4x + 2$ и из $z' = 0$ следует $x = 1/2$, т. е. стационарная точка $M_2(1/2, 1/2)$ принадлежит границе области $\overline{D}$. Значение функции в ней $z(1/2, 1/2) = 3{,}5$. Сравнивая все полученные значения функции, видим, что

$$z_{наиб} = z(1/2, 1/2) = 3{,}5, \quad z_{наим} = z(0, 0) = 0.$$

РЯДЫ
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение. Рядом называется сумма бесконечного множества слагаемых

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (1)$$

Символы U_1, U_2, …U_n называются членами ряда.
Они могут быть числами, функциями, матрицами, а соответствующие ряды называются числовыми, функциональными, матричными.

Сокращено ряд обозначается так: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

Член U_n называется общим членом ряда.
Сумма n-первым членом ряда

$$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n \qquad (2)$$

называется частичной суммой.
Если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся S-суммой ряда.
Если $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд расходится и суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда.
Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.
Это признак не является достаточным, т.е. из стремления к нулю общего члена нельзя еще сделать заключение, что ряд сходится. Но если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов

Признак сравнения.
Теорема 1. А) Пусть ряды

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (3)$$

$$V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n+\ldots \qquad (4)$$

положительны. Если ряд (4) сходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, меньше соответствующих членов ряда (4), то ряд (4) сходится; б) Если ряд (4) расходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, больше соответствующих членов ряда (4), то ряд (3) расходится.

Теорема 2. Два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или расходятся, если отношение U_n:V_n при $n \to \infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

Признак Даламбера.
Если члены ряда знакоположительны и
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=k$, то
при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится.
Если k=1, то заключение о сходимости ряда сделать нельзя. Требуются дополнительные условия.

Радикальный признак Коши.
Если члены ряда положительны и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{V_n}=k$, то при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится. При k=1 требуются дополнительные исследования.
Замечание. При исследовании сходимости ряда применение признака Даламбера оказывается практически более простым, чем признак Коши. Но радикальный признак Коши более сильный, чем признак Даламбера (он реже дает в ответе 1).

Интегральный признак Коши.
Если функция f(x) непрерывна, монотонно убывает и положительна для $x\geq a$, то ряд
F(1)+f(2)+f(3)+…+f(n)+...
сходится, если сходится несобственный интеграл
$\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$, т.е. он имеет конечное значение и ряд расходится, если этот интеграл равен ∞.
Замечание. Интегральный признак Коши позволяет сделать вывод о сходимости ряда, когда признаки Даламбера и Коши оказываются бессильными.
Тем не менее на практике применение интегрального признака часто вызывает затруднения, связанные с вычислением несобственного интеграла.

Знакочередующиеся ряды.
Определение. Ряд называется знакочередующимся, если два его соседних члена имеют противоположные знаки. Исследование сходимости знакочередующихся рядов проводится на основании теоремы Лейбница.
Теорема. Знакочередующийся ряд сходится, если: 1) Его члены убывают по абсолютной величине и 2) его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$.
Определение. Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.
Если же ряд из абсолютных величин расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.
Оценка остатка знакочередующегося ряда.

Для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего теореме Лейбница, ошибка приближенного равенства $S \approx S_n$ ведет по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена $|R_{n+1}| < U_{n+1}$, где
$R_n=U_{n+1}+U_{n+2}+...$
Остаток этого ряда имеет знак своего первого члена U_{n+1}.

<u>Степенной ряд. Радиус сходимости.</u>
Степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (5)$$

где a_n-коэффициент степенного ряда. Сходимость степенного ряда зависит от величины x.
<u>Теорема Абеля.</u> Если степенной ряд (5) сходится при некотором значении $x=x_0$, то он сходится, и притом абсолютно при всех значениях $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x=x_0$, то он расходится и при всех $|x| > |x_0|$.
<u>Определение.</u> Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал (-R, R) такой, что для всякой точки x, которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится, и к тому же абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится.
Число R называется радиусом сходимости.
Радиус сходимости степенного ряда (5) можно определить через его коэффициенты

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (6)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \qquad (7)$$

Радиус может быть равен 0, если интервал сходимости вырождается в точку, $R = \infty$, если ряд сходится на всей числовой оси.
Следует также исследовать сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $x = \pm R$. Для рядов вида (8), (9) и (10)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + ... + a_n x^{2n\ \ 1} + ... \qquad (8)$$

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + ... + a_n x^{2n} + ... \qquad (9)$$

$$a_0 + a_1(x-\lambda) + a_2(x-\lambda)^2 + ... + a_n(x-\lambda)^n + ... \qquad (10)$$

интервал сходимости находится по признаку Даламбера,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < 1 \qquad (11)$$

Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

Рядом Тейлора функции f(x), которая определена в окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечные производные любого порядка, называется степенной ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + ... \qquad (12)$$

Если в формуле (12) положить x_0=0, то получится ряд Маклорена

$$f(x) = f(x_0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + ... \qquad (13)$$

Помещаем для справок разложения функций ℓ^x, sinx, cosx, ln(1+x) и $(1+x)^m$ в ряд Маклорена

$$\ell^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \qquad (14)$$

x-любое

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \qquad (15)$$

x-любое

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad (16)$$

x-любое

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... \qquad (17)$$

-1<x<1

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... +$$

$$+ \frac{m(m-1)...(m-(n-1)m)}{n!} + ... \qquad (18)$$

-1<x<1

Разлагать в ряды Тейлора и Маклорена можно непосредственно и используя известные размножения (14-18). Примеры разложения приведены ниже.

<u>Пример 1</u>. Найти сумму ряда.

Доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Представим общий член ряда U_n в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

.

Умножая на знаменатель левой части, придем к тождеству

$$1=A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

Полагая последовательно n = 0, -1, -2 находим

$$n = 0 \qquad 1 = 2A, \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$n = -1 \qquad 1 = -B, \qquad B = -1$$

$$n = -2 \qquad 1 = 2C, \qquad C = \frac{1}{2}$$

Таким образом

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

или

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, ряд сходится и имеет суммой $\frac{1}{4}$.

<u>Пример 2</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Применим признак Даламбера

$$U_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}; \qquad U_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}\cdot (n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)(3n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot n!}{2^{n+2}\cdot(n+1)!\cdot 1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Так как предел равен $\frac{3}{2}>1$, то этот ряд расходится.

<u>Пример 3</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{10n+9}$ - знакочередующийся.

Члены ряда по абсолютной величине убывают

$$\frac{2}{19}>\frac{3}{29}>\frac{4}{39}>\frac{5}{49}>...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{10+\frac{9}{n}}=\frac{1}{10}\neq 0.$$

Теорема Лейбница для данного ряда не выполняется, значит данный ряд расходится.

<u>Пример 4</u>. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-1)^2}.$$

Члены данного ряда по абсолютной величине убывают.

$$\frac{1}{2^2}>\frac{1}{5^2}>\frac{1}{8^2}>\frac{1}{11^2}>...$$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-1)^2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Следовательно, данный ряд сходится по теореме Лейбница.

Чтобы решить вопрос об абсолютной сходимости этого ряда, составим ряд из абсолютных величин его членов.

Получим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$;

Применим интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(3x-1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(3x-1)^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\right)\Bigg|_1^b=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3b-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}.$$

Интеграл сходится, поэтому сходится ряд из абсолютных величин. Значит, заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$.

Применим признак сравнения рядов.

Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ который расходится, как часть известного расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+2},$$

значит по теореме сравнения рядов данный ряд тоже расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3+2n}{n+1} \cdot 4)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3+2n}{n+1} \cdot 4\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4(2n+3)}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n+12}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8+\frac{12}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = 8^{\infty} = \infty > 1.$$

Значит, данный ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Сначала сравним ряды

$$\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{n}{n^2 \ln n} = \frac{1}{n \ln n}.$$

Исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Применим интегральный признак Коши к этому ряду:

$$\int_2^{\infty} \frac{dn}{n \ln n} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln n)}{\ln n} = \ln \ln n \Big|_2^{\infty} = \infty - \ln \ln 2 = \infty.$$

Так как $\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{1}{n \ln n}$, то данный ряд расходится так же, как $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Пример 8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+2} x^n$.

Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+3)}{(n+2)(n+1)^3} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1} = 1.$$

Так как R = 1, то ряд сходится в промежутке (-1; 1).
Проверим концы этого промежутка.

(-1): подставим в данный ряд, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{n+2}$ - знакочередующийся.
Исследуем его по теореме Лейбница.

1) $\frac{1}{3} < \frac{8}{4} < \frac{27}{5} < \ldots$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} = \frac{1}{0} = \infty$.

Ни одно условие теоремы Лейбница не выполняется, значит ряд расходится. Значит x = -1 не входит в интеграл сходимости.

(+1): подставим в данный ряд, получим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+2}$.

По необходимому признаку сходимости этот ряд расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+2} = \infty.$$

Значит ряд сходится при –1 < x < 1.

<u>Пример 9</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{n+1} \cdot 2^n(n+3)}{2^{n+1}(n+4)(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{2} \cdot \frac{n+3}{n+4} = \frac{|x-1|}{2} < 1.$$

$$\frac{|x-1|}{2} < 1;$$

$$|x-1| < 2;$$

$$-2 < x - 1 < 2;$$

$$-1 < x < 3.$$

Проверим концы этого интервала

(-1): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

Этот ряд сходится по теореме Лейбница, т.к.

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=\frac{1}{\infty}=0.$$

(+3): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-1)^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Полученный ряд расходится, как часть гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Значит интервал сходимости $-1\le x<3$.

<u>Пример 10</u>. Пользуясь основными разложениями, написать разложение в степенной ряд (ряд Маклорена) функции $y=\sqrt{1+x}$.

Применим биноминальную формулу.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+\ldots\ .$$

Формула верна для всех x, удовлетворяющих условию –1 < x < 1.

Так как $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, то $m=\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\ldots$$

После упрощения получим

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^n+\ldots$$

Это разложение верно в –1 < x < 1, так же как и биноминальное разложение.

