

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства  
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры  
«Строительство, строительные материалы и  
конструкции»

« 18 января 2022 г., протокол № 5»

Заведующий кафедрой



А.А. Трещев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Строительная механика»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**08.03.01 Строительство**

с направленностью (профилем)  
**Промышленное и гражданское строительство**

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-22

Тула 2022 год

## Разработчик методических указаний

Судакова И.А., доцент, к.т.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

## I. Введение

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студенту в его работе по изучению строительной механики.

С этой целью студенту предлагаются общие и тематические методические указания, которые будут направлять его деятельность по приобретению знаний, умений и навыков в решении типовых задач по изучаемой дисциплине.

Реализация методических указаний происходит в ходе практических занятий и выполнения домашних заданий, связанных с закреплением полученных на занятиях знаний и умений, а также подготовкой к каждому предстоящему занятию. Для этого каждому студенту на протяжении всего учебного периода выдаются строго индивидуальные задания, которые должны быть выполнены непосредственно в ходе практических занятий.

Работа над выданным индивидуальным заданием ведется в виде самостоятельной работы при консультативной помощи преподавателя. Результатом этой работы является усвоение алгоритмов решения типовых задач строительной механики, а также языка описания расчетных схем и обозначений, используемых при формулировке математических задач, которые являются следствием применения методов строительной механики.

Важно подчеркнуть, что приобретаемые в ходе практических занятий знания, умения и навыки являются основой для принятия решений при проектировании зданий и сооружений в курсовом и дипломном проектировании. В частности, умение правильно и быстро строить эпюры усилий гарантирует достоверную исходную информацию для определения сечений несущих элементов конструкций.

## 4 семестр

В соответствии с учебным планом предусмотрено:

### Очная форма обучения

№ п/п	Темы практических (семинарских) занятий
<b>4 семестр</b>	
1	Виды внешних и внутренних связей плоских расчётных схем. Статические и кинематические свойства. Графическое представление
2	Число степеней свободы заданной расчётной схемы. Способы вычисления для расчётных схем различных видов
3	Изменяемость расчётных схем. Способы определения. Поэтажная схема образования заданной расчётной схемы: многопролётные балки, ломаные брусья, рамы, фермы
4	Элементарные расчётные схемы. Рациональные способы определения усилий. Виды уравнений равновесия. Пример расчета ломаного бруса
5	Элементарные расчётные схемы. Рациональные способы определения усилий. Виды уравнений равновесия. Пример расчета трехшарнирной рамы
6	Применение принципа независимости внешних воздействий при построении и контроле эпюр усилий
7	Вычисление абсолютных и относительных перемещений узлов расчётной схемы от статической нагрузки
8	Вычисление абсолютных и относительных перемещений узлов расчётной схемы от температурной и кинематической нагрузок
9	Обучающее тестирование
10	Построение поэтажной схемы рамы сложной кинематической структуры
11	Способы определения усилий в рамах сложной кинематической структуры
12	Способы определения усилий в фермах сложной кинематической структуры
13	Построение линий влияния реакций и усилий в однопролётных балках. Статический и кинематический способы
14	Построение линий влияния усилий в стержнях фермы с простой треугольной решёткой
15	Построение линий влияния усилий в стержнях фермы со шпренгельной решёткой. Вычисление усилий по линиям влияния
16	Обучающее тестирование
<b>5 семестр</b>	
1	Статический и кинематический способы определения степени статической неопределимости
2	Выбор основной системы метода сил
3	Вычисление компонентов КСУ метода сил при статической нагрузке
4	Вычисление компонентов КСУ метода сил при температурной и кинематической нагрузках
5	Реализация матричной формы метода сил
6	Алгоритм введения в систему дополнительных связей для создания основной системы метода перемещений
7	Построение эпюр изгибающего момента в основной системе метода перемещений
8	Использование табличных эпюр метода перемещений для вычисления компонентов КСУ метода перемещений
9	Обучающее тестирование
10	Создание основной системы смешанного метода. Особенности вычисления компонентов КСУ смешанного метода
11	Основная система комбинированного метода с дополнительными связями

<b>№ п/п</b>	<b>Темы практических (семинарских) занятий</b>
12	Комбинированный метод для симметричных расчётных схем
13	Метод конечных элементов для расчёта ферм. Матрица индексов
14	Метод конечных элементов для расчёта рам. Матрица индексов
15	Расчет рамы в SCADe
16	Обучающее тестирование

#### **Заочная форма обучения**

<b>№ п/п</b>	<b>Темы практических (семинарских) занятий</b>
<b>4 семестр</b>	
1	Расчет статически определимых рам сложной кинематической структуры
2	Расчет статически определимых ферм сложной кинематической структуры
<b>5 семестр</b>	
1	Расчет статически неопределимых систем методом сил
2	Расчет статически неопределимых систем методом перемещений

## Практические занятия 1-4

### Проведение полного кинематического анализа для плоских шарнирно-стержневых систем

Для того чтобы непосредственно перейти к расчету конструкции (представленной в виде ее расчетной схемы) необходимо провести *кинематический анализ* этой расчетной схемы. Любая строительная конструкция должна быть геометрически неизменяемой, т.е. постоянно сохранять геометрическую форму, заданную при возведении. Кинематический анализ позволяет проанализировать образование системы, выделяя лишние связи, если они существуют, и сделать вывод о геометрической неизменяемости (изменяемости) заданной расчетной схемы.

Кинематический анализ состоит из двух частей: *количественного* и *качественного*.

В ходе количественного кинематического анализа делают вывод о статической определимости (неопределимости) заданной расчетной схемы. Целью этого анализа является установление достаточного числа связей для геометрической неизменяемости системы, а также наличие или отсутствие лишних связей.

В ходе качественного кинематического анализа делают вывод о геометрической неизменяемости (изменяемости) заданной расчетной схемы, а также о ее мгновенной неизменяемости (изменяемости). Цель качественного кинематического анализа – оценка правильности установки достаточного числа связей.

**1.** Мерой *количественного кинематического анализа* является *степень статической неопределимости системы* –  $W$  (или число степеней свободы).

Если  $W = 0$ , то заданная расчетная схема статически определима, если  $W > 0$ , то заданная расчетная схема геометрически изменяема (т.е. является механизмом), если  $W < 0$ , то заданная расчетная схема статически неопределима и  $|W|$  определяет количество *лишних* связей, наложенных на систему.

Количественный кинематический анализ для плоских шарнирно-стержневых систем можно провести по одной из известных формул.

**1.1.** *Формула Чебышева* для определения степени статической неопределимости системы применяется обычно в случае большого количества опорных связей, а также при неудобстве выделения замкнутых контуров в системе:

$$W = 3D - 2Ш^{(1)} - C_0, \quad (1.1)$$

где  $D$  – количество жестких дисков системы;  $Ш^{(1)}$  – общее количество простых (одинарных) шарниров заданной расчетной схемы, объединяющих жесткие диски системы;  $C_0$  – общее число опорных связей в заданной расчетной схеме.

Отрезок упругой линии заданной расчетной схемы, рассматриваемый как жесткое целое, принято называть *диск*. На плоскости диск имеет три независимых перемещения, именуемые степенями свободы. Для того чтобы определить количество жестких дисков заданной расчетной схемы, необходимо в этой системе отбросить внешние (опорные) и внутренние связи и посчитать количество полученных при этом отдельных частей системы.

*Простой (одинарный) шарнир* – это внутренняя связь 2-го вида или шарнир, объединяющий между собой два сечения. Простой шарнир может быть «по изгибающему моменту», «по поперечной силе» и «по продольному усилию» в зависимости от того, какое внутреннее усилие отсутствует в данном сечении. На рис. 1.1 показаны примеры простых (одинарных) шарниров и сечения, которые эти шарниры объединяют.

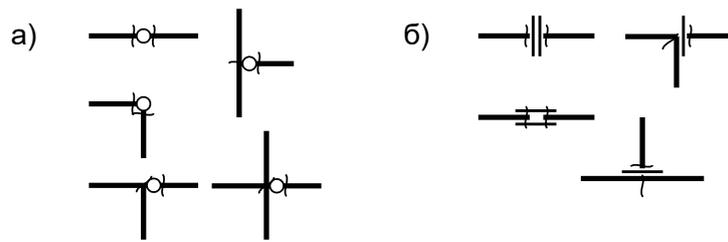


Рис. 1.1. Простые шарниры:

а) по моменту; б) по поперечной или продольной силе.

Если шарнир объединяет более двух сечений, то его называют сложным. Количество простых шарниров в составе сложного определяют по формуле:

$$\text{Ш}^{(1)} = C - 1, \quad (1.2)$$

где  $C$  – количество сечений, объединяемых в данном шарнире. На рис. 1.2 показаны примеры сложных шарниров и сечений, которые эти шарниры объединяют.

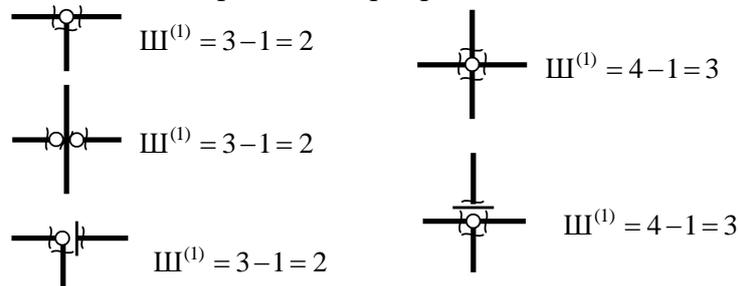
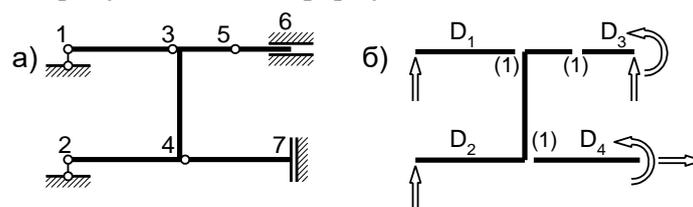


Рис. 1.2. Сложные шарниры

Количество опорных реакций (т.е. число опорных связей 1-го рода) определяют после того, как каждая опорная связь в заданной расчетной схеме представлена в виде ее шарнирно-стержневого аналога (см. приложение 1). При таком изображении каждому опорному стержню соответствует одна опорная реакция.

Далее приведены примеры использования формулы Чебышева при расчете плоских рам.

**Пример 1.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.3,а, по формуле Чебышева.



$$D = 4; \quad \text{Ш}^{(1)} = 3; \quad C_o = 6.$$

Рис. 1.3

*Решение.* Отбросив внешние связи в точках 1, 2, 6, 7 и внутренние связи в точках 3, 4, 5, получим четыре жестких диска: 1-3, 2-4-3-5, 5-6 и 4-7 (см. рис. 1.3,б). Шарниры, объединяющие жесткие диски системы расположены в точках 3, 4 и 5. В каждой из этих точек – простые шарниры, так как они объединяют между собой по два сечения. Количество опорных реакций соответствует количеству опорных стержней при замене опор их шарнирно-стержневыми аналогами: в т.1, 2 – по одному опорному стержню, в т. 6 и 7 – по два. В результате получаем шесть опорных реакций. Формула Чебышева принимает вид:

$$W = 3D - 2\text{Ш}^{(1)} - C_o = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически определима.

**Пример 2.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.4,а, по формуле Чебышева.

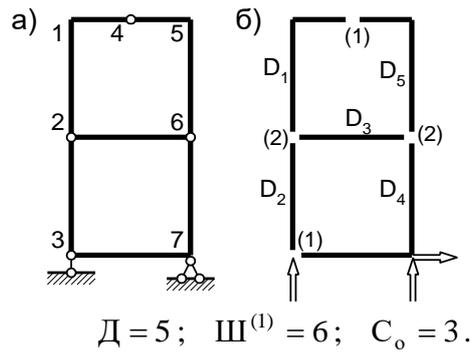


Рис. 1.4

*Решение.* Отбросив внешние связи в точках 3 и 7 и внутренние связи в точках 2, 3, 4, 6, получим пять жестких дисков: 2-1-4, 2-3, 2-6, 3-7-6 и 4-5-6 (см. рис. 1.2,б). Здесь необходимо обратить внимание на расположение связей в точках 3 и 7 (3 – шарнир врезанный, 7 – примыкающий, поэтому в т.3 диск разрезается на отдельные части, а в т.7 – нет).

Шарниры, объединяющие жесткие диски системы расположены в точках 2, 3, 4 и 6. В точках 3 и 4 – простые шарниры, так как они объединяют между собой по два сечения, а в точках 2 и 6 – сложные, так как они объединяют между собой по три сечения. Количество опорных реакций соответствует количеству опорных стержней при замене опор их шарнирно-стержневыми аналогами. В результате получаем три опорных реакции.

Формула Чебышева принимает вид:

$$W = 3D - 2\text{Ш}^{(1)} - C_o = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически определима.

**Пример 3.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.5,а, по формуле Чебышева.

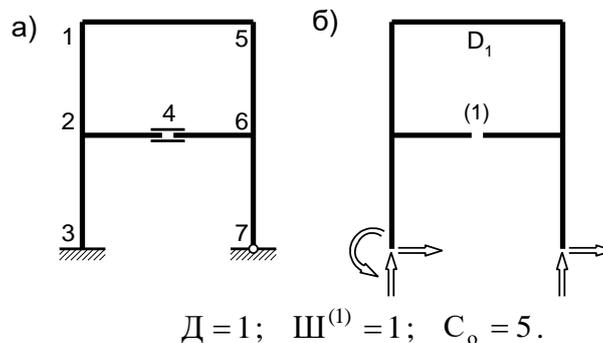


Рис. 1.5

*Решение.* Отбросив внешние связи в точках 3 и 7 и внутреннюю связь в точке 4, получим один жесткий диск: 3-2-4-2-1-5-6-4-6-7) (см. рис. 1.5,б).

Шарнир, объединяющий два сечения жесткого диска системы, расположен в точке 4. Количество опорных реакций соответствует количеству опорных стержней при замене опор их шарнирно-стержневыми аналогами. В результате получаем пять опорных реакций.

Формула Чебышева принимает вид:

$$W = 3D - 2\text{Ш}^{(1)} - C_o = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 5 = -4,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически неопределима и имеет четыре лишние связи.

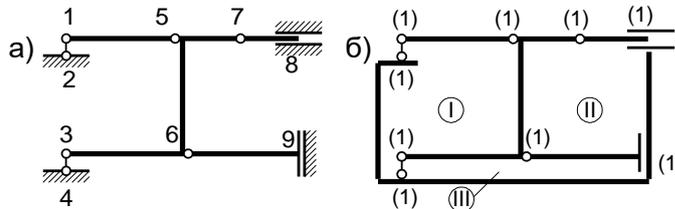
**1.2.** Использование формулы Чебышева для определения степени статической неопределимости системы не всегда целесообразно, а иногда дает неправильный результат (в

случае, когда в системе имеются замкнутые жесткие диски). Если система имеет замкнутые контуры, число степеней свободы определяют по формуле контуров

$$W = \text{Ш}^{(1)} - 3K, \quad (1.3)$$

где  $\text{Ш}^{(1)}$  – общее количество простых (одинарных) шарниров заданной расчетной схемы, объединяющих все жесткие диски системы;  $K$  – количество замкнутых контуров, образованных жесткими дисками расчетной схемы.

**Пример 4.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.6,а, по формуле контуров.



$$K = 3 \begin{cases} (1-5-6-3-4-2-1) \\ (5-7-8-9-6-5) \\ (3-4-9-6-3) \end{cases} \quad \text{Ш}^{(1)} = 9(\text{т.1,2,3,4,5,6,7,8})$$

Рис. 1.6

*Решение.* Землю представляем в виде жесткого диска, не имеющего степеней свободы. Тогда получим три замкнутых контура, образованных жесткими дисками системы. Следует обратить внимание на то, что одностержневые опорные связи 1-2 и 3-4 также следует рассматривать в виде жестких дисков системы (см. рис. 1.3,б). На рисунке указаны точки, в которых есть простые шарниры. В точках 8 и 9 двухстержневые опорные связи входят в формулу как простые шарниры. Окончательно получаем

$$W = \text{Ш}^{(1)} - 3K = 9 - 3 \cdot 3 = 0,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически определима.

**Пример 5.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.7,а, по формуле контуров.

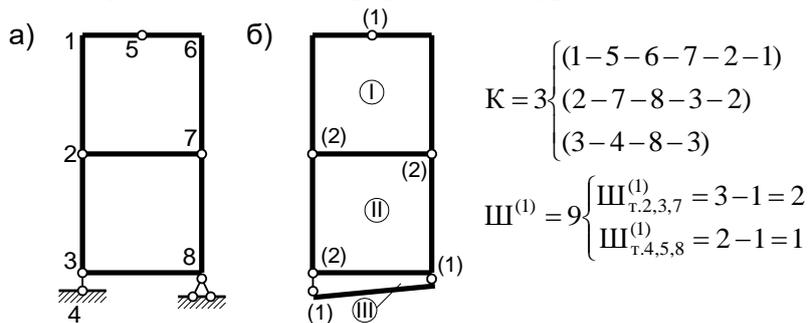


Рис. 1.7

*Решение.* Землю представляем в виде жесткого диска, не имеющего степеней свободы. Тогда получим три замкнутых контура, образованных жесткими дисками системы. Одностержневую опорную связь 3-4 также следует рассматривать в виде жесткого диска системы (см. рис. 1.7,б). На рисунке указаны точки, в которых есть простые и сложные шарниры. В точке 8 двухстержневая опорная связь входит в формулу как простой шарнир. Окончательно получаем

$$W = \text{Ш}^{(1)} - 3K = 9 - 3 \cdot 3 = 0,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически определима.

**Пример 6.** Определить степень статической неопределимости заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 1.8,а, по формуле контуров.

