МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
21 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
_____В.В. Глаголев

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
"Алгебра и геометрия"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования - программы специалитета

по направлению подготовки
10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

со специализацией
Защищённые автоматизированные системы управления

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 100503-01-22

Тула 2022 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Разработчик:
Глаголев В.В., зав. каф., д. ф.-м. н., профессор _____
подпись

1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

2. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

1 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. Какой знак будет иметь слагаемое $a_{12}a_{25}a_{31}a_{44}a_{56}a_{63}$ при раскрытии определителя 6-ого порядка?

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} 3X - 2Y - 5E = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 5Y + 3E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$.

4. Равны ли $A^{-1}B$ *и* BA^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$? Объясните почему.

5. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ методом «окаймляющих миноров».

6. Векторы **a** = {4;-5;-4}, **b** = {5;-1;0} и **c** = {2;4;-3} заданы в ортонормированном базисе. Найдите (**a**,**b**), |[**a**,**b**]|, (**a**,**b**,**c**).

7. В трапеции ABCD **AD**=λ**BC**. Выразите векторы **AC** и **BD** через векторы **AD** и **CD**.

8. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, и 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из данной вершины. Найдите величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами.

9. Объем тетраэдра ABCD равен 5 ед^3, три его вершины находятся в точках A(2,1,-1), B=(3,0,1), C(2,-1,3). Найдите четвертую вершину D, если она лежит на оси Oy.

10. Даны три силы **P**={7,3,-4}, **Q**={3,-2,2} и **R**={-5,4,3}, приложенные к точке A(-5,0,4). Вычислите работу, производимую равнодействующих этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B(4,-3,5).

11. Вершины пирамиды находятся в точках A (4;2;3), B(-5;-4;2) , C(5;7;-4), D(6;4;-7), Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и вершины пирамиды B и C.

12. Даны уравнения двух сторон прямоугольника 3x-4y+5=0, 4x+3y-7=0 и координаты одной из его вершин A(-2;1). Найдите уравнения двух других сторон прямоугольника.

13. Вычислите координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон 2x-y+4=0, 2x-y+10=0 и уравнение одной из его диагоналей x+y+2=0.

14. Составьте уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

15. Будут ли прямые: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ перпендикулярны?

16. Составьте уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданному условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точки A(-3,3) и B(4,1) равна 31. Постройте её.

2 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. Не решая систему $\begin{cases}3x+4y=22\\x+3y-2z=-15\\2x+y+2z=37\end{cases}$, определить число её решений.

2. Решить систему $\begin{cases}2x_1+2x_2-2x_3+x_4-3x_5=-2\\3x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=3\\x_1-3x_2+4x_3-2x_4+5x_5=8\end{cases}$.

3. Решить систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 = -3 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$.

4. Решить систему уравнений матричным методом $\begin{cases} 2x + 3y + 11z = 7 \\ x + y + 5z = 3 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$.

5. Решить систему уравнений по правилу Крамера: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$.

6. Начертить область $|z-1| \le 1, |z+1| > 2$.

7. Вычислить $\dfrac{\left(\dfrac{i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}}{\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}}$.

8. Решить уравнение $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$.

9. Вычислить $\operatorname{Arcsin} 4$.

10. Доказать или опровергнуть утверждение: $A \otimes B = (A \otimes C) \otimes (B \otimes C)$, где $A \otimes B$- симметрическая разность множеств.

11. В олимпиаде по математике приняло участие 40 человек. Им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек, по геометрии и тригонометрии – 8 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько: а) человек решили все задачи? б) человек решили только две задачи? в) человек решили одну задачу?

12. Определить, обладает ли отношение $aRb \leftrightarrow a + b - \textit{четное число}$ на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ свойствами *рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности?*

13. Какие из следующих множеств образуют полугруппу, а какие группу относительно операции сложения:
- множество целых неотрицательных чисел;
- множество целых чисел кратных 3;
- множество иррациональных чисел;

- множество вещественных чисел?

14. Разложить многочлен $x^4+5x^3+7x^2+5x+6$ на множители в действительной области. При делении использовать алгоритм Евклида.

15. Выразить многочлен x^6+y^6 через элементарные симметрические многочлены $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$.

