

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

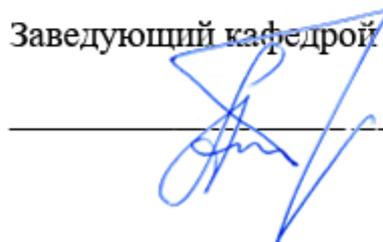
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и
конструкции»

« 18 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



А.А. Трещев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)
«Современные IT-технологии»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Промышленное и гражданское строительство

Форма обучения: очная, заочная, очно-заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

Курсовая работа №1. Семестр №2

Часто в классической математике многое выглядит элементарно. Так, если нужно найти экстремум некоторой функции, то предлагается взять ее производную, приравнять нулю, решить полученное уравнение и т.д. Вне сомнения, что первые два действия в состоянии выполнить многие школьники и студенты. Что касается третьего действия, то позвольте усомниться в его элементарности.

Пусть после взятия производной мы пришли к уравнению $tg(x)=1/x$. Проведем следующие преобразования:

$$tg(x)=1/x \Rightarrow x \cdot tg(x)=1 \Rightarrow x^2 \cdot tg=1 \Rightarrow x^2=1 / tg(x) \Rightarrow x = \pm \sqrt[1]{\frac{1}{tg}}$$

Если в приведённой здесь цепочке преобразований ничто не взволновало вашу мысль, то может быть лучше обучение на этом прекратить и заняться чем-нибудь другим, не требующим уровня знаний выше церковноприходской школы начала XX века.

В самом деле, мы прекрасно решаем квадратные и биквадратные уравнения, наипростейшие тригонометрические и степенные. Еще водятся «мастодонты», знающие о существовании формул Кардано для кубических уравнений. В общем же случае надежд на простое аналитическое решение нет. Более того, доказано, что даже алгебраическое уравнение выше четвертой степени неразрешимо в элементарных функциях. Поэтому решение уравнения проводят численно в два этапа (здесь разговор идет лишь о вещественных корнях уравнения). На первом этапе производится *отделение корней* – поиск интервалов, в которых содержится только по одному корню. Второй этап решения связан с *уточнением корня* в выбранном интервале (определением значения корня с заданной точностью).

В общем случае отделение корней уравнения $f(x)=0$ базируется на известной теореме, утверждающей, что если непрерывная функция $f(x)$ на кон-

цах отрезка $[a, b]$ имеет значения разных знаков, т.е. $f(a) \times f(b) \leq 0$, то в указанном промежутке содержится хотя бы один корень. Например, для уравнения $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$ видим, что при $x \rightarrow \infty$ $f(x) > 0$, при $x \rightarrow -\infty$ $f(x) < 0$, что уже свидетельствует о наличии хотя бы одного корня.

В общем случае выбирают некоторый диапазон, где могут обнаружиться корни, и осуществляют «прогулку» по этому диапазону с выбранным шагом h для обнаружения перемены знаков $f(x)$, т.е. $f(x) \times f(x+h) < 0$.

При последующем уточнении корня на обнаруженном интервале не надейтесь никогда найти *точное* значение и добиться обращения функции в нуль при использовании калькулятора или компьютера, где сами числа представлены ограниченным числом знаков. Здесь критерием может служить приемлемая *абсолютная* или *относительная погрешность* корня. Если корень близок к нулю, то лишь относительная погрешность даст необходимое число значащих цифр. Если же он весьма велик по абсолютной величине, то критерий абсолютной погрешности часто дает совершенно излишние верные цифры. Для функций, быстро изменяющихся в окрестности корня, может быть привлечен и критерий: *абсолютная величина значения функции* не превышает заданной допустимой погрешности.

1.2. Уточнение корней методом половинного деления (дихотомии)

Самым простейшим из методов уточнения корней является *метод половинного деления*, или *метод дихотомии*, предназначенный для нахождения корней уравнений, представленных в виде $f(x) = 0$.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ на концах

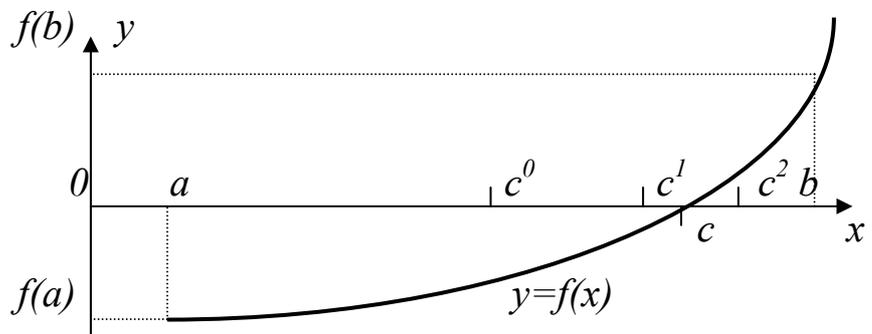


Рис. 1. Метод деления отрезка пополам

отрезка $[a, b]$ имеет значения разных знаков, т.е. $f(a) \times f(b) \leq 0$ (рис. 1), тогда на отрезке имеется хотя бы один корень.

Возьмем середину отрезка $c = (a+b)/2$. Если $f(a) \times f(c) \leq 0$, то корень явно принадлежит отрезку от a до $(a+b)/2$ и в противном случае от $(a+b)/2$ до b .

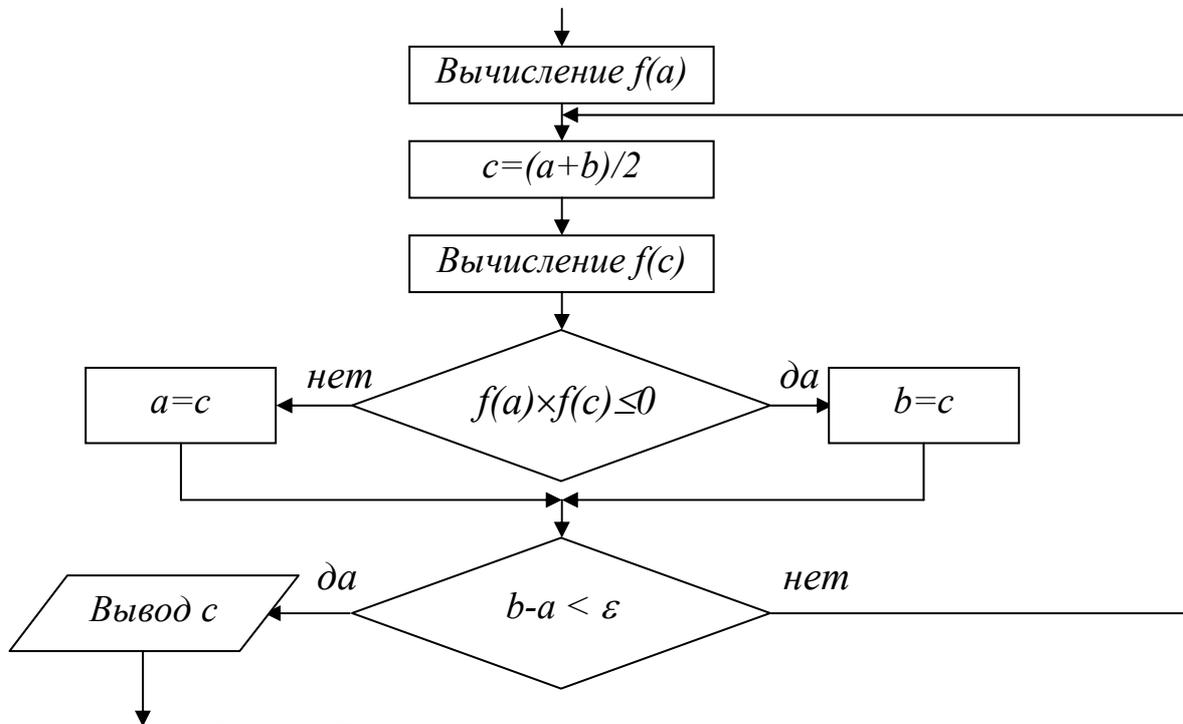


Рис. 2. Блок-схема метода половинного деления

Поэтому берем подходящий из этих отрезков, вычисляем значение функции в его середине и т.д. до тех пор, пока длина очередного отрезка не окажется меньше заданной предельной абсолютной погрешности $(b-a) < \varepsilon$.

Так как каждое очередное вычисление середины отрезка c и значения функции $f(c)$ сужает интервал поиска вдвое, то при исходном отрезке $[a, b]$ и предельной погрешности ε количество вычислений n определяется условием $(b-a)/2^n < \varepsilon$, или $n \sim \log_2((b-a)/\varepsilon)$. Например, при исходном единичном интервале и точности порядка 6 знаков ($\varepsilon \sim 10^{-6}$) после десятичной точки достаточно провести 20 вычислений (итераций) значений функции.

С точки зрения машинной реализации (рис. 2) этот метод наиболее прост и используется во многих стандартных программных средствах, хотя существуют и другие более эффективные по затратам времени методы.

1.3. Уточнение корней методом хорд

В отличие от метода дихотомии, обращающего внимание лишь на знаки значений функции, но не на сами значения, метод хорд использует пропорциональное деление интервала (рис. 3).

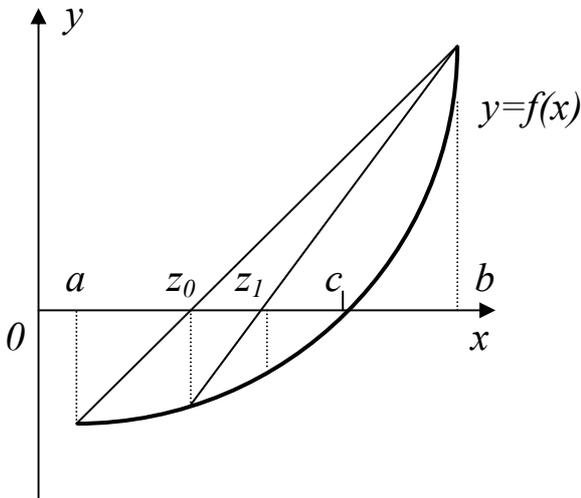


Рис. 3. Метод хорд

Здесь вычисляются значения функции на концах отрезка, и строится «хорда», соединяющая точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Точка пересечения ее с осью абсцисс

$$Z = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

принимается за очередное приближение к корню. Анализируя знак $f(z)$ в сопоставлении со знаком $f(x)$ на концах отрезка, сужаем интервал до $[a, z]$ или $[z, b]$ и

продолжаем процесс построения хорд до тех пор, пока разница между очередными приближениями не окажется достаточно малой (в пределах допустимой погрешности) $|Z_n - Z_{n-1}| < \varepsilon$.

Можно доказать, что истинная погрешность найденного приближения:

$$\left| X^* - Z_n \right| \leq \frac{M - m}{m} |Z_n - Z_{n-1}|,$$

где X^* - корень уравнения, Z_n и Z_{n+1} - очередные приближения, m и M - наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

1.4. Уточнение корней методом касательных (Ньютона)

Обширную группу методов уточнения корня представляют *итерационные методы* - методы последовательных приближений. Здесь в отличие от метода дихотомии задается не начальный интервал местонахождения корня, а его начальное приближение.

Наиболее популярным из итерационных методов является *метод Ньютона (метод касательных)*.

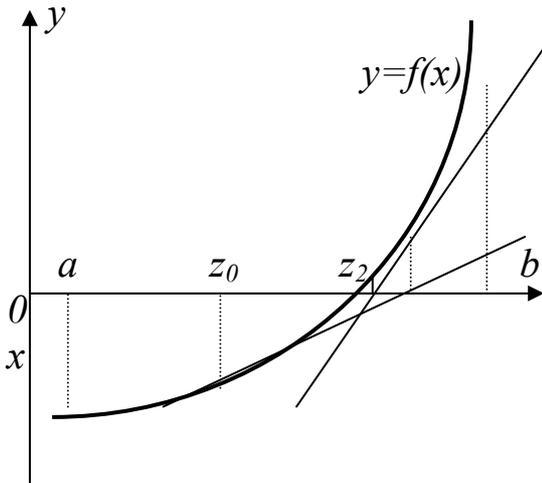


Рис. 4. Метод касательных

Пусть известно некоторое приближенное значение Z_n корня X^* . Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь в ней двумя членами, имеем

$$f(X^*) \approx f(Z_n) + (X^* - Z_n) f'(Z_n) = 0,$$

откуда

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}.$$

Геометрически этот метод предлагает построить касательную к кривой $y=f(x)$ в выбранной точке $x=Z_n$, найти точку пересечения её с осью абсцисс и принять эту точку за очередное приближение к корню (рис. 4).

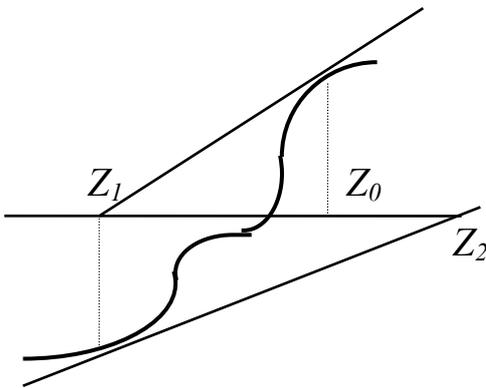


Рис. 5. Расходящийся процесс

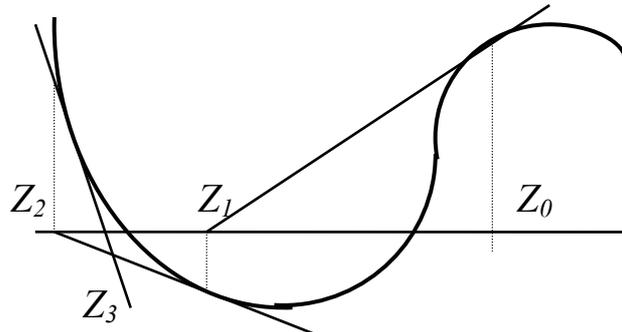


Рис. 6. Приближение к другому корню

Очевидно, что этот метод обеспечивает сходящийся процесс приближений лишь при выполнении некоторых условий (например при непрерывности и знакопостоянстве первой и второй производной функции в окрестности корня) и при их нарушении либо дает расходящийся процесс (рис. 5), либо приводит к другому корню (рис. 6).

Очевидно, что для функций, производная от которых в окрестности корня близка к нулю, использовать метод Ньютона едва ли разумно.

Если производная функции мало изменяется в окрестности корня, то можно использовать видоизменение метода

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}, n=0,1,2,\dots$$

Существуют и другие модификации метода Ньютона.

1.5. Уточнение корней методом простой итерации

Другим представителем итерационных методов является *метод простой итерации*.

Здесь уравнение $f(x)=0$ заменяется равносильным уравнением $x=\varphi(x)$ и строится последовательность значений

$$X_{n+1} = \varphi(X_n), n=0,1,2,\dots$$

Если функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале, причем $|\varphi'(x)| < 1$, то эта последовательность сходится к корню уравнения $x=\varphi(x)$ на этом интервале.

Геометрическая интерпретация процесса представлена на рис. 7. Здесь первые два рисунка (а, б) демонстрируют одностороннее и двустороннее приближение к корню, третий же (в) выступает иллюстрацией расходящегося процесса ($|\varphi'(x)| > 1$).

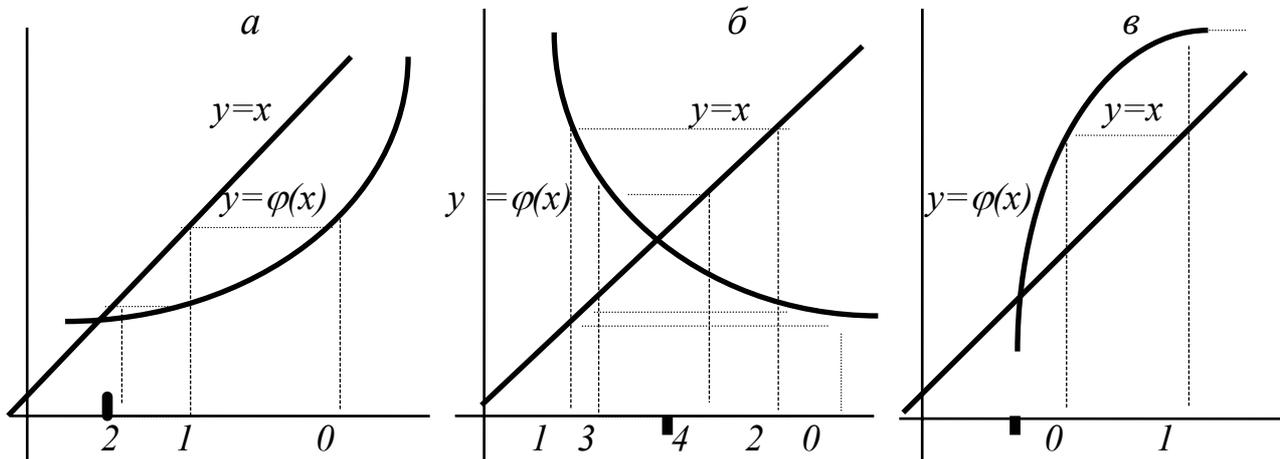


Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода простой итерации

Если $f'(x) > 0$, то подбор равносильного уравнения можно свести к замене $x = x - \lambda f(x)$, т.е. к выбору $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, где $\lambda > 0$ подбирается так, чтобы в окрестности корня $0 < \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq 1$. Отсюда может быть построен итерационный процесс

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $M \geq \max |f'(x)|$ (в случае $f'(x) < 0$ возьмите функцию $f(x)$ с противоположным знаком).