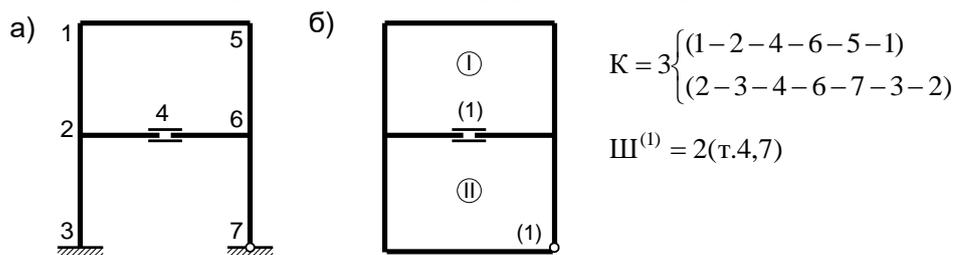


Рис. 1.8

**Решение.** Землю представляем в виде жесткого диска, не имеющего степеней свободы. Тогда получим два замкнутых контура, образованных жесткими дисками системы. Жесткую заделку в точке 3 можно рассматривать как продолжение диска 2-3 (см. рис. 1.7,б). На рисунке указаны точки, в которых есть простые шарниры. В точке 7 двухстержневая опорная связь входит в формулу как простой шарнир. Окончательно получаем

$$W = \text{Ш}^{(1)} - 3K = 2 - 3 \cdot 2 = -4,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически неопределима и имеет четыре лишние связи.

**2.** Напомним, что в ходе *качественного кинематического анализа* делают вывод о геометрической неизменяемости (изменяемости) заданной расчетной схемы, а также о ее мгновенной неизменяемости (изменяемости). Следует также отметить, что при проведении кинематического анализа все диски системы (включая опорные) считают абсолютно жесткими (недеформируемыми).

**2.1.** *Геометрически неизменяемой* системой называется такая система, у которой перемещения отдельных точек возможны только вследствие деформации ее отдельных частей. Примером такой системы может служить шарнирно-стержневой треугольник, изображенный на рис. 2.1,а. Если точки 1 и 2 закрепить на плоскости, а точку 3 попытаться переместить, то это окажется возможным только вследствие деформации как минимум двух стержней 2-3 и 1-3.

*Геометрически изменяемая* система – это такая система, у которой возможны конечные (достаточно большие) перемещения отдельных точек без деформации ее отдельных частей. Примером служит шарнирно-стержневой четырехугольник (см. рис. 2.1,б). Если точки 1 и 2 закреплены на плоскости, то точки 3 и 4 могут получить конечные перемещения вследствие перемещения стержня 3-4.

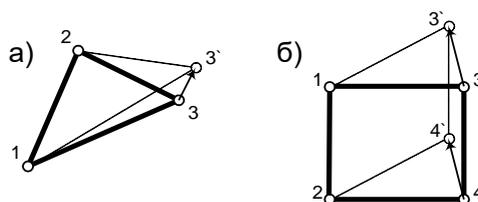


Рис. 2.1

*Мгновенно изменяемая* система – это такая система, у которой возможны бесконечно малые перемещения отдельных точек без деформации отдельных частей системы.

**2.2.** *Признаки мгновенно изменяемых систем:*

1. Все опорные стержни заданной расчетной схемы параллельны между собой. Например, на рис. 2.2,а изображен ломаный брус 1-2-3. В т.1 он присоединяется к земле горизонтальным опорным стержнем, а в т.3 – вертикальным ползуном, который можно представить в виде двух горизонтальных стержней. Таким образом, заданная расчетная схема может получить бесконечно малое вертикальное перемещение, которое не сопровождается деформацией отдельных стержней ЗРС (см. рис. 2.2,б).

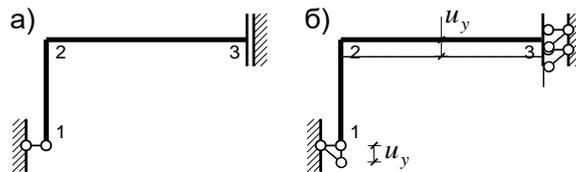


Рис. 2.2

2. Все опорные стержни пересекаются в одной точке. Например, на рис. 2.3,а изображен ломаный брус, прикрепленный к земле в точках 1, 3 и 4. Все опорные стержни пересекаются в т.2, которая называется центром мгновенных скоростей. Весь диск 1-2-3-2-4 может повернуться относительно т. 2 на бесконечно малый угол (см. рис. 2.3,б).

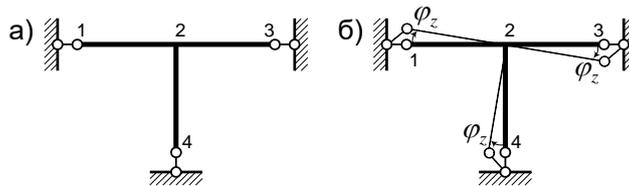


Рис. 2.3

3. Три шарнира лежат на одной прямой. Этот признак вытекает из п.2 и относится не только к внешним, но и к внутренним связям. Например, на рис. 2.4,а изображена трехшарнирная рама, у которой все три шарнира в точках 1, 2 и 3 лежат на одной прямой. Таким образом, точка 2 может получить бесконечно малое перемещение, перпендикулярное отрезку 1-2-3 (см. рис. 2.4,б).

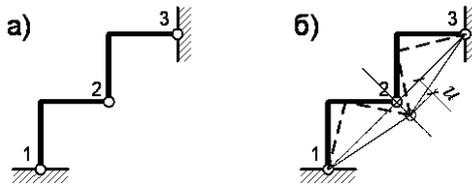


Рис. 2.4

4. Одна и та же опорная реакция принимает различные значения при ее определении из разных уравнений равновесия. Например, для балки, изображенной на рис. 2.5,а, вертикальную реакцию в т.1 можно определить из уравнения суммы проекций всех сил на ось Y, а также из суммы моментов всех сил относительно т.2. Из первого уравнения получаем  $Y_1 = P$ , а из второго уравнения  $-Y_1 = 0$ , следовательно ЗРС мгновенно изменяема.

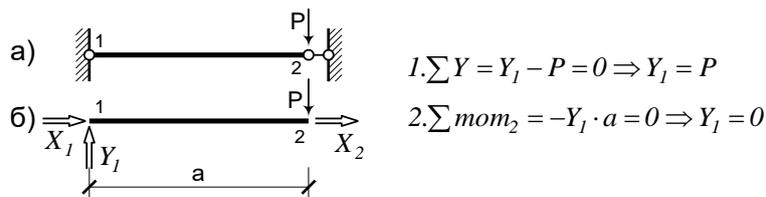


Рис. 2.5

**2.3.** Для того, чтобы доказать геометрическую неизменяемость заданной расчетной схемы (далее ЗРС), необходимо на каждом этапе ее образования выделить шарнирно-стержневой треугольник (далее ШСТ). Отдельным «этажом» или этапом образования ЗРС считается ее часть, представляющая собой элементарную расчетную схему. К ним относятся:

- однопролетная балка;
- ломаный брус;
- трехшарнирная рама.

Образование ШСТ рассмотрим на примере *однопролетной балки* (см. рис. 2.6)

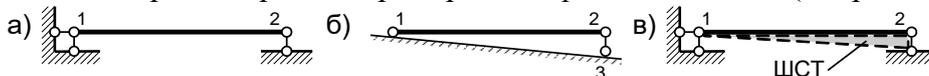


Рис. 2.6

В т.1 балка прикреплена к земле шарнирно-неподвижной связью, которая может быть

изображена в виде двух опорных стержней (рис. 2.6,а) или с помощью одного шарнира «по моменту» (рис. 2.6,б); в т.2 – одностержневой вертикальной связью. В образовании ЗРС четко виден ШСТ, т.е. три диска, объединенные тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Первый диск – балка 1-2, второй диск – опорный стержень 2-3, третий диск – «земля». Три диска соединены шарнирами в точках 1, 2, 3. В дальнейшем при проведении качественного кинематического анализа достаточно показать ШСТ, как на рис. 2.6,в.

Чтобы доказать мгновенную неизменяемость ломаного бруса, изображенного на рис. 2.7, необходимо в первую очередь выделить три шарнира в образовании этой ЗРС.

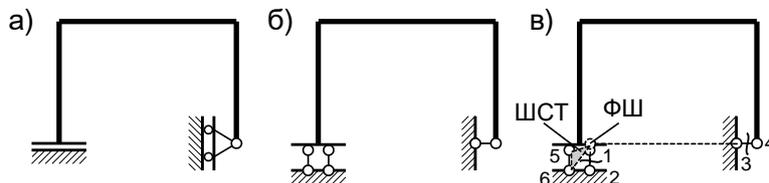


Рис. 2.7

На рис. 2.7,б показано, как опорные связи заменяются их шарнирно-стержневыми аналогами, при этом явно видны шесть шарниров. Ломаный брус представляет собой один этап образования, следовательно, для качественного кинематического анализа необходимо показать один ШСТ для ЗРС. Обращаясь к рис. 2.6,а, заметим, что шарнир в т.1 образован пересечением двух одностержневых связей. Воспользуемся этим для образования так называемого *мнимого шарнира* (далее МШ). МШ на рис. 2.7, в образуется на пересечении стержней 1-2 и 3-4. ШСТ для заданного ломаного бруса образуется этим *фиктивным шарниром* (ФШ) и шарнирами в точках 5 и 6 (см. рис. 2.7, в).

Другие примеры образования ШСТ в ломаных брусках изображены на рис. 2.8.

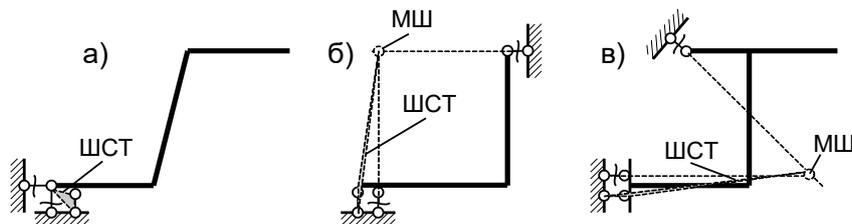


Рис. 2.8

Таким образом, жесткий диск (*балка или ломаный брус*) является *геометрически неизменяемым* (можно построить ШСТ), если он крепится к «земле» при помощи *трех опорных стержней, оси которых не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке*.

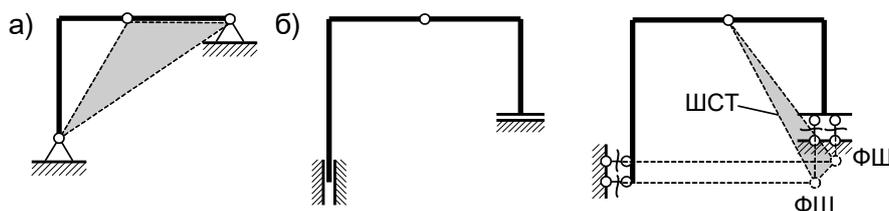


Рис. 2.9

Аналогично, для трехшарнирных рам качественный кинематический анализ состоит в построении ШСТ (рис. 2.9).

В некоторых случаях изложенные выше способы отображения ШСТ не могут быть использованы. Например, для трехшарнирной рамы, изображенной на рис. 2.10, два шарнира (в т.1 и 3) видны явно, а третий находится на пересечении стержней 5-6 и 7-8, т.е. в бесконечности. В данном случае можно рассматривать отрезок, соединяющий точки 1 и 3 как одностержневую связь. Тогда точка пересечения линии 1-3 и стержня 7-8 даст ФШ, а ШСТ образуется вследствие соединения этого фиктивного шарнира с точками 5 и 6 (см. рис. 2.10,б).

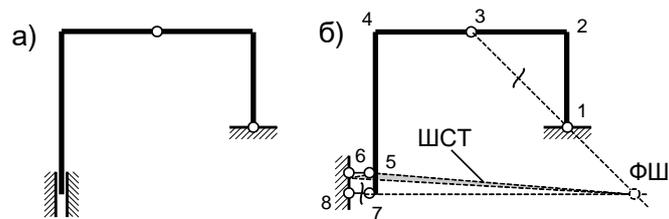


Рис. 2.10

**2.4.** Существуют также другие методы, позволяющие доказать геометрическую неизменяемость ЗРС, например, *метод замены связей*. Суть его заключается в следующем:

- ЗРС преобразуют во вспомогательную путем отбрасывания одной любой связи (внешней, внутренней, угловой или линейной) и установки любой другой одной связи таким образом, чтобы геометрическая неизменяемость полученной вспомогательной расчетной схемы (ВРС) была очевидна;
- для ВРС в направлении отброшенной связи прикладывают любое ненулевое усилие, например, равное единице;
- для ВРС определяют значение опорной реакции или внутреннего усилия, соответствующего установленной связи;
- если полученное значение равно нулю, то ЗРС – мгновенно изменяема, иначе она обладает свойством мгновенной неизменяемости.

Рассмотрим применение метода замены связей для проведения качественного кинематического анализа для ЗРС, изображенной на рис. 2.10,а.

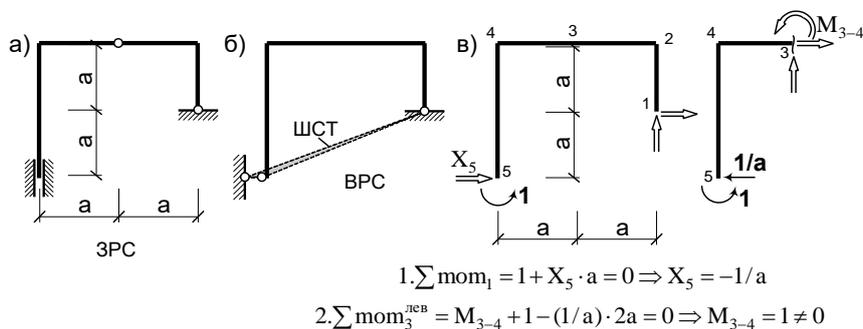


Рис. 2.11

- ЗРС (рис. 2.11,а) преобразуем во вспомогательную (рис. 2.11,б) путем отбрасывания в т.5 угловой связи и установки в т.3 связи, запрещающей поворот; таким образом, геометрическая неизменяемость полученной вспомогательной расчетной схемы очевидна;
- для ВРС в направлении отброшенной связи (в т.5) прикладываем изгибающий момент, равный единице;
- для ВРС определяем значение внутреннего усилия (изгибающего момента  $M_{3-4}$ ), соответствующего установленной связи;
- полученное значение не равно нулю, следовательно ЗРС – мгновенно неизменяема.

**3.** Разложение сложных шарнирно-стержневых систем на элементарные расчетные схемы на основе кинематического анализа.

Пример 3.1. Определить порядок расчета заданной расчетной схемы, изображенной на рисунке 3.1,а, выполнив кинематический анализ.

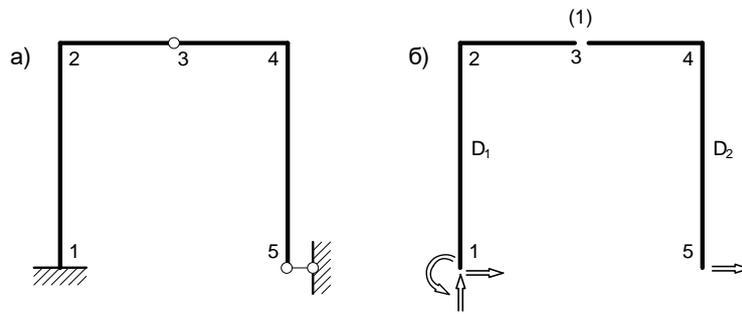


Рис. 3.1

*Решение.* Выполним кинематический анализ

*Количественный кинематический анализ* выполним по формуле Чебышева:

$$D = 2; \quad \text{Ш}^{(1)} = 1; \quad C_o = 4 \text{ (см. рис.3.1,б).}$$

$$W = 3D - 2\text{Ш}^{(1)} - C_o = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

следовательно, заданная расчетная схема статически определима. Значит, все внешние опорные и внутренние реакции можно определить, используя только уравнения равновесия. Количество таких связей в ЗРС необходимо и достаточно для того, чтобы система была мгновенно неизменяемой.

*Качественный кинематический анализ* позволит нам сделать вывод, правильно ли расположены эти связи.

На первом этапе образования можно выделить жесткий диск D1, связанный с жестким диском «земля» одной связью третьего рода (жесткой заделкой). На втором этапе образования жесткий диск D2 присоединяется внутренней связью второго рода (шарниром) к первому этажу и внешней связью первого рода к земле (рис.3.2). Шарнирно-стержневые треугольники (ШСТ) указаны на рис.3.2.