16. Найдите корни комплексного многочлена $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

3 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. Является ли множество всех сходящихся последовательностей $\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $\{b_1,b_2,...,b_n\}$ линейным пространством, где сумма $\{a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n\}$, произведение $\{\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n\}$?

2. Является ли множество всех тригонометрических полиномов $a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x$ второго порядка линейным пространством, где сумма f(x)+g(x), произведение $\alpha f(x)$?

3. Покажите, что дифференцирование многочленов третей степени $P_3(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ является линейным преобразованием.

4. Найти матрицу, область значений, ядро, ранг и дефект оператора проецирования векторов трехмерного пространства на вектор $\bar{e}_1$ параллельно координатной плоскости векторов $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

5. Найти обратное преобразование, если $A\bar{x}=\{2x_1-x_2+x_3,3x_1-x_3,x_2\}$.

6. Найти матрицу в базисе $(\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3')$, где

$$\begin{cases}\bar{e}_1'=3\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3\\ \bar{e}_2'=2\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3\\ \bar{e}_3'=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2+5\bar{e}_3\end{cases}$$, если она задана в базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ $\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

7. В вещественном линейном пространстве найти базис, в котором матрица отображения $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ имеет диагональный вид.

8. Найти матрицу преобразования, состоящего в двух поворотах в пространстве R^3: сначала на угол α против часовой стрелки вокруг вектора $\bar{k}$, а потом на

угол β против часовой стрелки вокруг вектора $\bar{j}$ $(\alpha, \beta < 90^o)$, если смотреть с концов векторов $\bar{k}, \bar{j}$.

9. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Линейное преобразование А заключается в повороте на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу линейного преобразования $B = A^2 + \sqrt{2}A + E$.

11. Найти матрицу в базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3')$, где $\begin{cases} \bar{e}_1' = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3 \end{cases}$, если она задана в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Исследовать кривую второго порядка $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$ и построить её в «старой» и «новой» системах координат.

13. Привести квадратичную форму $x^2 - 3y^2 - 4z^2 + 4xy - 2xz + 3yz$ к каноническому виду методом Лагранжа.

14. Привести матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ к диагональному виду ортогональным преобразованием. Укажите базис.

15. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$ к каноническому виду. Указать базис.

16. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. В качестве достаточных условий экстремума использовать знакоопределённость формы второго дифференциала.

3. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

1 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. С каким знаком входит в определитель 9 порядка слагаемое $a_{61}a_{22}a_{15}a_{94}a_{46}a_{38}a_{89}a_{53}a_{77}$?

2. Найти определитель двумя методами: методом разложения по строке или столбцу и методом приведения к треугольному виду: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти A^{-2}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$ методом «нулей и единиц».

5. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Определите число z так, чтобы векторы **a** = {1;3;-1}, **b** = {2;-2;z}, **c** = ={3;1;5} были линейно зависимы.

7. Разложить вектор **s**=**a**+**b**+**c** по трем некомпланарным векторам **m**=**a**+**b**-2**c**, **n**=**a**-**b**, **p**=2**b**+3**c**.

8. Сила **F**= {2,2,9} приложена к точке А (4,2,-3). Вычислить модуль момента силы **F** относительно точки В(2,4,0).

9. Является ли четырехугольник ABCD трапецией, если его вершины А(-1;1;2), В(2;-2;2), С(2;1;-3), D (-1;7;-8)?

10. Даны вершины треугольника: А(7; 0), В(1;4), С(-8;-4). Найти точку пересечения медианы АМ и высоты СН.

11. Параллельны ли прямые $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ и $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z+8}{4}$?

12. Составить уравнение катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы 2x + 3y – 5 = 0 и вершину прямого угла (2, -1).

13. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A(1,-1,2), перпендикулярно плоскости $x = 4 - t_1 + t_2$, $y = 2 + t_1 + 2t_2$, $z = -1 + 7t_1 + 3t_2$.

14. Две точки A(1,0,3) и B(-1,2,1) являются вершинами тетраэдра ABCD, точка P(-1,5,2) - середина ребра BC, а точка M(0,1,4) - точка пересечения медиан грани BCD. Составить уравнения плоскостей, в которых лежат грани тетраэдра.

15. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от любой точки линии до двух точек A(-1, 2) и B(3, -1) равна 18,5.

16. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек A(–3,5) и B(4,2) равно 1/3.