Возьмем для примера уравнение $x^3 + x - 1000 = 0$. Очевидно, что корень данного уравнения несколько меньше 10. Если переписать это уравнение в виде $x = 1000 - x^3$ и начать итерационный процесс при $x_0 = 10$, то из первых же приближений очевидна его расходимость. Если же учесть $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ и принять за приближенное значение максимума $f'(x)$ $M = 300$, то можно построить сходящийся итерационный процесс на основе представления

$$X = X - \frac{X^3 + X - 1000}{300}.$$

Можно и искусственно подобрать подходящую форму уравнения, например:

$$X = \sqrt[3]{1000 - X} \quad \text{или} \quad X = \frac{1000}{X^2} - \frac{1}{X}.$$

Заметим, что существуют и другие методы (наискорейшего спуска, Эйткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рыбакова и т.д.) уточнения корней, обладающие высокой скоростью сходимости.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ EXCEL

2.1. Циклические ссылки

Если в ячейку Excel введена формула, содержащая ссылку на эту же самую ячейку (может быть и не напрямую, а опосредованно – через цепочку других ссылок), то говорят, что имеет место циклическая ссылка (цикл). На практике к циклическим ссылкам прибегают, когда речь идет о реализации итерационного процесса, вычислениях по рекуррентным соотношениям. В обычном режиме Excel обнаруживает цикл и выдает сообщение о возникшей ситуации, требуя ее устранения. Excel не может провести вычисления, так как циклические ссылки порождают бесконечное количество вычисле-

ний. Есть два выхода из этой ситуации: устранить циклические ссылки или допустить вычисления по формулам с циклическими ссылками (в последнем случае число повторений цикла должно быть конечным).

Рассмотрим задачу нахождения корня уравнения методом Ньютона с использованием циклических ссылок. Возьмем для примера квадратное уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$, графическое представление которого приведено на рис. 8. Найти корень этого (и любого другого) уравнения можно, используя всего одну ячейку Excel.

Для включения режима циклических вычислений в меню *Сервис/Параметры/вкладка Вычисления* включаем флажок *Итерации*, при необходимости изменяем число повторений цикла в поле *Предельное число итераций* и точность вычислений в поле *Относительная погрешность* (по умолчанию их значения равны 100 и 0,0001 соответственно). Кроме этих установок выбираем вариант ведения вычислений: *автоматически* или *вручную*. При *автоматическом* вычислении Excel выдает сразу конечный результат, при вычислениях, производимых *вручную*, можно наблюдать результат каждой итерации.

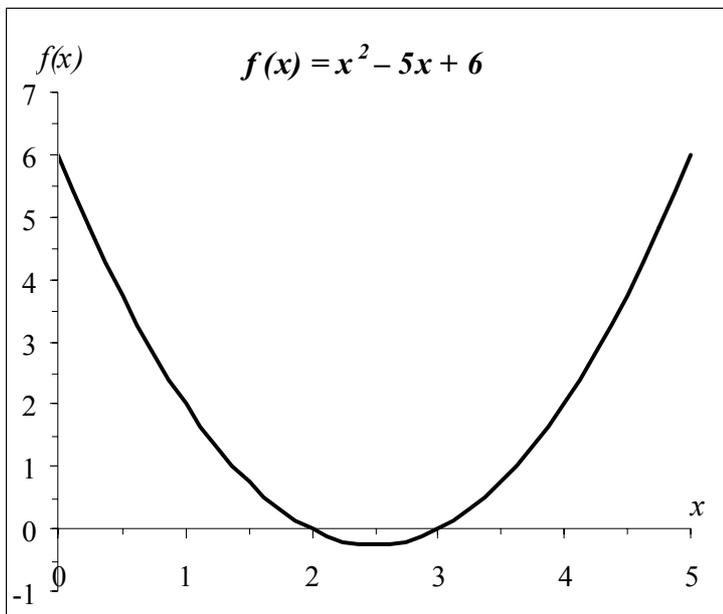


Рис. 8. График функции

Выберем произвольную ячейку, присвоим ей новое имя, скажем — X , и введем в нее рекуррентную формулу, задающую вычисления по методу Ньютона:

$$= X - \frac{F(X)}{F1(X)},$$

где F и $F1$ задают соответственно выражения для вычисления значений функции и ее производной. Для нашего

квадратного уравнения после ввода формулы в ячейке появится значение 2, соответствующее одному из корней уравнения (рис. 8). В нашем случае на-

начальное приближение не задавалось, итерационный вычислительный процесс начинался со значения, по умолчанию хранимого в ячейке X и равного нулю. А как получить второй корень? Обычно это можно сделать изменением начального приближения. Решать проблему задания начальных установок в каждом случае можно по-разному. Мы продемонстрируем один прием, основанный на использовании функции ЕСЛИ. С целью повышения наглядности вычислений ячейкам были присвоены содержательные имена (рис. 9).

- В ячейку $X_{нач}$ (B4) заносим начальное приближение – 5.
- В ячейку $X_{текущ}$ (C4) записываем формулу:
 $=ЕСЛИ(X_{текущ}=0;X_{нач}; X_{текущ}-(X_{текущ}^2-5*X_{текущ}+6)/(2*X_{текущ}-5))$.
- В ячейку D4 помещаем формулу, задающую вычисление значения функции в точке $X_{текущ}$, что позволит следить за процессом решения.
- Заметьте, что на первом шаге вычислений в ячейку $X_{текущ}$ будет помещено начальное значение, а затем уже начнется счет по формуле на последующих шагах.
- Чтобы сменить начальное приближение, недостаточно изменить содержимое ячейки $X_{нач}$ и запустить процесс вычислений. В этом случае вычисления будут продолжены, начиная с последнего вычисленного значения.

	В	С	Д	Е
3	$X_{нач}$	$X_{текущ}$	$F(X_{текущ})$	
4	5	3	0	

Рис. 9. Определение начальных установок

Чтобы обнулить значение, хранящееся в ячейке $X_{текущ}$, нужно заново записать туда формулу. Для этого достаточно для редактирования выбрать ячейку, содержащую формулу,

дважды щелкнув мышью на ней (при этом содержимое ячейки отобразится в строке формул). Щелчок по кнопке (нажатие клавиши) *Enter* запустит вычисления с новым начальным приближением.

2.2. Подбор параметра

Когда желаемый результат вычислений по формуле известен, но неизвестны значения, необходимые для получения этого результата, можно воспользоваться средством *Подбор параметра*, выбрав команду *Подбор параметра* в меню *Сервис*. При подборе параметра Excel изменяет значение в одной конкретной ячейке до тех пор, пока вычисления по формуле, ссылающейся на эту ячейку, не дадут нужного результата.

Возьмем в качестве примера все то же квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$. Для нахождения корней уравнения выполним следующие действия:

- В ячейку C3 (рис. 10) введем формулу для вычисления значения функции, стоящей в уравнении слева от знака равенства. В качестве аргумента используем ссылку на ячейку C2, т.е. $=C2^2 - 5 * C2 + 6$.

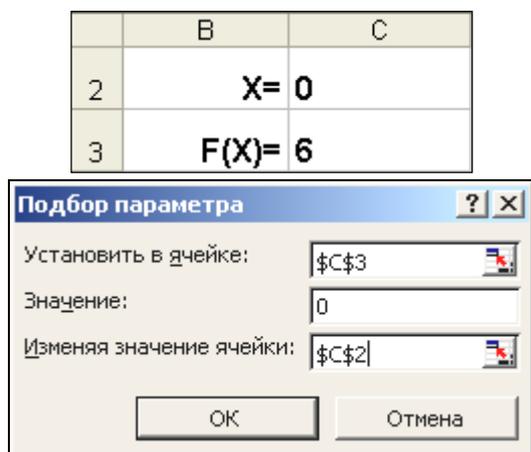


Рис. 10. Окно диалога *Подбор параметра*

функции, стоящей в уравнении слева от знака равенства. В качестве аргумента используем ссылку на ячейку C2, т.е. $=C2^2 - 5 * C2 + 6$.

- В окне диалога *Подбор параметра* (рис. 10) в поле *Установить в ячейке* введем ссылку на ячейку с формулой, в поле *Значение* – ожидаемый результат, в поле *Изменяя значения ячейки* – ссылку на ячейку, в которой

будет храниться значение подбираемого параметра (содержимое этой ячейки не может быть формулой).

- После нажатия на кнопку *Ok* Excel выведет окно диалога *Результат подбора параметра*. Если подобранное значение необходимо сохранить, то нажмите на *Ok*, и результат будет сохранен в ячейке, заданной ранее в поле *Изменяя значения ячейки*. Для восстановления значения, которое было в ячейке C2 до использования команды *Подбор параметра*, нажмите кнопку *Отмена*.

При подборе параметра Excel использует итерационный (циклический) процесс. Количество итераций и точность устанавливаются в меню *Сер-*

вис/Параметры/вкладка *Вычисления*. Если Excel выполняет сложную задачу подбора параметра, можно нажать кнопку *Пауза* в окне диалога *Результат подбора параметра* и прервать вычисление, а затем нажать кнопку *Шаг*, чтобы выполнить очередную итерацию и просмотреть результат. При решении задачи в пошаговом режиме появляется кнопка *Продолжить* – для возврата в обычный режим подбора параметра.

Вернемся к примеру. Опять возникает вопрос: как получить второй корень? Как и в предыдущем случае необходимо задать начальное приближение. Это можно сделать следующим образом (рис. 11,а):

	В	С
2	X=	5,0
3	X _i =	3,8
4	F(X _i)=	1,44

а

	В	С
2	X=	3,0
3	X _i =	3,0000038
4	F(X _i)=	3,836E-06

б

- В ячейку X (С2) вводим начальное приближение.
- В ячейку X_i (С3) вводим формулу для вычисления очередного приближения к корню, т.е. $=X-(X^2-5*X+6)/(2*X-5)$.
- В ячейку С4 поместим формулу, задающую вычисление значения функции, стоящей в левой части исходного уравнения, в точке X_i.
- После этого выбираем команду *Подбор параметра*, где в качестве изменяемой ячейки принимаем ячейку С2. Результат вычислений изображен на рис. 11,б (в ячейке С2 – конечное значение, а в ячейке С3 – предыдущее).

Рис. 11. Поиск второго корня

Однако все это можно сделать и несколько проще. Для того чтобы найти второй корень, достаточно в качестве начального приближения (рис. 10) в ячейку С2 поместить константу 5 и после этого запустить процесс *Подбор параметра*.

2.3. Поиск решения

Команда *Подбор параметра* является удобной для решения задач поиска определенного целевого значения, зависящего от одного неизвестного

параметра. Для более сложных задач следует использовать команду *Поиск решения (Решатель)*, доступ к которой реализован через пункт меню *Сервис/Поиск решения*.

Задачи, которые можно решать с помощью *Поиска решения*, в общей постановке формулируются так:

Найти:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

такие, что:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \{Max; Min; = Value\}$$

при ограничениях:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \{\leq Value; \geq Value; = Value\}$$

Искомые переменные – ячейки рабочего листа Excel – называются регулируемыми ячейками. Целевая функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемая иногда просто целью, должна задаваться в виде формулы в ячейке рабочего листа. Эта формула может содержать функции, определенные пользователем, и должна зависеть (ссылаться) от регулируемых ячеек. В момент постановки задачи определяется, что делать с целевой функцией. Возможен выбор одного из вариантов:

- найти максимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- найти минимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- добиться того, чтобы целевая функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имела фиксированное значение: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$.

Функции $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются ограничениями. Их можно задать как в виде равенств, так и неравенств. На регулируемые ячейки можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности, тогда искомое решение ищется в области положительных и/или целых чисел.

Под эту постановку попадает самый широкий круг задач оптимизации, в том числе решение различных уравнений и систем уравнений, задачи линейного и нелинейного программирования. Такие задачи обычно проще сформулировать, чем решать. И тогда для решения конкретной оптимизаци-

онной задачи требуется специально для нее сконструированный метод. *Решатель* имеет в своем арсенале мощные средства решения подобных задач: метод обобщенного градиента, симплекс–метод, метод ветвей и границ.

Выше для нахождения корней квадратного уравнения был применен метод Ньютона (п. 1.4) с использованием циклических ссылок (п. 2.1) и средство *Подбор параметра* (п. 2.2). Рассмотрим, как воспользоваться *Поиском решения* на примере того же квадратного уравнения.

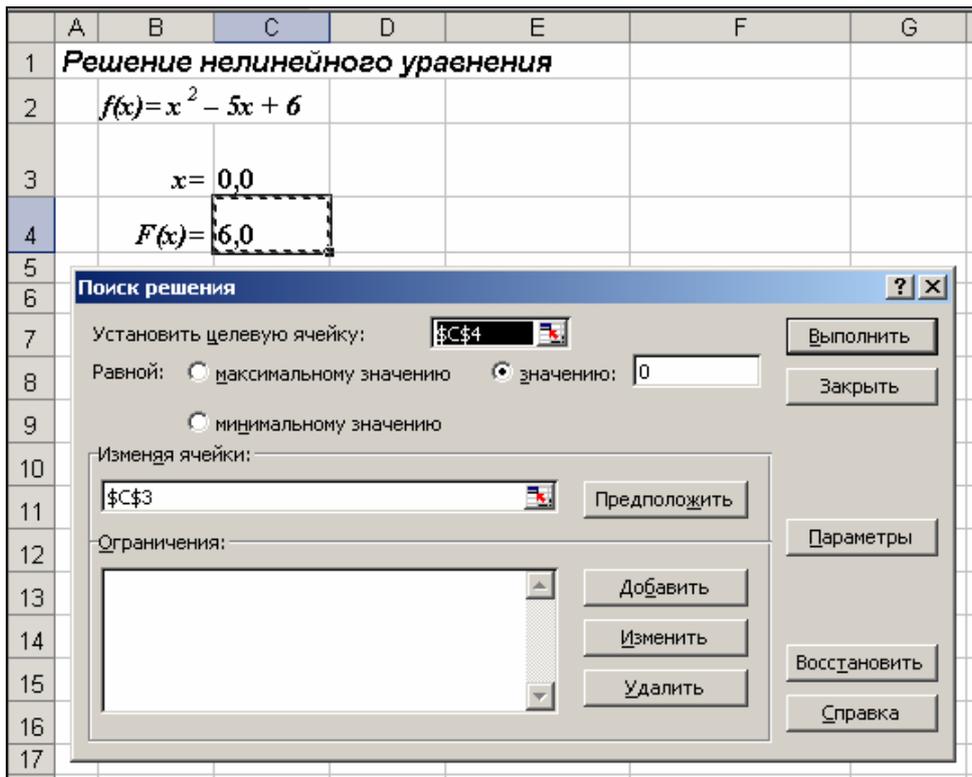


Рис. 12. Окно диалога Поиск решения

После открытия диалога *Поиск решения* (рис. 12) необходимо выполнить следующие действия:

- 1) в поле *Установить целевую ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значений оп-

тимизируемой функции, в нашем примере целевая ячейка – это C4, а формула в ней имеет вид: = C3^2 - 5*C3 + 6;

- 2) для максимизации значения целевой ячейки, установить переключатель *максимальному значению* в положение \odot , для минимизации используется переключатель *минимальному значению*, в нашем случае устанавливаем переключатель в положение *значению* и вводим значение 0;
- 3) в поле *Изменяя ячейки* ввести адреса изменяемых ячеек, т.е. аргументов целевой функции (C3), разделяя их знаком «;» (или щелкая

мышью при нажатой клавише *Ctrl* на соответствующих ячейках), для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка *Предположить*;

- 4) в поле *Ограничения* с помощью кнопки *Добавить* ввести все ограничения, которым должен отвечать результат поиска: для нашего примера ограничений задавать не нужно;
- 5) для запуска процесса поиска решения нажать кнопку *Выполнить*.

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель *Сохранить найденное решение* в открывшемся окне диалога *Результаты поиска решения*. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рис. 13. Полученное решение зависит от выбора начального приближения, которое задается в ячейке **C4** (аргумент функции). Если в качестве начального приближения в ячейку **C4** ввести значение, равное $1,0$, то с помощью *Поиска решения* найдем второй корень, равный $2,0$.