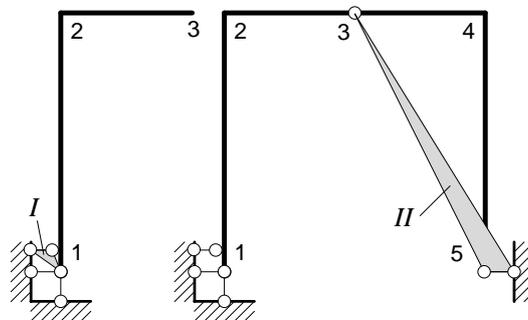


Рис. 3.2

Расчет начинают всегда с **ПОСЛЕДНЕГО ЭТАПА** образования ЗРС. С учетом внешней приложенной нагрузки для диска 3-4-5 можно записать три независимых уравнения, которые

позволят определить три неизвестные на этом этапе:

$$\begin{cases} \sum mom_3 = 0 \\ \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

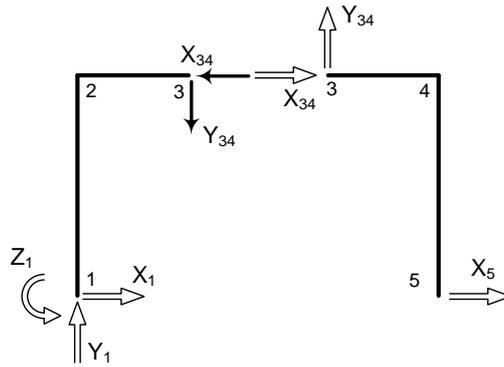


Рис. 3.2

## Практические занятия 5-8

### Расчет статически определимых элементарных расчетных схем на прочность. Однопролетная балка

Для заданной расчетной схемы балки требуется:

1. Провести полный кинематический анализ заданной расчетной схемы.
2. Определить опорные реакции для заданной расчетной схемы.
3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

**Пример выполнения задания.** *Дано:* расчетная схема балки (рис. 1.1.1);

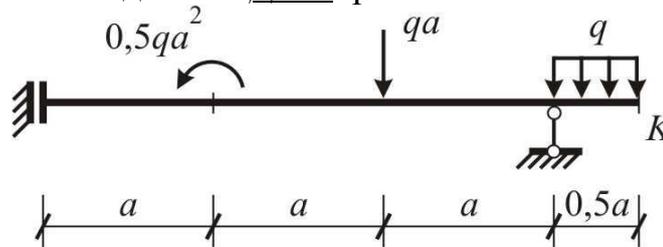


Рис. 1.1.1

#### Решение

#### 1.1.1. Проведение кинематического анализа заданной расчетной схемы

*Количественный кинематический анализ.*

Для проведения полного кинематического анализа необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом и обозначить эти сечения (см. рис. 1.1.2).



Рис. 1.1.2

Определим степень статической неопределимости заданной расчетной схемы (ЗРС) по формуле:

$$W = 3D - 2Ш^{(1)} - C_0$$

- ✓ число жестких дисков системы:  $D = 1$ ;
- ✓ число простых шарниров, объединяющих жесткие диски системы:  $Ш^{(1)} = 0$ ;
- ✓ число опорных стержней:  $C_0 = 3$  ( $C_0^A = 2$ ,  $C_0^B = 1$ , см. Приложение 1).

Имеем,

$$W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3,$$

следовательно ЗРС статически определима.

*Качественный кинематический анализ.*

Проведем анализ ЗРС на геометрическую неизменяемость, которая обеспечивается наличием шарнирно-стержневого треугольника (ШСТ), образованного опорными связями, наложенными на диск (рис. 1.1.3).



Рис. 1.1.3

Таким образом, ЗРС геометрически неизменяема.

### 1.1.2. Определение опорных реакций для заданной расчетной схемы

На рис. 1.1.4 введем систему координат, оси которой определяют правило знаков для опорных реакций, заданных своими обозначениями, при этом неизвестные реакции считаются положительно направленными.

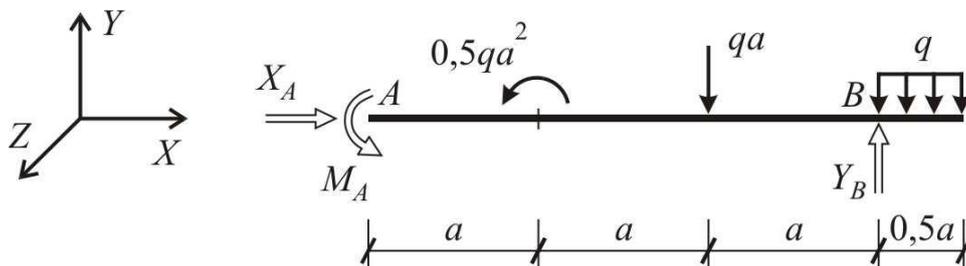


Рис. 1.1.4

Назначим уравнения равновесия для определения опорных реакций, причем для исключения взаимовлияния получаемых результатов выберем такие уравнения, из которых однозначно определялась бы каждая из исследуемых реакций и, не учитывалось влияние двух других, а именно:

$$X_A \leftarrow \sum X = 0;$$

$$Y_B \leftarrow \sum Y = 0;$$

$$M_A \leftarrow \sum \text{mom}_B = 0.$$

Найдем опорные реакции, решив приведенные выше уравнения:

$$\sum X = X_A = 0;$$

$$\sum Y = -qa + Y_B - q \cdot 0,5a = 0 \Rightarrow Y_B = 1,5qa;$$

$$\sum \text{mom}_B = M_A + 0,5qa^2 + qa \cdot a - q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = -1,375qa^2.$$

Знак “-“ перед числовым значением опорной реакции указывает на то, что направление данной реакции надо изменить на противоположное.

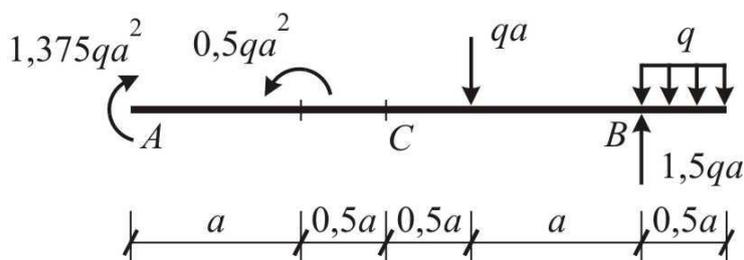


Рис. 1.1.5

Таким образом, реакции опорных связей определены, что позволяет указать на расчетной схеме все нагрузки в явном виде («в значениях»), см. рис. 1.1.5. Данные этого рисунка используются для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей по ранее незадействованному уравнению

Контроль:

$$\sum m_{отC} = -1,375qa^2 + 0,5qa^2 - qa \cdot 0,5a + 1,5qa \cdot 1,5a - q \cdot 0,5a \cdot 1,75a \equiv 0 .$$

### 1.1.3. Построение эпюр внутренних усилий

При плоском изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора (усилия): изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ .

Для того чтобы произвести расчет балки на изгиб, необходимо знать величину наибольшего изгибающего момента  $M_{\max}$  и положение сечения, в котором он возникает. Точно также надо знать наибольшую поперечную силу  $Q_{\max}$ . В связи с этим возникает необходимость выяснить закон изменения  $M$  и  $Q$  по длине балки. Для этой цели обычно строят так называемые *эпюры усилий*.

*Эпюры усилий* – графики распределения внутренних сил (усилий), построенные на осях расчетной схемы. Построение эпюр позволяет повысить наглядность картины распределения усилий по сечениям расчетной схемы от воздействия заданной нагрузки и определить сечения с максимальными значениями усилий.

Для построения эпюр, используя *метод сечений*, определяют численные значения моментов и поперечных сил для ряда точек (*контролируемых сечений*) и по ним строят соответствующие графики.

*Назначение контролируемых сечений.*

Использование понятия *контролируемого сечения* позволяет разбить расчетную схему на участки, в пределах которых характер изменения усилия предопределен (см. Приложение 1).

В балочных системах определяющим усилием является изгибающий момент, поскольку, имея эпюру моментов и расчетную схему, можно без сложных построений получить эпюру поперечных сил (см. Приложения 3, 4). Поэтому при назначении контролируемых сечений выделяем и нумеруем те сечения, в которых возникают характерные значения изгибающего момента  $M$ . К ним относятся:

- ✓ сечение по концам расчетной схемы;
- ✓ сечение, в точке приложения *сосредоточенной силы* (внешняя сила или опорная реакция);
- ✓ два сечения до и после точки приложения *внешнего изгибающего момента*;
- ✓ три сечения по концам и посередине участка действия *распределенной нагрузки*, свободной от сосредоточенной силы или изгибающего момента.

В данном примере необходимо назначить семь контролируемых сечений (см. рис. 1.1.6). При этом согласно *Приложению 3* будем иметь три участка с линейным изменением изгибающего момента (1–2, 3–4, 4–5) и один участок с параболическим законом (5–6–7).

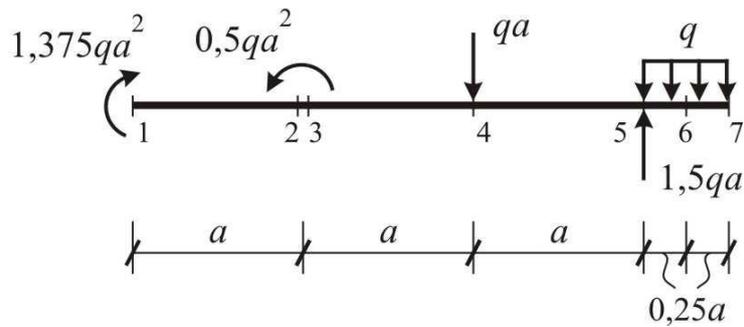


Рис. 1.1.6

*Вычисление ординат эюры изгибающих моментов.*

Для определения численных значений усилия  $M$  в каждом контролируемом сечении применяется *метод сечений*, основанный на расчленении расчетной схемы по контролируемому сечению на две части. При этом формулируются условия равновесия только одной из частей с заменой отброшенной части на систему неизвестных усилий, передаваемых через плоскости разреза. Неизвестные усилия  $M$  и  $Q$  в контролируемых сечениях изображаются положительно направленными:

- *положительная поперечная сила  $Q$  стремится повернуть рассматриваемую часть балки по часовой стрелке* (см. рис. 1.1.7);

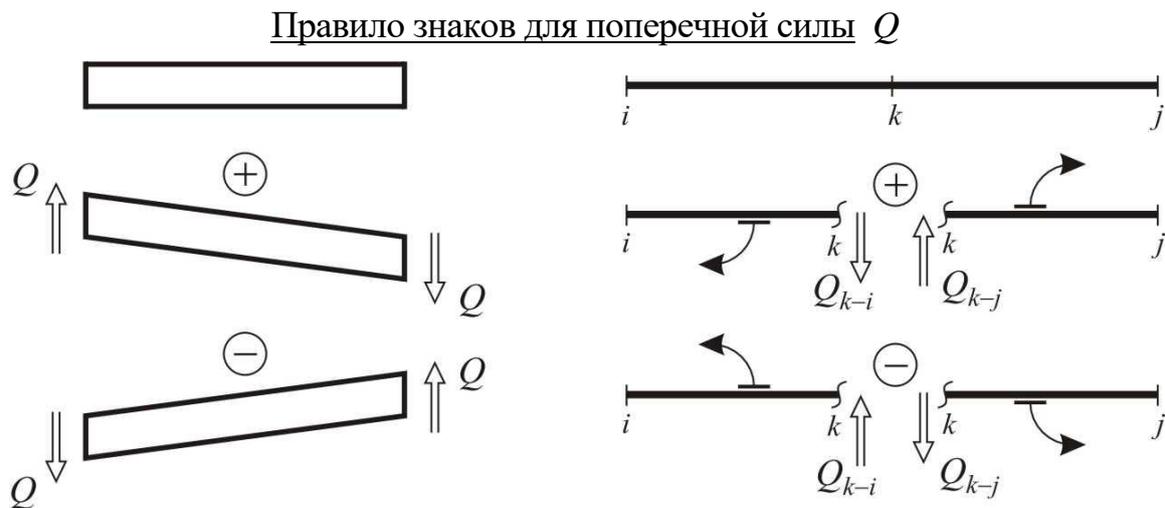


Рис. 1.1.7

- *для изгибающего момента знак не ставят, важно, какие волокна этот момент растягивает.*

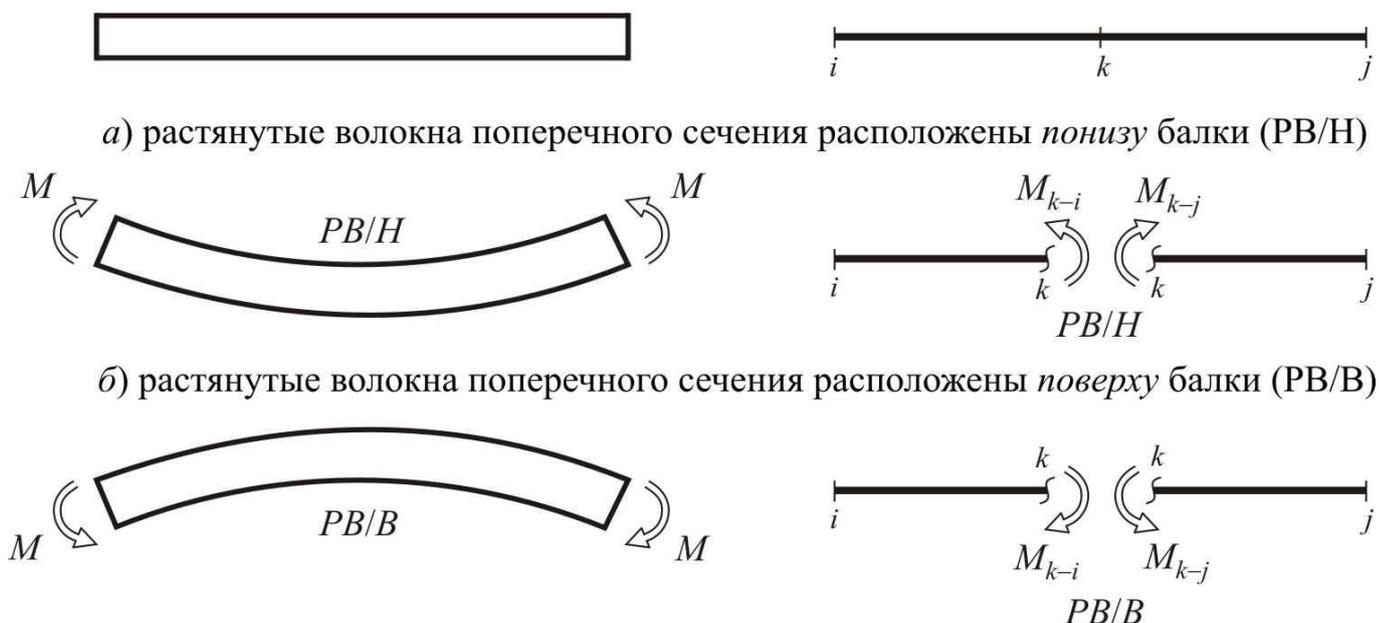


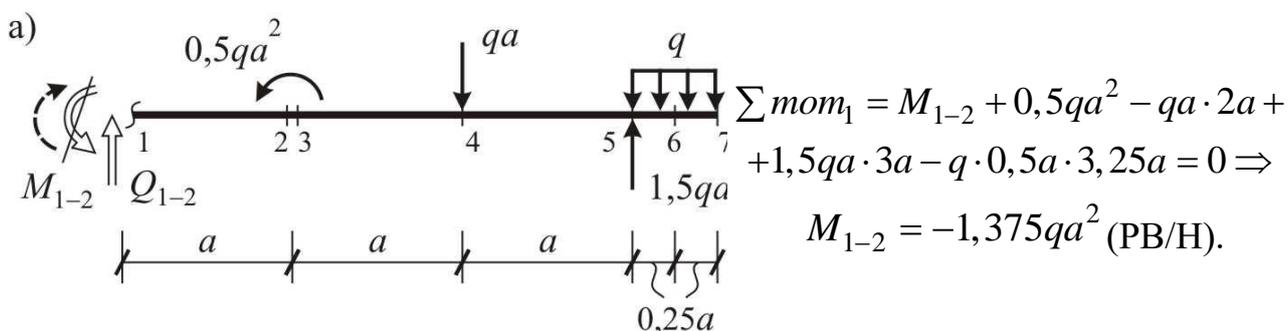
Рис. 1.1.8

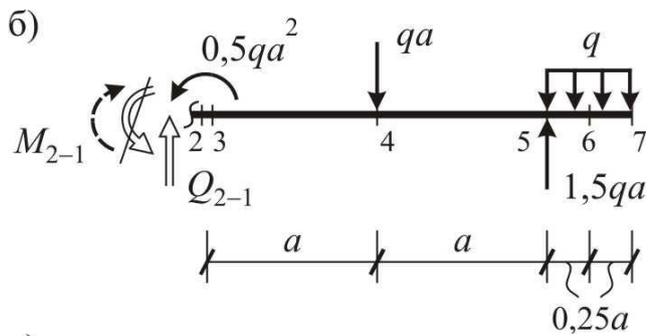
При использовании обозначения для искомого усилия вводится нумерация усилия двумя цифрами:

- *первая цифра* – номер контролируемого сечения, в котором усилие определяется;
- *вторая цифра* – номер сечения на противоположном конце рассматриваемого участка.

Если в результате решения уравнения равновесия усилие  $M$  имеет отрицательный знак (рис. 1.1.9, а-г), то значит, изгибающий момент действует в противоположном направлении. Однако знак изгибающего момента не играет никакой роли, а вместо него вводится понятие «растянутое волокно поперечного сечения» (см. рис. 1.1.8).

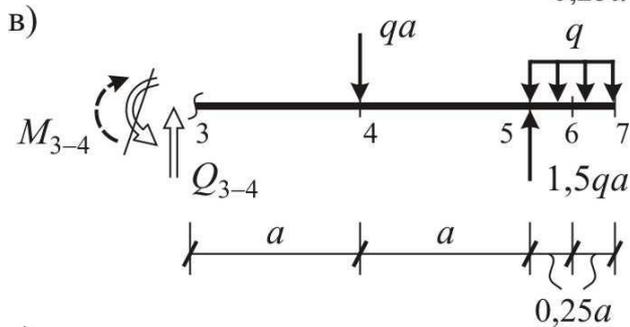
Вычислим значения изгибающих моментов в каждом из 7-ми назначенных контролируемых сечений, используя уравнения равновесия в моментах относительно точек расчленения расчетной схемы (рис. 1.1.9).