2 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. Установить число линейно независимых уравнений системы и решить её

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

2. Решить систему $\begin{cases} 11x_1 - 9x_2 - 34x_3 = 19 \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -31 \\ x_1 + x_2 + 14x_3 = -27 \\ 13x_1 - 7x_2 - 6x_3 = -35 \\ 3x_1 - 7x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$.

3. Решить систему однородных уравнений: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

4. Решить систему уравнений методом Гаусса: $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$.

5. Решить систему уравнений методом Жордано-Гаусса: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ 4x + y - 3z = 3 \end{cases}$.

6. Вычислить $\frac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

7. Найти все корни числа $\sqrt[4]{\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$.

8. Вычислить $Ln(1+i)$.

9. Задано универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ и в нем подмножества $A=\{x|x\le 4\}$, $B=\{2,4,5,6\}$, $C=\{1,3,5,6\}$, $D=\{x|x-простое\}$, $E=\{1,2,6,7\}$. Найти множества $CD\overline{E}\otimes A$, $D\overline{A}\times(E-C)$, $2^{AD}-2^{\overline{B}}$.

10. Является ли отношение на множестве **Z:** $aRb\leftrightarrow x\ делится\ на\ y$ отношением порядка**?**

11. Определить обладает ли отношение $aRb\leftrightarrow a+b-четное\ число$ на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ свойствами *рефлексивности, антирефлексивности, транзитивности?*

12. Какие из следующих множеств образуют кольцо, а какие поле:
- множество натуральных чисел;
- множество целых неположительных чисел;
- множество четных чисел;
- множество рациональных чисел;
- множество действительных чисел?

13. Найти НОД многочленов x^3-2x+1 и x^4-x^3+x-1.

14. Используя алгоритм Евклида, найти НОД многочленов x^3+x^2-x-10 и $x^3-2x^2-5x+10$.

15. Разложить многочлен $x^5+9x^4+30x^3+60x^2+104x+96$ на множители в действительной и комплексной области. Деление многочленов произвести по схеме Горнера.

16. Найти сумму квадратов корней многочлена $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

3 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-2.

1. Является ли множество всех многочленов степени меньшей или равной 5 линейным пространством, где сумма a+b, произведение αa ?

2. Образует ли линейной пространство множество всех функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, принимающих положительные значения, в котором определены две операции: сумма любых двух элементов $f(t) \cdot g(t)$ и произведение $f^{\alpha}\{t)$?

3. Образует ли линейное пространство множество всех многочленов четвертой степени от переменной x, в котором определены две операции: сумма любых двух элементов $P_4(x)+Q_4(x)$, а произведение $\alpha P_4(x)$?

4. Могут ли векторы $x_1 = \{1, 1, 0\}$, $x_2 = \{1,0,0\}$, $x_3 = \{1,1,1\}$ образовать базис в трехмерном пространстве? Построить по данной системе векторов ортонормированный базис.

5. Найти матрицу преобразования, состоящую в повороте векторов в пространстве R^3 на угол 120º вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$.

6. В пространстве R^2 дан базис $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$. Найти в этом базисе матрицу преобразования симметрии относительно оси Ох.

7. Составить матрицу, найти ядро, ранг и дефект линейного оператора: ортогонального проецирования на прямую $x = y = z$.

8. Найти матрицу линейного преобразования, заключающегося в дифференцировании многочленов третей степени $P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в базисе $1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

9. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего векторы $\bar{a}_1 = \{2,3,5\}$, $\bar{a}_2 = \{0,1,2\}$, $\bar{a}_3 = \{1,0,0\}$ соответственно в векторы $\bar{b}_1 = \{1,1,1\}$, $\bar{b}_2 = \{1,1,-1\}$, $\bar{b}_3 = \{2,1,2\}$.

10. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Привести матрицу квадратичной формы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ к каноническому виду и исследовать квадратичную форму на знакоопределенность.

12. Привести уравнение $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$ к каноническому виду и построить кривую, определяемую этим уравнением.

13. Привести квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием и указать базис.

14. Методом Лагранжа привести квадратичную форму $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$ к каноническому виду.

15. Исследовать квадратичную форму $-3x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ на знакоопределенность.

16. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(6 - x - y)$ при x > 0, y > 0. В качестве достаточных условий экстремума использовать знакоопределённость формы второго дифференциала.