	A	B	C	D	E
1	Решение нелинейного уравнения				
2		$f(x) = x^2 - 5x + 6$			
3			$x = 3,0$		
4			$F(x) = 0,0$		

Рис. 13. Результаты поиска

Опции, управляющие работой *Поиска решения*, задаваемые в окне *Параметры* (окно появляется, если нажать на кнопку *Параметры* окна *Поиск решения*), следующие (рис. 14):

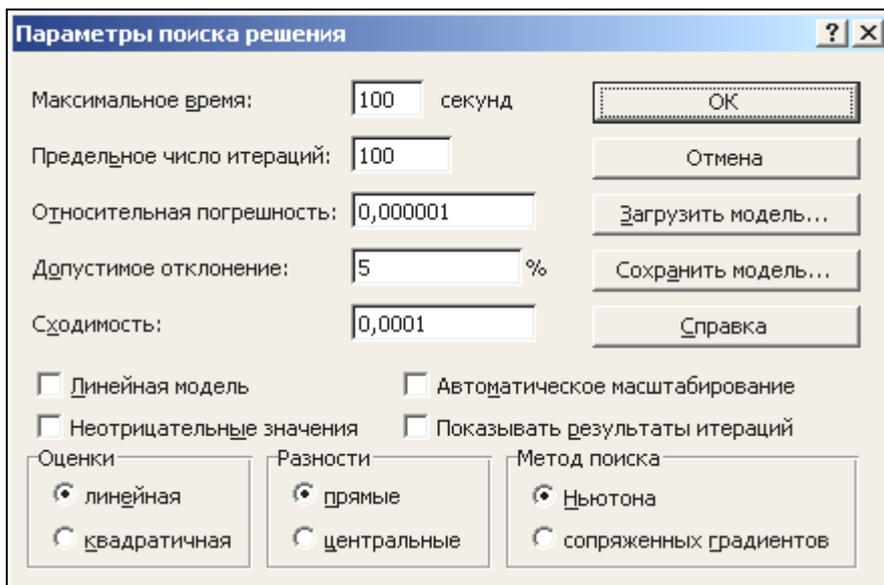


Рис. 14. Настройка параметров Решателя

- *Максимальное время* – ограничивает время, отведенное на процесс поиска решения (по умолчанию задано 100 секунд, что достаточно для задач, имеющих около 10 ограничений, если задача большой размерности, то время необ-

ходимо увеличить).

- *Предельное число итераций* – еще один способ ограничения времени поиска путем задания максимального числа итераций. По умолчанию задано 100, и, чаще всего, если решение не получено за 100 итераций, то при увеличении их количества (в поле можно ввести время, не превышающее 32767 секунд) вероятность получить результат мала. Лучше попытаться изменить начальное приближение и запустить процесс поиска заново.
- *Относительная погрешность* – задает точность, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным ограничениям (десятичная дробь от 0 до 1).
- *Допустимое отклонение* – задается в % только для задач с целочисленными ограничениями. *Поиск решения* в таких задачах сначала находит оптимальное нецелочисленное решение, а потом пытается найти ближайшую целочисленную точку, решение в которой отличалось бы от оптимального не более, чем на указанное данным параметром количество процентов.
- *Сходимость* – когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа (дробь из интервала от 0 до 1), указанного в данном параметре, поиск прекращается.

- *Линейная модель* – этот флажок следует включать, когда целевая функция и ограничения – линейные функции. Это ускоряет процесс поиска решения.
- *Неотрицательные значения* – этим флажком можно задать ограничения на переменные, что позволит искать решения в положительной области значений, не задавая специальных ограничений на их нижнюю границу.
- *Автоматическое масштабирование* – этот флажок следует включать, когда масштаб значений входных переменных и целевой функции и ограничений отличается, возможно, на порядки. Например, переменные задаются в штуках, а целевая функция, определяющая максимальную прибыль, измеряется в миллиардах рублей.
- *Показывать результаты итераций* – этот флажок позволяет включить пошаговый процесс поиска, показывая на экране результаты каждой итерации.
- *Оценки* – эта группа служит для указания метода экстраполяции – линейная или квадратичная, – используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске. *Линейная* служит для использования линейной экстраполяции вдоль касательного вектора. *Квадратичная* служит для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.
- *Разности (производные)* – эта группа служит для указания метода численного дифференцирования, который используется для вычисления частных производных целевых и ограничивающих функций. Параметр *Прямые* используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Параметр *Центральные* используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдается сообщение о том, что получить более точное решение не удастся.
- *Метод поиска* – служит для выбора алгоритма оптимизации. *Метод Ньютона* был рассмотрен ранее. В *Методе сопряженных градиентов* за-

прашивается меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно велика и необходимо экономить память, а также если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Сохранить модель поиска решения можно следующими способами:

- 1) при сохранении книги Excel после поиска решения все значения, введенные в окнах диалога *Поиск решения*, сохраняются вместе с данными рабочего листа. С каждым рабочим листом в рабочей книге можно сохранить один набор значений параметров *Поиска решения*;
- 2) если в пределах одного рабочего листа Excel необходимо рассмотреть несколько моделей оптимизации (например найти максимум и минимум одной функции, или максимальные значения нескольких функций), то удобнее сохранить эти модели, используя кнопку *Параметры/Сохранить модель* окна *Поиск решения*. Диапазон для сохраняемой модели содержит информацию о целевой ячейке, об изменяемых ячейках, о каждом из ограничений и все значения диалога *Параметры*. Выбор модели для решения конкретной оптимизационной задачи осуществляется с помощью кнопки *Параметры/Загрузить модель* диалога *Поиск решения*;
- 3) еще один способ сохранения параметров поиска – сохранение их в виде именованных сценариев. Для этого необходимо нажать на кнопку *Сохранить сценарий* диалогового окна *Результаты поиска решений*.

Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки *Поиск решения* позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: *Результаты*, *Устойчивость* и *Пределы*. Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога *Результаты поиска решения*. Рассмотрим более подробно каждый из них.

	A	B	C	D	E	F
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости					
2	Рабочий лист: [Optim.xls]Поиск решения					
3	Отчет создан: 06.02.02 23:34:04					
4						
5						
6	Изменяемые ячейки					
7					Результ.	Нормир.
8	Ячейка	Имя	значение	градиент		
9	\$C\$3	x=	3,0	0,0		
10						
11	Ограничения					
12	НЕТ					
13						

Рис. 15. Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости (рис.15) содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один для изменяемых ячеек, а второй для ограничений. Правый столбец в каждом разделе содержит информацию о чувствительности.

Каждая изменяемая ячейка и ограничения приводятся в отдельной строке. Раздел для изменяемых ячеек содержит значение нормированного градиента, которое показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение значения в соответствующей изменяемой ячейке на одну единицу. Подобным образом, множитель Лагранжа в разделе для ограничений показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение соответствующего значения ограничения на одну единицу. При использовании целочисленных ограничений Excel выводит сообщение *Отчеты устойчивости и Пределы не применимы для задач с целочисленными ограничениями*. Если в окне диалога *Параметры поиска решения* установлен флажок *Линейная модель*, то отчет по устойчивости содержит несколько дополнительных столбцов информации.

	A	B	C	D	E
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам				
2	Рабочий лист: [Optim.xls]Поиск решения				
3	Отчет создан: 06.02.02 23:34:04				
4					
5					
6	Целевая ячейка (Значение)				
7		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
8		\$C\$4	F(x)=	6,0	0,0
9					
10					
11	Изменяемые ячейки				
12		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
13		\$C\$3	x=	0,0	3,0
14					
15					
16	Ограничения				
17	НЕТ				

Рис. 16. Отчет по результатам

Отчет по результатам (рис.16) содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй – значения искомым переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограниче-

ния, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное. Значение разницы – это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения. Связанное ограничение – это ограничение, для которого значение разницы равно нулю. Несвязанное ограничение – это ограничение, которое было выполнено с ненулевым значением разницы.

Отчет по пределам содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№ п/п	Уравнение	А	В	№ п/п	Уравнение	А	В
1	$Tg(x) = 1/x$	0	$\pi/2$	26	$Tg(x) = 1/x^2$	0	$\pi/2$
2	$Ln(x) = 1/x$	1	2	27	$Ln(x) = Sin(x)$	1	3
3	$e^{-x} = x$	0	1	28	$e^{-x} = Sin(x)$	0	$\pi/2$
4	$Ln(x) = 1/x^2$	1	2	29	$e^x = 1 / Sin(x)$	0	$\pi/2$
5	$e^{-x^2} = x$	0	1	30	$e^{-x} = x^2$	0	1
6	$\frac{Ln(1+x)}{x} = 2/\pi$	0	2	31	$2 + Ln(x) = 1/x^2$	0	1
7	$2 + Ln(x) = 1/x$	0	1	32	$Ln(x) = Sin^2(x)$	0	$\pi/2$
8	$x - x^3 + 1 = 0$	1	2	33	$x - x^3 + 2 = 0$	1	2
9	$x + 3 = x^3$	1	2	34	$x + 5 = x^3$	1	2
10	$x + x^3 - 5 = 0$	1	2	35	$x - 0,5 = x^8$	0	0,5
11	$2x + x^5 - 1 = 0$	0	1	36	$x - 1 = x^{0,15}$	1	3
12	$1 - x^2 - x^{1,5} = 0$	0	1	37	$1 - x^2 = x^{4/3}$	0	1
13	$x + 0,5 = e^{-x^2}$	0	1	38	$x + 0,5 = e^{-x}$	0	1
14	$1 - x + x^3 = 0$	-2	0	39	$2 - x + x^3 = 0$	-2	0
15	$1 + x = x^3$	0	2	40	$Sin(x) = 1/x$	0	$\pi/2$
16	$Sin(x) = x/3$	$\pi/2$	π	41	$Sin(x) = x/2$	$\pi/2$	π
17	$Tg(x) = 1/x$	1,6	4,5	42	$Ln(x) = e^{-x}$	0	2
18	$Ln(x) = e^{-x^2}$	0	2	43	$Lg(x) = e^{-x}$	0	1
19	$Lg(x) = 10^{-x}$	0	10	44	$Cos(x) = x$	0	$\pi/2$
20	$Cos(x) = 1/x$	0	$\pi/2$	45	$Cos(x) = Ln(x)$	0	$\pi/2$
21	$Cos(x) = Ln(1+x)$	0	$\pi/2$	46	$Cos(x) = Tg(x)$	0	$\pi/2$
22	$Cos(x) = x^2$	0	$\pi/2$	47	$Cos(x) = x^3$	0	$\pi/2$
23	$1 - 3x + x^3 = 0$	0	1	48	$1 - 5x + x^3 = 0$	0	1
24	$1 - 3x + x^4 = 0$	0	1	49	$1 - 5x + x^4 = 0$	0	1
25	$1 - 3x + x^5 = 0$	0	1	50	$1 - 3x + x^5 = 0$	1	2

Курсовая работа №2. Семестр №3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Сегодня компьютер обычно воспринимается как техническое офисное средство, инструмент для работы в Internet или игровая приставка. Вместе с тем, изначально само его название (от англ. *computer* – вычислитель) указывает, что по своей природе этот инструмент предназначен в первую очередь для выполнения различного рода расчетов.

Компьютер не только обеспечивает автоматизацию процесса вычислений, но и позволяет применять для решения задач специальные *численные методы*, которые практически не могут использоваться без его поддержки.

Данные методы называются численными потому, что они основаны на операциях с числами, то есть на четырех арифметических действиях – сложении, вычитании, умножении и делении, но позволяют решать разного вида уравнения, включая дифференциальные, производить интегрирование функций, решать задачи оптимизации и т. п.

1.1. Нелинейные уравнения

Довольно часто в инженерной практике встречаются задачи, связанные с необходимостью отыскания корней нелинейных уравнений. Такие задачи обычно возникают как элементарные составляющие при решении различных технических и научных проблем.

1.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим в качестве примера процедуру выбора рабочего режима транзисторного усилительного каскада. Предположим, что зависимость коэффициента усиления каскада от тока эмиттера транзистора i_3 может быть представлена формулой

$$K(i_3) = a_0 + a_1 i_3 + a_2 i_3^2 + a_3 i_3^3 + a_4 i_3^4 + a_5 i_3^5,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ – известные постоянные. Если необходимо, чтобы транзистор обеспечивал требуемый коэффициент усиления $K_{тр}$, то рабочий ток i_3 должен выбираться таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$K(i_3) = K_{тр} \quad \text{или} \quad a_0 + a_1 i_3 + a_2 i_3^2 + a_3 i_3^3 + a_4 i_3^4 + a_5 i_3^5 = K_{тр}.$$

Последняя запись по сути дела является уравнением, которое можно представить в следующем виде:

$$a_0 + a_1 i_3 + a_2 i_3^2 + a_3 i_3^3 + a_4 i_3^4 + a_5 i_3^5 - K_{тр} = 0.$$

Решение этого уравнения и дает искомое значение тока i_3 .

Как видно, задача выбора эмиттерного тока транзистора свелась к решению уравнения вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где роль неизвестного x играет ток i_3 , а $f(x)$ является некоторой функцией этого неизвестного. Подобным же образом к решению уравнения могут быть сведены многие проектные и исследовательские задачи, в которых необходимо найти значение какого-либо параметра по известной зависимости.

Следует отметить, что обычно характеристики реальных технических устройств зависят не от одного, а от нескольких параметров. В этом случае проблема выбора параметров приводит к необходимости решения системы уравнений со многими неизвестными. Примером такого рода задачи является выбор сопротивлений резисторов в схеме многокаскадного усилителя. Однако далее мы будем рассматривать только задачи, связанные с решением одного нелинейного уравнения с одним неизвестным.

1.1.2. Виды нелинейных уравнений

Очевидно, что способ решения уравнения определяется его видом. В математике принято подразделять нелинейные уравнения на *алгебраические* и *трансцендентные* (см. рис. 1).

К алгебраическим относят уравнения, в которых функция $f(x)$ является степенным многочленом, то есть:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n = 0, \quad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ – коэффициенты, а n – целое число, соответствующее максимальной степени многочлена. Подобное уравнение было рассмотрено выше.

К трансцендентным относят уравнения, содержащие трансцендентные функции, то есть показательную, логарифмическую, тригонометрические функции.

Например, трансцендентными являются следующие уравнения:

$$\sin(2x) \frac{2,1x + 1}{0,3x + 1} - 0,4x^2 = 0, \quad (3)$$

$$2^{0,1x} - 6 \lg(44 - x) + 5,5 \sin(x) = 0. \quad (4)$$

Свойства алгебраических и трансцендентных уравнений существенно различаются. Поэтому различны и подходы к их решению.

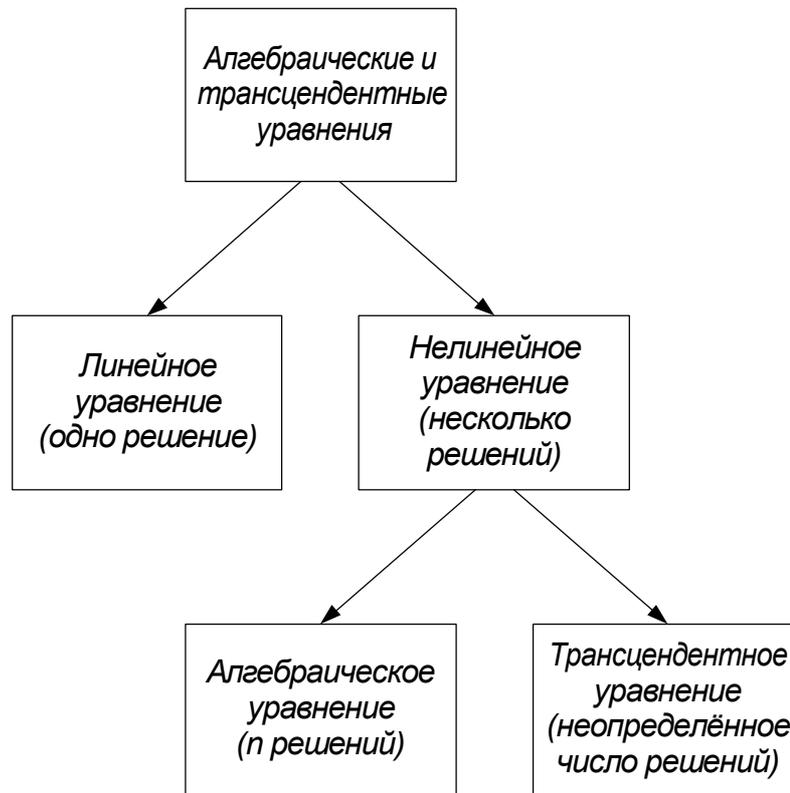


Рис. 1. Классификация уравнений

Для алгебраических уравнений до четвертого порядка включительно известны прямые точные методы решения. Кроме того, количество корней можно определить по степени многочлена, а их характер по знакам коэффициентов этого многочлена.