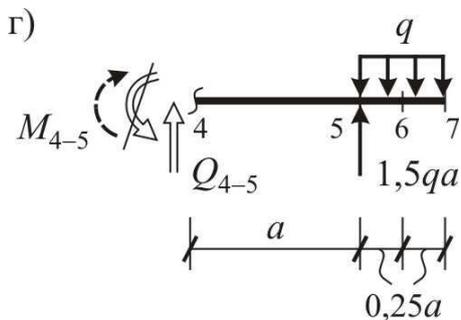
$$\sum \text{mom}_2 = M_{2-1} + 0,5qa^2 - qa \cdot a + 1,5qa \cdot 2a - q \cdot 0,5a \cdot 2,25a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{2-1} = -1,375qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



$$\sum \text{mom}_3 = M_{3-4} - qa \cdot a + 1,5qa \cdot 2a - q \cdot 0,5a \cdot 2,25a = 0 \Rightarrow$$

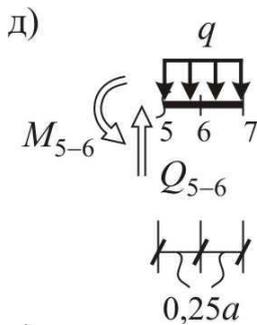
$$M_{3-4} = -0,875qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



$$\sum \text{mom}_4 = M_{4-5} + 1,5qa \cdot a - q \cdot 0,5a \cdot 1,25a = 0 \Rightarrow$$

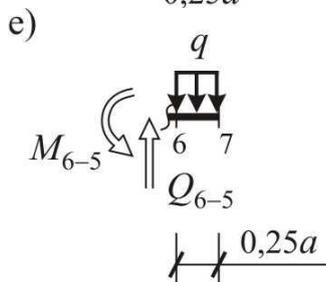
$$M_{4-5} = -0,875qa^2 \text{ (PB/H)}.$$

Рис. 1.1.9 (начало)



$$\sum \text{mom}_5 = M_{5-6} - q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{5-6} = 0,125qa^2 \text{ (PB/B)}.$$



$$\sum \text{mom}_6 = M_{6-5} - q \cdot 0,25a \cdot 0,125a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{6-5} = 0,031qa^2 \text{ (PB/B)}.$$

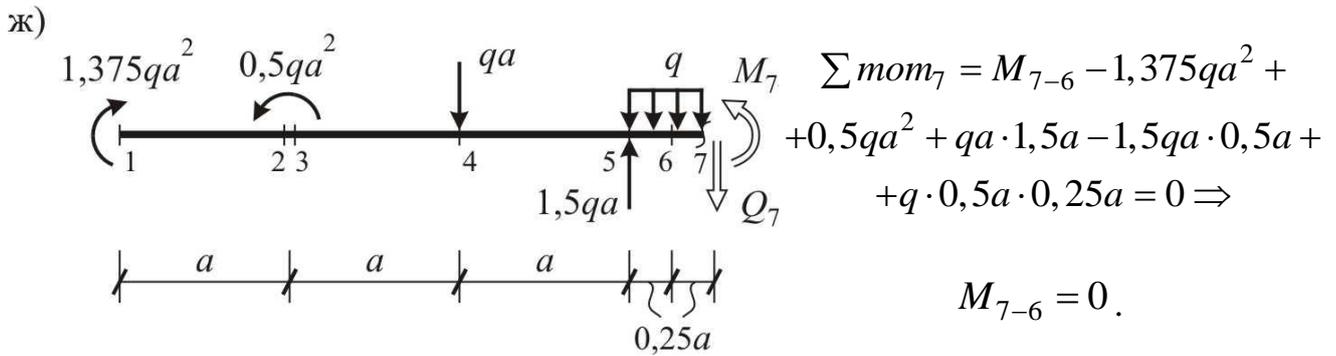


Рис. 1.1.9 (окончание)

*Построение эпюры изгибающих моментов.*

При построении эпюры изгибающих моментов необходимо:

- отложить на осях расчетной схемы в контролируемых сечениях ординаты, равные найденным значениям моментов, *со стороны растянутых волокон*;
- соединить ординаты, учитывая характер изменения усилия (*линейный или параболический*), см. Приложение 3.

По данным рис. 9 построим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 1.1.10).

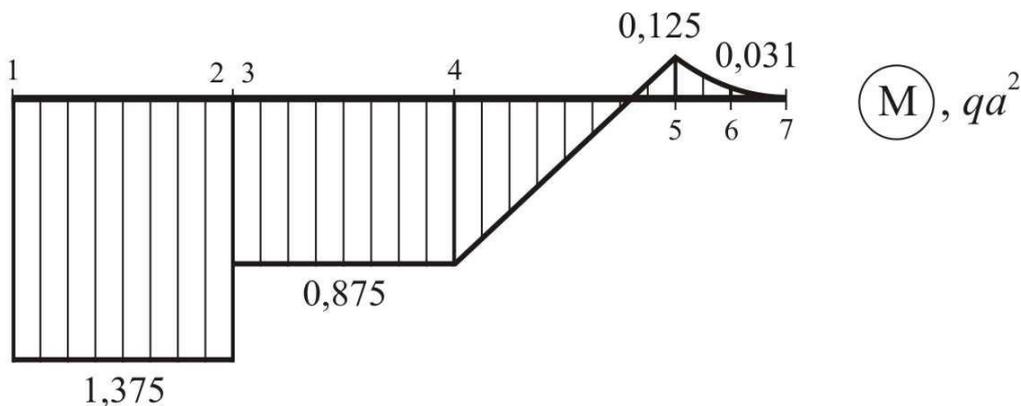


Рис. 1.1.10

*Вычисление ординат эпюры поперечных сил.*

Поперечная сила имеет геометрический смысл тангенса угла наклона касательной к эпюре изгибающего момента в рассматриваемом сечении и осью  $X$  балки.

Поэтому вычисление ординат эпюры поперечных сил включает в себя:

- расчленение эпюры изгибающих моментов на участки, в пределах которых момент изменяется по единому закону (линейному или параболическому);
- вычисление для линейного участка эпюры изгибающих моментов модуля тангенса соответствующего угла (см. Приложение 4);
- разложение криволинейного (параболического) участка эпюры изгибающих моментов на линейную и параболическую части и вычисление модулей тангенсов соответствующих углов (см. Приложение 4);
- присвоение «инженерного» знака этим значениям: **поперечная сила в сечении положительна**, если участок с этим сечением на эпюре

моментов нужно вращать *по часовой стрелке* для совмещения его оси с касательной на эпюре моментов (в этом же сечении), используя минимальный из углов поворота.

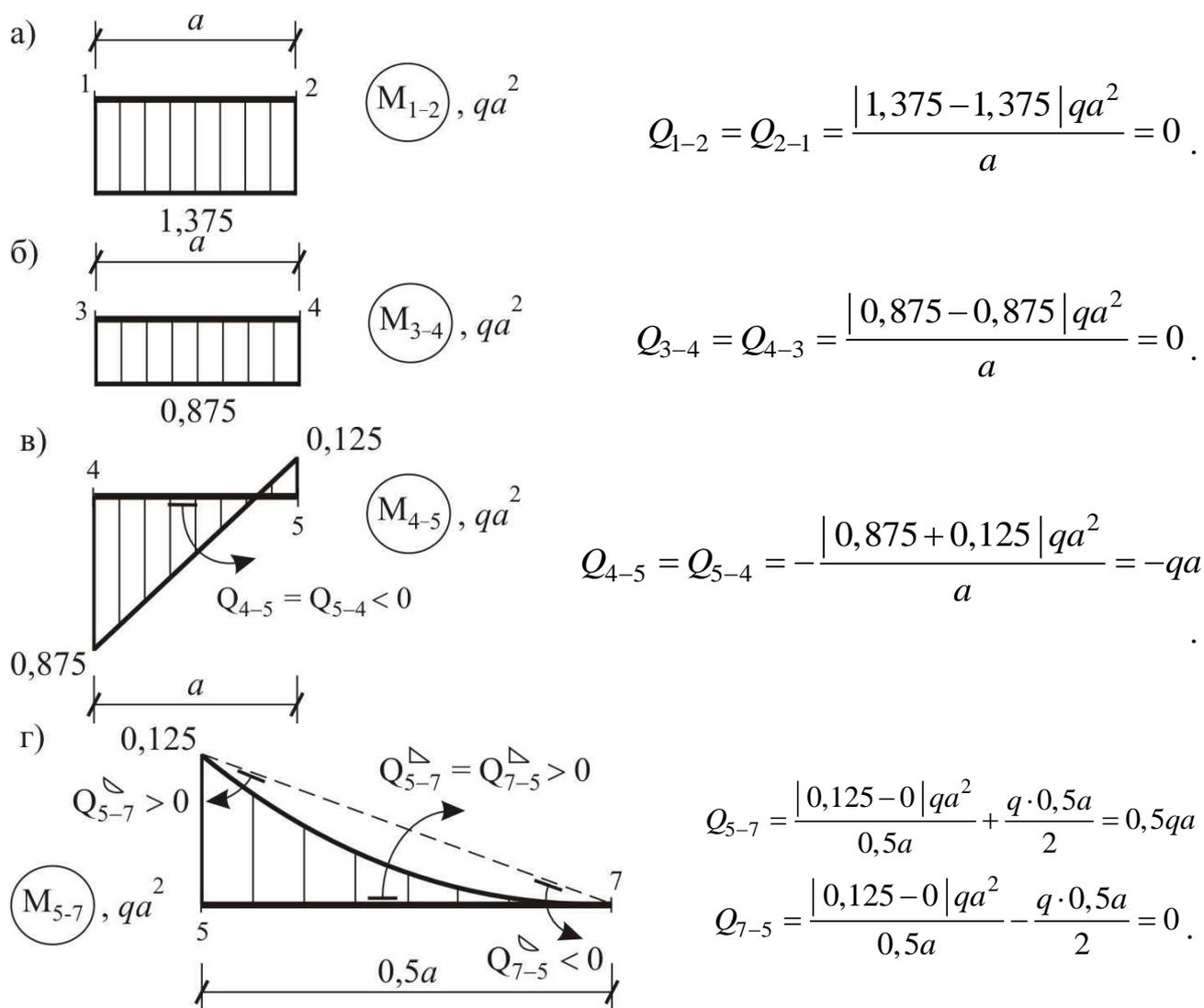


Рис. 1.1.11

*Построение эпюры поперечных сил.*

При построении эпюры поперечных сил необходимо:

- отложить на осях расчетной схемы в контролируемых сечениях ординаты, найденные по эпюре изгибающих моментов, причем *положительные* ординаты откладываются *вверх* от оси расчетной схемы, а *отрицательные* – *вниз*;
- соединить ординаты, учитывая характер изменения усилия, см *Приложение 1*.

По данным рис. 1.1.11 построим эпюру поперечных сил (см. рис. 1.1.12).

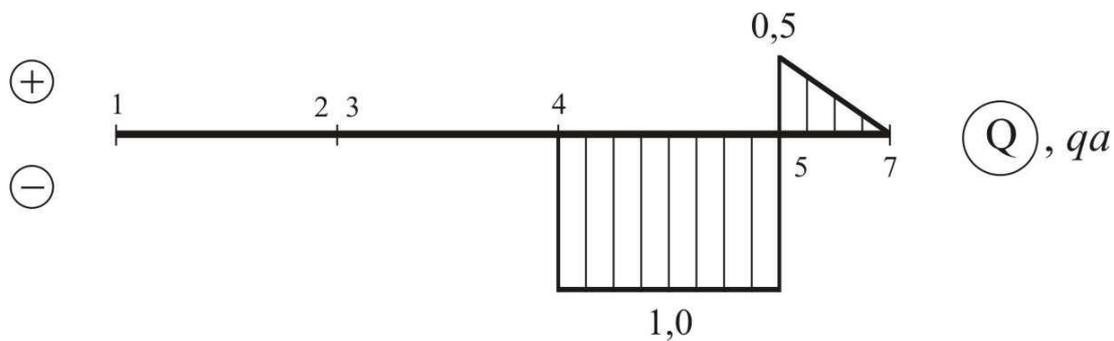


Рис. 1.1.12

*Контроль правильности определения ординат эпюр усилий.*

Контроль правильности определения ординат эпюр усилий для ЗРС производится для произвольной части балки (рис. 1.1.13), для которой составляются уравнения равновесия ( $\sum Y$  и  $\sum \text{mom}_D$ ).

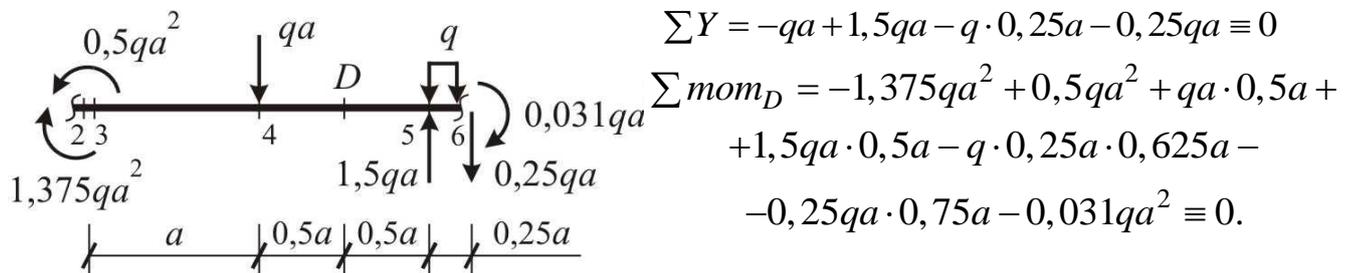


Рис. 1.1.13

Уравнения равновесия отрезанной части ЗРС удовлетворяются тождественно, что свидетельствует о значительной достоверности проведенных построений.

Кроме этого правильность построения эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  по характерным сечениям можно проверить, используя ряд общих правил. Одни из них являются следствиями из дифференциальных зависимостей между  $q$ ,  $Q$  и  $M$ , другие вытекают непосредственно из метода сечений.

### Общие указания к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

1. Если поперечная сила, изменяясь непрерывно по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий момент имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение.

2. В сечении, где приложен изгибающий момент (сосредоточенная пара сил):

- ✓ на эпюре  $M$  получается скачкообразное изменение ординат – скачок, равный приложенному внешнему моменту;
- ✓ на эпюре  $Q$  никаких изменений не происходит.

3. В сечении под сосредоточенной силой:

- ✓ на эпюре  $M$  происходит резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры;
- ✓ на эпюре  $Q$  получается скачкообразное изменение ординат – скачок,

равный приложенной внешней силе.

4. В точках, соответствующих началу и концу участка, в пределах которого к балке приложена распределенная нагрузка, параболическая и прямоугольная части эпюры  $M$  сопрягаются плавно, если на границах указанного участка не приложено сосредоточенных сил.

5. В сечении на свободном или шарнирно опертом конце балки:

- ✓ изгибающий момент  $M$  равен нулю, если там не приложен внешний изгибающий момент (сосредоточенная пара сил), а если он приложен – равен этому моменту;
- ✓ поперечная сила  $Q$  равна сосредоточенной силе (внешняя сила или опорная реакция), а если сила не приложена – поперечная сила равна нулю.

6. В сечении, совпадающем с заделкой изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$  численно равны опорным реакциям.

7. Если на некотором участке:

- ✓  $Q > 0$ , то изгибающий момент убывает (слева направо);
- ✓  $Q < 0$ , то изгибающий момент возрастает (слева направо);
- ✓  $Q = 0$ , то изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).

Соответствие построенных эпюр усилий изложенным выше общим указаниям также свидетельствует о правильности проведенных построений.

## Практические занятия 9-12

### Расчет статически определимых элементарных расчетных схем на прочность. Ломаный брус

Для заданной расчетной схемы в виде ломаного бруса необходимо:

1. Провести полный кинематический анализ.
2. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных усилий.

#### Пример выполнения задания.

Дано: расчетная схема (рис. 1.2.1) с указанием моментов инерции ее сечений, кратных масштабу  $J$ .

Требуется построить эпюры усилий в ломаном брус.

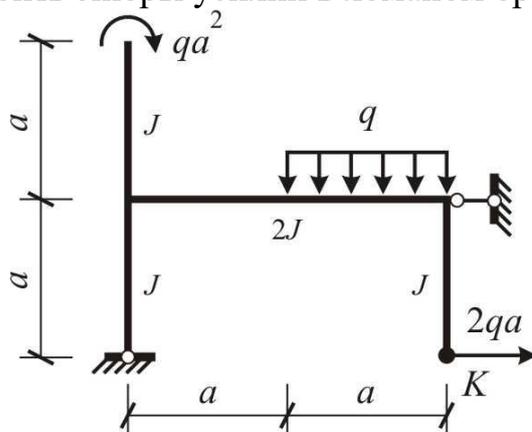


Рис. 1.2.1

#### Решение

*Особенностью* ломаного бруса в сравнении с однопролетной балкой является наличие в его сечениях *продольных усилий*, возникающих даже от поперечной нагрузки.

#### 1.2.1. Проведение кинематического анализа заданной расчетной схемы

*Количественный кинематический анализ.*

Для проведения полного кинематического анализа заданной расчетной схемы (ЗРС) необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом и обозначить эти сечения (рис. 1.2.2).

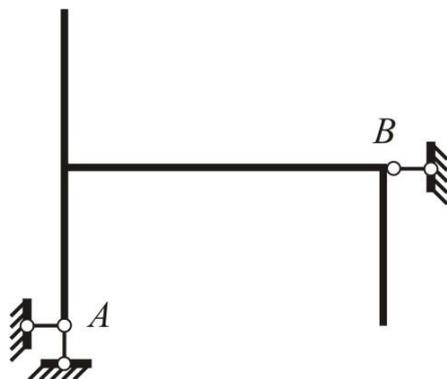


Рис. 1.2.2

Степень статической неопределимости ЗРС определяется по формуле:

$$W = 3D - 2Ш^{(1)} - C_0,$$

- ✓ число жестких дисков системы:  $D = 1$ ;
- ✓ число простых шарниров, объединяющих жесткие диски системы:  $Ш^{(1)} = 0$ ;
- ✓ число опорных стержней:  $C_0 = 3$  ( $C_0^A = 2, C_0^B = 1$ ).