<u>Пример 11</u>. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ функцию $y=\frac{1}{x}$.

Запишем ряд Тейлора для функции f(x).

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

Найдем производные от функции $y=\frac{1}{x}$.

$$y = \frac{1}{x} \qquad y(3) = \frac{1}{3}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \qquad y'(3) = -\frac{1}{3^2}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} \qquad y''(3) = \frac{2}{3^3}$$

$$y''' = -\frac{2\cdot 3}{x^4} \qquad y'''(3) = -\frac{2\cdot 3}{3^4}$$

Подставим в ряд Тейлора

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3) + \frac{2}{3^3\cdot 2!}(x-3)^2 - \frac{2\cdot 3}{3^4\cdot 3!}(x-3)^3 + \ldots$$

После преобразования получим

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{x-3}{3^2} + \frac{(x-3)^2}{3^3} - \frac{(x-3)^3}{3^4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} + \ldots$$

Найдем интервал сходимости полученного ряда. Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n\cdot 3^n}{3^{n+1}(x-3)^{n-1}}\right| = \frac{1}{3}|x-3| < 1;$$

$$|x-3| < 3;$$

$$-3 < x - 3 < 3;$$

$$0 < x < 6.$$

Исследуем концы этого интервала. Подставим x = 0 в данный ряд, получим

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + \frac{3^3}{3^4} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Данный ряд расходится, т.к. у него $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3} \neq 0$.

Исследуем точку x = 6.

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} - \frac{3^3}{3^4} + \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots$$

Данный ряд расходится, как колеблющийся ряд.

Значит, полученное разложение в ряд Тейлора функции $y = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = 3$ справедливо в (0; 6).

<u>Пример 12.</u> Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью 0,001. Известно, что

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Тогда, разделив почленно на x, получим, что

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\frac{x^9}{9\cdot 9!}+\cdots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\frac{1}{9\cdot 9!}-\cdots=1-0{,}0555+0{,}0016-0{,}00003\approx 0{,}946$$

При вычислении интеграла мы взяли только 3 члена ряда, т.к. четвертый член 0,00003<0,001 точности, с которой требуется вычислить.

<u>Пример 13</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Разложим подинтегральную функцию в степенной ряд, используя разложение $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$ у нас $x\sim x^4$, $m=-\frac{1}{2}$, тогда получим

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^8+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^{12}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^4}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^{16}+\cdots$$

Подставим полученное разложение под знак интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^{16}+\cdots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^5}{5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3x^9}{2^2\cdot 2!\cdot 9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2^3\cdot 3!\cdot 13}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^{17}}{2^4\cdot 4!\cdot 17}+\cdots\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}\approx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 9\cdot 3^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 3^{13}\cdot 13}+\cdots\approx$$

$$\approx 0{,}3333-0{,}0004+0{,}00002\approx 0{,}333$$

т.к. 0,000)4<00,001, поэтому второй член ряда можно отбросить.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

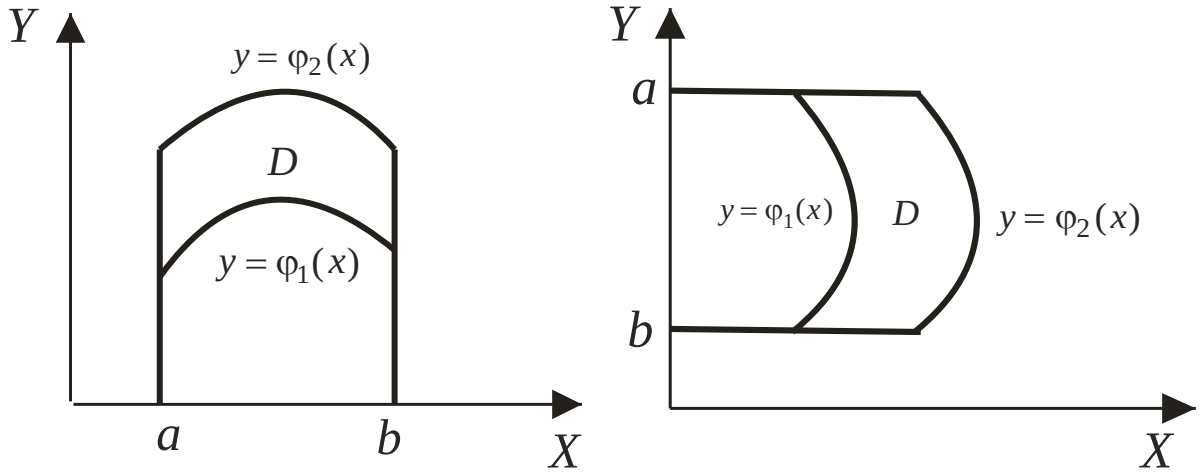
Двойной интеграл в прямоугольных координатах

Пусть в ограниченной замкнутой области D на плоскости Oxy определена непрерывная функция $z = f(x,y)$. Разобьем область D на n областей с площадями ΔS_i, в каждой из них выберем произвольную точку (x_i, y_i) и составим *интегральную сумму* $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$. Предел этой суммы при неограниченном увеличении числа областей разбиения и при стремлении диаметра наибольшей области $max\ d_i$ к нулю называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x,y)$ по области D :

$$\iint_D f(x,y)dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

Элементарная площадь dS в декартовых координатах $dS = dxdy$`.

Для вычисления двойного интеграла важное значение имеет вид области D.



а) *б)*

Рис. 1.

Если область D может быть задана так, как показано на *рис.1.а*, двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (1)$$

Если область D имеет вид такой, как показано на *рис.1.б*, двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

В более сложных случаях область D разбивают на простые области типа I и II и пользуются *свойством аддитивности* двойного интеграла:

если $D = D_1 + D_2$, то $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$.

<u>Двойной интеграл в полярных координатах</u>

Переход от прямоугольных декартовых координат к полярным выполняется по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (3)$$

при условии, что полюс помещен в начале координат и полярная ось направлена вдоль оси Ox . Элемент площади в полярных координатах имеет вид:

$dS = \rho d\rho d\varphi$.

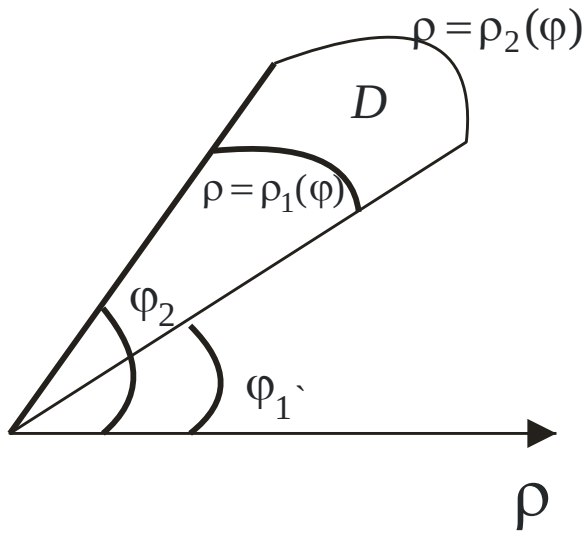


Рис. 2.

Если область D задана так, как показано на *рис.2* ($\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, , $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$), то переход к полярным координатам в двойном интеграле выполняется по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (4)$$

Если область D охватывает начало координат, в (4) надо положить $\rho_1(\varphi) = 0$.

<u>Приложения двойных интегралов</u>

Площадь плоской области D на плоскости Oxy вычисляется по формуле:

$$S = \iint_D dxdy . \qquad (5)$$

Если D - плоская пластинка, лежащая в плоскости Oxy, с поверхностной плотностью $\gamma(x, y)$, то массу пластинки находят по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy . \qquad (6)$$

Пример 1: С помощью двойного интеграла вычислить площадь области, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$ и $y = 2$.

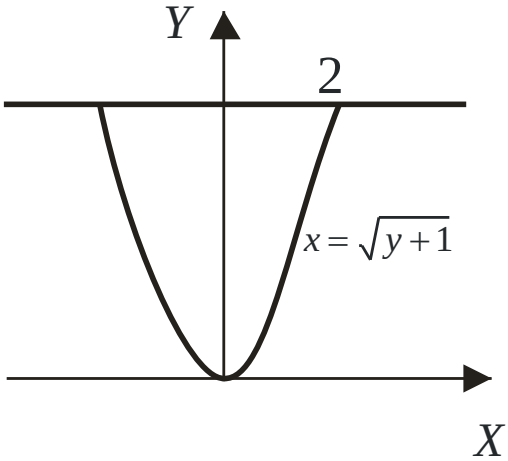


Рис. 3

<u>*Решение*</u>: Построим область D. . Граница $y = x^2 - 1$ - парабола, ось которой совпадает с осью Oy, а вершина расположена в точке $(-1, 0)$. Граница $y = 2$ – прямая, параллельная оси Ox. Область D симметрична

относительно оси Oy, поэтому найдем площадь правой половинки области S_1, а затем удвоим ее

Спроектируем область D на ось Oy и воспользуемся для вычисления двойного интеграла формулой (13):

$$S_1 = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_0^{\sqrt{y+1}} dx = \int\limits_{-1}^{2} x\Big|_0^{\sqrt{y+1}} dy = \int\limits_{-1}^{2} \sqrt{y+1}dy = \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{2} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда площадь всей области D равна $S = 2S_1 = 4\sqrt{3}$.

<u>*Ответ:*</u> $S = 4\sqrt{3}$.

Пример 2. Вычислить площадь плоской области, ограниченной кривой

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2ax^3, \quad (a > 0).$$

<u>*Решение:*</u> Введем полярные координаты (14), тогда уравнение кривой примет вид $\rho^4 = 2a\rho^3 \cos^3\varphi$, или $\rho = 2a\cos^3\varphi$.

Эта область симметрична относительно оси , поэтому достаточно вычислить площадь верхней половины области D и результат удвоить. Для верхней половины угол φ меняется от 0 до $\pi/2$, а ρ меняется от 0 до $2a\cos^3\varphi$, поэтому

$$\frac{S}{2} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos^3\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2a\cos^3\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} 4a^2\cos^6\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left[\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 4\varphi)d\phi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2 2\varphi)d\sin\phi\right] =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\frac{\pi}{2} + (\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left(\sin 2\varphi - \frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5\pi a^2}{16}.$$

Ответ: Площадь всей области $S = \dfrac{5\pi a^2}{8}$ (кв.ед.).