Для трансцендентных уравнений общих приемов решения кроме приближенных не существует. Количество корней такого уравнения обычно невозможно определить заранее по его виду. Трансцендентное уравнение может не иметь ни одного вещественного корня, иметь счетное количество корней или бесконечное множество корней. Из двух приведенных выше уравнений первое имеет семь вещественных корней, а второе – пять корней (попробуйте определить их самостоятельно).

1.1.3. Методы решения уравнений

К сожалению, во многих практически важных случаях, когда уравнение имеет сложный вид, аналитически его точное решение найти не удастся. Отсутствуют методы решения в общем виде алгебраических уравнений высоких степеней. Для трансцендентных уравнений точное решение найти можно в немногих самых простых случаях.

Если решение нельзя найти в явном виде, то для отыскания корня используют другие методы. Например, приближенное решение можно получить методом последовательных приближений. Сравнительно легко (но и весьма неточно) корни уравнения определяются графически – достаточно лишь для уравнения $f(x) = 0$ построить график функции $y = f(x)$ и найти точки пересечения кривой с осью абсцисс, в которых эта функция равна нулю. Наконец, корень уравнения можно попытаться определить "методом подбора".

Однако ни один из перечисленных подходов нельзя считать достаточно *эффективным* при решении инженерных и научных задач на ЭВМ. Более предпочтительны способы, обеспечивающие одновременно как *оперативность получения результата*, так и *высокую точность*.

Второе важное требование к методу – *универсальность*, то есть способность находить решения для разных видов уравнений. В особенности эти требования должны соблюдаться в специальных пакетах программ, предназначенных для выполнения большого объема расчетов, например, в системах автоматизированного проектирования (САПР).

В связи с этим для решения нелинейных уравнений на ЭВМ широко применяются специальные методы, которые относятся к методам *вычислительной математики*. На их основе создано большое число алгоритмов, различающихся сложностью и эффективностью.

Когда говорят о методах решения нелинейных уравнений на ЭВМ, то подразумевают в первую очередь *итерационные методы*. Главным признаком итерационного метода является многократное повторение одного и того же набора действий для получения результата (в переводе с англ. *iteration* – повторение).

В основе итерационного метода лежит итерационная, то есть повторяемая процедура. Процедура эта строится таким образом, что после каждого ее выполнения производится очередное приближение к корню. Можно сказать, что итерационный метод несколько напоминает отыскание корня подбором, однако этот подбор производится не "наугад", а по вполне определенному алгоритму. Основные особенности итерационных методов будут рассмотрены позже – при описании самих методов.

1.2. Исследование уравнений и отделение корней

Каждый, кто пытался найти корень уравнения подбором, знает, насколько важен выбор первого пробного значения неизвестного x . Точно так же при поиске корня итерационным методом, необходимо правильно определить начальное значение x . От этого иногда зависит не только скорость решения задачи, но и вообще возможность получения результата. Рассмотрим способы исследования уравнений для предварительной оценки корней.

1.2.1. Исследование уравнения и отделение корней

При решении практических задач обычно приходится проводить предварительное исследование уравнения до его решения. Дело в том, что если уравнение не удастся решить аналитически, то заранее трудно определить, сколько оно имеет корней и какова их природа – сколько из них комплексных или вещественных, сколько отрицательных или положительных. Поиск корней "наугад" без предварительного исследования чреват тем, что правильный ответ так и не будет найден. Кроме того, зачастую некоторые корни не имеют физического смысла, и поэтому нет необходимости определять их точные значения.

Например, поведение резонансной электрической или механической системы обычно описывается так называемым характеристическим уравнением, корни которого соответствуют значениям ее собственных частот. Сложные объекты, как правило, имеют множество собственных частот, что усложняет анализ. Однако в ходе предварительного исследования уравнения можно, не вычисляя точных значений всех корней, сразу выбрать из них те, которые представляют наибольший интерес.

1.2.2. Графическое исследование уравнения

Как было указано в п. 1.1, примерное положение корней уравнения $f(x) = 0$ на числовой оси легко определить, построив график функции $y = f(x)$. Точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осью абсцисс, где $y = 0$, и будут соответствовать искомым корням.

В качестве примера на рис. 2 представлен график, построенный в пакете MathCAD для уравнения (3) – см. п. 1.1. Из рисунка видно, что уравнение имеет семь действительных корней в интервале примерно от -7 до $+2$: пять отрицательных, один при нулевом значении x и один положительный. В точке $x \approx -3,3$ функция $f(x)$ имеет разрыв.

Приведенный график позволяет провести отделение указанных корней, то есть найти на оси x границы отрезков, в каждом из которых располагается не более одного корня.

$$x := -10, -9.9.. 10 \quad f(x) := \sin(2 \cdot x) \cdot \frac{2.1 \cdot x + 1}{0.3 \cdot x + 1} - 0.4 \cdot x^2$$

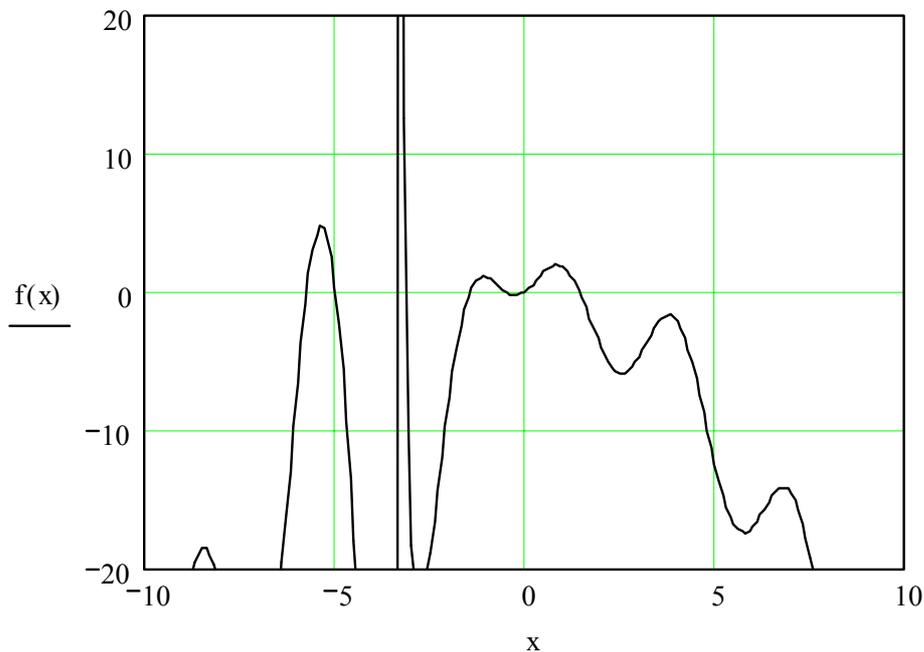


Рис. 2. Графическое исследование уравнения

Проведите исследование уравнения (4) самостоятельно.

1.2.3. Табличный способ отделения корней

Отделение корней также нередко выполняют с помощью табличного представления зависимости $f(x)$. Для этого формируют таблицу, в которую заносят ряд последовательно расположенных на оси x точек x_i и вычисленные в них значения левой части уравнения $f(x_i)$.

Затем в таблице выбирают те пары рядом расположенных точек, между которыми функция $f(x)$ меняет свой знак. При этом для обнаружения корня по сути дела используется тот же признак, что и при графическом исследовании – изменение знака функции.

На рис. 3. представлены полученные с помощью пакета MathCAD результаты расчета зависимости $f(x)$ в виде таблицы при постоянном шаге изменения аргумента $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Расчет выполнен для того же трансцендентного уравнения, что и на рис. 2.

x =	f(x) =
-7	-31.938
-6.5	-22.495
-6	-6.62
-5.5	4.131
-5	0.336
-4.5	-18.05
-4	-43.006
-3.5	-88.337
-3	-18.409
-2.5	-18.802
-2	-7.654
-1.5	-0.348
-1	1.029
-0.5	-0.051
0	0
0.5	1.4

Рис. 3. Табличное отделение корней

Приведенные данные показывают, что первый из корней уравнения $f(x) = 0$ лежит в пределах $-6 < x < -5,5$, поскольку значения $f(x)$ в точках $x = -6$ и $x = -5,5$ имеют разные знаки.

С целью облегчения поиска корней процедуру вычисления нередко оформляют в виде программы на ЭВМ, включая в ее алгоритм не только вычисление значений x_i и $f(x_i)$, но и автоматическое выявление тех отрезков, в которых предположительно должны находиться корни уравнения.

Однако пользоваться подобными процедурами автоматического отделения корней следует осторожно. Дело в том, что смена знака функции на некотором отрезке $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ не является надежным признаком существования корня.

Во-первых, $f(x)$ может изменить свой знак в точке разрыва, как это происходит в точке $x \approx -3,3$ на рис. 2. Во-вторых, даже если функция $f(x)$ непрерывна, изменение ее знака на рассматриваемом отрезке может быть обусловлено не одним, а несколькими корнями, например, тремя или пятью. И, наоборот, совпадение знаков функции $f(x)$ на краях отрезка не является доказательством отсутствия корней. К примеру, в случае двух корней на отрезке функция дважды переходит через точки $y = 0$ и дважды меняет свой знак на обратный. Или имеется так называемый кратный корень, когда $f(x)$ не пересекает, а только касается оси x в некоторой точке.

Из вышесказанного следует, что табличное отделение корней желательно проводить, выбирая как можно более малый шаг изменения аргумента, и сопровождать его графическим исследованием.

1.3. Методы поиска корней уравнения

Рассмотренные способы исследования позволяют уточнить количество корней уравнения, их свойства и примерное положение на числовой оси. После отделения корней определить их значения с требуемой точностью можно с помощью методов, описание которых дано ниже.

1.3.1. Модификация табличного способа

Несложную итерационную процедуру для отыскания приближенного решения уравнения можно построить на основе рассмотренного выше табличного способа отделения корней. Рассмотрим ее.

Предположим, в результате предварительного исследования определен отрезок $[a, b]$, содержащий только один корень уравнения $f(x) = 0$. Разобьем этот отрезок на некоторое количество равных частей. Для этого возьмем, к примеру, $N - 1 = 99$ точек, расположенных с постоянным шагом $\Delta x = (b - a) / 100$ на $[a, b]$ и разделим его таким образом на $N = 100$ частей. Вычислим в этих точках значения функции $f(x)$. Из полученных ста новых отрезков выберем тот, в котором находится корень. Его легко определить по перемене знака $f(x)$ при переходе от одной точки к другой.

Для дальнейшего уточнения положения корня на числовой оси описанные действия можно повторять многократно, построив, таким образом, на их основе итерационную процедуру. Действительно, на первом итерационном шаге отрезок, в котором заключен корень, уменьшается в $N = 100$ раз. Уменьшив на втором шаге отрезок еще в сто раз, получим сокращение длины уже в $N \times N = 10000$ раз при суммарном количестве расчетных точек $N + N = 198$. На третьем шаге общее сокращение достигнет $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ раз, а количество расчетных точек возрастет до $N + N + N = 297$. Общий же коэффициент сужения на K -м шаге составит N^K .

Процедуру сжатия отрезка, содержащего корень, следует остановить, если на очередном шаге будет получено значение $f(x)$ достаточно близкое к нулю. Последнее означает, что найдено приближенное решение уравнения, соответствующее $f(x) \approx 0$. Условие прекращения итерационной процедуры обычно записывают в виде

$$|f(x)| \leq \delta, \quad (5)$$

где δ – некоторое малое положительное число. При выборе δ руководствуются требованиями к точности решения уравнения и порядком величины $f(x)$.

1.3.2. Метод половинного деления

Другие названия: метод бисекции, метод дихотомии (от греч. διχα – на две части и τομή – сечение).

Метод половинного деления можно рассматривать как дальнейшее усовершенствование описанной выше процедуры поиска корня уравнения. Отличие метода половинного деления состоит в том, что отрезок на каждом шаге разбивается не на любое произвольное число частей N , а делится только на две части, то есть $N = 2$.

Графически процедура поиска корня уравнения $f(x)$ методом половинного деления показана на рис. 4.

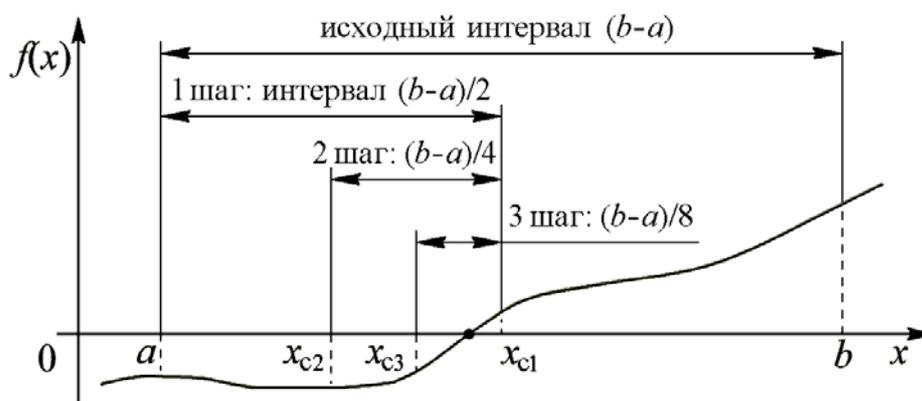


Рис. 4. Метод половинного деления

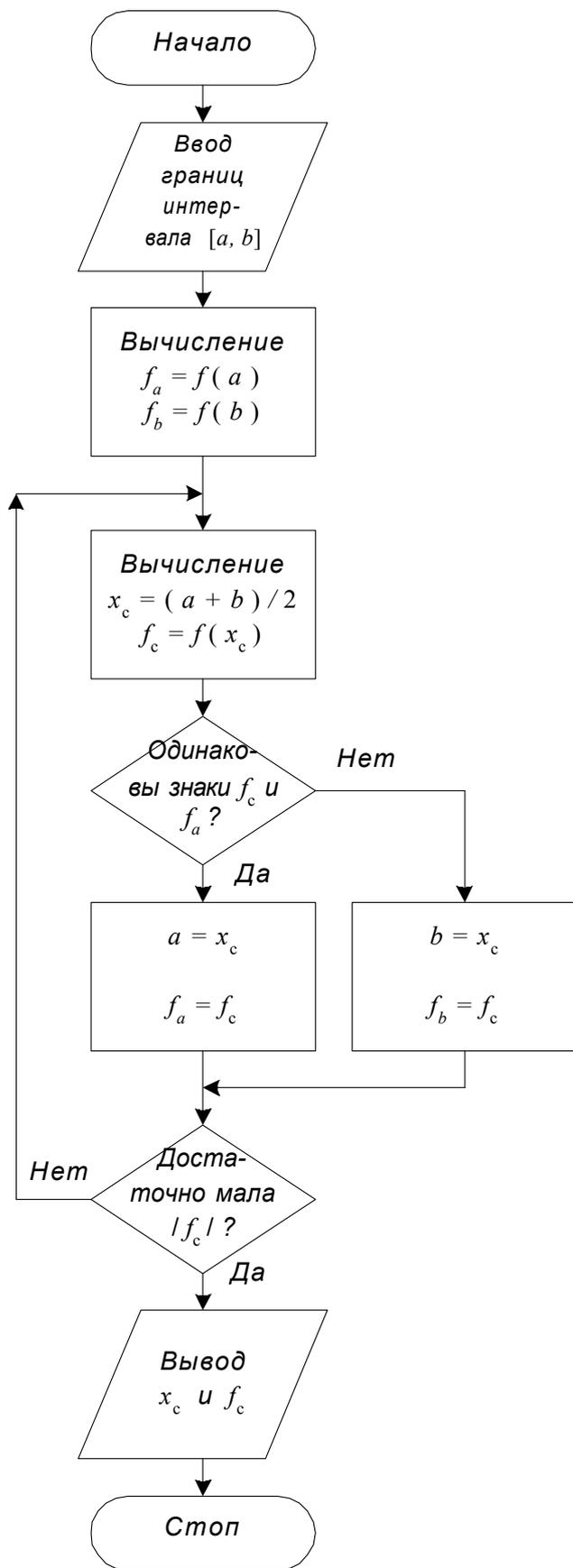


Рис. 5. Алгоритм метода половинного деления

Метод включает следующие операции (см. рис. 5). Вначале на концах исходного отрезка $[a, b]$, содержащего корень, вычисляют значения функции $f(a)$ и $f(b)$. Затем находят точку, делящую $[a, b]$ на две равные части, по итерационной формуле

$$x_c = (a + b) / 2 \quad (6)$$

и вычисляют значение функции $f(x_c)$. Далее по перемене знака функции выбирают ту половину $[a, b]$, в которой расположен корень.

Если знаки $f(x_c)$ и $f(a)$ совпадают, то в дальнейшем полагают $a = x_c$ и $f_a = f(x_c)$. Если же, напротив, знаки $f(x_c)$ и $f(a)$ различаются, а знаки $f(x_c)$ и $f(b)$ совпадают, то полагают $b = x_c$ и $f_b = f(x_c)$. В результате этих действий получают новый отрезок, содержащий корень. Этот отрезок имеет длину в два раза меньше, чем исходный.