Имеем,

$$W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3,$$

следовательно ЗРС статически определима.

*Качественный кинематический анализ.*

Проведем анализ на геометрическую неизменяемость ЗРС, которая обеспечивается наличием шарнирно-стержневого треугольника (ШСТ), образованного опорными связями, наложенными на диск (рис. 1.2.3).

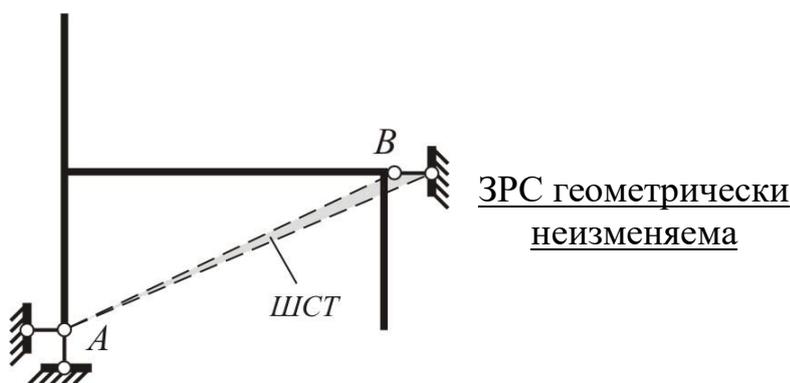


Рис. 1.2.3

### 1.2.2. Построение эпюр усилий

*Построение грузовой эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки.*

Определение опорных реакций.

Заменяем опорные связи (рис. 1.2.3) на опорные реакции (рис. 1.2.4), причем одной реакции соответствует один опорный стержень. Реакции до их определения считаются положительно направленными.

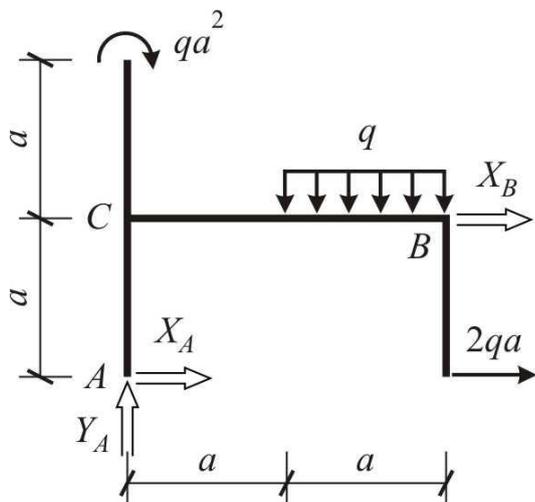


Рис. 1.2.4

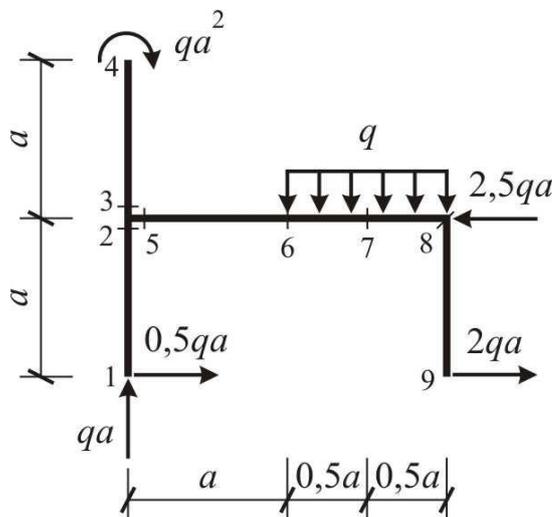


Рис. 1.2.5

Найдем неизвестные реакции, используя уравнения равновесия (2.1):

$$\sum Y = Y_A - q \cdot a = 0 \Rightarrow Y_A = qa;$$

$$\sum \text{mom}_A = -qa^2 - q \cdot a \cdot (a + 0,5a) - X_B \cdot a = 0 \Rightarrow X_B = -2,5qa; \quad (2.1)$$

$$\sum \text{mom}_C = -qa^2 - q \cdot a \cdot (a + 0,5a) + 2qa \cdot a + X_A \cdot a = 0 \Rightarrow X_A = 0,5qa$$

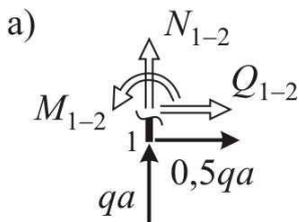
Заменяя введенные на рис. 1.2.4 обозначения реакций найденными векторами, получаем рис. 1.2.5 и используем его для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей.

Контроль:  $\sum \text{mom}_8 = -qa \cdot 2a + 0,5qa \cdot a - qa^2 + q \cdot a \cdot 0,5a + 2qa \cdot a \equiv 0.$

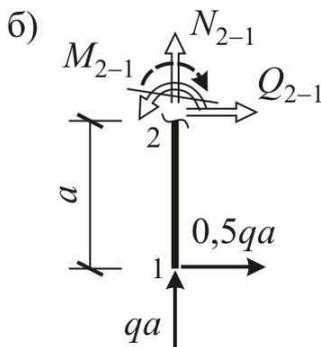
При назначении контролируемых сечений на рис. 1.2.5 выделим четыре участка с линейным законом изменения изгибающего момента (1–2, 3–4, 5–6, 8–9) и один участок с параболическим законом (6–7–8).

Определение значений ординат и построение грузовой эпюры изгибающих моментов.

Найдем значения момента в контролируемых сечениях (рис. 1.2.6).



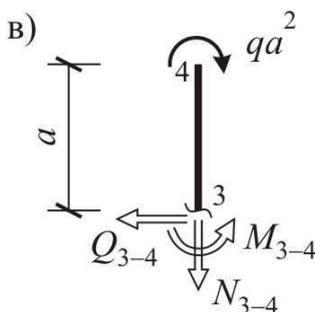
$$\sum \text{mom}_1 = M_{1-2} = 0.$$



$$\sum \text{mom}_2 = M_{2-1} + 0,5qa \cdot a = 0 \Rightarrow$$

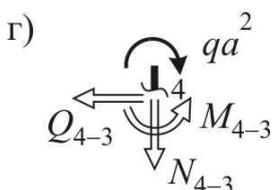
$$M_{2-1} = -0,5qa^2 \text{ (РВ/Л),}$$

(растянутые волокна поперечного сечения расположены *слева* от участка расчетной схемы).



$$\sum \text{mom}_3 = M_{3-4} - qa^2 = 0 \Rightarrow$$

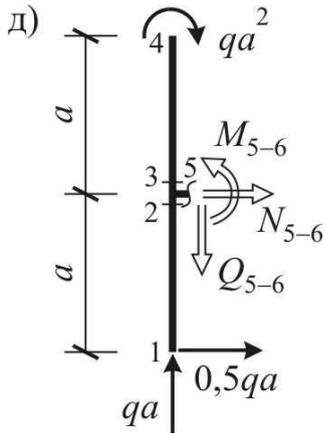
$$M_{3-4} = qa^2 \text{ (РВ/Л).}$$



$$\sum \text{mom}_4 = M_{4-3} - qa^2 = 0 \Rightarrow$$

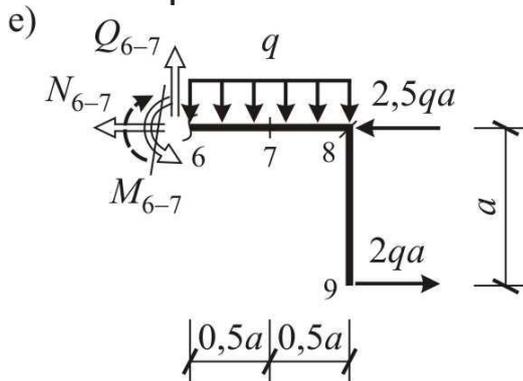
$$M_{4-3} = qa^2 \text{ (РВ/Л).}$$

Рис. 1.2.6 (начало)



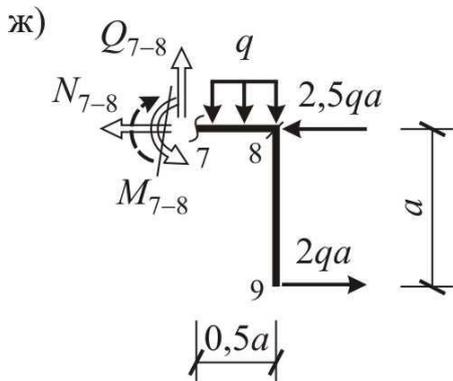
$$\sum \text{mom}_5 = M_{5-6} + 0,5qa \cdot a - qa^2 = 0 \Rightarrow$$

$$M_{5-6} = 0,5qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



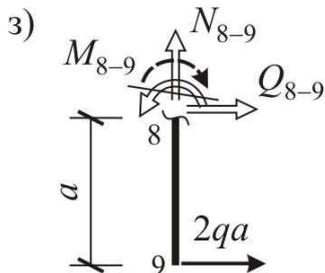
$$\sum \text{mom}_6 = M_{6-7} - q \cdot a \cdot 0,5a + 2qa \cdot a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{6-7} = -1,5qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



$$\sum \text{mom}_7 = M_{7-8} - q \cdot 0,5a \cdot 0,25a + 2qa \cdot a = 0 \Rightarrow$$

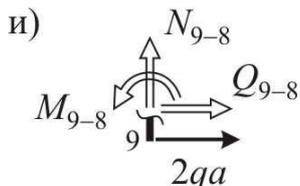
$$M_{7-8} = -1,875qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



$$\sum \text{mom}_8 = M_{8-9} + 2qa \cdot a = 0 \Rightarrow$$

$$M_{8-9} = -2qa^2 \text{ (PB/Л)};$$

$$M_{8-7} = M_{8-9} = -2qa^2 \text{ (PB/H)}.$$



$$\sum \text{mom}_9 = M_{9-8} = 0.$$

Рис. 1.2.6 (окончание)

Полученные данные используем для построения грузовой эпюры изгибающих моментов на растянутых волокнах (рис. 1.2.7).

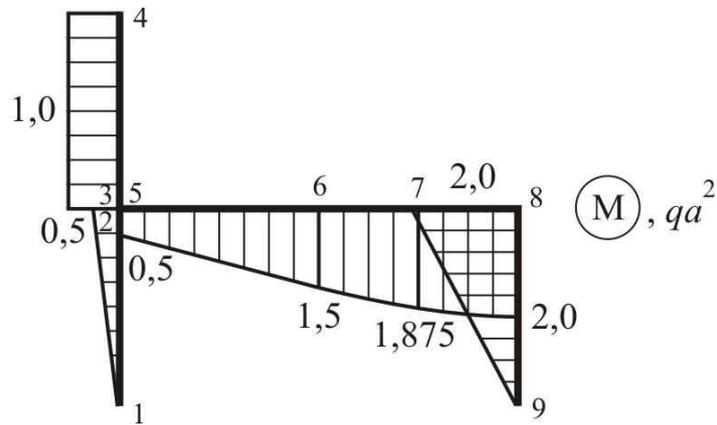
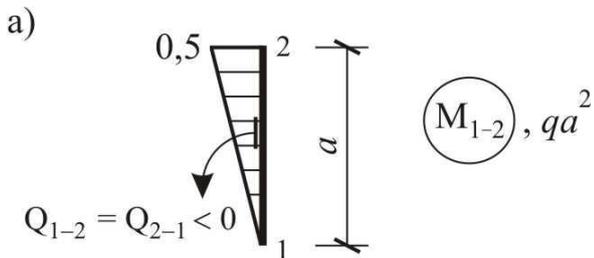


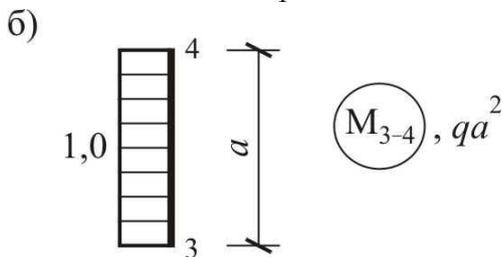
Рис. 1.2.7

*Построение эпюры поперечных сил.*

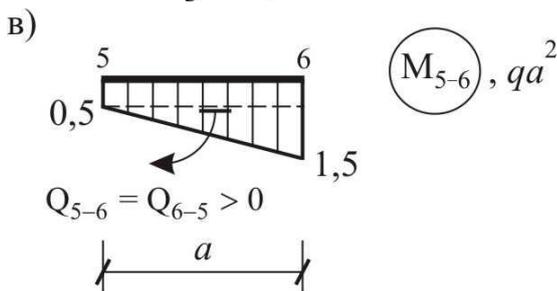
На рис. 1.2.7 рассмотрим участки, вдоль которых закон изменения изгибающего момента не меняет своего математического вида, и вычислим по ним ординаты поперечных сил как тангенс угла наклона касательной к эпюре изгибающих моментов (рис. 1.2.8).



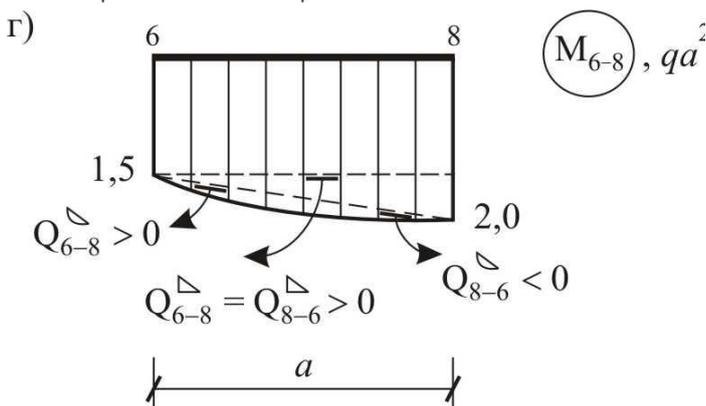
$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = -\frac{|0,5|qa^2}{a} = -0,5qa .$$



$$Q_{3-4} = Q_{4-3} = \frac{|1,0-1,0|qa^2}{a} = 0 .$$



$$Q_{5-6} = Q_{6-5} = \frac{|1,5-0,5|qa^2}{a} = qa .$$



$$Q_{6-8} = \frac{|2,0-1,5|qa^2}{a} + \frac{q \cdot a}{2} = qa ;$$

$$Q_{8-6} = \frac{|2,0-1,5|qa^2}{a} - \frac{q \cdot a}{2} = 0 .$$

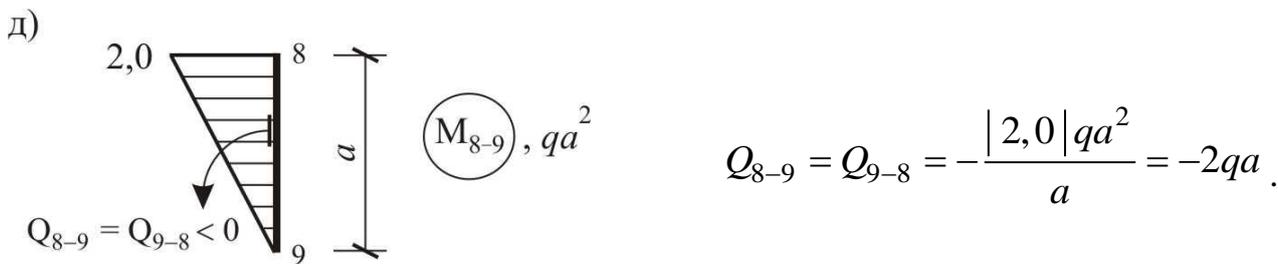


Рис. 1.2.8

По результатам вычислений (рис. 1.2.8) построена эпюра поперечных сил, изображенная на рис. 1.2.9.

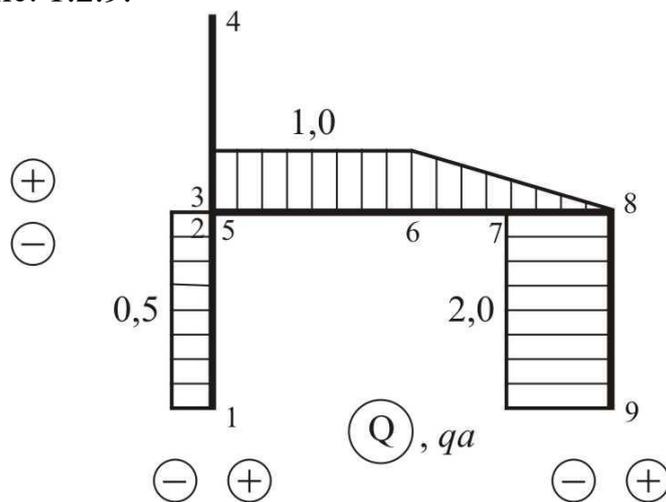


Рис. 1.2.9

#### Построение эпюры продольных сил.

Вычисление ординат эпюры продольных сил  $N$  (рис. 1.2.10) на основе эпюры поперечных сил  $Q$  и узловой нагрузки методом последовательного вырезания узлов включает в себя:

- Выбор последовательности вырезаемых узлов, содержащих *не более двух* неизвестных продольных усилий:
  - ✓ сначала рассматриваются узлы "1", "4", "9" и "8", содержащие *одно* (рис. 1.2.10а, б, в) и *два* (рис. 1.2.10г) искомого продольного усилия;
  - ✓ затем рассматривается узел "2-3-5", содержащий *три* неизвестных продольных усилия, в результате чего необходимо задаться численным значением одной из вертикальных продольных сил с учетом «инженерного» знака, используя найденное значение продольного усилия на этом участке бруса, т. е.  $N_{2-1} = N_{1-2} = -qa$  (рис. 1.2.10д).
- Формирование* уравнений равновесия для каждого из узлов последовательности.
- Вычисление* ординат продольных усилий в узле из уравнений равновесия в проекциях на оси глобальной системы координат.
- Присвоение* «инженерного» знака полученным значениям: **положительной** принимается **растягивающая** (действующая «от узла») продольная сила.