Пример 3: С помощью двойного интеграла вычислить массу плоской пластинки, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, с заданной плотностью $\gamma(x, y) = x^2 + y$.

Решение: Построим область D *(рис.6).*

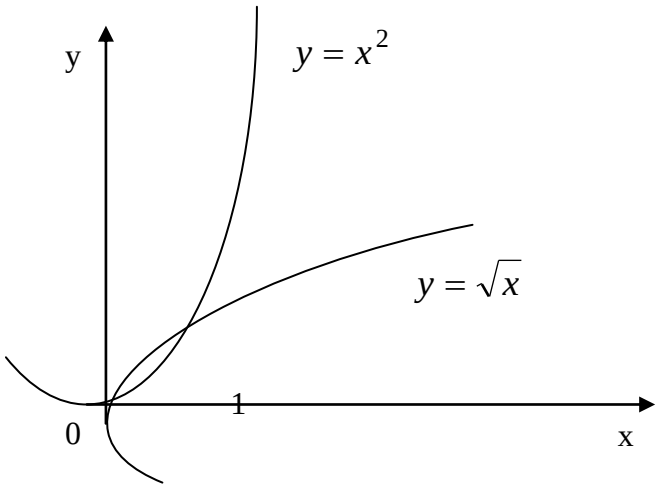


Рис. 5

Эта область ограничена двумя параболами. Проекцией области на ось Ox является отрезок *[0; 1]*. Массу пластинки найдем по формуле (17), вычисляя двойной интеграл по формуле (1):

$$m = \iint_D (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.$$

Ответ: $m = \dfrac{33}{140}$ ед. массы.

Пример 4. Вычислить массу плоской пластинки, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 = 6x, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3}x.$$

Поверхностная плотность $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>*Решение*</u>: Построим область D. Уравнение $x^2 + y^2 = 4x$ является уравнением окружности $(x-2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке *(2; 0)* и радиусом 2. Уравнение $x^2 + y^2 = 6x$ является уравнением окружности $(x-3)^2 + y^2 = 9$ с центром в точке *(3; 0)* и радиусом 3. Уравнения $y = 0,\ y = \sqrt{3}x$ задают прямые линии (см. *рис.6*).

При вычислении массы пластинки по формуле (6) перейдем к полярным координатам (3). Тогда уравнения границ области D примут вид:

$$x^2 + y^2 = 4x \to \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \to \rho = 4\cos\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 6x \to \rho^2 = 6\rho\cos\varphi \to \rho = 6\cos\varphi,$$

$$y = 0 \to \varphi = 0, \quad y = \sqrt{3}x \to \varphi = \pi/3.$$

Поверхностная плотность в полярных координатах $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho.$

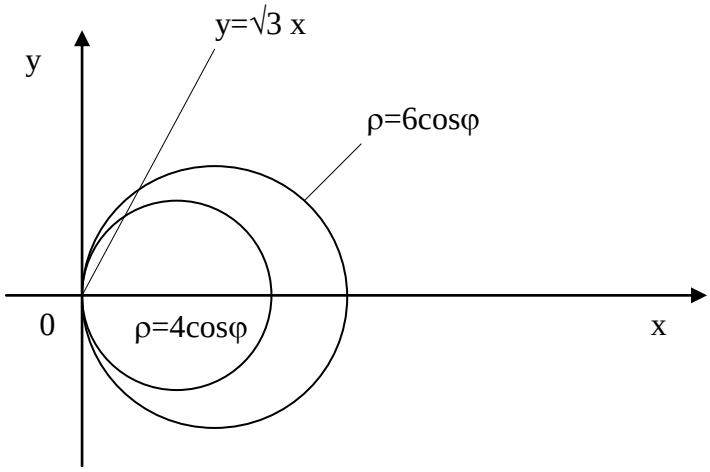


Рис.6

Тогда масса пластинки равна

$$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)dxdy=\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi} \rho\cdot\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/3}\left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{4\cos\varphi}^{6\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/3}(6^3\cos^3\varphi-4^3\cos^3\varphi)d\varphi=\frac{152}{3}\int\limits_0^{\pi/3}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{152}{3}\int\limits_0^{\pi/3}(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{152}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/3}=\frac{152}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)=19\sqrt{3}.$$

<u>*Ответ:*</u> $19\sqrt{3}$ ед. массы.

<u>Тройной интеграл в прямоугольных координатах</u>

Пусть в области V, заданной в пространстве и ограниченной замкнутой поверхностью S, определена непрерывная функция $f(x,y,z)$.Разобьем область V на n частичных областей ΔV_i , в каждой области выберем произвольную точку (x_i,y_i,z_i) и составим *интегральную сумму* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$. Предел этих сумм при неограниченном увеличении числа областей разбиения n и при стремлении к нулю диаметра наибольшей области $max\ d_i$ называется *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V:

$$\iint\limits_V f(x,y,z)dV=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\ .$$

В декартовых координатах элемент объема $dV=dxdydz$.

Пусть пространственная область V проектируется в область D на плоскости Oxy и ограничена снизу поверхностью $z=\psi_1(x,y)$, сверху — поверхностью $z=\psi_2(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. В этом случае тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (7)$$

или

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (7')$$

В формулах (18) и (18') возможно изменить порядок интегрирования, проектируя область D в какую-либо другую координатную плоскость.

<u>Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах</u>

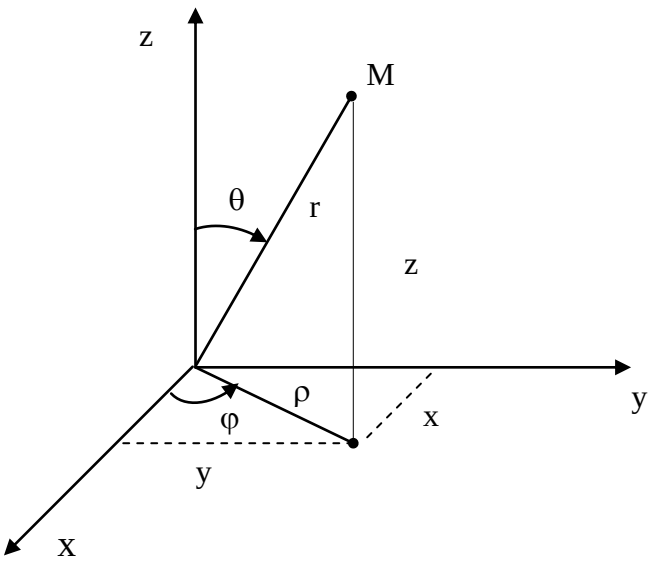


Рис. 7.

Декартовы координаты точки *M(x,y,z)* связаны с *цилиндрическими* координатами φ, ρ, z соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z \quad , \qquad (8)$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le +\infty,\ -\infty \le z \le +\infty,$ причем $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Связь между декартовыми и *сферическими* координатами φ, θ, ρ точки имеет вид:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y = r\sin\varphi\cos\theta,\ \ z = r\cos\theta, \qquad (9)$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le +\infty,$ причем $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Переход в тройном интеграле к цилиндрическим координатам осуществляется по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz,$$

(10)

где V' - область изменения цилиндрических координат, соответствующая объему V.

Переход в тройном интеграле к сферическим координатам выполняется по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr,$$

(11) где V' - область изменения сферических координат, соответствующая объему V.

<u>Приложения тройного интеграла</u>

Объем пространственного тела V находится по формулам:

в прямоугольных координатах: $V = \iiint\limits_V dxdydz$, (12)

в цилиндрических координатах: $V = \iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz$ (13)

и в сферических координатах $V = \iiint\limits_V r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$. (14)

Масса тела с плотностью $\gamma(x, y, z)$, занимающего пространственную область V, находится по формуле

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad (15)$$

в которой при необходимости можно перейти к цилиндрическим или сферическим координатам в соответствии с (10) и (11).

Пример 5. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $z = 12\sqrt{2y}$, $z = 2\sqrt{2y}$, $z = 0$, $z + y = 0.5$. Сделать чертеж тела и его проекции в плоскость Oxy.

<u>*Решение*</u>: Тело ограничено снизу плоскостью Oxy $(z = 0)$, сверху — плоскостью $z + y = 0.5$, параллельной оси Oz. Боковая поверхность образована двумя цилиндрическими поверхностями (см. *рис. 10*).