Точно так же, как и в предыдущем случае, если очередное рассчитанное значение $f(x)$ достаточно близко к нулю, вычисления прекращаются. Иначе процесс половинного деления продолжается.

В некоторых случаях для остановки итерационной процедуры используют условие малости полученного на очередном шаге отрезка, записывая его, например, как

$$|(b - a) / x_c| \leq \delta. \quad (7)$$

Приняв $\delta = 0,01$, можно таким образом получить положение корня с точностью порядка одного процента.

Метод половинного деления позволяет заметно ускорить поиск решения по сравнению с пошаговым поиском, рассмотренным в п. 1.3.1. Для того чтобы оценить, каков выигрыш, вспомним, что для уменьшения длины исходного отрезка, содержащего корень, в миллион раз в предыдущем случае потребовалось выполнить три итерационных шага и провести вычисление $f(x)$ в 297 новых точках.

В то же время нетрудно подсчитать, что в методе половинного деления для получения аналогичного результата необходимо сделать 20 шагов, так как при $N = 2$ и $K = 20$ получается сужение в $N^K = 2^{20} = 1048576$ раз. А расчет функции $f(x)$ для этого потребует провести лишь в $N \times 20 = 1 \times 20 = 20$ новых точках. В итоге объем и время вычислений по сравнению с ранее рассмотренной процедурой сокращается примерно в пятнадцать раз.

1.3.3. Метод хорд

Этот итерационный метод подобно рассмотренному выше методу половинного деления заключается в повторяющемся делении интервала на две части с выбором из них той, которая содержит корень уравнения. Однако в методе хорд точка, с помощью которой исходный отрезок $[a, b]$ делится на две части, выбирается не как средняя, а вычисляется с помощью линейной интерполяции функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Последовательно выполняются следующие действия. Вначале вычисляются значения функции $f(x)$ на концах отрезка в точках a и b , то есть $f(a)$ и $f(b)$. После этого составляется уравнение хорды, которая представляет собой прямую $y(x)$, проходящую через эти две точки. Данная хорда описывается соотношением

$$\frac{y(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \quad (8)$$

С помощью хорды на отрезке $[a, b]$ выбирается точка x_c , в которой $y(x_c) = 0$. Для этого подставим в (8) $y(x) = y(x_c) = 0$ и получим итерационную формулу метода хорд:

$$x_c = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} . \quad (9)$$

Точка x_c делит отрезок $[a, b]$ на две части. Также как и в методе половинного деления из двух частей выбирается та, на краях которой функция $f(x)$ имеет

противоположные знаки. Далее описанный процесс повторяется многократно и может быть остановлен по условию (5) или (7).

Процесс поиска корня методом хорд показан графически на рис. 6.

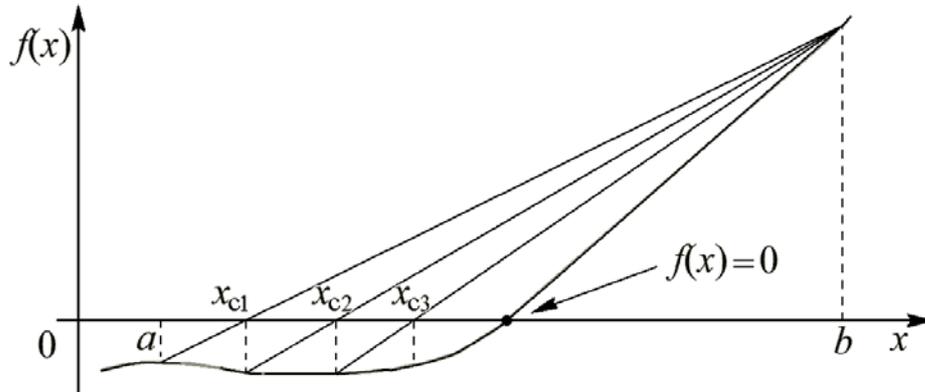


Рис. 6. Метод хорд

Из рисунка видно, что получаемые с помощью (9) точки x_c постепенно сходятся к корню уравнения. Поскольку в рассмотренном методе очередное приближение x_c определяется с помощью интерполяции, учитывающей наклон кривой $f(x)$, он во многих случаях оказывается более эффективным, чем метод половинного деления.

Алгоритм решения методом хорд имеет вид аналогичный алгоритму метода половинного деления, приведенному на рис. 5 и отличается только видом итерационной формулы, по которой рассчитывается x_c .

1.3.4. Метод Ньютона (метод касательных или метод линеаризации)

Этот метод в отличие от ранее рассмотренных не требует предварительно указывать интервал, в котором располагается корень уравнения. Для начала работы требуется задать лишь одну начальную точку x_0 , расположенную вблизи от предполагаемого корня. Направление поиска определяется из этой точки с помощью линейной экстраполяции $f(x)$. Таким образом, при начале расчета из заданной точки x_0 определяется точка x_1 , затем из точки x_1 рассчитывается x_2 и так далее. Продолжение этого процесса далее дает последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ последовательно приближающихся к корню уравнения.

Для получения итерационной формулы метода Ньютона воспользуемся разложением функции $f(x)$ в окрестности точки x_i в ряд Тейлора:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots, \quad (10)$$

где $f'(x_i)$, $f''(x_i)$ и $f'''(x_i)$ — первая, вторая и третья производные от функции $f(x)$ по x .

Сократим (10), отбросив слагаемые, содержащие Δx во второй и более высоких степенях. Тогда

$$f(x_i + \Delta x) \approx f(x_i) + f'(x_i) \cdot \Delta x .$$

Полагая далее, что в окрестностях x_i имеется точка $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, в которой функция $f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x)$ равна нулю, получим линейное уравнение

$$f(x_i) + f'(x_i) \cdot \Delta x = 0 ,$$

из которого найдем x_{i+1} :

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i) . \quad (11)$$

Это соотношение является итерационной формулой метода Ньютона.

Алгоритм метода Ньютона представлен на рис. 7.

Получаемые методом Ньютона точки x_i образуют ряд чисел $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, который сходится к точному решению, то есть к корню уравнения.

Из (11) следует, что каждый шаг метода Ньютона требует большего объема вычислений чем, например, метод половинного деления, так как приходится находить значение не только функции $f(x)$, но и ее производной. Несмотря на это метод Ньютона и его модификации широко используются на практике.

Это обусловлено, во-первых, тем, что он не требует задания отрезка $[a, b]$, содержащего корень, а может стартовать от одной начальной точки. Во-вторых, он имеет более высокую скорость сходимости, чем ранее рассмотренные методы.

Теоретически можно показать, что метод Ньютона позволяет получить квадратичную сходимость. Это означает, что на каждой итерации погрешность (отклонение очередного приближения x_i от точного решения) уменьшается по квадратичному закону, то есть количество верных значащих цифр решения удваивается.

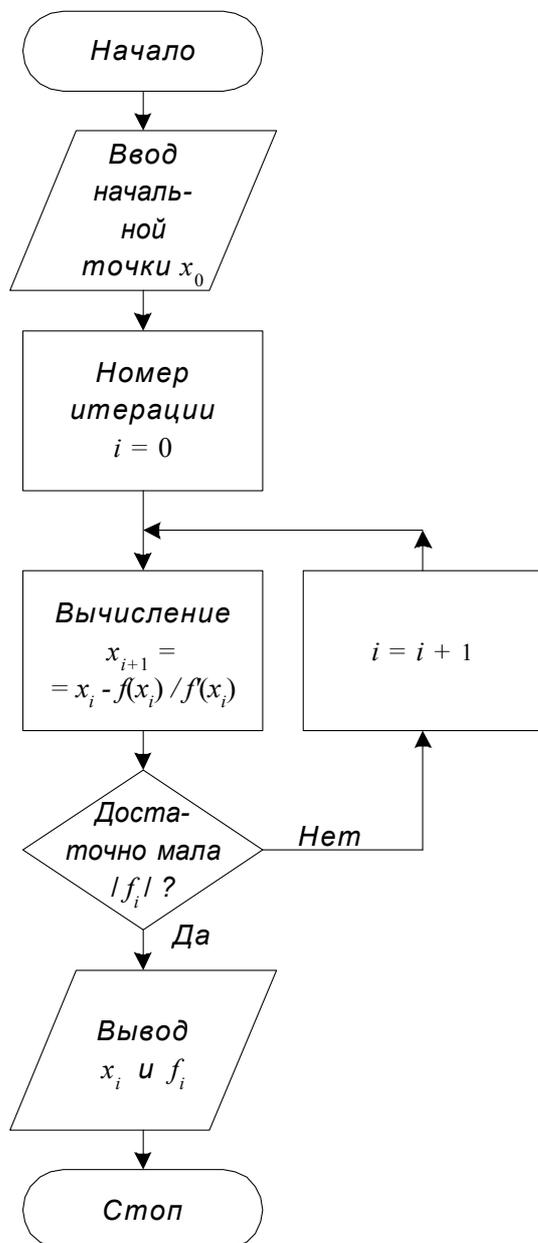


Рис. 7. Алгоритм метода Ньютона

Если на очередном шаге достигнута погрешность не более 0,5 то за пять-шесть итераций она уменьшится до величины порядка 2^{-64} , что сопоставимо с погрешностью вычислений на ЭВМ. В методе половинного деления для достижения такой же погрешности количество итераций потребовалось бы увеличить более чем на порядок.

На рис. 8, а представлен ход решения методом Ньютона в графическом виде.

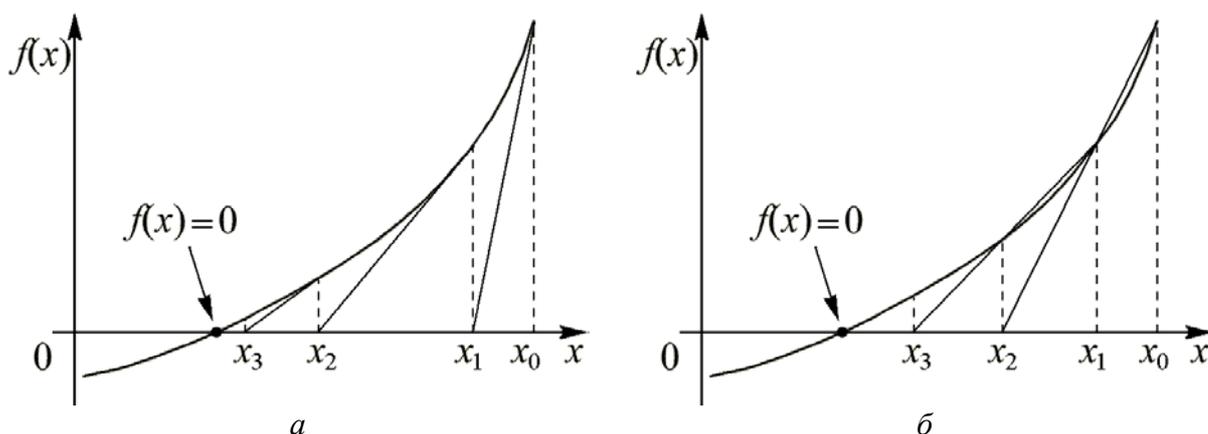


Рис. 8. Метод Ньютона и метод секущих

При использовании метода Ньютона следует учитывать ряд его особенностей. Одна из них состоит в необходимости правильного выбора начального приближения. Чтобы понять, как влияет выбор начальной точки на работу метода, попробуйте графически найти решение для рис. 8, начав его из точки $x_0 = a$.

Метод Ньютона обладает *локальной* сходимостью, то есть способен найти корень, если начальное приближение задано в некоторой малой его окрестности. Если же начальное приближение взято неудачно и функция немонотонна, метод может дать расходящуюся последовательность x_i (см. п. 1.5).

Другая проблема заключается в том, что производная $f'(x)$ в (11) находится в знаменателе. Это означает, что $f'(x)$ не должна обращаться в ноль, так как в противном случае итерационная формула перестает работать. Трудности могут возникнуть и в том случае, если $f'(x)$ не равна нулю, но достаточно мала, вследствие чего результат деления $f(x)/f'(x)$ может оказаться неприемлемо большим.

Во многих математических пакетах, например, в MathCAD и MATLAB эти проблемы решаются применением комбинированных алгоритмов, сочетающих достоинства различных методов, например, метода половинного деления и метода Ньютона. Первый обеспечивает устойчивую сходимость и используется на начальном этапе решения, а после некоторого числа итераций включается второй, быстрее приближающийся к корню уравнения.

1.3.5. Метод секущих

Производная $f'(x)$ в методе Ньютона может быть найдена аналитически дифференцированием функции $f(x)$. Однако это усложняет подготовительный этап к решению уравнения.

На практике часто используют модификации метода Ньютона, свободные от этого недостатка. Одно из упрощений сводится к тому, что производная вычисляется только один раз в начальной точке и затем это значение используется на всех последующих шагах. Данная модификация основывается на предположении о малом изменении производной вблизи корня.

Одной из наиболее известных модификаций является *метод секущих*. В этом методе производная заменяется ее приближенным значением:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} .$$

В формуле для $F'(x)$ в отличие от $f'(x)$ приращение $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ полагается малым, но $\Delta x \neq 0$. Геометрическая иллюстрация метода при $\Delta x < x_i$ показана на рис. 8, б. В случае более жесткого условия $\Delta x \ll x_i$ секущие на рис. 8, б практически совпадут с касательными к кривой (см. рис. 8, а).

Алгоритм решения методом секущих аналогичен алгоритму метода Ньютона, приведенному на рис. 7 и отличается только видом итерационной формулы, по которой рассчитываются x_i .

Метод секущих также как и метод Ньютона имеет сверхлинейную, то есть приближающуюся к квадратичной сходимость.

1.3.6. Метод простой итерации

Метод простой итерации основывается на приведении исходного уравнения $f(x) = 0$ к следующему виду: $x = \psi(x)$. При этом процесс последовательного приближения к корню строится на основе итерационной формулы

$$x_{i+1} = \psi(x_i) .$$

Очевидно, получить расчетную формулу можно, используя следующую цепочку преобразований:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad bf(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{bf(x) + x}_{\psi(x)} = x \quad \Rightarrow \quad x = \psi(x) ,$$

где b – некоторый не равный нулю множитель.

На рис. 9 приведены графические иллюстрации, показывающие приближение к корню в методе простой итерации.

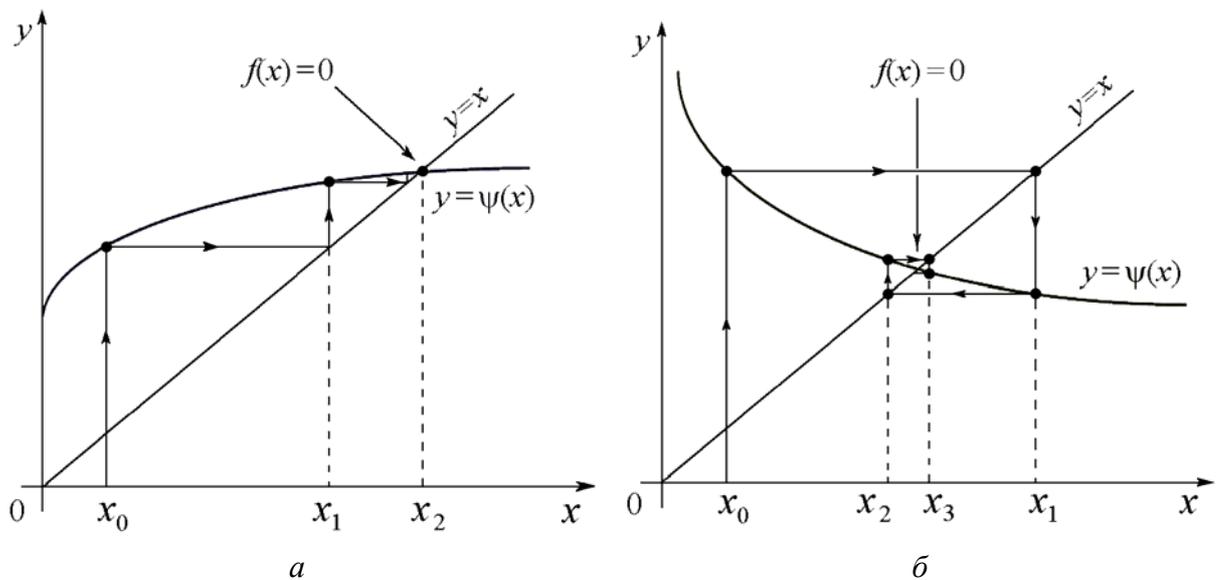


Рис. 9. Приближение к корню методом простой итерации

Сходимость процесса приближения к корню в значительной степени определяется видом зависимости $\psi(x)$. На рис. 9 показаны сходящиеся процессы, а на рис. 10 – расходящийся. В последнем случае метод простой итерации не находит решения уравнения. Существенное влияние на сходимость оказывает выбор коэффициента b – сравните, например, рис. 9, *a* и рис. 10.