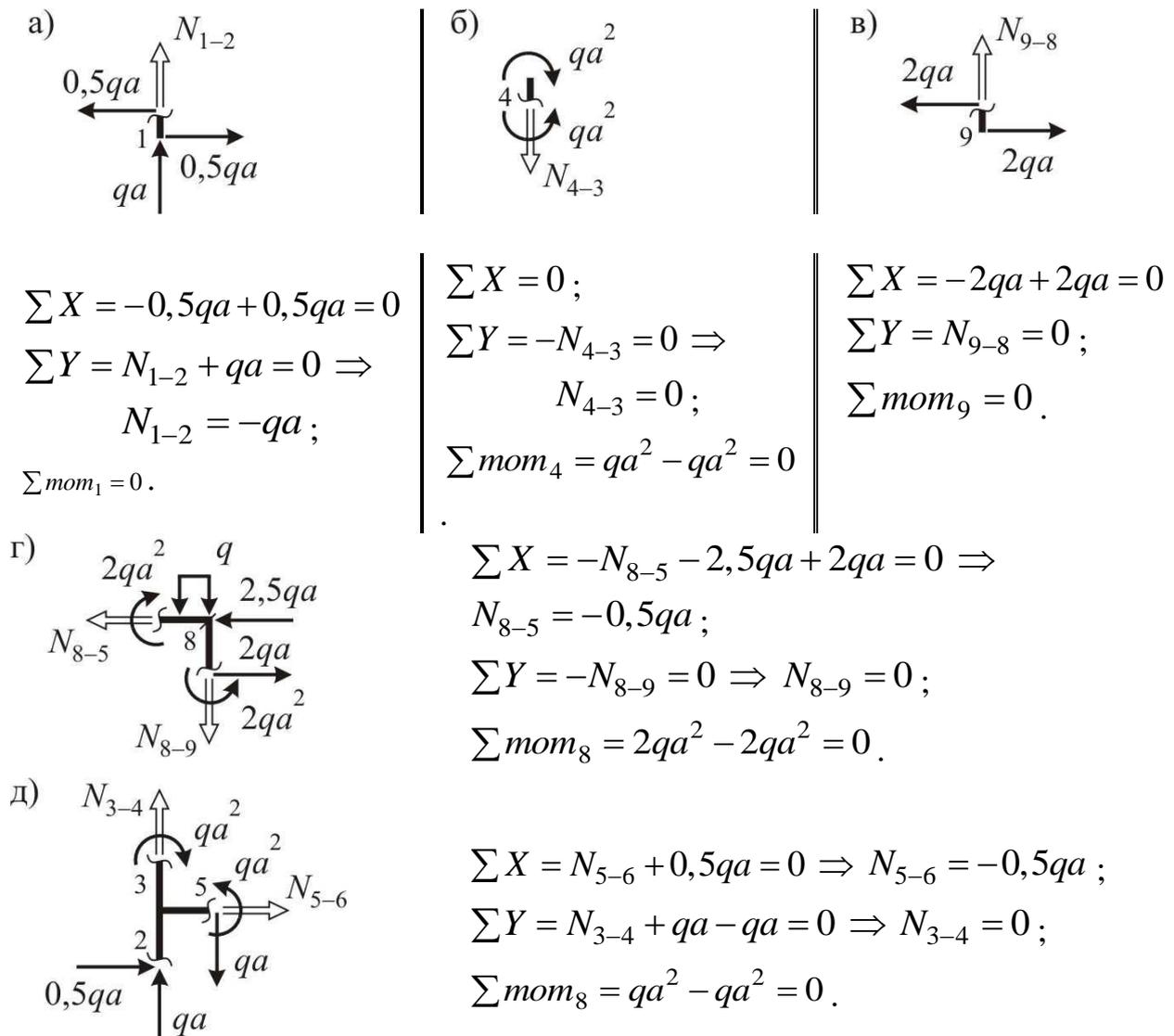


Рис. 1.2.10

По результатам вычислений (рис. 1.2.10) построена эпюра продольных сил, изображенная на рис. 1.2.11.

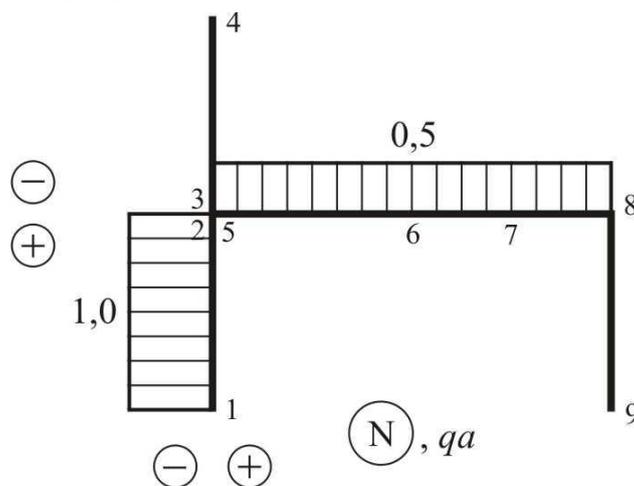
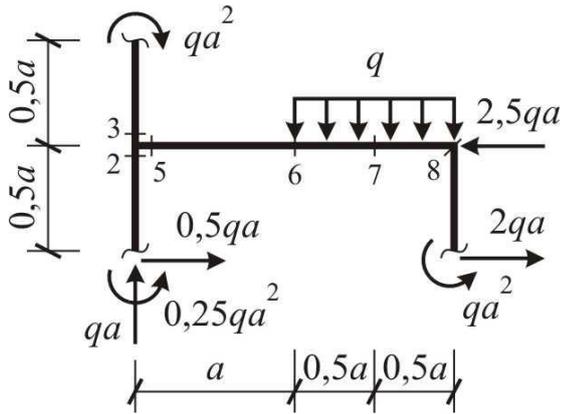


Рис. 1.2.11

*Контроль правильности определения ординат эпюр усилий.*

Контроль правильности определения ординат эпюр усилий проводится для произвольной части ломаного бруса (рис. 1.2.12), для которой составляются

уравнения равновесия ( $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$  и  $\sum \text{mom}_6 = 0$ ).



$$\sum X = 0,5qa - 2,5qa + 2qa \equiv 0 ;$$

$$\sum Y = qa - q \cdot a \equiv 0 ;$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_6 = & 0,25qa^2 - qa \cdot a + 0,5qa \cdot 0,5a - \\ & - qa^2 - q \cdot a \cdot 0,5a + 2qa \cdot 0,5a + qa^2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Рис. 1.2.12

Уравнения равновесия отрезанной части ЗРС удовлетворяются тождественно.

## Практические занятия 13-16

### Расчет статически определимых элементарных расчетных схем на прочность. Ферма

#### Расчет фермы с треугольной решёткой аналитическим и графическим способами

**Пример выполнения задания.** *Дано:* расчетная схема фермы (рис. 1.4.1).

Выполнить расчет фермы с треугольной решеткой аналитическим и графическим способами.

1. Провести полный кинематический анализ заданной расчетной схемы.
2. Определить продольные усилия в стержнях фермы аналитическим методом.
3. Определить продольные усилия в стержнях фермы графическим методом.

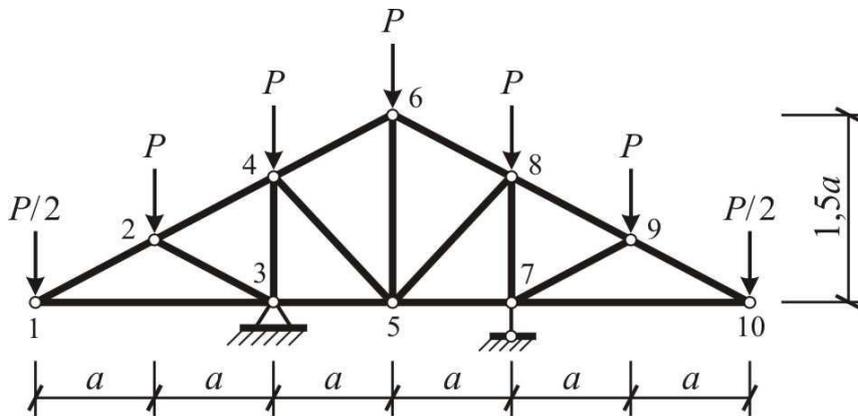


Рис. 1.4.1

#### Решение

Особенностью расчетной схемы типа ферма (рис. 1.4.1) является наличие в сечениях ее стержней только *продольных* усилий, что обеспечивается как способом приложения нагрузки (сосредоточенные силы в узлах-шарнирах), так и способом соединения стержней фермы в узлах расчетной схемы – безмоментными шарнирами.

#### 1.4.1. Проведение количественного кинематического анализа

Для проведения кинематического анализа необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом и обозначить эти сечения (рис. 1.4.2).

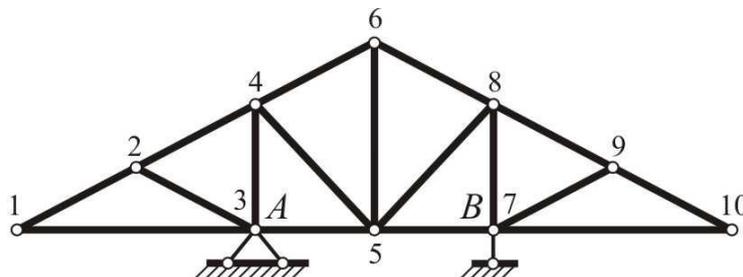


Рис. 1.4.2

Степень статической неопределимости расчетной схемы типа ферма определяется по формуле:

$$W = 2Y - S - C_0,$$

- ✓ число узлов фермы:  $Y = 10$ ;
- ✓ число стержней фермы:  $S = 17$ ;
- ✓ число опорных стержней:  $C_0 = 3$ .

Имеем,

$$W = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0, \text{ следовательно } \underline{\text{ЗРС статически определима.}}$$

На рис. 1.4.3 вводится система координат, оси которой определяют правило знаков для реактивных сил, заменяющих действие на конструкцию опорных связей. Реакции до их определения считаются *положительно* направленными, а их обозначения следует увязывать с обозначением оси, вдоль которой действует реакция, и узлом, в котором она определяется.

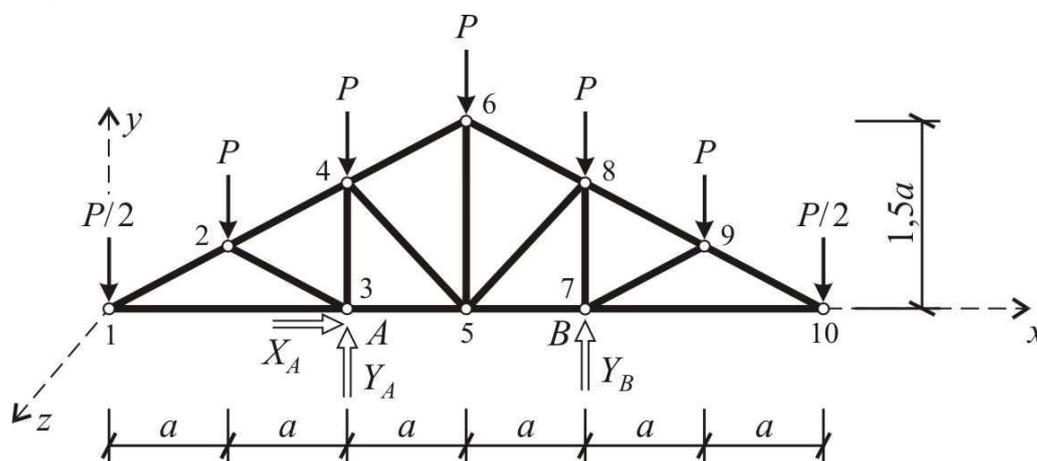


Рис. 1.4.3

При выборе уравнений равновесия для определения реакций опорных связей необходимо подобрать такие уравнения, из которых однозначно бы определялась только одна из реакций и, таким образом, не учитывалось бы влияние двух других реакций. Это позволит нам исключить взаимовлияние получаемых результатов.

$$\sum X = 0 : \underline{X_A = 0}$$

$$\sum \text{mom}_B = 0 : -Y_A \cdot 2a + \frac{P}{2} \cdot 4a + P \cdot 3a + P \cdot 2a + P \cdot a - P \cdot a - \frac{P}{2} \cdot 2a = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{Y_A = 3P.}$$

$$\sum \text{mom}_A = 0 : Y_B \cdot 2a + \frac{P}{2} \cdot 2a + P \cdot a - P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a - \frac{P}{2} \cdot 4a = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{Y_B = 3P.}$$

Итак, реакции опорных связей определены, что позволяет указать на расчетной схеме все нагрузки в явном виде («в значениях»), как это сделано на рис. 1.4.4.

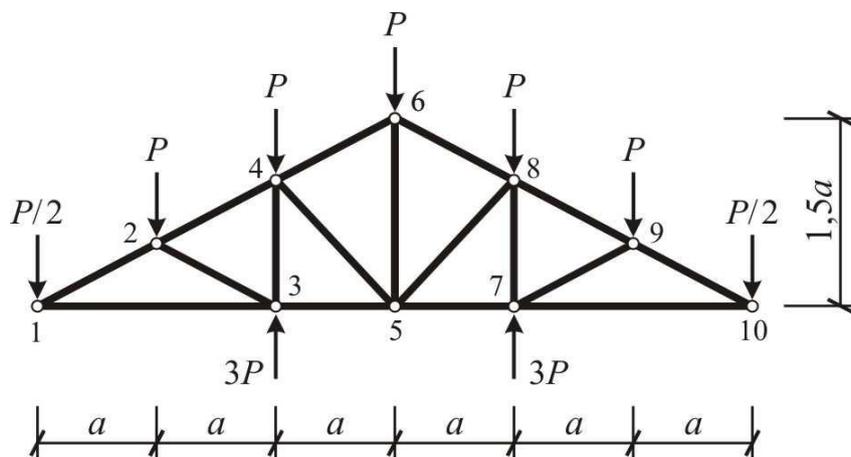


Рис. 1.4.4

Данные рис. 1.4.4 используются для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей по уравнению

$$\sum Y = -\frac{P}{2} - P - P + 3P - P - P + 3P - P - \frac{P}{2} = 0 \equiv 0 .$$

#### 1.4.2. Определение продольных усилий в стержнях фермы аналитическим способом.

Для определения усилий растяжения-сжатия в плоских фермах с простой треугольной решеткой применяются *метод сквозных сечений* и *метод вырезания узлов*.

При использовании *метода сквозных сечений* расчетную схему *расчленяют на две части*, таким образом, чтобы число *неизвестных усилий* в сечении было *не более двух*. При этом *каждое усилие* должно определяться из *отдельного уравнения равновесия* и *не должно выражаться* через усилия в *других стержнях*.

При использовании *метода вырезания узлов* усилия в стержнях, сходящихся в рассматриваемом узле, определяют из *уравнений равновесия в проекциях сил* на оси *X* и *Y* глобальной системы координат.

Укажем виды сечений, порядок их следования (рис. 1.4.6), чтобы иметь возможность составить уравнения, необходимые для определения усилий в стержнях, попавших в соответствующее сечение последовательности.

Уравнение в *проекциях* сил рекомендуется применять тогда, когда *нельзя* составить уравнение в *моментах*.

Уравнение в *моментах* требует вычисления *расстояния* от точки приведения до *линии действия* усилия, а уравнение в *проекциях сил* – вычисления *значений тригонометрических функций* угла между осями стержней.

Так как заданная расчетная схема является симметричной по нагрузке (узловая нагрузка, реактивные силы) и очертанию решетки, то достаточно определить усилия в стержнях половины фермы, так как усилия в стержнях другой половины будут такими же.

Для удобства дальнейших вычислений предварительно найдем высоту стойки 3–4 ( $h_{3-4}$ ) и расстояние от узла 2 ( $h_2$ ) до нижнего пояса фермы, используя подобие треугольников (см. рис. 1.4.5), и покажем их на расчетной схеме (рис. 1.4.6).

$$\frac{h_{3-4}}{2a} = \frac{h_2}{a} = \frac{1,5a}{3a} = 0,5$$

$$h_{3-4} = a; \quad h_2 = 0,5a$$

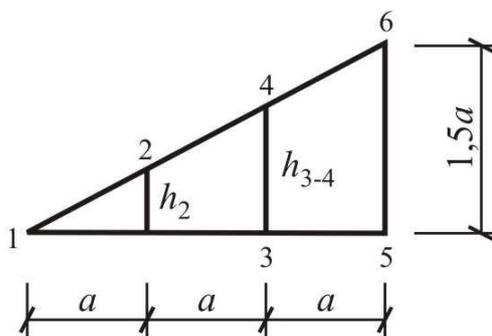


Рис. 1.4.5

Располагая системой нагрузок «в значениях», системой сечений, основными размерами расчетной схемы (см. рис. 1.4.6), можно приступить к непосредственному определению продольных усилий в стержнях заданной фермы (рис. 1.4.7-1.4.11).

