

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и
конструкции»
« 18 » января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 А.А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Строительная механика пространственных сооружений»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Промышленное и гражданское строительство

Формы обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Судакова И.А., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

I. Введение

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студенту в его работе по изучению строительной механики пространственных систем.

С этой целью студенту предлагаются общие и тематические методические указания, которые будут направлять его деятельность по приобретению знаний, умений и навыков в решении типовых задач по изучаемой дисциплине.

Реализация методических указаний происходит в ходе практических занятий и выполнения домашних заданий, связанных с закреплением полученных на занятиях знаний и умений, а также подготовкой к каждому предстоящему занятию. Для этого каждому студенту на протяжении всего учебного периода выдаются строго индивидуальные задания, которые должны быть выполнены непосредственно в ходе практических занятий.

Работа над выданным индивидуальным заданием ведется в виде самостоятельной работы при консультативной помощи преподавателя. Результатом этой работы является усвоение алгоритмов решения типовых задач строительной механики, а также языка описания расчетных схем и обозначений, используемых при формулировке математических задач, которые являются следствием применения методов строительной механики.

Важно подчеркнуть, что приобретаемые в ходе практических занятий знания, умения и навыки являются основой для принятия решений при проектировании зданий и сооружений в курсовом и дипломном проектировании. В частности, умение правильно и быстро строить эпюры усилий гарантирует достоверную исходную информацию для определения сечений несущих элементов конструкций.

№ п/п	Темы практических (семинарских) занятий
6 семестр	
1	Пример расчета статически неопределимой фермы
2	Пример расчета статически неопределимой арки
3	Пример расчета сводчатых конструкций, находящихся в упругой среде
4	Гибкая растянутая нить как несущий элемент. Уравнения равновесия и деформации пологой пространственной нити
5	Стержневые системы как системы с конечным числом степеней свободы. Основные уравнения строительной механики для стержней
6	Статико-геометрическая аналогия. Постановка задачи строительной механики и общая система для ее решения
7	Уравнения для решения нелинейных задач строительной механики
8	Основные положения метода конечных элементов
9	Пример применения МКЭ для решения пространственных задач строительной механики
10	Расчет тонкой пластины на поперечный изгиб
11	Расчет трехслойной пластины с легким заполнителем
12	Применение полуаналитического варианта МКЭ для решения пространственных задач строительной механики
13	Линейные уравнения для пологих упругих оболочек в декартовых координатах
14	Основы расчета призматических тонкостенных систем по методу Власова
15	Примеры применения метода предельного равновесия
16	Примеры применения метода предельного равновесия

Практические занятия 1-8

Пример расчета статически неопределимой фермы

1. Расчёт статически неопределимых ферм

Рассмотрим расчет статически неопределимых ферм по методу сил. Расчет начинается с определения степени статической неопределимости. Всюду в дальнейшем предполагается, что исходные системы являются неизменяемыми. Определим степень статической неопределимости для ферм, изображенных на рис. 1.9, по формуле $n=s-2k$, где k — число узлов фермы; s — число стержней, включая опорные: а) $n=14-12=2$; б) $n=39-38=1$; в) $n=32-30=2$; г) $n=40-36=4$.

После определения степени статической неопределимости выбирается основная система. Далее составляется система канонических уравнений (число которых равно степени статической неопределимости), из которых определяются лишние неизвестные (усилия в отброшенных связях). Так как в шарнирных фермах возникают только продольные силы, в формуле Мора при определении единичных и грузовых перемещений сохраняется только один член, зависящий от продольных сил N . После того как найдены лишние неизвестные, усилия в остальных стержнях находятся по формуле

$$N = N^0 + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n \quad (1.1)$$

Рассмотрим последовательность расчёта на примере дважды статически неопределимой фермы, изображённой на рис. 1.9, а. На рис. 1.10, а показана основная система. Распределённая нагрузка заменена сосредоточенными силами $P=qd=4q$. Сосредоточенные силы, приложенные к точкам 1 и 4 не показаны, так как эти силы не вызывают усилий в ферме. Система канонических уравнений для основной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Для вычисления единичных и грузовых перемещений определим усилия в стержнях фермы от X_1, X_2 и нагрузки P . Вычислим $\sin \alpha = 3/5 = 0,6$ $\cos \alpha = 4/5 = 0,8$.