Объем тела вычисляется по формуле (18):

$$V = \iiint\limits_V dV = \int\limits_0^{0.5} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{12\sqrt{2y}} dx \int\limits_0^{0.5-y} dz = \int\limits_0^{0.5} dy \int\limits_{2\sqrt{2y}}^{12\sqrt{2y}} (0.5 - y)dx =$$

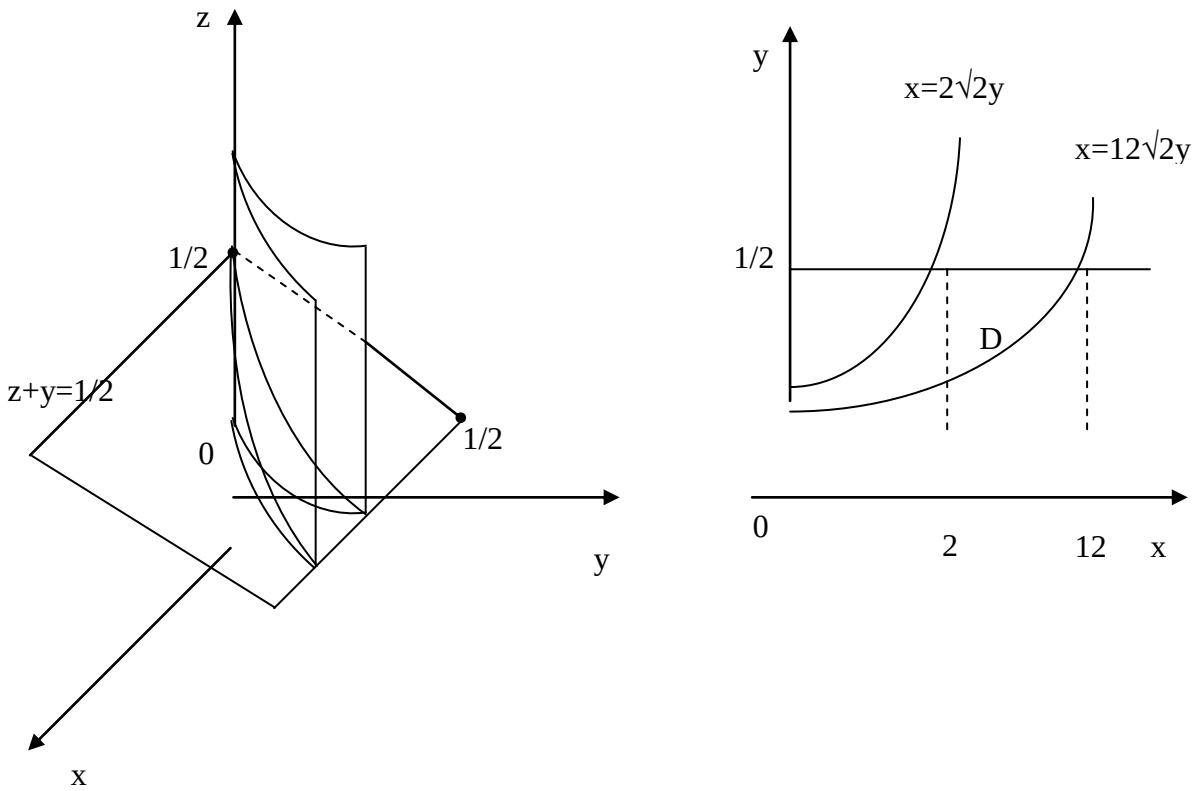


Рис.9

$$= \int\limits_0^{0.5} (0.5 - y)(12\sqrt{2y} - 2\sqrt{2y})dy = 10\sqrt{2} \int\limits_0^{0.5} \left(0.5\sqrt{y} - y\sqrt{y}\right)dy =$$

$$=10\sqrt{2}\left(0.5\frac{y^{0.5+1}}{0.5+1}-\frac{y^{1.5+1}}{1.5+1}\right)\Bigg|_{0}^{0.5}=10\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2^3}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2^5}}\right)=\frac{2}{3}.$$

<u>Ответ</u>: V = 2/3 (ед.^{3}).

■

Пример 6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $\frac{9}{2}z=x^2+y^2$. Сделать чертеж тела и его проекции в плоскость *Oxy*.

<u>Решение</u>: Тело ограничено снизу поверхностью параболоида с вершиной в начале координат ($\frac{9}{2}z=x^2+y^2$), сверху – полусферой радиусом *3* ($z=\sqrt{9-x^2-y^2}$). Проекцией тела в плоскость *Oxy* является круг с центром в начале координат, радиус которого можно найти, исключая *z* из уравнения параболоида. Получим $x^2+y^2=\frac{27}{4}$.

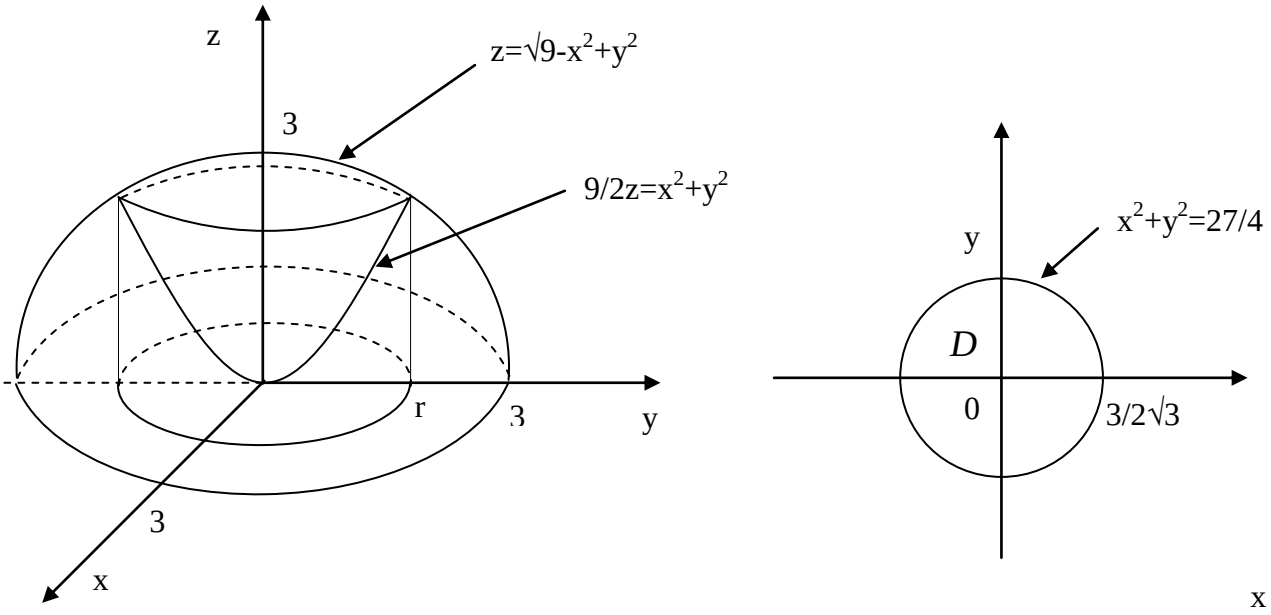


Рис. 10.

Объем тела V удобно вычислить в цилиндрических координатах по формуле (24). В этом случае уравнение полусферы принимает вид $z=\sqrt{9-\rho^2}$, а уравнение параболоида $z=\frac{2}{9}\rho^2$. Тогда

$$V=\iiint\limits_V dV=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{3}{2}\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{2}{9}\rho^2}^{\sqrt{9-\rho^2}}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{3}{2}\sqrt{3}}\left(\sqrt{9-\rho^2}-\frac{2}{9}\rho^2\right)\rho d\rho=$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{2}\frac{(9-\rho^2)^{3/2}}{3/2}-\frac{2}{9}\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{3}}=-2\pi\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(9-\frac{9}{4}\cdot 3\right)^3}+\frac{1}{18}\cdot\frac{81}{16}\cdot 9-\frac{3^3}{3}\right)=\frac{171}{16}\pi.$$

<u>*Ответ*</u>: $V=\frac{171}{16}\pi$ *(ед.*^{3}*).*

Пример *7*. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$. Сделать чертеж тела и его проекции в плоскость Oxy.

<u>*Решение:*</u>

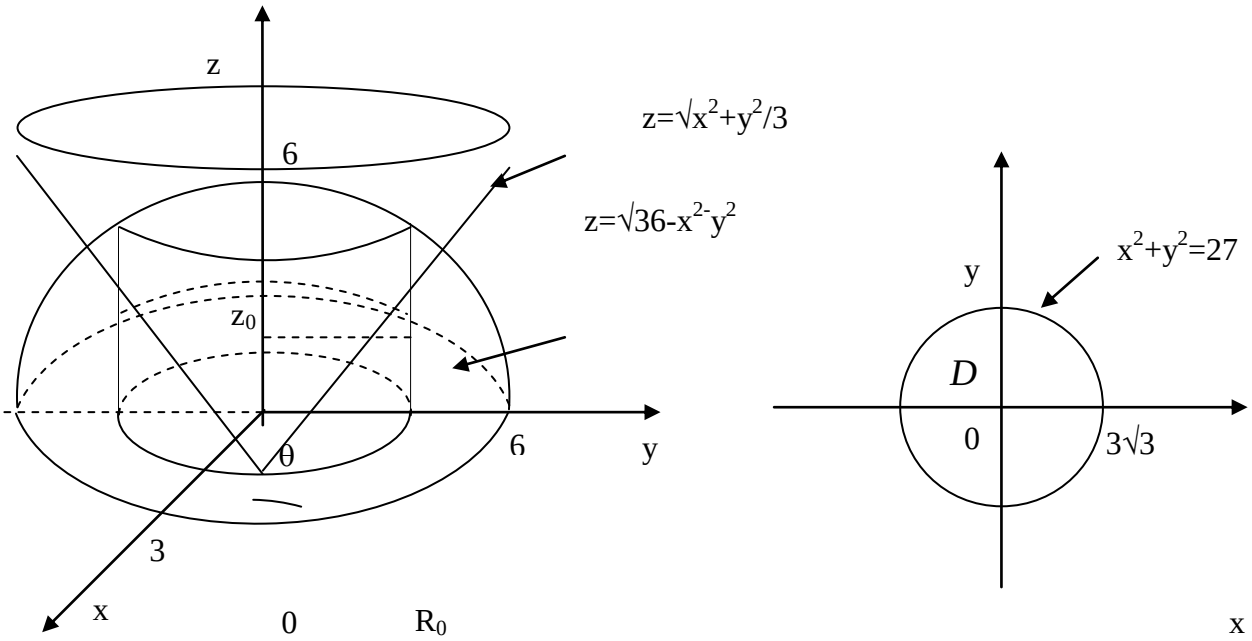


Рис. 11.

Тело ограничено снизу поверхностью конуса $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$, а сверху - поверхностью полусферы $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$. Проекцией тела в плоскость Oxy является круг с центром в начале координат. Уравнение ограничивающей его окружности получим после исключения из уравнений конуса и полусферы: $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}=\sqrt{36-x^2-y^2}$, или после простых преобразований: $x^2+y^2=27$.