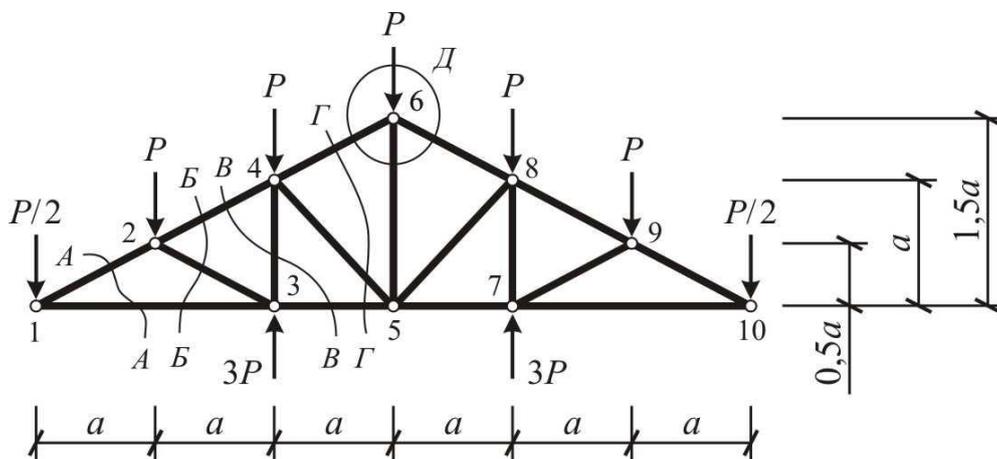


Рис. 1.4.6

Важно отметить, что *неизвестные усилия* на рисунке отсеченной части расчетной схемы считаются *положительными* (действуют «от узла»), а их *истинный* («инженерный») знак устанавливается *решением* соответствующего уравнения.

A-A

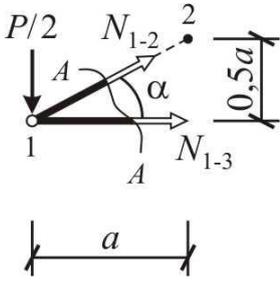


Рис. 1.4.7

$$\begin{aligned} \sum Y &= -0,5P + N_{1-2} \cdot \sin \alpha = \\ &= -0,5P + N_{1-2} \cdot 0,447 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \sin \alpha = \frac{0,5a}{\sqrt{(0,5a)^2 + a^2}} = 0,447$$

$$N_{1-2} = 1,118P \text{ (растяжение);}$$

$$\sum \text{mom}_2 = 0,5P \cdot a + N_{1-3} \cdot 0,5a = 0$$

$$N_{1-3} = -P \text{ (сжатие)}$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_3 &= 0,5P \cdot 2a + P \cdot a - N_{2-4} \cdot h_3 = \\ &= 0,5P \cdot 2a + P \cdot a - N_{2-4} \cdot 0,894a = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } h_3 = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = 0,894a$$

$$N_{2-4} = 2,237P \text{ (растяжение);}$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_1 &= -P \cdot a - N_{2-3} \cdot h_1 = \\ &= -P \cdot a - N_{2-3} \cdot 0,894a = 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } h_1 = 2a \cdot \sin \alpha = 2a \cdot 0,447 = 0,894a$$

$$N_{2-3} = -1,118P \text{ (сжатие)}$$

Б-Б

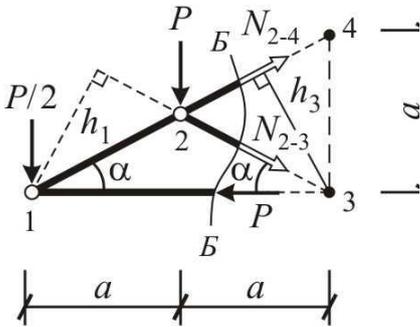


Рис. 1.4.8

В-В

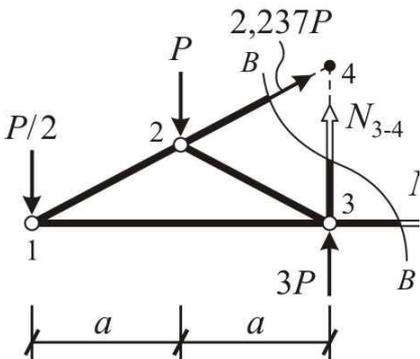


Рис. 1.4.9

$$\sum \text{mom}_4 = 0,5P \cdot 2a + P \cdot a + N_{3-5} \cdot a = 0$$

$$N_{3-5} = -2P \text{ (сжатие);}$$

$$\sum \text{mom}_1 = -P \cdot a + N_{3-4} \cdot 2a + 3P \cdot 2a = 0$$

$$N_{3-4} = -2,5P \text{ (сжатие)}$$

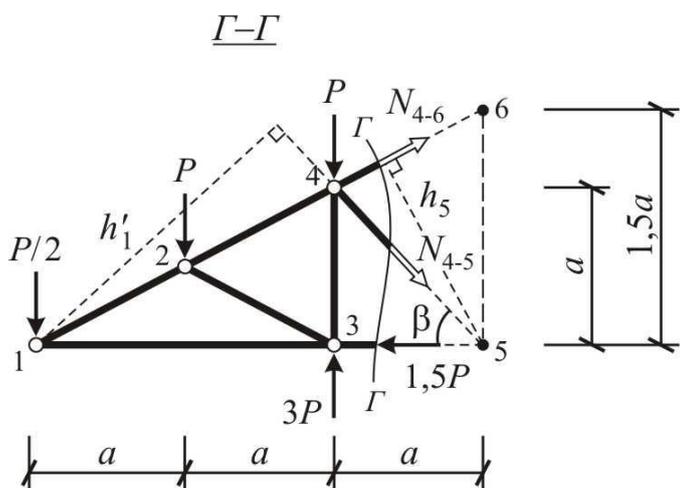


Рис. 1.4.10

$$\sum \text{mom}_5 = 0,5P \cdot 3a + P \cdot 2a + P \cdot a - 3P \cdot a - N_{4-6} \cdot h_5 = 0,5P \cdot 3a + P \cdot 2a + P \cdot a - 3P \cdot a - N_{4-6} \cdot 1,342a = 0,$$

$$\text{где } h_5 = \frac{3a \cdot 1,5a}{\sqrt{(3a)^2 + (1,5a)^2}} = 1,342a$$

$$N_{4-6} = 1,118P \text{ (растяжение);}$$

$$\sum \text{mom}_1 = -P \cdot a - P \cdot 2a + 3P \cdot 2a - N_{4-5} \cdot h'_1 = -P \cdot a - P \cdot 2a + 3P \cdot 2a - N_{4-5} \cdot 2,121a = 0,$$

$$\text{где } h'_1 = 3a \cdot \sin \beta = 3a \cdot 0,707 = 2,121a,$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 0,707$$

$$N_{4-5} = 1,414P \text{ (растяжение)}$$

Узел Д

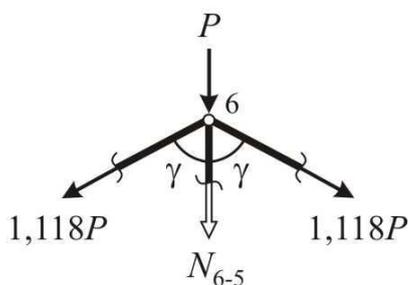


Рис. 1.4.11

$$\sum Y = -N_{6-5} - P - 2 \cdot 1,118P \cdot \cos \gamma = -N_{6-5} - P - 2 \cdot 1,118P \cdot 0,447 = 0,$$

$$\text{где } \cos \gamma = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,447$$

$$N_{6-5} = -2P \text{ (сжатие)}$$

Решение задачи об определении продольных усилий в ферме представлено в табл. 3.

Таблица 3

Номер стержня	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	3-5	4-5	4-6	6-5
	9-10	7-10	7-9	8-9	7-8	5-7	5-8	6-8	
Знак усилия	+	-	-	+	-	-	+	+	-
Усилие $N_{i-j}, P$	1,118	1	1,118	2,237	2,5	2	1,414	1,118	2

#### 4. Определение продольных усилий в стержнях фермы *графическим* способом.

Идея графического способа определения усилий в стержнях фермы основана на том, что треугольник равновесных сил можно построить по *одному* заданному вектору силы и известным направлениям двух других векторов, линии действия которых проведены через начало и конец заданного вектора. При этом заданный вектор может быть представлен отдельной силой (внешней или внутренней) или *равнодействующей* некоторой совокупности сил.

При реализации графического способа необходимо строгое соблюдения нескольких правил:

1) построения выполняются для *упорядоченных* последовательностей узлов, причем набор каждого уровня должен состоять из узлов, в которых сходятся *не более двух* неизвестных усилий;

2) в качестве *шаблона* для проведения линий, параллельных некоторому направлению, используются *оси* расчетной схемы с *одного и того же* рисунка;

3) при построении многоугольников сил (для расчетной схемы в целом и для отдельных узлов) выбирается *единственное*, общее для всех последующих рассуждений, *направление обхода сил* (против часовой стрелки);

4) *масштаб геометрических* построений назначается таким образом, чтобы погрешность определения усилий по расстояниям между точками рисунка не превышала 5-7 %.

Для уменьшения трудоемкости построений и повышения их точности рекомендуется выполнять работу по формированию многоугольников сил на листе миллиметровой бумаги формата А4.

Поскольку все реакции опорных связей уже определены (см. п. 2), приступаем к построению многоугольника внешних сил. Эта процедура основана на понятии «внешнего поля».

Внешние поля (рис. 1.4.12) делят плоскость чертежа *вне* расчетной схемы на части, границами между которыми являются векторы внешних сил. Каждое поле получает свое имя в виде буквы, благодаря чему при пересечении границы полей возникает возможность именования соответствующих векторов сил двумя буквами: одна буква соответствует началу вектора, а вторая – его концу.

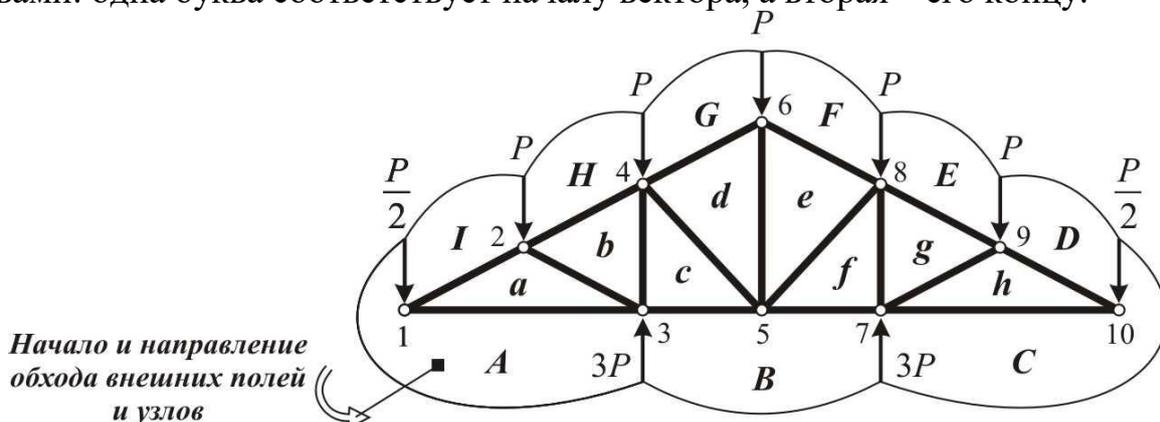


Рис. 1.4.12

Начало вектора силы определяется той буквой, поле которой названо первым при пересечении границы смежных полей в выбранном направлении обхода.

Многоугольник внешних сил в данном примере строится путем обхода внешних полей *против часовой стрелки*, начиная с поля «А», как это показано на рис. 1.4.12. По мере пересечения границ внешних полей соответствующая внешняя сила в назначенном масштабе наносится на поле диаграммы усилий (рис. 1.4.13).

Поскольку равновесие расчетной схемы соответствует нулевым значениям главного вектора и главного момента внешних сил, постольку *многоугольник внешних сил* должен получиться *замкнутым*. Если это реализуется в ходе построения, то можно утверждать, что реакции в расчетной схеме найдены верно.

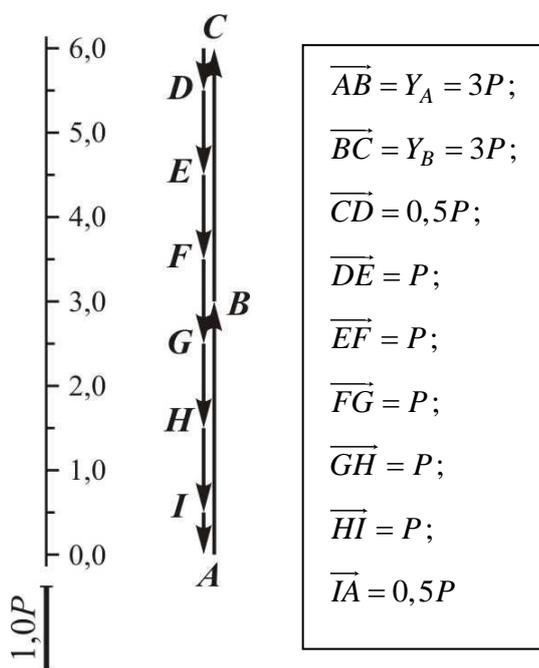


Рис. 1.4.13

Дальнейшие построения связаны с определением внутренних сил (усилий) в стержнях фермы. В основе этой процедуры лежит построенный многоугольник внешних сил (см. рис. 1.4.13), а приведенные выше приемы рассуждений применяются к полям, окружающим каждый узел.

Важно помнить, что выбор узла при построении многоугольника сил, в нем сходящихся, определяется тем, что в узле может сходиться *не более двух неизвестных усилий*. При этом направление обхода полей узла должно соответствовать направлению обхода, использованному при построении многоугольника внешних сил, т. е. против часовой стрелки.

На рис. 1.4.14-1.4.22 последовательно отображены результаты построения многоугольников сил в узлах заданной расчетной схемы. Для пояснения совершаемых действий используются следующие обозначения:

«□» — означает, что проводится линия по направлению, параллельному пересекаемому стержню фермы, обозначенному парой букв;

« через ... » – точка вектора, через которую проводится параллельная прямая, упоминаемая выше;

« ■ » – поле, с которого начинается обход полей, расположенных вокруг узла;

« → » – вектор силы, участвующей в создании многоугольника равновесных сил, сходящихся в *текущем* узле.

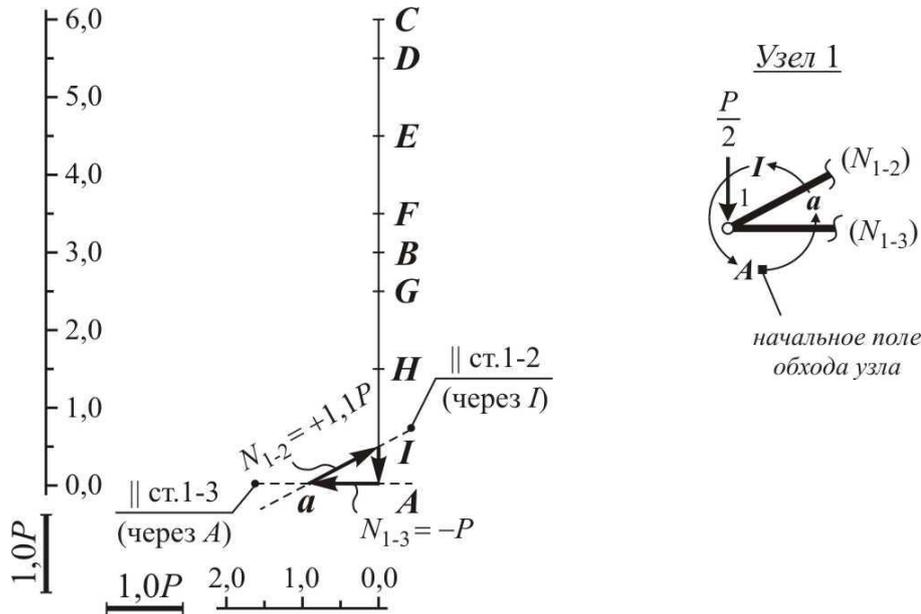


Рис. 1.4.14

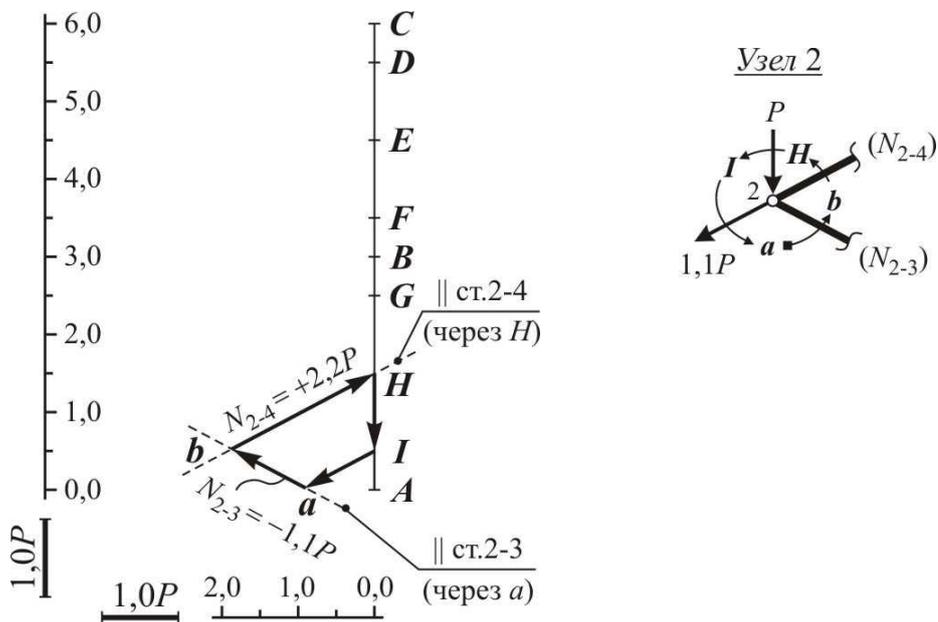


Рис. 1.4.15

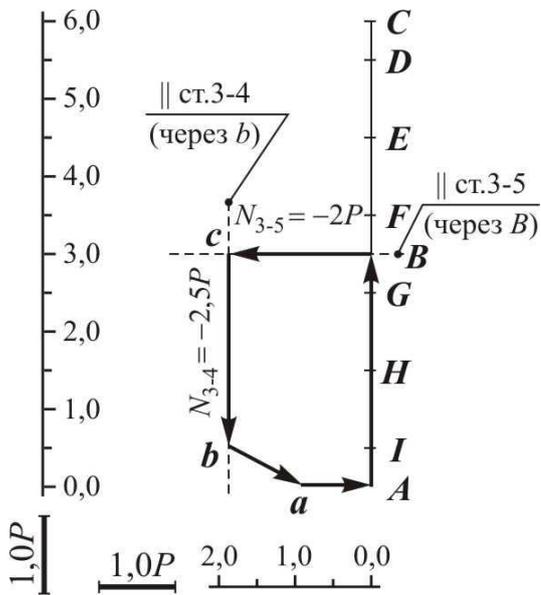


Рис. 1.4.16

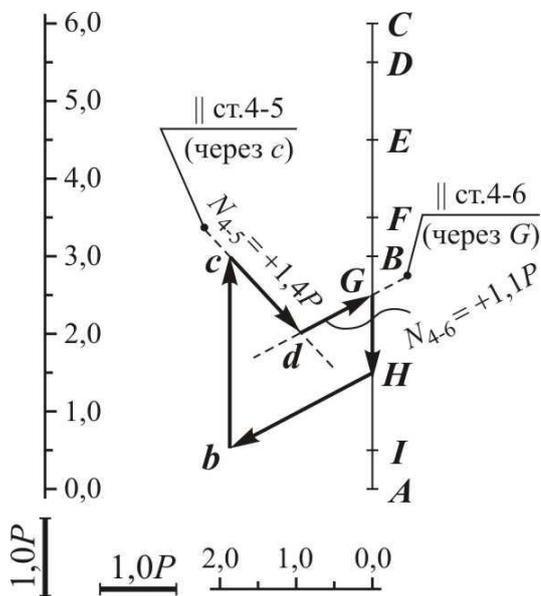
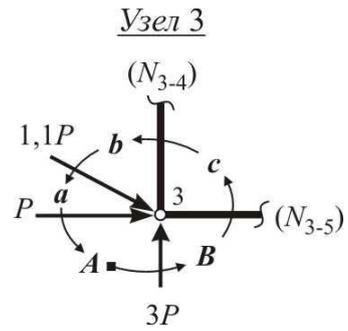