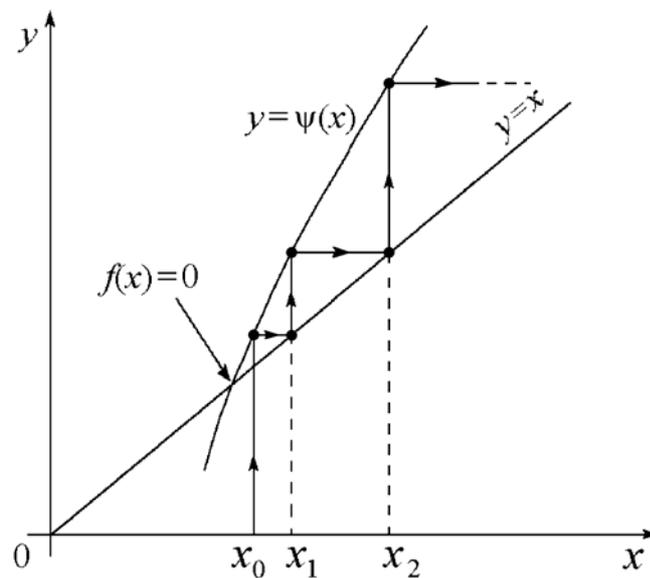


Рис. 10. Расходящийся процесс в методе простой итерации

На рис. 9 сходимость обеспечивается для медленно изменяющихся функций $\psi(x)$, для которых выполняется условие $|\psi'(x)| < 1$. На рис. 10 расходящийся процесс наблюдается для более быстро меняющейся функции $|\psi'(x)| > 1$. Можно сделать вывод, что для обеспечения сходимости метода простой итерации необходимо выполнить условие $|\psi'(x)| < 1$.

Алгоритм метода простой итерации приведен на рис. 11.

Теоретически можно показать, что высокая скорость сходимости обеспечивается при $b = -1/f'(x)$. В этом случае метод простой итерации эквивалентен методу Ньютона.

Вообще говоря, если в методе Ньютона производная $f'(x)$ каждый раз вычисляется на очередном шаге, то в методе простой итерации для определения b можно вычислить производную в начальной точке x_0 и потом сохранять параметр $b = -1/f'(x)$ неизменным. Такой метод, называемый иногда упрощенным методом Ньютона, был рассмотрен в п. 1.3.5.

1.3.7. Методы, использующие нелинейную интерполяцию

Существует группа численных методов, являющихся развитием идеи метода Ньютона. Как правило, они используют различные виды параболической интерполяции.

Различие алгоритмов этих методов определяется способом построения параболы. Например, в методе Мюллера вначале необходимо вычислить три исходные точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. По данным трем точкам строится парабола, аппроксимирующая $f(x)$.

После этого очередное приближение x_{i+1} определяется как корень квадратного уравнения, соответствующего параболе. Многократное повторение процедуры обеспечивает последовательное приближение решению.

1.3.8. Методы решения алгебраических уравнений

Для алгебраических уравнений вида (2):

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n = 0$$

разработаны специальные методы решения. При отыскании корней алгебраических уравнений необходимо учитывать следующие их свойства.

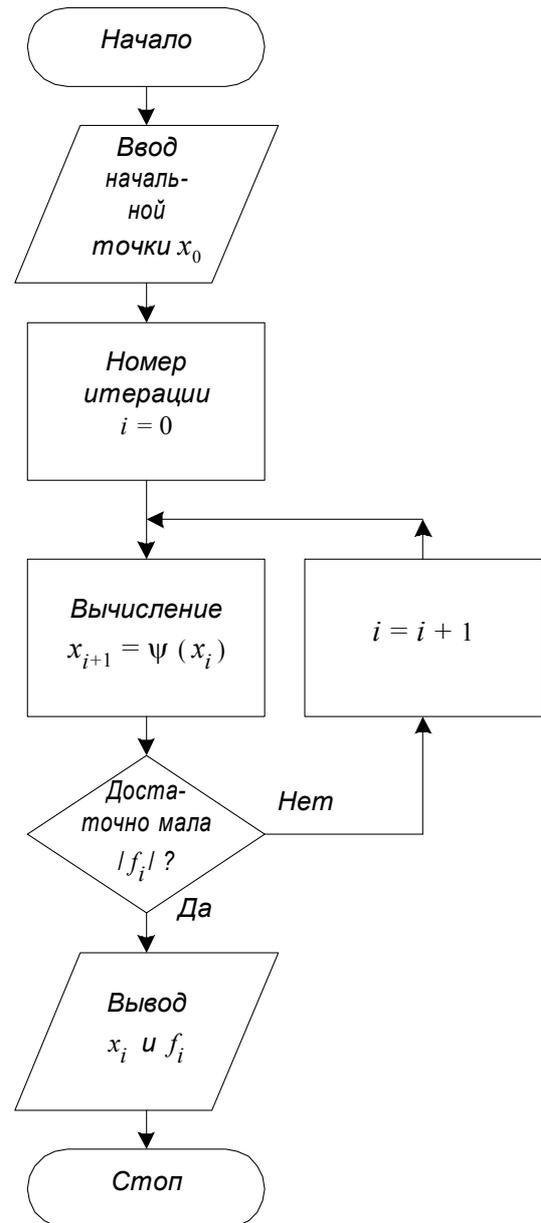


Рис. 11. Алгоритм метода простой итерации

1. Алгебраическое уравнение порядка n имеет n корней, которые могут быть действительными или комплексными.

2. Если все коэффициенты a_i действительные, то все комплексные корни образуют комплексно-сопряженные пары.

3. Число положительных действительных корней равно или меньше перемен знаков в последовательности коэффициентов a_i .

4. Число отрицательных действительных корней равно или меньше перемен знаков в последовательности коэффициентов a_i при замене x на $-x$.

Специальные методы решения алгебраических уравнений обычно сводятся к понижению их порядка. Обычно из функции $f(x)$ в левой части уравнения выделяется сомножитель в виде квадратного уравнения:

$$(x^2 + px + q)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-2}x^{n-2}) = 0.$$

При этом порядок второго сомножителя снижен на 2 относительно исходного уравнения. Из квадратного уравнения находят два корня по известной формуле, а с оставшимся сомножителем вновь повторяют описанную процедуру понижения порядка.

Основной трудностью в данном способе решения является разделение $f(x)$ на сомножители без остатка. Для этого используют специальные итерационные процедуры, позволяющие подбирать приближенные значения коэффициентов $p, q, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ в обоих сомножителях.

Недостатком подобных методов является то, что по мере понижения порядка уравнения накапливается ошибка, обусловленная неточным определением коэффициентов сомножителей. В итоге последние из найденных корней будут определены с наибольшей погрешностью.

1.4. Источники погрешности решения задачи на ЭВМ

Рассмотренные итерационные методы поиска корней нелинейных уравнений по своей природе являются приближенными в отличие от прямых методов, дающих точное решение. С точки зрения точности результата использование прямых методов может показаться более предпочтительным. Однако на самом деле при решении задачи на компьютере ответ все равно будет содержать погрешность.

В качестве основных источников погрешности обычно рассматривают три вида ошибок. Это так называемые ошибки усечения, ошибки округления и ошибки распространения. Рассмотрим их.

1.4.1. Ошибки усечения

Этот вид ошибок связан с погрешностью, заложенной в самой задаче. Он может быть обусловлен неточностью определения исходных данных. Например, если в условии задачи заданы какие-либо размеры, то на практике

для реальных объектов эти размеры известны всегда с некоторой точностью. То же самое касается любых других физических параметров. Сюда же можно отнести неточность расчетных формул и входящих в них числовых коэффициентов.

Большое число расчетных формул являются эмпирическими и дают результат с некоторой погрешностью, содержат подгоночные коэффициенты, обеспечивающие приемлемую ошибку в ограниченном диапазоне входных параметров. Поэтому, как правило, если исходные данные известны с некоторой погрешностью, вряд ли стоит пытаться получить результат с меньшей погрешностью.

1.4.2. Ошибки распространения

Данный вид ошибок связан с применением того или иного способа решения задачи. В ходе вычислений неизбежно происходит накопление или, иначе говоря, распространение ошибки. Помимо того, что сами исходные данные не являются точными, новая погрешность возникает при их перемножении, сложении и т. п. Накопление ошибки зависит от характера и количества арифметических действий, используемых в расчете.

Обычно для решения одной и той же задачи может быть использован ряд различных методов решения. Например, систему линейных алгебраических уравнений можно решить методом Гаусса или через определители (методом Крамера). Теоретически оба метода позволяют получить точное решение. Однако на практике при решении больших систем уравнений метод Гаусса обеспечивает меньшую погрешность, чем метод Крамера, так как использует меньший объем вычислений.

1.4.3. Ошибки округления

Это тип ошибок связан с тем, что истинное значение числа не всегда точно сохраняется компьютером. При сохранении вещественного числа в памяти компьютера оно записывается в виде мантииссы и порядка, примерно так же, как отображается число на дисплее калькулятора (см. рис. 12).

\pm	R_1	R_2	R_3	R_n	\pm	D_1	D_2	.	.	.	D_m
Мантисса											Порядок						

Рис. 12. Структура записи вещественного числа

Здесь $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ – разряды мантииссы, D_1, D_2, \dots, D_m – разряды порядка. На самом деле конечно, в отличие от дисплея калькулятора, мантисса и порядок числа, включая их знаки, в памяти компьютера хранятся в двоичном виде. Но для обсуждения природы ошибок округления это различие не столь принципиально.

Понятно, что иррациональные числа такие, как $\pi = 3,14159\dots$ и $e = 2,712\dots$ не могут быть представлены в памяти компьютера в принципе. Однако же и рациональные числа, если количество их значащих цифр превышает число отведенных разрядов мантииссы (см. рис. 12), будут представлены не точно. При этом цифра последнего сохраняемого в ЭВМ разряда может быть записана с округлением или без него.

Фактически при заданной структуре хранения числа компьютер может использовать не бесконечное, а конечное число рациональных чисел, которые вписываются в приведенную на рис. 12 схему. Поэтому любой входной параметр решаемой задачи, ее промежуточный результат и окончательной ответ всегда округляются до разрешенных в компьютере чисел.

Следующий важный вывод касается диапазона представления чисел в ЭВМ. Если проводить рассуждения для десятичной системы счисления, то максимальное по модулю число, которое может быть представлено в соответствии со схемой на рис. 12, равно

$$\pm X_{\infty} = \pm 999 \dots 9 \times 10^{+99 \dots 9} .$$

Все числа, превышающие по модулю X_{∞} , не представимы в ЭВМ и рассматриваются как *машинная бесконечность*. Если в ходе расчетов будет получен результат, превышающий X_{∞} , то произойдет аварийное завершение вычислений по *переполнению*. Нетрудно убедиться опытным путем, что, например, в MathCAD верхний диапазон чисел соответствует $X_{\infty} \sim 10^{307}$.

Минимальное по модулю число, сохраняемое в памяти компьютера, по схеме на рис. 12 равно

$$\pm X_0 = \pm 000 \dots 1 \times 10^{-99 \dots 9} .$$

Числа, модуль которых меньше X_0 , воспринимаются ЭВМ как нуль, точнее как *машинный нуль*. Если при выполнении расчетов будет получен результат меньше, чем X_0 , то это будет воспринято как *потеря порядка*. Обычно в подобной ситуации результат полагается равным нулю, и вычисления продолжают.

На рис. 13 показана "машинная" числовая ось, на которой отмечены X_0 и X_{∞} . Числа располагаются на оси неравномерно. Их плотность возрастает по мере приближения к нулю.



Рис. 13. "Машинная" числовая ось

На рис. 13 вблизи единицы отмечена небольшая область ε_m , которую называют *машинное эпсилон*. Параметр ε_m весьма важен, так как он характеризует относительную точность представления чисел в компьютере. В зависимости от способа округления чисел в ЭВМ величина ε_m определяется первым отбрасываемым или последним сохраняемым разрядом мантиссы.

Следует иметь в виду, что длина мантиссы в памяти компьютера устанавливается программно. Например, при выполнении расчетов на языке ФОРТРАН с использованием "обычной" точности (двоичная запись числа длиной четыре байта) $\varepsilon_m \sim 10^{-7}$. При удвоенной длине мантиссы $\varepsilon_m \sim 10^{-16}$.

1.5. Использование специализированных математических пакетов

В настоящее время широко известны специальные математические пакеты, облегчающие решение задач на компьютере. Это, например, системы MATLAB и MathCAD, ориентированные на решение широкого круга математических задач. Они имеют удобный дружественный интерфейс, объектно-ориентированный язык, набор элементарных математических и специальных функций, встроенные графические средства. Рассмотрим их применение для решения нелинейных уравнений.

1.5.1. Поиск корней нелинейных уравнений в MathCAD

Благодаря встроенным функциям `root`, `Find` и `Minerr` система MathCAD обеспечивает получение готового решения уравнений без составления программы. Однако не во всех случаях результат может оказаться верным, даже при отсутствии видимых ошибок. Ниже рассматриваются примеры решения задач в MathCAD, обсуждаются вычислительные проблемы и способы их преодоления.

MathCAD освобождает пользователя от необходимости программирования алгоритма решения уравнений. Однако основной принцип работы в MathCAD – решение без программирования – имеет помимо очевидных достоинств и обратную сторону: неуверенность в результате вычислений. Эта неуверенность объясняется тем, что процесс решения скрыт от пользователя и не может быть проконтролирован непосредственно. Примеры вычислений с ошибочным результатом приведены ниже.

Зададим функцию, содержащую гиперболические синус и косинус: $f(x) = \text{sh}(x) / (\text{ch}(x))^2$. График этой функции в интервале $-8 < x < 8$ представлен на рис. 14, а.

Корнем этой функции является $x = 0$. Слева и справа от этой точки $f(x)$ имеет минимум и максимум, а при удалении от начала координат $f(x)$ приближается к нулю. С формальной точки зрения решение уравнения $f(x) = 0$ не должно вызывать проблем, поскольку функция не содержит разрывов и имеет один корень во всей области определения неизвестного $-\infty < x < +\infty$.

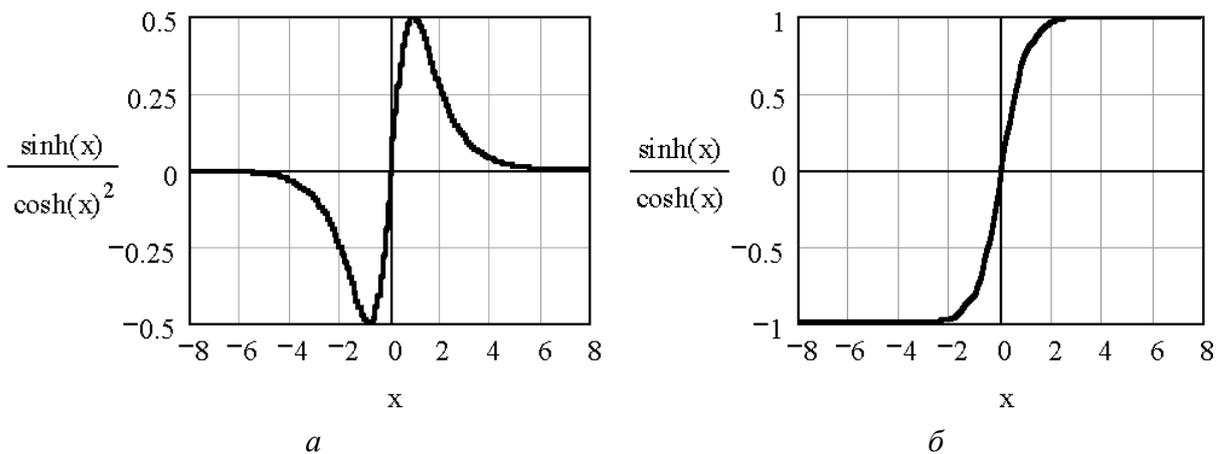


Рис. 14. Графики функций $f(x) = \text{sh}(x) / (\text{ch}(x))^2$ и $f(x) = \text{sh}(x) / (\text{ch}(x))$

При начальном приближении $x = -0,5$ процедура root довольно уверенно определяет значение корня:

$$x := -0.5 \quad f(x) := \sinh(x) \cdot (\cosh(x))^{-2}$$

$$\text{root}(f(x), x) = -7.351 \times 10^{-7}$$

Однако сравнительно небольшое изменение начальной точки – до $x = -0,7$ приводит к заведомо неверному результату. Причём с увеличением требований к точности (параметр TOL) результаты удаляются от корня:

$x := -0.7$	$\text{TOL} := 10^{-3}$	$\text{root}(f(x), x) = 7.829$
$x := -0.7$	$\text{TOL} := 10^{-6}$	$\text{root}(f(x), x) = 14.958$
$x := -0.7$	$\text{TOL} := 10^{-9}$	$\text{root}(f(x), x) = 21.89$

Причина ошибок кроется как в характере зависимости $f(x)$, так и в особенностях работы процедуры, обеспечивающей решение.