Объем тела V удобно вычислять, переходя к сферическим координатам. Запишем в сферических координатах (9) уравнение сферы и конуса: $r=6$ и $\theta=\theta_0$, где θ_0 - угол при вершине конуса, который найдем из уравнения $tg\theta_0=\frac{z_0}{R_0}$ (см. рис. 11). Мы нашли, что $R_0=3\sqrt{3}$, тогда $z_0=\sqrt{\frac{27}{3}=3}$ (из уравнения конуса). Следовательно, $tg\theta_0=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ и $\theta_0=\frac{\pi}{3}$. Уравнение конуса в сферических координатах: $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Тогда объем тела по формуле (14) равен

$$V=\iiint\limits_V dV=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^6 r^2dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^6\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=2\pi\cdot\frac{6^3}{3}\cdot(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0)=2\pi\cdot 72\cdot(-\frac{1}{2}+1)=72\pi.$$

<u>*Ответ*</u>: $V=72\pi$ *(ед.*^{3}*)*.

Пример 8. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$, если задана его плотность $\gamma(x, y, z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^3}$ Сделать чертеж данного тела и его проекции в плоскость Oxy.

<u>*Решение:*</u> Заданное тело ограничено координатными плоскостями и наклонной плоскостью (см. *рис. 12*)

Массу тела вычислим по формуле (15):

$$m=\iiint\limits_V\frac{dV}{(x+y+z)^3}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(x+y+z)^3}=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{-2(x+y+z+1)^2}\right]_0^{1-x-y}dy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+y+1)^2})dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y}{4}+\frac{1}{x+y+1}\right]_0^{1-x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x})dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{x}{2}-\ln|1+x|)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\ln 2+\frac{1}{8}+\ln 1)=$$

$$=-\frac{1}{2}(\frac{5}{8}-\ln 2)\approx 0{,}034.$$

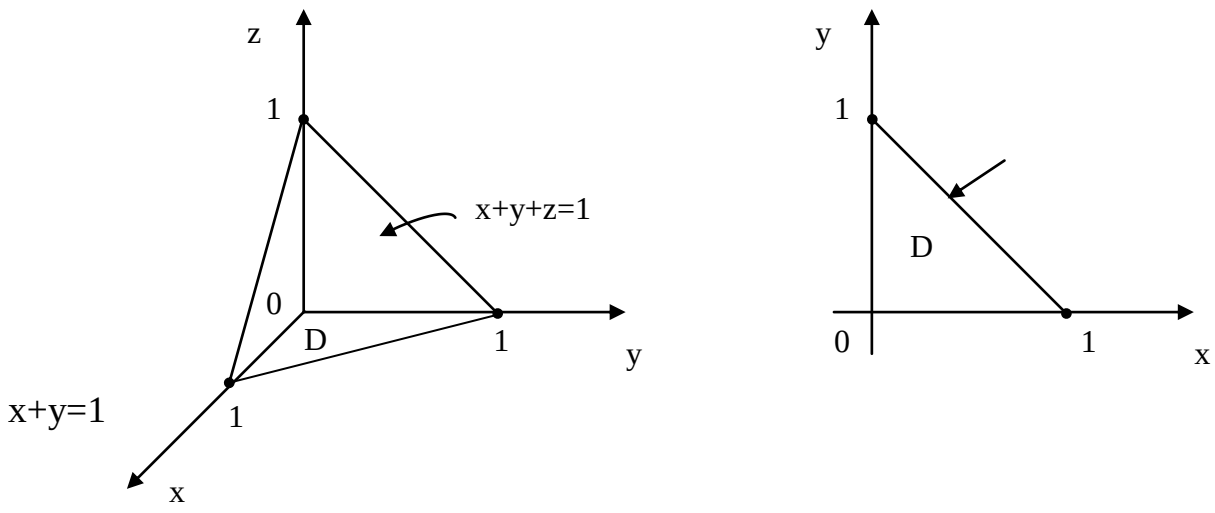


Рис.12

<u>*Ответ*</u>*: m≈0,034 (ед. массы).*

■

Пример 9. Найти массу тела с плотностью $\gamma(x, y, z)=x^2+y^2$, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$. Сделать чертеж тела и его проекции в плоскость *Oxy*.

<u>*Решение*</u>*:* Заданное тело ограничено поверхностями конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоида $z=2-x^2-y^2$. Проекцией тела в плоскость *Oxy* является круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$.

Ограничивающие тело поверхности имеют простые уравнения в цилиндрической системе координат (8): конус $z=\rho$, параболоид $z=2-\rho^2$. Массу тела вычислим по формуле (15); записав функцию плотности в цилиндрических координатах: $\gamma=\rho^2$. Тогда

$$m=\iiint\limits_V \gamma dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_\rho^{2-\rho^2} \rho^2 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[\rho^2 z\right]_\rho^{2-\rho^2} \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 (2-\rho^2-\rho) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(2\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{4\pi}{15}$$

<u>*Ответ*</u>*:* $m=\dfrac{4\pi}{15}$ *(ед. массы).*

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Криволинейные интегралы

Криволинейным интегралом I рода называется

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\, dl = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$$

где $f(x,y,z)$ - непрерывная функция на гладкой кривой Γ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, dl - дифференциал дуги .

Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления интегрирования .

Приложения криволинейного интеграла I рода

- длина дуги $L = \int_{\Gamma} dl$;
- масса кривой $m = \int_{\Gamma} \rho\, dl$, где ρ - линейная плотность ;
- статические моменты кривой $M_{y0z} = \int_{\Gamma} \rho x\, dl$, $M_{x0z} = \int_{\Gamma} \rho y\, dl$, $M_{x0y} = \int_{\Gamma} \rho z\, dl$;
- координаты центра масс кривой $x_c = \dfrac{M_{y0z}}{m}$, $y_c = \dfrac{M_{x0z}}{m}$, $z_c = \dfrac{M_{x0y}}{m}$.
- момент инерции кривой $I_{y0z} = \int_{\Gamma} \rho x^2\, dl$, $I_{x0z} = \int_{\Gamma} \rho y^2\, dl$, $I_{x0y} = \int_{\Gamma} \rho z^2\, dl$,

$I_x = I_{x0y} + I_{x0z}$, $I_y = I_{x0y} + I_{y0z}$, $I_z = I_{x0z} + I_{y0z}$, $I_o = I_{x0y} + I_{x0z} + I_{y0z}$.

Криволинейный интеграл 2-го рода :

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} \{P[\, x(t) , y(t) , z(t)\,]\, x'(t) + Q[\, x(t) , y(t) , z(t)\,]\, y'(t) + R[\, x(t) , y(t) , z(t)\,]\, z'(t)\, \}\, dt ,$$

где функция $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывна на кривой Γ. Γ^+ означает выбор направления интегрирования . При изменении направления интегрирования интеграл изменяет знак на противоположный .

Работа силы $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ вдоль дуги AB

$$A = \int_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz .$$

Формула Грина : $\oint_{\Gamma^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$, где Γ- простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область D , пробегаемый так, что область D остается слева, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $(x,y) \in D$.

Применение формулы Грина :

1) Площадь плоской фигуры $S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma_1} x\,dy - y\,dx$

2) Условие независимости интеграла II рода от пути интегрирования

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл I рода :

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f[\,x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)]\,\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv ,$$

где Σ - кусочногладкая двусторонняя поверхность ;

D - отображение Σ на u0v ;

f(x,y,z) - непрерывная функция на Σ ;

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 ; \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 ;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} .$$

В частном случае , если уравнение поверхности Σ имеет вид z = z(x,y) , (x,y) $\in$ D , где z(x,y) - однозначная непрерывно дифференцируемая поверхность , то

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f[x,y,z(x,y)]\,\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y .$$

Такой интеграл не зависит от выбора стороны поверхности Σ .

Применение поверхностных интегралов I рода :

- площадь поверхности $S = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma$;
- масса поверхности $m = \iint\limits_{\Sigma} \gamma\,d\sigma$, где γ - поверхностная плотность ;
- статические моменты $M_{y0z} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma x\,d\sigma$, $M_{x0z} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma y\,d\sigma$, $M_{x0y} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma z\,d\sigma$;
- координаты центра масс $x_c = \frac{M_{y0z}}{m}$, $y_c = \frac{M_{x0z}}{m}$, $z_c = \frac{M_{x0y}}{m}$;
- момент инерции $I_{x0y} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma z^2\,d\sigma$, $I_{x0z} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma y^2\,d\sigma$, $I_{y0z} = \iint\limits_{\Sigma} \gamma x^2\,d\sigma$;

$I_x = I_{x0y} + I_{x0z}$, $I_y = I_{x0y} + I_{y0z}$, $I_z = I_{x0z} + I_{y0z}$, $I_o = I_{x0y} + I_{x0y} + I_{y0z}$.

Поверхностный интеграл II рода выражается через поверхностный интеграл I рода $\iint\limits_{\Sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$,

где Σ^+ - сторона гладкой двусторонней поверхности, характеризуемая направлением нормали $\bar{n} = \{\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma\}$,

P, Q, R - функции от x, y, z , непрерывные на поверхности Σ .

При переходе к другой стороне Σ^- поверхности Σ интеграл меняет свой знак на противоположный .

Теория поля

Градиент скалярного поля u(x,y,z) есть вектор - функция

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} .$$

Производная скалярного поля u (M) по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } u , \vec{l}) ,$$

где $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - единичный вектор .

Потоком векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через выбранную сторону поверхности Σ^+ называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi_{\Sigma^+}\vec{F} = \iint\limits_{\Sigma^+} (\vec{F}, \vec{n})\,d\sigma ,$$

где $\vec{n}$ - поле единичных нормалей на выбранной стороне поверхности .

Циркуляция векторного поля $\vec{F}$ вдоль кривой Г называется криволинейный интеграл I рода

$$\text{Цг}_{\Sigma^+}\vec{F} = \int (\vec{F}, d\vec{r}) ,$$

где $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$,

Теорема Остроградского - Гаусса :

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} (\vec{F}, \vec{n})\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\,dV , \text{ где } \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} ,$$

Σ^+ - граница ограниченной области Ω .

Теорема Стокса .

$$\oint\limits_{\Gamma^+} (\vec{F}, d\vec{r}) = \iint\limits_{\Sigma^+} (\mathrm{rot}\,\vec{F}, \vec{n})\, d\sigma ,$$

где $\mathrm{rot}\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$. Г - кусочно-гладкий контур, ограничивающий гладкую ориентированную поверхность $\sum$.