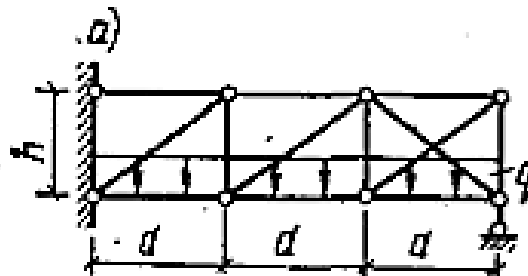


Рисунок 1.9

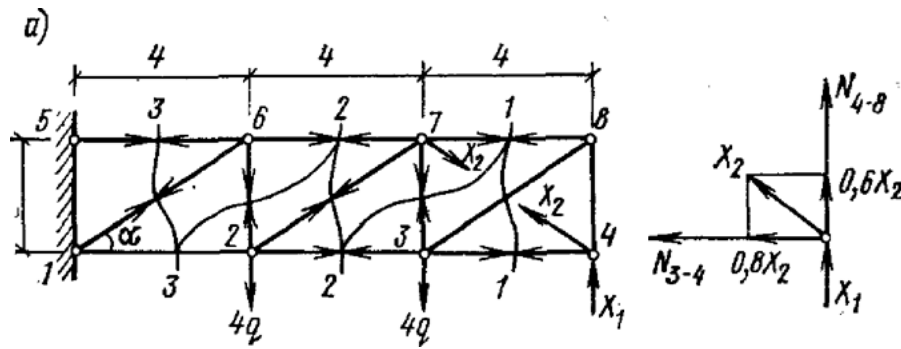


Рисунок 1.10

Вырезая узел 4 (рис. 1.10,б), определим N_{3-4} и N_{4-8} :

$$\sum X = -0,8X_2 - N_{3-4} = 0; N_{3-4} = -0,8X_2;$$

$$\sum Y = X_1 + 0,6X_2 + N_{4-8} = 0; N_{4-8} = -X_1 - 0,6X_2.$$

Проводя сечение 1-1, получим

$$\sum M_3 = X_1 \cdot 4 + 0,6X_2 \cdot 4 + N_{7-8} \cdot 3 = 0; N_{7-8} = -1,333X_1 - 0,8X_2;$$

$$\sum Y = X_1 + 0,6X_2 - N_{3-8} \cdot 0,6 = 0; N_{3-8} = 1,667X_1 + X_2.$$

Проводя сечение 1-2, вычислим N_{3-7} :

$$\sum Y = X_1 + 0,6X_2 - 4q + N_{3-7} = 0; N_{3-7} = -X_1 - 0,6X_2 + 4q.$$

Проводя сечение 2-2, получим

$$\sum M_7 = X_1 \cdot 4 - N_{2-3} \cdot 3 = 0; N_{2-3} = 1,333X_1;$$

$$\sum M_2 = X_1 \cdot 8 - 4q \cdot 4 + N_{6-7} \cdot 3 = 0; N_{6-7} = -2,667X_1 + 5,333q;$$

$$\sum Y = X_1 - 4q - N_{2-7} \cdot 0,6 = 0; N_{2-7} = 1,667X_1 - 6,667q.$$

Проводя сечение 2-3, определим N_{2-6} :

$$\sum Y = X_1 - 8q + N_{2-6} \cdot 0,6 = 0; N_{2-6} = -X_1 + 8q.$$

Проводя сечение 3-3, получим

$$\sum M_1 = X_1 \cdot 12 - 4q \cdot 4 - 4q \cdot 8 + N_{5-6} \cdot 3 = 0; N_{5-6} = -4X_1 + 16q;$$

$$\sum M_6 = X_1 \cdot 8 - 4q \cdot 4 - N_{1-2} \cdot 3 = 0; N_{1-2} = 2,667X_1 - 5,333q;$$

$$\sum Y = X_1 - 4q - 4q - N_{1-6} \cdot 0,6 = 0; N_{1-6} = 1,667X_1 - 13,333q;$$

Полагая в приведённых формулах $X_1=1$, $X_2=0$, $q=0$, получим усилия во всех стержнях от $X_1=1$. Аналогично могут быть найдены усилия от $X_2=1$ и нагрузки. Процесс получения коэффициентов канонических уравнений удобно проводить в табличной форме (табл. 1.1).