Рис. 1.4.17

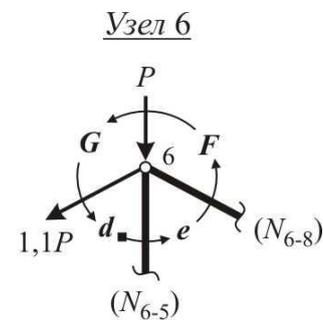
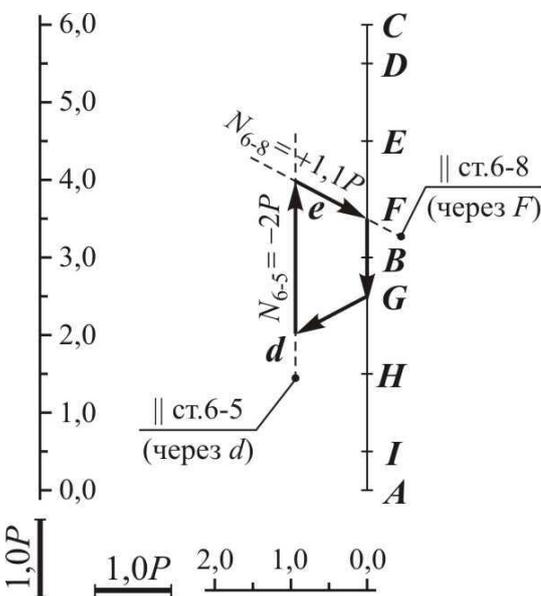
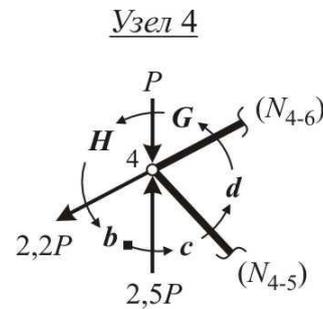


Рис. 1.4.18

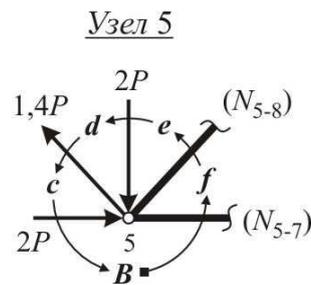
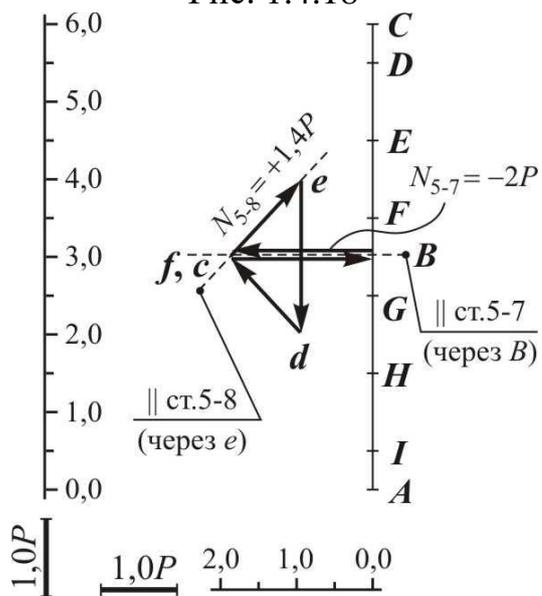


Рис. 1.4.19

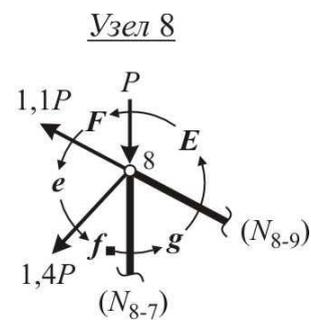
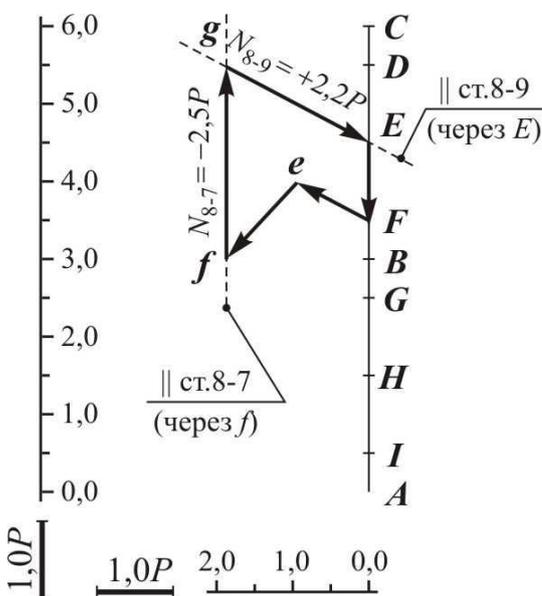


Рис. 1.4.20

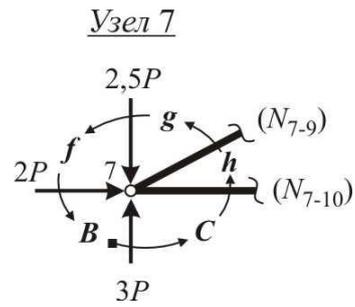
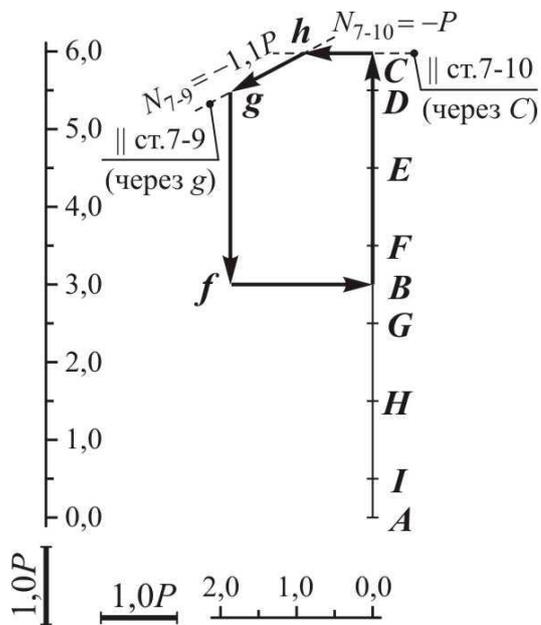


Рис. 1.4.21

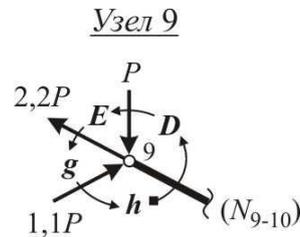
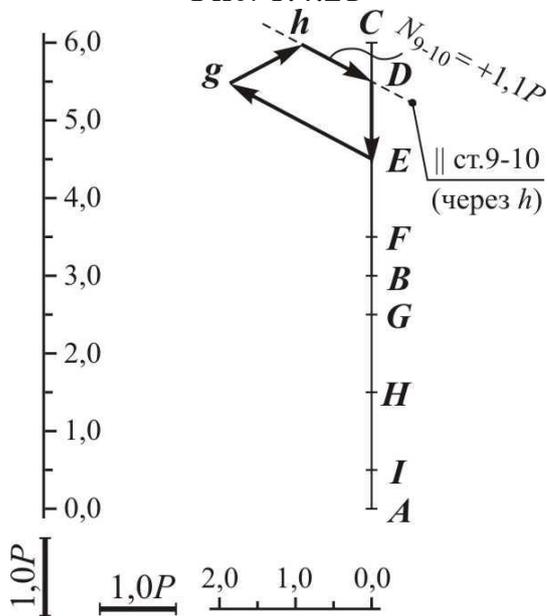


Рис. 1.4.22

В данном примере реализуется последовательность узлов, основанная на результатах *текущих* построений (каждый *последующий* узел превращается в узел с двумя неизвестными усилиями вследствие решения задачи о равновесии *предыдущего* узла) и включает узлы 1, 2, 3, 4.

Однако узел 5 уже не может рассматриваться вслед за узлом 4, поскольку к этому моменту содержит три неизвестных усилия ( $N_{5-6}$ ,  $N_{5-7}$  и  $N_{5-8}$ ). Поэтому далее выбирается узел 6 с двумя неизвестными усилиями ( $N_{6-5}$  и  $N_{6-8}$ ), а за ним становится возможным перейти к узлу 5 с неизвестными к этому моменту усилиями  $N_{5-7}$  и  $N_{5-8}$ . Далее аналогично рассматриваются узлы 8, 7 и, наконец, построения в узле 9 с единственным неизвестным усилием  $N_{9-10}$  завершают решение задачи.

Определение *величины усилия* проводится *измерением длины* построенного *вектора*, а *знак усилия* определяется тем, как *вектор направлен* по отношению к рассматриваемому *узлу*: если направление «от узла», то в соответствии с «инженерным» правилом знаков это означает «положительность» искомого усилия; если же направление «к узлу» – «отрицательность» усилия.

Решение задачи в окончательном виде представлено на рис. 1.4.23 и табл. 4. Следует подчеркнуть, что данные табл. 4 получены измерением усилий на рис. 1.4.14-1.4.22 с использованием выбранного масштаба построений. Рис. 1.4.23 носит название «диаграммы Максвелла-Кремоны» или «диаграммы усилий».

Таблица 4

Номер стержня	1–2	1–3	2–3	2–4	3–4	3–5	4–5	4–6	6–5
	9–10	7–10	7–9	8–9	7–8	5–7	5–8	6–8	
Знак усилия	+	–	–	+	–	–	+	+	–
Усилие $N_{i-j}, P$	1,1	1	1,1	2,2	2,5	2	1,4	1,1	2

При соблюдении правил построения диаграмма усилий позволяет быстро и достаточно точно решить задачу об определении усилий в статически определимой расчетной схеме типа «ферма». Поэтому графический способ определения усилий рекомендуется всегда, когда допустимая погрешность определения усилий находится в пределах 10 %.

Так как продольные усилия в стержнях заданной фермы, вычисленные аналитическим и графическим способами (соответственно табл. 3 и табл. 4) имеют схожие значения, то можно утверждать, что оба расчета были сделаны верно.

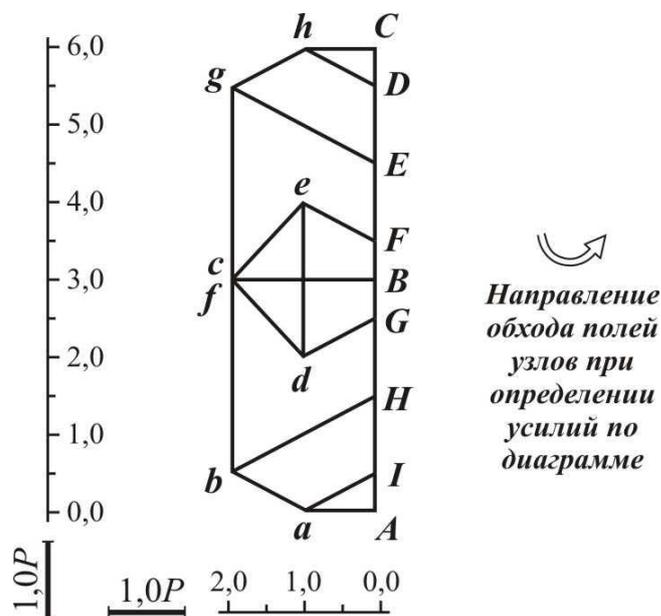


Рис. 1.4.23

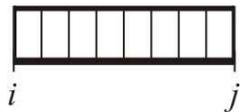
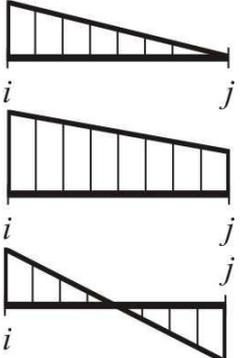
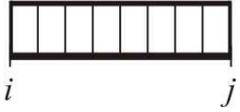
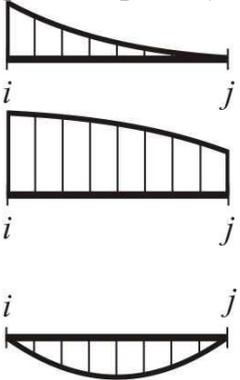
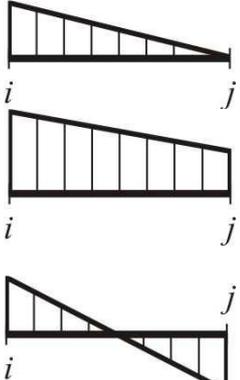
# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Название связи	Одностержневые связи		Двухстержневые связи			Трехстержневая связь
	Шарнирно-подвижная горизонтальная	Шарнирно-подвижная вертикальная	Шарнирно-неподвижная	Горизонтальный ползун	Вертикальный ползун	Жесткая заделка
Кинематическое изображение связи						
Шарнирно-стержневой аналог связи						
Схема возможных перемещений						нет
Разрешено перемещение	вертикальное, угловое	горизонтальное, угловое	угловое	горизонтальное	вертикальное	нет
Запрещено перемещение	горизонтальное	вертикальное	горизонтальное, вертикальное	вертикальное, угловое	горизонтальное, угловое	горизонтальное, вертикальное, угловое
Опорные реакции						

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Название связи	Одностержневые связи		Двухстержневые связи			Трехстержневая связь
	Шарнирно подвижная горизонтальная	Шарнирно подвижная вертикальная	Шарнирно неподвижная	Горизонтальный ползун	Вертикальный ползун	Жесткая заделка
Кинематическое изображение связи						
Шарнирно стержневой аналог связи						
Схема возможных перемещений						нет
Разрешено относительное перемещение	вертикальное угловое	горизонтальное угловое	угловое	горизонтальное	вертикальное	нет
Запрещено относительное перемещение	горизонтальное	вертикальное	горизонтальное вертикальное	вертикальное угловое	горизонтальное угловое	горизонтальное вертикальное, угловое
Опорные реакции						

Общее представление эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Эпюра изгибающих моментов $M$	Эпюра поперечных сил $Q$
<p>1. На участке <math>i-j</math> балки отсутствует распределенная нагрузка <math>q</math>:</p>	
<p style="text-align: center;">а) чистый изгиб <math>Q = 0</math></p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• прямая, параллельная оси <math>X</math></li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• имеет нулевое значение</li> </ul> 
<p style="text-align: center;">б) плоский изгиб <math>Q \neq 0</math></p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• наклонная прямая</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• прямая, параллельная оси <math>X</math></li> </ul> 
<p>2. На участке <math>i-j</math> балки действует распределенная нагрузка <math>q</math>:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• парабола (кривая второго порядка)</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>• наклонная прямая</li> </ul> 

**Вычисление ординат эюры поперечных сил по эюре изгибающих моментов**

<p><b>1. На участке <math>i-j</math> балки эюра изгибающих моментов – линейная функция:</b></p>	
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = -\frac{ M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}}$
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = \frac{ M_{i-j} - M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}}$
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = \frac{ M_{i-j} + M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}}$
<p><b>2. На участке <math>i-j</math> балки эюра изгибающих моментов – квадратичная функция:</b></p>	
	$Q_{i-j} = \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = -\frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$

	$Q_{i-j} = \frac{ M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} + \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = \frac{ M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} - \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$
	$Q_{i-j} = -\frac{ M_{i-j} - M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} - \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = -\frac{ M_{i-j} - M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} + \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$
	$Q_{i-j} = -\frac{ M_{i-j} + M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} + \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = -\frac{ M_{i-j} + M_{j-i}  qa^2}{l_{i-j}} - \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$