Γ^+ и $\sum^+$ означает согласование направления обхода контура с ориентацией поверхности ; если необходимо находится на выбранной стороне поверхности, то при обходе контура Г он оставляет поверхность слева от себя.

Векторное поле $\vec{F}$ (M) называется потенциальным в области Ω , если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля u(M) : $\vec{F}$ (M) = grad u(M) . Циркуляция потенциального поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю . Потенциальное поле $\vec{F}$ (M) является безвихревым, то есть $\mathrm{rot}\ \vec{F} = \vec{0}$.

Векторное поле $\vec{F}$ (M) называется соленоидальным в некоторой области, если в этой области $\mathrm{div}\,\vec{F}$ = 0. Поток соленоидального поля через такую замкнутую поверхность, расположенную в объемно односвязной области, равен нулю.

Криволинейные интегралы.

Задача 1.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x-xy+5y)\, dl$, где Г - контур треугольника с вершинами O(0,0) , A(0,75 ; 5,25) , B(5,25 ; 0,75).

Решение. Замкнутая линия интегрирования OABO состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых. Следовательно, по свойству аддитивности криволинейных интегралов имеем : $\oint\limits_{OABO} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

Для составления уравнений отрезков используем уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

А криволинейный интеграл преобразуем в определенный по переменной x по формуле

$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$, где кривая $\Gamma : y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$.

а) Отрезок ОА определяется уравнением $y = 7x$, $0 \le x \le 3/4$

Тогда $dl = \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx = 5\sqrt{2}\,dx$ и $\int\limits_{OA} (x-xy+5y)\,dl = \int\limits_{0}^{3/4} (x-7x^2+35x)5\sqrt{2}\,dx$

$=$

$= 5\sqrt{2}\left(18x^2 - \frac{7}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{3/4} = \frac{2925\sqrt{2}}{64}$;

б) Отрезок АВ определяется уравнением $y = -x + 6$, $3/4 \le x \le 21/4$.

Тогда $dl = \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$ и $\int\limits_{AB} (x-xy+5y)dl = \int\limits_{3/4}^{21/4} (x-x(-x+6)+5(-x+6))\,dx$

$=$

$= \sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 30x\right)\Big|_{3/4}^{21/4} = \frac{3078\sqrt{2}}{64}$;

в) $\int\limits_{BO} (x-xy+5y)\,dl = \int\limits_{OB} (x-xy+5y)\,dl$.

Отрезок ОВ определяется уравнением $y = \frac{1}{7}x$, $0 \le x \le \frac{21}{4}$.

Тогда $dl = \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx = \frac{5}{7}\sqrt{2}\,dx$ и $\int\limits_{OB} (x - xy + 5y)\,dl =$

$= \int\limits_{0}^{21/4}\left(x - x\cdot\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}x\right)\frac{5}{7}\sqrt{2}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{7}\left(-\frac{x^3}{21} + \frac{6x^2}{7}\right)\Big|_{0}^{21/4} = \frac{765\sqrt{2}}{64}$.

Следовательно, $\int\limits_{\Gamma} (x-xy+5y)\,dl = \frac{2925\sqrt{2}}{64} + \frac{3078\sqrt{2}}{64} + \frac{765\sqrt{2}}{64} = \frac{432\sqrt{2}}{4} \approx$

$\approx 149{,}531$.

<u>Задача 2.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{xy}{129}\,dl$, где

Г - дуга эллипса $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$, $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

<u>Решение.</u> Так как кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то воспользуемся формулой

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\,\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

$$\int_{\Gamma} \frac{xy}{129}\,dl = \int_{0}^{\pi/2} \frac{5\cos t \cdot 8\sin t}{129}\sqrt{(-5\sin t)^2 + (8\cos t)^2}\,dt = -\frac{20}{39\cdot 129}\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{25+39\cos^2 t}\ \times$$

$$\times\ d(25+39\cos^2 t) = -\frac{20\cdot 2}{39\cdot 129\cdot 3}(25+39\cos^2 t)^{3/2}\ \Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{40}{39} \cong 1{,}026\,.$$

<u>Задача 3.</u> Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} (8x^2+2xy-2)\,dx + (5y^2+3x)\,dy$,

где Г - дуга параболы

$y = 6x^2$ от точки O(0,0) до точки A(1,6)

<u>Решение.</u> Так как $y = \varphi(x) = 6x^2$, $y' = 12x$ и при движении из точки O(0,0) в точку A x меняется от 0 до 1, то по формуле

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

имеем

$$\int_{\Gamma} (8x^2+2xy-2)\,dx + (5y^2+3x)\,dy = \int_{0}^{1} (8x^2+2x\cdot 6x^2-2+(5\cdot 36x^4+3x)12x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{1}(2160x^5 + 12x^3 + 44x^2 - 2)dx = \left(\frac{2160x^6}{6} + \frac{12x^4}{4} + \frac{44x^3}{3} - 2x\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1127}{3} \approx$$

$\approx 375{,}667.$

<u>Задача 4.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$\oint_{\Gamma} = [3y^2+\cos(x+y^2)]\,dx + [6x^2+2y\cos(x+y^2)]\,dy$, где Г - контур треугольника ABC с вершинами A(7;0), B(7;7), C(0;7), пробегаемый в положительном направлении.

<u>Решение.</u> Применяя формулу Грина $\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

и учитывая, что $P(x,y) = 3y^2+\cos(x+y^2)$, $Q(x,y) = 6x^2+2y\cos(x+y^2)$;

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12x - 2y\sin(x+y^2)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 6y - 2y\sin(x+y^2)$;

получим

$$\oint_{\Gamma} [3y^2+\cos(x+y^2)]\,dx + [6x^2+2y\cos(x+y^2)]\,dy = \iint_{D} (12x - 6y)\,dx\,dy =$$

$$= 6\int_0^7 dx \int_{7-x}^7 (2x-y)dy = 6\int_0^7 \left(2xy - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{7-x}^{7} dx = 6\int_0^7 (2{,}5x^2 - 7x)dx = (5x^3 - 21x^2)\Big|_0^7 =$$

$= 686$.

<u>Задача 5.</u> Вычислить криволинейный интеграл

$\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - 5y + 5y^2 + 2x)\,dx + (e^x \cos y - 5 + 3x)\,dy$, где Г - верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = 2x$, пробегаемая от точки A(2;0) до точки O(0;0).

<u>Решение.</u> Дополним кривую интегрирования Г до замкнутого контура L отрезком OA оси OX.

Тогда получим $\int\limits_{\Gamma} = \oint\limits_{L} - \int\limits_{OA}$

Так как отрезок OA задается уравнением $y = 0$, $0 \le x \le 2$, то $dy = 0$ и

$$\int\limits_{OA} (e^x \sin y - 5y + 5y^2 + 2x)\,dx + (e^x \cos y - 5 + 3x)\,dy = \int_0^2 2x\,dx = x^2 \Big|_0^2 = 4 .$$

Введем обозначения :

$$P = e^x \sin y - 5y + 5y^2 + 2x \;;\; Q = e^x \cos y - 5 + 3x .$$

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 5 + 10y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + 3$, то по формуле Грина находим

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_{D} (8 - 10y)\,dx\,dy ,$$

где область D - верхняя половина круга радиуса 1 .

Поэтому $\iint\limits_{D} (8 - 10y)dx\,dy = 8\iint\limits_{D} dx\,dy - 10\iint\limits_{D} y\,dy\,dx = 8S_D - 10\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy =$

$$= 4\pi - 5\int_0^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx = 4\pi - 5\int_0^2 (2x - x^2)dx = 4\pi - \left(5x^2 - \frac{5x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4\pi - \frac{20}{3} .$$

Тогда $\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - 5y + 5y^2 + 2x)dx + (e^x \cos y - 5 + 3x)dy = 4\pi - \frac{20}{3} - 4 = 4\left(\pi - \frac{32}{3}\right) \approx$

$\approx -30{,}1$.

<u>Задача 6.</u> В каждой точке M эллипса $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, приложена сила $\vec{F}$, равная по величине расстоянию от точки M до центра эллипса и направленная к центру эллипса.

Требуется найти работу силы $\vec{F}$, если точка обходит весь эллипс.

Решение. Сила $\vec{F}$ = P(x,y)$\vec{i}$ + Q(x,y)$\vec{j}$, приложенная в точке M(x,y) эллипса, определяется формулой $\vec{F}$ = -x $\vec{i}$ - y $\vec{j}$, то есть P(x,y) =-x, Q(x,y) =-y .

Согласно формуле $A = \oint_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ имеем : $A = \oint_{\Gamma} (-x)\,dx - y\,dy$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках плоскости x0y, то криволинейный интеграл $\oint_{\Gamma} (-x)\,dx - y\,dy$ равен нулю по любому замкнутому контуру L.

В частности, $A = \oint_{\Gamma} (-x)\,dx - y\,dy = 0$.

Поверхностные интегралы

Задача 1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_{\Sigma} (-x^2+5y^2-z^2+4)d\sigma ,$$

где Σ - часть конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, лежащие между плоскостями y=3 , y=5

Решение .

Перейдем к цилиндрической системе координат

$$z=\rho\cos\varphi \;;\; x=\rho\sin\varphi \;;\; y=y ,$$

в которой конус имеет уравнение y=ρ ,

а элемент поверхности $d\sigma = \sqrt{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2+(\frac{\partial y}{\partial z})^2}\,dxdz =$

$$= \sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}})^2}\,dxdz = \sqrt{2}dxdz$$

Проекцией поверхности в плоскость Oxz является часть плоскости D_{XZ}, заключенная между окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$ или в полярных координатах ρ=3 и ρ=5

Перейдем от поверхностного интеграла к двойному по области D_{XZ} , записывая подынтегральную функцию с учетом уравнения поверхности : $5y^2-(x^2+z^2)+4 = 5(x^2+z^2) - (x^2+z^2)+4 = 4(x^2+z^2+1)$,

тогда

$$\iint_{\Sigma}(-x^2+5y^2-z^2+4)\,d\sigma = \iint_{D_{xz}}4(x^2+z^2+1)\sqrt{2}\,dx\,dy = 4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_3^5(\rho^2+1)\sqrt{2}\,\rho d\rho =$$

$$= \varphi\left|_0^{2\pi} 4\sqrt{2}(\frac{\rho^4}{4}+\frac{\rho^2}{2})\right|_3^5 = 2\pi 4\sqrt{2}(\frac{625}{4}+\frac{25}{2}-\frac{81}{4}-\frac{9}{2}) = 5114{,}8.$$

Задача 2 .