После того как найдены коэффициенты канонических уравнений, составляем систему

$$\begin{cases} 376,535X_1 + 56,741X_2 - 1383,284q = 0; \\ 56,741X_1 + 61,6X_2 - 36q = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Решая систему (1.2) относительно X_1 и X_2 , получим

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003084 & -0,002841 \\ -0,002841 & 0,018850 \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} 1383,284 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,164 \\ -3,251 \end{bmatrix} q.$$

Имея значения лишних неизвестных, вычислим усилия во всех стержнях фермы по формуле (1.1)

Таблица 1.1

№ стержня	1	1-2	2-3	3-4	5-6	6-7	7-8	4-8	2-6
l	2	4	4	4	4	4	4	3	3
EF	3	1	1	1	1	1	1	1	0,2
$\frac{l}{EF}$	4	4	4	4	4	4	4	3	15
N_1	5	2,677	1,333	0	-4	-2,667	-1,333	-1	-1
N_2	6	0	0	-0,8	0	0	-0,8	-0,6	0
N_0	7	-5,333q	0	0	16 q	5,333 q	0	0	8 q
$\frac{N_1^2 \cdot l}{EF}$	8	28,452	7,107	0	64	28,452	7,108	3	15
$\frac{N_1 N_2 \cdot l}{EF}$	9	0	0	0	0	0	4,266	1,8	0
$\frac{N_2^2 \cdot l}{EF}$	10	0	0	2,56	0	0	2,56	1,08	0
$\frac{N_1 N_0 l}{EF}$	11	-56,892 q	0	0	-256 q	-56,892 q	0	0	-120 q
$\frac{N_2 N_0 l}{EF}$	12	0	0	0	0	0	0	0	0
$N_1 X_1$	13	11,105 q	5,551 q	0	-16,656 q	-11,105 q	-5,551 q	-4,164 q	-4,164 q
$N_2 X_2$	14	0	0	2,601 q	0	0	2,601 q	1,951 q	0
N	15	5,772 q	5,551 q	2,601 q	-0,656 q	-5,772 q	-2,95 q	-2,213 q	3,836 q

Σ	4-7	3-8	2-7	1-6	3-7
	5	5	5	5	3
	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
	25	25	25	25	15
	0	1,667	1,667	1,667	-1
	1	1	0	0	-0,6
	0	0	-6,667 q	-13,333q	4 q
376,535	0	69,472	69,472	69,472	15
56,741	0	41,685	0	0	9
61,6	25	25	0	0	5,4
- 1383,28	0	0	-277,847 q	-555,653 q	-60 q
-36 q	0	0	0	0	-36 q
	0	6,941 q	6,941 q	6,941 q	-4,164 q
	-3,251 q	-3,251 q	0	0	1,951 q
	-3,251 q	3,69 q	0,274 q	-6,392 q	1,787 q

2. Расчёт статически неопределимой арки

Первоначально остановимся на выборе основных систем для расчёта арок. Для двухшарнирной арки на рис. 1.14,а первый вариант основной системы представляет собой криволинейную балку (рис. 1.14б), второй – трёхшарнирную арку (рис. 1.14в).