При начальном приближении $x = -0,7$ алгоритм root (в основу которого положен метод секущих) попадает на внешний правый по отношению к $x = 0$ склон зависимости $f(x)$ (см. рис. 14, a) и "скатывается" по этому склону в поисках нуля $f(x)$ в сторону $+\infty$. Это видно по возвращаемым функцией root числам. Очевидно, что результаты решения неверны.

Однако система не выдаёт никаких сообщений об ошибке. Это объясняется тем, что MathCAD считает корнем не то значение x , при котором $f(x)$ точно равна нулю, а то, при котором $f(x)$ не превышает значения системной переменной TOL, равной по умолчанию 10^{-3} . Данное условие во всех трёх случаях выполняется. С увеличением требований к точности расчёта (то есть с уменьшением TOL) возвращаемые root числа все больше отклоняются от корня $x = 0$, так как с ростом $|x|$ функция $f(x)$ приближается к нулю.

Расчёты при различных начальных значениях x показывают, что границы области сходимости в рассматриваемой задаче примерно соответствуют условию $|x| < 0,6$. Аналогичный результат даёт альтернативная запись решения методом Ньютона.

$$f(x) := \sinh(x) \cdot (\cosh(x))^{-2}$$

$$\text{Newton}(f, x) := \text{for } i \in 0..1000$$

$$\left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)} \\ \text{break if } |x_i - x| \leq \text{TOL} \\ x \leftarrow x_i \end{array} \right.$$

$$\text{Newton}(f, -0.5) = -3.383 \times 10^{-11} \quad \text{Newton}(f, -0.7) = 36.032$$

Для успешного решения уравнения необходимо правильно выбрать не только начальное приближение, но и критерий точности расчёта. Иллюстрацией этого служит пример решения модифицированного уравнения, отличающегося от рассмотренного множителем 10^{-3} :

$$x := -0.5 \quad \text{TOL} := 10^{-3}$$

$$\text{root}(f(x) \cdot 10^{-3}, x) = 0.307$$

Корни исходного уравнения $f(x) = 0$ и нового $f(x) \cdot 10^{-3} = 0$ должны совпадать. Однако MathCAD выдаёт неверный результат. Эта ошибка объясняется тем, что функция $f(x) \cdot 10^{-3}$ при любых значениях x не превышает значения параметра TOL. Чтобы получить разумный результат, необходимо скорректировать требования к точности, выбрав, например, $\text{TOL} = 10^{-6}$. В этом случае MathCAD возвращает $x = -7,35117 \cdot 10^{-7}$.

В ряде случаев особенности уравнения могут привести к неработоспособности алгоритма поиска корня. Например, для уравнения $f(x) = \text{sh}(x) / (\text{ch}(x))$ будет выдано следующее сообщение:

$$x := 2 \quad \text{TOL} := 10^{-3} \quad \text{root}[\sinh(x) \cdot (\sinh(x))^{-1}, x] =$$

Found a number with a magnitude greater than 10^{307} while trying to evaluate this expression

Неудача объясняется тем, что функция имеет пологие участки слева и справа от точки $x = 0$ (см. рис. 14, б). Поскольку алгоритм root на каждом итерационном шаге делит значения функции $f(x)$ на численный эквивалент её производной, возникает переполнение (overflow), так как производная $f'(x)$ при $|x| \geq 2$ близка к нулю.

Опасность ошибок, подобных рассмотренным выше, состоит в том, что они могут остаться незамеченными, поскольку MathCAD не выдаёт никаких предупреждающих сообщений. Поэтому при решении уравнений желательно придерживаться следующих правил. Во-первых, необходимо сначала провести отделение корней уравнения. Во-вторых, желательно выполнить поиск решения несколько раз от различных начальных точек. Решение следует подвергать проверке, если его правильность не очевидна.

Приведённые примеры не свидетельствуют о слабости встроенных в MathCAD процедур решения уравнений. С подобными проблемами можно столкнуться и при использовании других средств, например, MATLAB или пакетов прикладных программ для численных расчётов.

1.5.2. Поиск корней нелинейного уравнения в MATLAB

В MATLAB реализована процедура поиска корней уравнения в виде функции `fzero`, использующей комбинацию методов половинного деления, секущих и обратной квадратичной интерполяции (в версиях до 4.X использовалась процедура `ZEROIN`). Обращение к функции можно записать в виде

$$X1=fzero(FUN, X0, OPTIONS),$$

где `FUN` – строка, содержащая имя действительной функции $f(x)$ действительной переменной x , `X0` – начальное приближение x , `OPTIONS` – опции решения. Если структура `OPTIONS` пропущена или заменена пустой матрицей `[]`, используются установленные по умолчанию настройки процедуры решения.

Поскольку имя функции $f(x)$ указывается как строчная переменная `FUN`, оно должно быть заключено в апострофы или выделено символом `@`. Например, для функции $f(x) = \sin(x)$ после ввода строки `X=fzero('sin', 3)` возвращается результат `X=3.14159...`. Любая более сложная функция $f(x)$, для которой требуется найти корень, может быть задана с помощью `m`-файла.

Рассмотрим задачу, представленную в демонстрационных примерах пакета MATLAB. Решение отыскивается для тестовой функции `humps(x)`, записанной в файле `humps.m` в виде

$$y=1.0/((x-0.3).^2+0.01)+1.0/((x-0.9).^2+0.04)-6.$$

Графический анализ (см. рис. 15) показывает, что данное уравнение имеет корень вблизи $x = 1,3$.

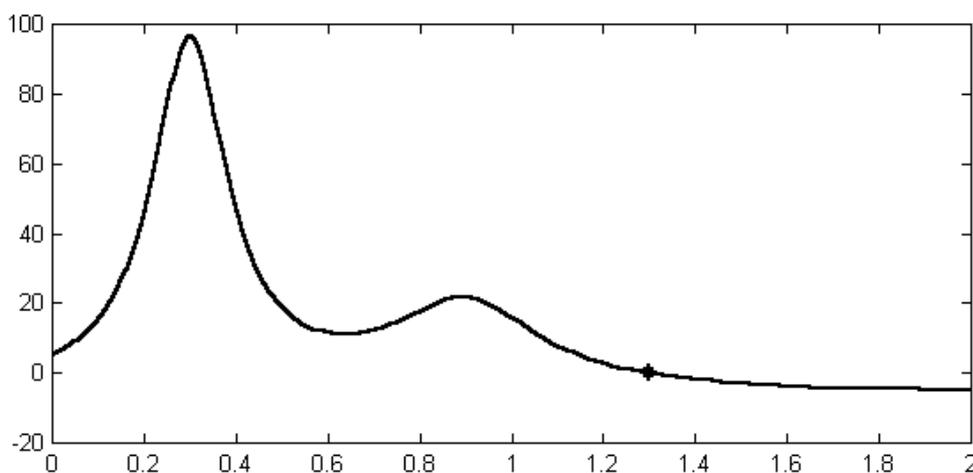


Рис. 15. График функции `humps(x)`, построенный в MATLAB

Уточнение второго корня с помощью функции `fzero` выполняется при начальном приближении $x = 1.0$:

```
X = fzero(@humps,1.,OPTIMSET('Display','iter'))
```

Поскольку в наборе опций `OPTIMSET` задан параметр `iter`, на экран выводятся промежуточные значения расчётных параметров. При этом выходная переменная x принимает следующие значения:

```
X = 1.0; 0.9717; 1.0283; 0.96; 1.04 ... 1.29955 .
```

Последнее число, соответствующее корню уравнения, выводится на двадцать втором шаге решения. Заключительные пять шагов используют интерполяционную процедуру – они отмечены словом "interpolation".

2. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

2.1. Подготовка к работе

Изучите методы решения уравнений на ЭВМ, используя указанную литературу. Обратите особое внимание на следующие вопросы:

1. Виды уравнений и их основные свойства;
2. Основные свойства аналитических и итерационных методов решения уравнений;
3. Методы исследования уравнений и отделения корней;
4. Итерационные методы поиска корней уравнения на ЭВМ.

2.2. Порядок выполнения работы

1. На основании полученного задания определите вид уравнения, которое требуется решить. Проведите графическое исследование уравнения.
2. Составьте алгоритм решения задачи и подготовьте программу на одном из языков программирования высокого уровня.
3. Выполните расчет на ЭВМ с помощью программы.
4. Решите задачу с помощью пакета MathCAD, MATLAB или другого. Сравните полученный результат с предыдущим решением.
5. Оформите отчет по работе.

2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Описание метода решения, краткие сведения из теории (формулы, алгоритм и т.п.).

4. Программа (распечатка), ее описание.
5. Результаты расчета при различных начальных приближениях.
6. Решение с помощью программы и специализированного пакета (MathCAD, MATLAB и т. п.), сравнение результатов.
7. Краткие выводы по работе.

2.4. Контрольные вопросы

1. Опишите свойства алгебраических и трансцендентных уравнений.
2. Для чего производится процедура отделения корней и предварительное исследование уравнений. Приведите пример.
3. Приведите примеры известных вам способов исследования нелинейных уравнений.
4. Опишите основные свойства прямых и итерационных методов решения уравнений.
5. Что понимают под сходимостью итерационной процедуры? Ответ поясните примерами.
6. Что такое область сходимости применительно к итерационной процедуре?
7. Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.
8. Опишите метод половинного деления.
9. Опишите метод хорд. Назовите его достоинства и недостатки.
10. Опишите метод секущих. Дайте его сравнительную характеристику.
11. Опишите метод касательных. Укажите его достоинства и недостатки.
12. Опишите метод простой итерации. Дайте его характеристику.
13. Приведите пример итерационного метода, использующего квадратичную интерполяцию для решения нелинейных уравнений на ЭВМ.
14. Какие специальные методы применяются для решения алгебраических уравнений?
15. Почему на практике часто применяют комбинированные алгоритмы, включающие в себя различные методы отыскания корней?
16. Расскажите об особенностях представления чисел в ЭВМ. Как влияет способ представления чисел в ЭВМ на точность расчетов?
17. Что такое машинный нуль, машинная бесконечность и машинное ε ? Как эти параметры влияют на точность расчетов на ЭВМ?
18. Для чего используется нормировка уравнений при их решении на ЭВМ?
19. Назовите три основных источника погрешностей при решении задач на ЭВМ, их природу и способы уменьшения.

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

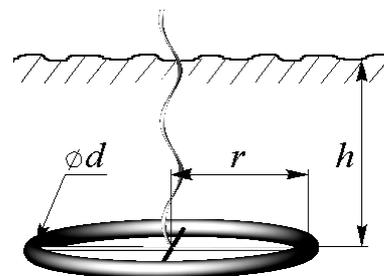
Ниже приведены варианты заданий. Каждое из них включает ряд вариантов, отличающихся друг от друга набором исходных данных. Все параметры в формулах, если не оговорено иное, следует записывать в системе СИ.

Задание 1. Заземлитель в форме кольца радиусом r расположен в грунте на глубине h . Его сопротивление при $h \gg r$ рассчитывается по формуле

$$R = \frac{1}{4\pi^2 r G} \left[\frac{\pi r}{h} + \ln \left(\frac{16r}{d} \right) \right],$$

где $\pi = 3,14\dots$, G – электропроводность грунта, d – диаметр проводника из которого изготовлено кольцо.

Задавшись параметрами h и d , указанными в таблице, а также приняв $G = 0,03$ $^1/\text{Ом}\cdot\text{м}$, найдите радиус r , обеспечивающий требуемое сопротивление заземления R .



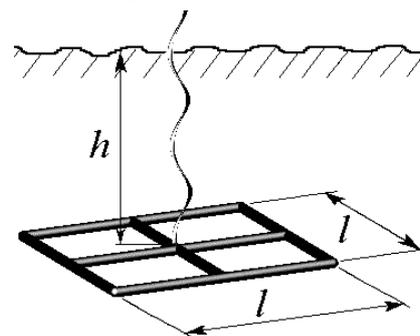
Параметр	В а р и а н т					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
h , м	1,2	1,1	0,9	1,5	1,6	1
d , м	0,03	0,02	0,015	0,025	0,014	0,035
R , Ом	17	25	22	15	16	21

Задание 2. Заземлитель, изготовленный в виде решетки прямоугольной формы из металлических труб, расположен горизонтально в грунте на глубине h . Сопротивление заземлителя рассчитывается по формуле

$$R = \frac{\ln \left(\frac{L^2}{2rh} \right) + 4,95}{2\pi L G},$$

где $\pi = 3,14\dots$, $L = 6 \times l$ – суммарная длина труб, r – радиус труб, h – глубина, G – удельная электропроводность грунта.

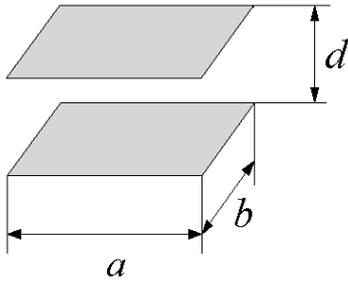
Задавшись параметрами $r = 0,01$ м, h (из таблицы), определите размер l , соответствующий требуемому сопротивлению R .



Параметр	В а р и а н т					
	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
G , $^1/\text{Ом}\cdot\text{м}$	0,02	0,015	0,01	0,025	0,02	0,025
r , м	0,025	0,015	0,035	0,03	0,01	0,03
h , м	1	1,2	0,8	1,5	1,5	1,2
R , Ом	15	12	16	9	12	8

Задание 3. Электрическая емкость системы двух параллельных пластин прямоугольной формы (см. рисунок) при $a \geq d$ и $b \geq d$ может быть определена по формуле

$$C = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{ab}{d} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{a} \left[1 + \ln \left(\frac{2\pi a}{d} \right) \right] \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{b} \left[1 + \ln \left(\frac{2\pi b}{d} \right) \right] \right\},$$

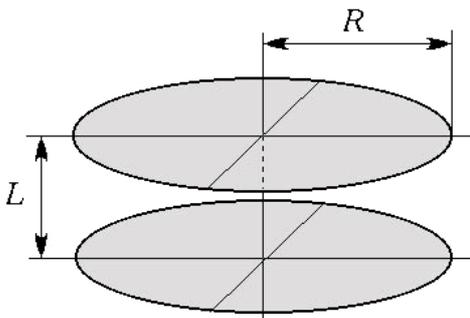


где ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; a и b – размеры пластин; d – расстояние между пластинами, $\pi = 3,14 \dots$

Найдите зазор d , обеспечивающий получение требуемой емкости C при указанных в таблице параметрах.

Параметр	В а р и а н т					
	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
a , м	0,002	0,004	0,004	0,02	0,015	0,009
b , м	0,005	0,007	0,006	0,01	0,008	0,012
ε_1	4,1	10	3,7	7	9,6	5,1
C , пФ	10	2	6,5	10	15	9

Задание 4. Электрическая емкость двух коаксиальных плоских дисков (см. рисунок) при $L/R < 1$ рассчитывается по формуле



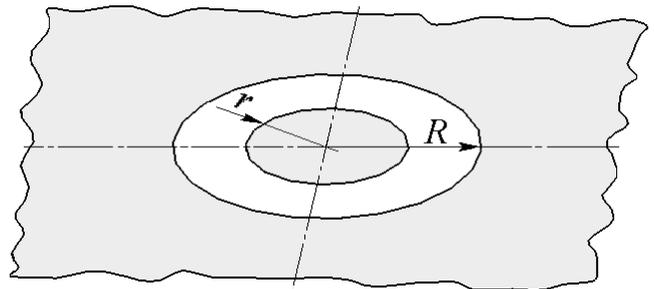
$$C = \varepsilon_1 \varepsilon_0 R \left[\frac{\pi R}{L} + \ln \left(\frac{16\pi R}{L} \right) - 1 \right],$$

где ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, R – радиус дисков, L – расстояние между дисками, $\pi = 3,14 \dots$

Найдите радиус R , удовлетворяющий требуемому значению емкости C , при заданных в таблице параметрах ε_1 и L .

Параметр	В а р и а н т					
	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
ε_1	1	2	4	10	10	4
L , мм	1	1	4	5	4	3
C , пФ	100	33	20	27	36	47

Задание 5. В интегральных схемах используют планарные конденсаторы, имеющие вид металлического диска, расположенного в круглом вырезе металлизации на поверхности диэлектрической подложки (см. рисунок). Емкость такого конденсатора определяется по формуле



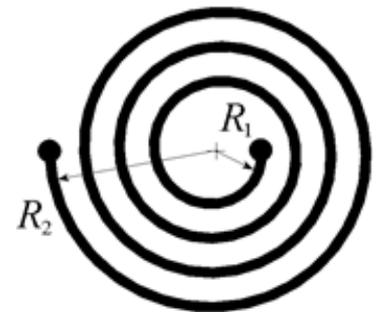
$$C = 2\varepsilon_1\varepsilon_0 R \left[1 + \frac{r}{R} + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] \ln \left(\frac{1+r/R}{1-r/R} \right),$$

где ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, R – радиус выреза, r – радиус диска.