Для части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, вырезаемой конусом $x^2+y^2=z^2$,$z\geq 0$, с поверхностной плотностью $\gamma=4z+6$ найти момент инерции относительно плоскости Oxy .

Решение .

Найдем уравнение линии L пересечения сферы и конуса :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{9}{2} \\ z^2=\dfrac{9}{2} \end{cases},$$

тогда линия L - окружность $x^2+y^2=\frac{9}{2}$ лежащая в плоскости $z=\frac{3}{\sqrt{2}}>0$

Рассматриваемая поверхность Σ проектируется в плоскость Oxy в область D_{xy} – круг с центром в начале координат и радиусом $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Момент инерции поверхности относительно плоскости Oxy определяется по формуле :

$$I_{xOy}=\iint_{\Sigma} z^2\gamma(x,y,z)\, d\sigma$$

Для поверхности сферы

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy$$

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \quad ,\textit{тогда}$$

$$d\sigma=\sqrt{\frac{9-x^2-y^2+x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}\,dxdy=\frac{3dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Поверхностная плотность γ может быть выражена через x и y :

$$\gamma=4\sqrt{9-x^2-y^2}+6$$

$$I_{xOy}=\iint_{D_{xy}} (9-x^2-y^2)(4\sqrt{9-x^2-y^2}+6)\frac{3dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

Получившийся двойной интеграл удобно вычислить в полярной системе координат $x=\rho\cos\varphi$,$y=\rho\sin\varphi$,$x^2+y^2=\rho^2$,причем для

области D_{xy} $0\leq\rho\leq 3/\sqrt{2}$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$

$$I_{x0y} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3/\sqrt{2}} (9-\rho^2)\left(4\sqrt{9-\rho^2}+6\right)\frac{3\rho d\rho}{\sqrt{9-\rho^2}} =$$

$$=2\pi \int_0^{3/\sqrt{2}} [4(9-\rho^2)+6\sqrt{9-\rho^2}\,]\rho d\rho=6\pi[4(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3})+6(-1/2)\frac{(9-\rho^2)^{3/2}}{3/2}]\Bigg|_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} =$$

$$= 6\pi[4(81/4 - 9/2\sqrt{2}\,) - 2(9-9/2)^{3/2}+2\cdot 9^{3/2}]=6\pi[81-9\sqrt{2}\,-27/\sqrt{2}\,+54) \approx$$
$$\approx 1943{,}9\ (кг\cdot м^2)$$

Задача 3.

Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_\Sigma (3+5y-3z)dydz+(4+z-x)dzdx+(2+2x-7y)dxdy\ ,$$

где Σ- внешняя сторона части конуса $z^2=x^2+y^2$, $z\geq 0$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=25$.

Решение.

Заданный поверхностный интеграл можно представить как сумму двойных интегралов в соответствии с выражениями

$$\iint_\Sigma P(y,z)dy\,dz + Q(x,z)dz\,dx + R(x,y)dx\,dy =$$

$$=\pm\iint_{Dyz} P(y,z)dy\,dz \pm \iint_{Dxz} Q(x,z)dz\,dx \pm \iint_{Dxy} R(x,y)dx\,dy\ , \qquad (a)$$

где D_{yz} , D_{xz} , D_{xy} - проекции поверхности Σ в соответствующие координатные плоскости , а знак перед тем или иным двойным интегралом определяется знаком косинуса угла между внешней нормалью $\vec{n}$ к поверхности Σ и соответствующим ортом .

Поскольку Σ - часть поверхности конуса , а плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии конуса , то в нашей задаче , когда P не зависит от x , Q не зависит от y , двойные интегралы

$\iint_{Dyz} P(y,z)dy\,dz$ и $\iint_{Dxz} Q(x,z)dz\,dx$ войдут в (a) дважды , но с разными

знаками для каждой из симметричных частей конуса , что в сумме даст ноль .

Проекцией поверхности Σ в плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\leq 25$, а угол между нормалью $\vec{n}$ к внешней поверхности конуса и ортом $\vec{\kappa}$ оси Oz тупой .

Поэтому заданный поверхностный интеграл второго рода сводится к вычислению одного двойного интеграла :

$$\iint_\Sigma (3+5y-3z)dy\,dz +(4+z-x)dz\,dx +(2+2x-7y)dx\,dy =$$

$$=-\iint_{Dxy}(2+2x-7y)dx\,dy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^5(2+2\rho\cos\varphi - 7\rho\sin\varphi)\rho d\rho=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\rho^2}{2}+\frac{2\rho^3}{3}\cos\varphi\ -\frac{7\rho^3}{3}\sin\varphi\right]\Bigg|_0^5 d\varphi=-\int_0^{2\pi}\left[25+\frac{250}{3}\cos\varphi\ -\frac{875}{3}\sin\varphi\right]d\varphi=$$

$$=-(25\varphi+\frac{250}{3}\sin\varphi\ -\frac{875}{3}\cos\varphi)\Bigg|_0^{2\pi}=-25\cdot 2\pi=-50\pi$$

Интеграл вычисляется с помощью перехода к полярной системе координат .

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Задача 1.

Найти производную скалярного поля

$u(x,y,z)=-x^3+2x^2y+4xy^2+3y^3+5y^2z-2yz^2+z^3+z^2x+3zx^2$

в точке M(3,0,5) по направлению вектора $\vec{a}$, если вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями острые углы , $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$

Решение .

Производная скалярного поля u(x,y,z) по направлению вектора $\vec{a}$ определяется соотношение :

$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, где \frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ - частные производные функции u(x,y,z) , $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Найдем частные производные функции поля u(x,y,z) и вычислим их значения в заданной точке M(3,0,5) :

$\frac{\partial u}{\partial x}=-3x^2+4xy+4y^2+z^2+6zx$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=-3\cdot 3^2+4\cdot 3\cdot 0+4\cdot 0^2+5^2+6\cdot 5\cdot 3=88$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2+8xy+9y^2+10yz-2z^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=2\cdot 3^2+8\cdot 3\cdot 0+9\cdot 0+10\cdot 0\cdot 5-2\cdot 5^2=-32$

;

$\frac{\partial u}{\partial z}=5y^2-4yz+3z^2+2zx+3x^2$, $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=5\cdot 0-4\cdot 0\cdot 5+3\cdot 5^2+2\cdot 5\cdot 3+3\cdot 3^2=132$.

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ по условию равны :

$\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\sqrt{1-0{,}25-0{,}5}=0{,}5$

Тогда значение производной скалярного поля u(x,y,z) по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M равно :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\Big|_M = 88\cdot\frac{1}{2} - 32\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 132\frac{1}{2} = 110 - 16\sqrt{2} \approx 87{,}37 .$$

Задача 2.

Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(x,y,z)=\ln(7x^2+2y^2+5z^2)$ в точке M(6,8,4) .

Решение .

Наибольшая скорость V возрастания скалярного поля u(x,y,z) в заданной точке равна значению модуля градиента функции u(x,y,z) в этой точке :

$$V = \left| \overline{\text{grad}}\, u \right|$$

Градиент скалярной функции $\overline{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

В точке M(6,8,4) градиент функции u(x,y,z) имеет следующие составляющие :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{14x}{7x^2+2y^2+5z^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = \frac{14\cdot 6}{7\cdot 36+2\cdot 64+5\cdot 16} = \frac{21}{115} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4y}{7x^2+2y^2+5z^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{4\cdot 8}{7\cdot 36+2\cdot 64+5\cdot 16} = \frac{8}{115} ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{10z}{7x^2+2y^2+5z^2} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = \frac{10\cdot 4}{7\cdot 36+2\cdot 64+5\cdot 16} = \frac{10}{115} .$$

Тогда

$$V = \sqrt{\left(\frac{21}{115}\right)^2 + \left(\frac{8}{115}\right)^2 + \left(\frac{10}{115}\right)^2} = \frac{\sqrt{21^2+8^2+10^2}}{115} = \frac{\sqrt{605}}{115} = 0{,}214 .$$

Задача 3.

Найти векторные линии в векторном поле $\vec{a} = (8x+2z)\vec{i} + (-9x-8z)\vec{k}$

Решение .

Уравнение векторных линий плоского поля , составляющая которого вдоль оси Oy равна нулю ($a_y = 0$) , имеет вид :

$$\frac{\partial x}{a_x} = \frac{\partial z}{a_z}$$

а в таком случае

$$\frac{\partial x}{8x+2z} = \frac{\partial z}{-9x-8z}$$

что сводится к однородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-9x-8z}{8x+2z} \quad \textit{или} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-9-8\frac{z}{x}}{8+2\frac{z}{x}}.$$

Выполним подстановку

$\frac{z}{x}$ = u(x) , $\frac{\partial z}{\partial x}$ = u′x+u ,

u′x+u = $\frac{-9-8u}{8+2u}$, откуда u′x = $\frac{-9-16u-2u^2}{8+2u}$,

и после разделения переменных

$\frac{8-2u}{-9-16u-2u^2}$du = - $\frac{\partial x}{x}$.

Интегрируя , получаем

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2u^2+16u+9)}{2u^2+16u+9} = -\int\frac{dx}{x} \quad ; \quad \frac{1}{2}\ln\left|2u^2+16u+9\right| = \ln\frac{C}{x}$$

$$\sqrt{2u^2+16u+9} = \frac{C}{x}$$

Выполним обратную подстановку

$$u = \frac{x}{z} \qquad \sqrt{2\frac{z^2}{x^2}+16\frac{z}{x}+9} = \frac{C}{x}$$

или

$2z^2+16zx+9x^2 = C^2$ - уравнение кривой второго порядка , являющейся векторной линией заданного поля .