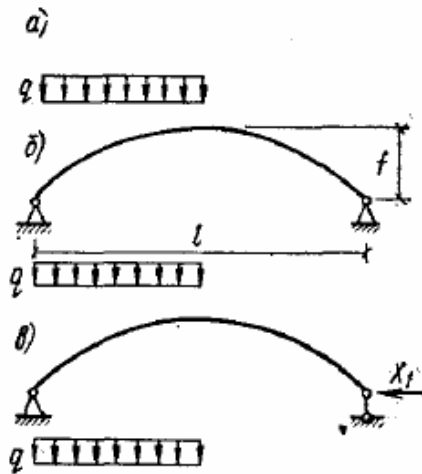


Рисунок 1.14

При втором варианте работа основной системы ближе к работе заданной, в результате чего алгоритм расчёта будет более устойчив по отношению к ошибкам округления. Однако при втором варианте построения эпюр внутренних более трудоёмко, чем при использовании первого варианта основной системы. Чем меньше пологость арки f/l , тем больший распор возникает в арке, т. е. тем большее влияние оказывают на арку продольные силы. Влияние ошибок закругления увеличивается с уменьшением пологости арки, поэтому для очень пологих арок может быть рекомендован второй вариант основной системы. В остальных случаях может быть использована основная система, показанная на рис. 1.14, б.

На рис. 1.15 изображена симметричная бесшарнирная арка и три варианта основных систем для её расчёта.

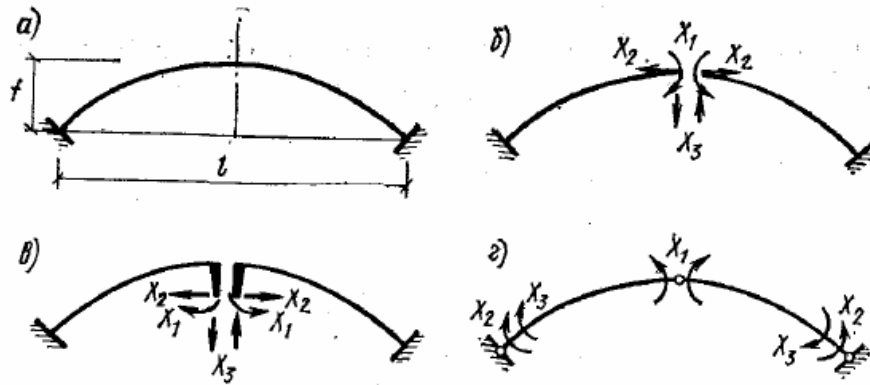


Рисунок 1.15

Первый вариант (рис. 1.15, б) получен из заданной путём разреза посередине. При этом система канонических уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases}$$

Во втором варианте (рис. 1.15, в) неизвестные перенесены в упругий центр, в результате чего система канонических уравнений распадается на три независимых уравнения:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Положение упругого центра в симметричных арках не зависит от величины продольных сил, так как при действии $X_1=1$ продольные силы равны нулю. В пологих арках продольные силы оказывают наибольшее влияние на коэффициент δ_{22} , причём это влияние будет тем большим, чем меньше пологость. Поэтому влияние продольных сил можно учитывать только в этом коэффициенте. На коэффициент δ_{11} продольная сила влияния не оказывает, а на коэффициент δ_{33} это влияние тем меньше, чем меньше пологость арки.

Основная система, показанная на рис. 1.15, в, нашла широкое распространение при расчёте арок. Основная система в виде трёхшарнирной арки (рис. 1.15, г) не получила широкого распространения при расчёте симметричных бесшарнирных арок, так как построение эпюр внутренних сил в этой системе сложнее, чем в консольной. На рис. 1.15, д, е показаны два варианта основных систем для расчёта несимметричной бесшарнирной арки. Канонические уравнения для обеих основных систем имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases}$$

При расчете пологих арок с использованием основной системы, изображенной на рис. 1.15, δ , коэффициент δ_{33} может на несколько порядков отличаться от других главных коэффициентов. При решении системы канонических уравнений этот коэффициент как бы «поглощает» влияние остальных членов. При решении системы уравнений с применением калькулятора приходится использовать плавающую запятую. Поэтому для расчета несимметричных пологих арок может быть рекомендована основная система, изображенная на рис. 1.15, e .

Иногда при расчете арок на неподвижную, нагрузку боковые шарниры ставят в местах, где предполагаются нули в окончательной эпюре моментов. При таком подходе основная система будет наиболее близка по своей работе к заданной. Однако построение эпюр внутренних сил в такой системе является более трудоемкой задачей.