Задавшись указанными в таблице параметрами ε_1 и r , найдите радиус R , обеспечивающий требуемую емкость C .

Параметр	В а р и а н т					
	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
ε_1	1	12	10	4	11	7
r , мм	31	5	4,5	10	20	10
C , пФ	4,7	6	5,5	4,5	35	7,5

Задание 6. В интегральных схемах используют плоские катушки индуктивности в виде круглой металлической спирали. Индуктивность такой катушки (в наногенри) приближенно определяется по формуле



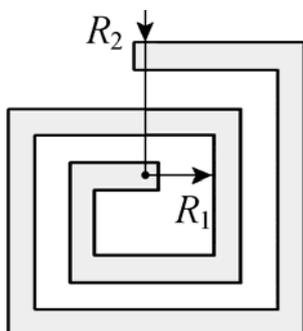
$$L = 0,4 \cdot \pi N^2 a \left[\ln \frac{8a}{c} + \frac{1}{24} \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left(\ln \frac{8a}{c} + 3,583 \right) - \frac{1}{2} \right],$$

где $\pi = 3,14\dots$, N – число витков, $a = (R_1 + R_2) / 2$, $c = R_2 - R_1$, R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы. Все размеры в формулах указаны в миллиметрах.

Найдите радиус R_2 , удовлетворяющий требуемому значению индуктивности L при указанных в таблице N и R_1 .

Параметр	В а р и а н т					
	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6
R_1 , мм	1,5	2	1,3	2	1,5	2
N	6	3,5	5	2	3	2,5
L , нГн	250	120	230	35	77	68

Задание 7. В гибридных интегральных схемах используются плоские пленочные катушки индуктивности в виде квадратной спирали. Индуктивность такой катушки (в наногенри) приближенно определяется по формуле

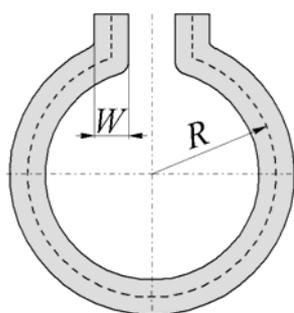


$$L = 2,41 \cdot a N^{\frac{5}{3}} \ln \left(\frac{8a}{c} \right),$$

где N – число витков, $a = (R_1 + R_2) / 2$, $c = R_2 - R_1$, R_1 и R_2 – размеры внутреннего и внешнего витков катушки. Размеры в формулах указаны в миллиметрах.

Задавшись числом витков N и размером R_1 , найдите параметр R_2 , обеспечивающий заданную индуктивность L (значения N , R_1 и L даны в таблице).

Параметр	В а р и а н т					
	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
N	4	5	3	4,5	3,5	5
R_1 , мм	1	2,5	2	1	1,5	1
L , нГн	100	430	160	180	140	170



Задание 8. В гибридных интегральных схемах в качестве одновитковой индуктивности может применяться тонкая металлическая полоска, нанесенная на диэлектрическую подложку в виде круглой петли (см. рисунок). Индуктивность такой петли в наногенри приближенно определяется по формуле

$$L = 1,257 \cdot R \left[\ln \left(\frac{8 \pi R}{W + t} \right) - 2 \right],$$

где R – радиус средней линии петли, W – ширина металлической полоски, t – ее толщина. Все размеры в формуле указаны в миллиметрах.

Найдите размер R , удовлетворяющий требуемому значению L при заданных параметрах W и t (их значения указаны в таблице).

Параметр	В а р и а н т					
	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6
W , мм	0,5	2	1	1,25	1,5	0,75
t , мм	0,03	0,035	0,01	0,035	0,03	0,025
L , нГн	25	72	60	37	45	42

Задание 9. Для экспериментально полученной прямой ветви вольт-амперной характеристики полупроводникового диода при $u < 0,6$ В подобрана аппроксимация в виде степенного многочлена:

$$i = a u + b u^2 + c u^3 + d u^4 + e u^5,$$



где ток i задан в миллиамперах, напряжение u – в вольтах.

Используя аппроксимацию, найдите напряжение на диоде, при котором через него будет протекать заданный в таблице ток i . При составлении уравнения используйте указанные в таблице параметры a, b, c, d и e .

Параметр	В а р и а н т					
	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6
$i, \text{мА}$	11	15	22	25	32	47
$a, \text{мА/В}$	0,2	2,3	112	32	39	15
$b, \text{мА/В}^2$	97	150	215	67	140	22
$c, \text{мА/В}^3$	88	120	110	275	97	217
$d, \text{мА/В}^4$	350	457	465	84	192	118
$e, \text{мА/В}^5$	112	97	149	52	76	56

Задание 10. Коэффициент нелинейности полупроводникового нелинейного резистора (варистора) β определяется как отношение статического R и дифференциального r сопротивлений. При заданном постоянном напряжении зависимость β от температуры описывается выражением

$$\beta = \frac{R}{r} = \frac{T^2 + K T - K T_0}{T^2 - K T + K T_0},$$



где T – температура активной области варистора, T_0 – температура окружающей среды, K – коэффициент температурной чувствительности рабочего слоя варистора.

Найдите значение T , при котором обеспечивается заданное значение β для известных K и T_0 .

Параметр	В а р и а н т					
	10-1	10-2	10-3	10-4	10-5	10-6
β	1,5	2,5	2,0	7,5	1,5	2,5
$K, \text{К}$	700	1200	1000	2780	900	1500
$T_0, \text{К}$	303	300	293	313	299	303

Задание 11. Конструкция радиоэлектронного устройства содержит консольный тонкий однородный стержень. Частоты механических резонансов стержня при таком закреплении определяются из уравнения



$$\cos(x) \operatorname{ch}(x) + 1 = 0,$$

где $x = kL$ – безразмерный параметр, k – волновое число, L – длина стержня. Собственная частота стержня ω связана с параметром k соотношением $\omega = k^2 \sqrt{EJ/m_0}$, где E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения, m_0 – погонная масса стержня.

Найдите первые пять резонансных частот стержня при заданных в таблице исходных данных.

Параметр	В а р и а н т					
	11-1	11-2	11-3	11-4	11-5	11-6
$L, \text{ м}$	0,2	0,1	1,0	0,05	0,1	0,2
$E, \text{ Н/м}^2$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{10}$
$J, \text{ м}^4$	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$
$m_0, \text{ кг/м}$	1	2	1	0,8	0,7	1,5

Задание 12. Конструкция электронного устройства содержит тонкий однородный стержень, жестко закрепленный на концах. Частоты механических резонансов стержня при таком закреплении определяются из уравнения



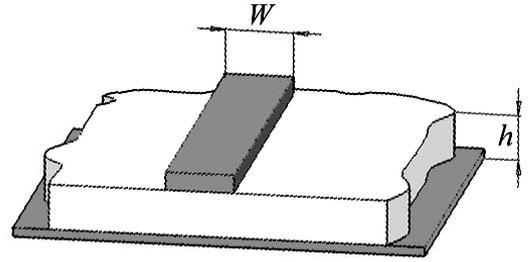
$$\cos(x) \operatorname{ch}(x) - 1 = 0,$$

где $x = kL$ – безразмерный параметр, k – волновое число, L – длина стержня. Собственная частота стержня ω связана с параметром k соотношением $\omega = k^2 \sqrt{EJ/m_0}$, где E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения, m_0 – погонная масса стержня.

Найдите первые пять резонансных частот стержня при заданных в таблице исходных данных.

Параметр	В а р и а н т					
	12-1	12-2	12-3	12-4	12-5	12-6
$L, \text{ м}$	0,2	0,1	1,0	0,05	0,1	0,2
$E, \text{ Н/м}^2$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{10}$
$J, \text{ м}^4$	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-12}$
$m_0, \text{ кг/м}$	1	2	1	0,8	0,7	1,5

Задание 13. Линии связи в высокочастотных интегральных схемах выполняют в виде полосковых структур. При их расчете используют вспомогательный параметр – эффективную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\text{эфф}}$, учитывающую вклад диэлектрической проницаемости подложки и находящегося над ней воздуха. Для узкой полоски металла ($W/h < 1$) эта величина определяется по формуле



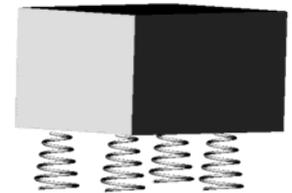
$$\epsilon_{\text{эфф}} = \frac{\epsilon_1 + 1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 1} \cdot \frac{\ln(\pi/2) + \ln(\pi/4)/\epsilon_1}{\ln(8h/W)} \right],$$

где ϵ_1 – относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки, h – толщина подложки, W – ширина проводящей полоски.

Задавшись приведенными в таблице параметрами h и W , определите проницаемость ϵ_1 , удовлетворяющую указанному значению $\epsilon_{\text{эфф}}$.

Параметр	В а р и а н т					
	13-1	13-2	13-3	13-4	13-5	13-6
h , мм	2	0,5	1	0,5	0,5	1
W , мм	1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,3
$\epsilon_{\text{эфф}}$	5,3	4,8	5,5	3,5	4,3	4,8

Задание 14. Для защиты от вибрации блок самолетной радиолокационной станции установлен на четырех амортизаторах. Система амортизации при этом может иметь до шести собственных механических резонансов, частоты которых определяются уравнения



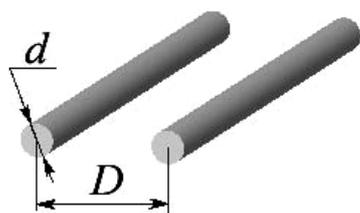
$$A\omega^{12} + B\omega^{10} + C\omega^8 + D\omega^6 + E\omega^4 + F\omega^2 + G = 0,$$

где A, B, C, D, E, F, G – коэффициенты, определяющиеся параметрами конструкции, ω – частота колебаний.

Найдите резонансные частоты для заданных коэффициентов уравнения.

Параметр	В а р и а н т					
	14-1	14-2	14-3	14-4	14-5	14-6
A	0,01	0	0	0,1	1	0
B	1	0,01	0,02	-20	0	0
C	-78	1	0,1	102	-29900	1
D	$2,1 \cdot 10^3$	$-1,25 \cdot 10^3$	$-2,56 \cdot 10^3$	$-8,98 \cdot 10^3$	0	-116
E	$-2,5 \cdot 10^4$	$1,85 \cdot 10^5$	$3,45 \cdot 10^5$	$8,76 \cdot 10^6$	26400	$4,3 \cdot 10^3$
F	$1,2 \cdot 10^5$	$-8,75 \cdot 10^6$	$-9,95 \cdot 10^6$	$-7,5 \cdot 10^5$	$9,12 \cdot 10^8$	$-5,3 \cdot 10^4$
G	$-1,9 \cdot 10^5$	$8,9 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^7$	$-3,3 \cdot 10^8$	$-1,75 \cdot 10^9$	$8,9 \cdot 10^4$

Задание 15. Волновое сопротивление двухпроводной линии рассчитывается по формуле



$$Z_0 = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \left(\frac{D}{d} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{d^2}} \right),$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится двухпроводная линия, d и D – соответственно диаметры проводников и расстояние между их осями.

Определите параметр D , обеспечивающий требуемое сопротивление Z_0 при заданных ε и d . Исходные данные приведены в таблице.

Параметр	В а р и а н т					
	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6
Z_0 , Ом	600	150	350	225	150	100
ε	1	4	1	3,5	2,5	3
d , мм	0,5	1,5	1	2	1	1,5

Задание 16. Погонные потери мощности в проводниках коаксиальной линии, выполненной из меди, определяются по формуле



$$\alpha = \frac{1,898 \cdot 10^{-4} \sqrt{\varepsilon} f (1 + D/d)}{D \ln(D/d)},$$

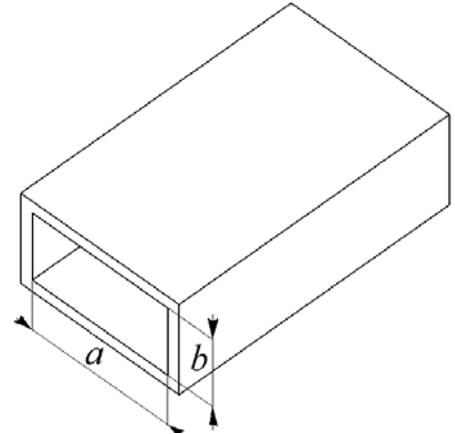
где потери α определяются в дБ/м (децибелл на метр), d и D – соответственно диаметры центрального проводника и экрана (измеряются в метрах), ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды между проводником и экраном, f – частота (измеряется в гигагерцах).

Задавшись указанными в таблице параметрами ε , f и d , определите диаметр D , удовлетворяющий заданному значению α .

Параметр	В а р и а н т					
	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	16-6
ε	2,5	3	7	2,7	1	4
f , ГГц	0,1	0,01	0,05	0,2	0,2	0,07
d , м	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
α , дБ/м	0,1	0,02	0,2	0,14	0,22	0,05

Задание 17. Погонные потери мощности в прямоугольном металлическом волноводе, выполненном из меди, для основного типа волны H_{10} определяются по формуле

$$\alpha = \frac{0,14 \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{b\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}},$$



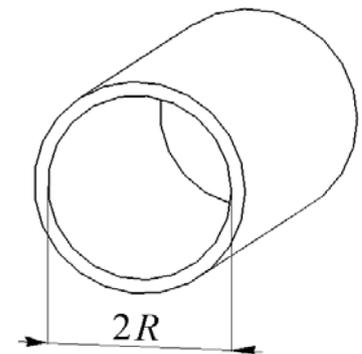
где потери α определяются в дБ/м (децибелл на метр), a и b – поперечные размеры волновода, λ – длина волны. Величины a , b и λ в формулу следует подставлять в сантиметрах.

Задавшись указанными в таблице размерами a и b , определите длину волны λ , удовлетворяющую заданному значению α и условию $a < \lambda < 2a$.

Параметр	В а р и а н т					
	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	17-6
a , см	2,3	1,6	1,3	1,1	0,9	0,72
b , см	1	0,8	0,65	0,55	0,45	0,34
α , дБ/м	0,4	0,3	0,5	0,4	0,7	1,2

Задание 18. Погонные потери мощности в круглом металлическом волноводе, выполненном из меди, для основного типа волны H_{11} определяются по формуле

$$\alpha = \frac{0,14 \left[0,418 + 0,086(\lambda/R)^2 \right]}{R\sqrt{\lambda} \sqrt{1 - 0,086(\lambda/R)^2}},$$

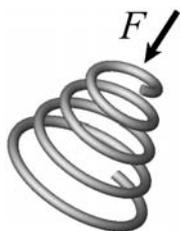


где потери α определяются в дБ/м (децибелл на метр), R – радиус волновода, λ – длина волны. Величины a и λ в формулу следует подставлять в сантиметрах.

Задавшись указанным в таблице радиусом a , определите длину волны λ , удовлетворяющую заданному значению α и условию $2,1 R < \lambda < 3,4 R$.

Параметр	В а р и а н т					
	18-1	18-2	18-3	18-4	18-5	18-6
R , см	10	8	6	5	5	2,5
α , дБ/м	0,01	0,012	0,02	0,03	0,05	0,04

Задание 19. Экспериментально установлено, что зависимость деформации z конусной пружины от приложенной силы F можно рассчитать по формуле

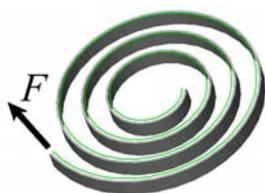


$$z = AF^4 + BF^3 + CF^2 + DF,$$

где A , B , C и D – постоянные, определяющиеся конструкцией пружины. При подстановке в формулу значения силы F в ньютонах деформация z определяется в миллиметрах.

Задавшись приведенными в таблице параметрами A , B , C и D , определите силу F , удовлетворяющую указанному значению z .

Параметр	В а р и а н т					
	19-1	19-2	19-3	19-4	19-5	19-6
A	0,02	0,01	0,01	0,005	0,003	0,01
B	0,4	0,04	0,3	0,01	0,02	0,05
C	0,1	0,5	0,1	0,1	0,4	0,2
D	1,2	1,3	2,1	1,9	1,1	3
z , мм	6	5	3	2	4	5



Задание 20. Экспериментально установлено, что зависимость угла закручивания φ плоской спиральной пружины от приложенной силы F можно рассчитать по формуле

$$\varphi = AF + B \exp(CF),$$

где A , B и C – коэффициенты, определяющиеся конструктивными параметрами пружины. При подстановке в формулу значения силы F в ньютонах угол φ определяется в градусах.

Задавшись приведенными в таблице коэффициентами A , B и C , определите силу F , удовлетворяющую указанному значению φ .

Параметр	В а р и а н т					
	20-1	20-2	20-3	20-4	20-5	20-6
A	1	2	2	0,5	1,3	2,2
B	2	1	1,5	1,2	4,8	2,4
C	0,5	0,8	0,5	1	0,2	0,7
φ , град.	10	18	15	25	16	17