<u>Задача 4.</u>

Найти поток векторного поля $\vec{a}$ =30x$\vec{i}$ + 30y$\vec{j}$ + 15$\vec{k}$

через часть поверхности

Σ: z = 4-x^2 - y^2 , расположенную в I - ом октанте .

<u>Решение .</u>

Поверхность Σ - часть поверхности параболоида , расположенная в первом октанте .

Единичный вектор нормали к поверхности Σ найдем через градиент функции Φ(x,y,z)=z+x^2+y^2-4

$$\vec{n} = \frac{\overline{grad}\phi}{\left|\overline{grad}\phi\right|} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial z})^2}} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Элемент поверхности Σ , заданной уравнением z=f(x,y) , найдем по известной формуле

$$d\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\; dxdy ,$$

тогда

$$d\sigma = \sqrt{1+4x^2 +4y^2}\; dxdy .$$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{xy} , которая является проекцией поверхности Σ в плоскости Oxy (см. рис. 2):

$$\Pi_{\Sigma^+} = \iint\limits_{Dxy} (\vec{a},\vec{n})\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$:

$$(\vec{a},\vec{n}) = a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = \frac{60x^2 + 60y^2 + 15}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} = 15\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

Тогда

$$\Pi_{\Sigma^+} = \iint\limits_{D_{xy}} 15\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = 15 \iint\limits_{D_{xy}} (1+4(x^2+y^2))dxdy =$$

$$= 15\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (1+4\rho^2)\rho\, d\rho = 15\cdot\pi/2\, (\rho^2/2 + 4\rho^4/4)\Big|_0^2 = 15\cdot\pi/2(2+16) = 135\pi = 423{,}9 .$$

<u>Задача 5.</u>

Найти поток векторного поля $\vec{a}$ = (-x+sinz) $\vec{i}$ + (x^2z+3y) $\vec{j}$ + (z+cosy) $\vec{\kappa}$

через замкнутую поверхность $\Sigma : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{cases}$

<u>Решение.</u>

Найдем уравнение линии пересечения конуса z = $\sqrt{x^2 + y^2}$ и параболоида z = 2 - x^2 - y^2 :

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z + x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - z \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Поток векторного поля через замкнутую поверхность определим по теореме Остроградского - Гаусса.

Найдем дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = -1 + 3 + 1 = 3 .$$

$$\Pi_{\Sigma^+} = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iiint\limits_{V} 3\, d\upsilon = 3 \iiint\limits_{V} d\upsilon = 3\upsilon ,$$

где υ - объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\sum$.

Вычислим υ , переходя к цилиндрической системе координат :
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $d\upsilon = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.
Уравнение конуса в этой системе координат имеет вид $z = \rho$, уравнение параболоида $z = 2 - \rho^2$. Проекция тела в плоскость 0xy - круг $\rho \le 1$. Тогда

$$\upsilon = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{\rho}^{2-\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2-\rho^2-\rho)\rho\, d\rho = 2\pi\left(\frac{2\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 3\cdot \frac{5}{12}\cdot 2\pi = 5\frac{\pi}{6}$$

Поток $\Pi_{\Sigma^+} = 3\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \approx 7{,}854$.

<u>Задача 6.</u>

Найти работу силы $\vec{F} = (\sin x + 7y)\vec{i} + (7x + \cos y)\vec{j}$ при перемещении от точки O(0,0) до точки $M_1(3,18)$ по дуге линии L : $y = 2x^2$.

<u>Решение .</u>
Работа силы $\vec{F}$ при перемещении точки по линии L определяется как криволинейный интеграл II рода :

$$A = \int\limits_L (\vec{F}, d\vec{r}) ,$$

где $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$ - заданная сила, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

Тогда $A = \int\limits_L F_x dx + F_y dy = \int\limits_L (\sin x + 7y)dx + (7x + \cos y)dy$.

Найдем связь между дифференциалами переменных x и y на линии L :
$y = 2x^2$, $dy = 4x\, dx$, тогда

$$A = \int\limits_{x_0}^{x_{M1}} [(\sin x + 7\cdot 2x^2) + (7x + \cos 2x^2)4x]dx = \int\limits_0^3 (\sin x + 42x^2 + 4x\cos 2x^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \sin x\, dx + 42\int\limits_0^3 x^2\, dx + \int\limits_0^3 \cos 2x^2\, d(2x^2) = -\cos x\Big|_0^3 + 42x^3/3\Big|_0^3 + \sin 2x^2\Big|_0^3 =$$

$$= -\cos 3 + 1 + 14\cdot 27 + \sin 18 = 378 - \cos 3 + \sin 18 \approx 379 .$$

<u>Задача 7</u>.

Найти циркуляцию векторного поля

$\vec{a}$ = (x-z)$\vec{i}$ + (-y+z) $\vec{j}$ + (-x-y)$\vec{k}$

по замкнутому контуру L : $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\sin t \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$

<u>Решение.</u>

Циркуляция определяется как криволинейный интеграл второго рода :

$$Ц = \oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz .$$

на линии L x = 6 cost, dx = -6 sint dt ,

y = 6 sint, dy = 6 cost dt ,

z = 1-cost, dz = sint dt , $0 \le t \le 2\pi$

тогда

$$Ц = \int_0^{2\pi} [(6\cos t -1+\cos t)(-6\sin t)+(-6\sin t+1 -\cos t)(6\cos t)+(-6\cos t-6\sin t)\sin t]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-84 \sin t \cos t - 6\cos^2 t - 6\sin^2 t+6\sin t+6\cos t)\,dt = -6\int_0^{2\pi}(7\sin 2t+1+\sin t+\cos t)\,dt =$$

$$= -6(-7\cdot 1/2\cdot\cos 2t + t -\cos t +\sin t)\Big|_0^{2\pi} = -6\cdot 2\pi = -12\pi \approx -37{,}68 .$$

<u>Задача 8.</u>

Найти модуль циркуляции векторного поля

$\vec{a}$ = x(24y +5z) $\vec{i}$ + y(24z +5x) $\vec{j}$ + z(24x +5y) $\vec{\kappa}$

по замкнутому контуру L : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = 5 \end{cases}$,

воспользовавшись теоремой Стокса

<u>Решение .</u>

В данной задаче Σ - часть плоскости z = 5, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 2y$ (контуром L) . При выбранном направлении обхода контура L, единичная нормаль к Σ $\vec{n} = \vec{k}$, а dσ = dxdy.

Для заданного поля $\vec{a}$

$\overline{\text{rot}}\,\vec{a}$ = (5z -24y)$\vec{i}$ + (5x -24z) $\vec{j}$ + (5y -24x)$\vec{k}$

$\overline{\text{rot}}\,\vec{a}\cdot\vec{n}$ = 5y - 24x .

$$Ц = \iint_\Sigma (5y -24x)\,dxdy$$

Переходя к цилиндрическим координатам, имеем

$$Ц = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi}(5\rho \sin\varphi -24\rho \cos\varphi)\rho\, d\rho ,$$

т.к. окружность $x^2 + y^2 = 2y$ в цилиндрических координатах имеет уравнение

$\rho = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

$$Ц = \int_0^{\pi} [5/3\ \rho^3 \sin\varphi - 24 \cdot 1/3 \cdot \rho^3 \cos\varphi]\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi}[5/3 \cdot 8\sin^4\varphi - 8\cdot 8\sin^3\varphi \cos\varphi]\, d\varphi =$$

$$= \frac{40}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi - 64\int_0^{\pi} \sin^3 d(\sin\varphi) = \frac{40}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\, d\varphi -$$

$$- 64\frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi} = \frac{10}{3}\int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{10}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = 5\pi \approx 15{,}7 .$$

<u>Задача 9 .</u>

Найти ротор и дивергенцию векторного поля

$$\vec{a} = z^2\vec{i} + 3z^2\vec{j} + (2xz + 6yz + 12z^2)\vec{k} \quad \text{в точке } M_0(3,4,7) .$$

Является ли данное поле потенциальным или соленоидальным ?

<u>Решение</u> .

Дивергенция векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + 0 + 2x + 6y + 24z .$$

В точке $M_0(3,4,7)$

$\operatorname{div}\vec{a} = 2\cdot 3 + 6\cdot 4 + 24\cdot 7 = 198$.

Ротор векторного поля

$$\overline{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= (6z - 6z)\vec{i} + (2z - 2z)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = \vec{0}$$

в любой точке и в точке M_0 .

Данное векторное поле является потенциальным, т.к. $\overline{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = 0$.

Библиографический список.

<u>Основная литература</u>

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов/Е.С.Вентцель.-7-е изд., стер.-М.:Высш.шк.,2001.-575с.:ил.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика:Учеб.пособие для вузов/В.Е.Гмурман.-9-е изд.,стер.-М.: Высш.шк.,2003.-479с.:ил.
3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра:Справ.пособие к решению задач/ А. А.Гусак.-2-е изд.,стер.-Минск: ТетраСистемс,2001.-288с.:ил.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие / Л.А.Кузнецов. – 7-е изд., перераб. – М.: Высш.шк. – 2004. – 175 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.1.-2001.-416с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.2.-2001.-544с.

Дополнительная литература

1. Гусак А.А. Теория вероятностей: Справ.Г 96 пособие к решению задач/А.А.Гусак,Е.А. Бричикова.- 3- е изд.,стер.-Минск:Тетра-Системс,2002.-288с.:ил.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т.: Учеб.пособие. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк. – Т.1 – 2004. – 304 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т.: Учеб.пособие. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк. – Т.2 – 2004. – 415 с.
4. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие для вузов/ С.Б.Кадомцев.-М.:Физматлит,2001.- 160с.:ил.
5. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и К 795 математическая статистика: Учебник для вузов/Н.Ш.Кремер.-2-е изд.,перераб.и доп.-М.:Юнити-Дана,2004.-573с.:ил.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие / Л.А.Кузнецов. – 7-е изд., перераб. – М.: Высш.шк. – 2004. – 175 с.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.1.-2001.-416с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.2.-2001.-544с.