Приведенные выше соображения по выбору основных систем относятся к расчету с использованием логарифмической линейки и калькуляторов. При использовании ЭВМ, ввиду высокой точности, консольная основная система (рис. 1.15, δ) дает хорошие результаты. При использовании ЭВМ целесообразной основной системой является такая, в которой наиболее просто строится эпюры внутренних сил. Ось арки является криволинейной, поэтому для определения перемещений по Мору возникает проблема вычисления определенных интегралов. Эти интегралы в большинстве случаев не выражаются в элементарных функциях, поэтому при практических расчетах криволинейная ось арки заменяется вписанным многоугольником, для которого интегралы Мора вычисляются по обычным правилам: либо по правилу Верещагина, либо по формуле перемножения трапеций, либо по формуле Симпсона.

3. Основы метода предельного равновесия

3.1. Понятие о предельных нагрузках и механизмах разрушения

Реальные конструкции представляют собой в большинстве случаев многократно статически неопределимые системы, материал которых обладает свойством пластичности. Это дает конструкции дополнительные резервы прочности. После того как в наиболее деформированных элементах напряжения достигают предела текучести, конструкция может еще нести

дополнительную нагрузку за счет перераспределения внутренних сил и их дополнительного возрастания. Из курса сопротивления материалов, например, известно, что для системы, показанной на рис. 10.1, а, стержни которой изготовлены из материала с диаграммой Прандтля (рис. 10.1,б), при достижении напряжениями σ предела текучести в наиболее напряженном стержне $1\sigma_1=\sigma_T$ еще не происходит исчерпание несущей способности системы. Относительные удлинения ε_2 и ε_3 будут меньшими ε_T и возможно дальнейшее увеличение нагрузки, при которой усилия N_2 и N_3 будут возрастать при $N_1=\text{const}=\sigma_T F$.

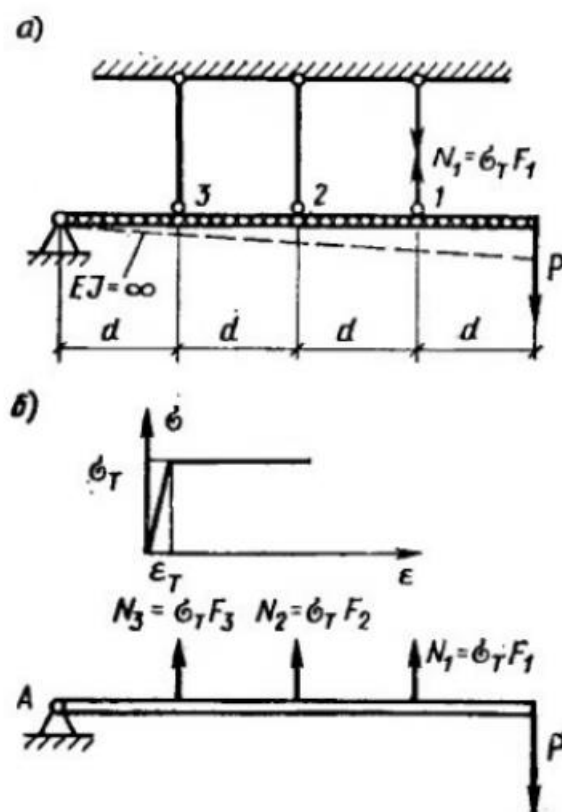


Рисунок 3.1 – Система, стержни которой изготовлены из материала с диаграммой Прандтля

При появлении текучести в стержне 2 $\sigma_2=\sigma_T$ несущая способность системы также еще не исчерпывается, и лишь после того как напряжение достигнут предела текучести во всех трех стержнях, дальнейшее возрастание нагрузки невозможно. Соответствующая предельная нагрузка $P_{\text{пред}}$ для заданной дважды статически неопределимой системы легко находится, таким образом, из уравнения равновесия для предельного состояния (рис. 10.1, в) $\sum M_A=0$:

$$P_{\text{пред}} = \frac{1}{4d} [(\sigma_T F_3)d + (\sigma_T F_2)2d + (\sigma_T F_1)3d];$$

$$P_{\text{пред}} = \frac{\sigma_T}{4} (3F_1 + 2F_2 + F_3).$$

Другим известным из сопротивления материалов примером является задача изгиба статически неопределимой балки от нагрузки P (рис. 10.2, а).

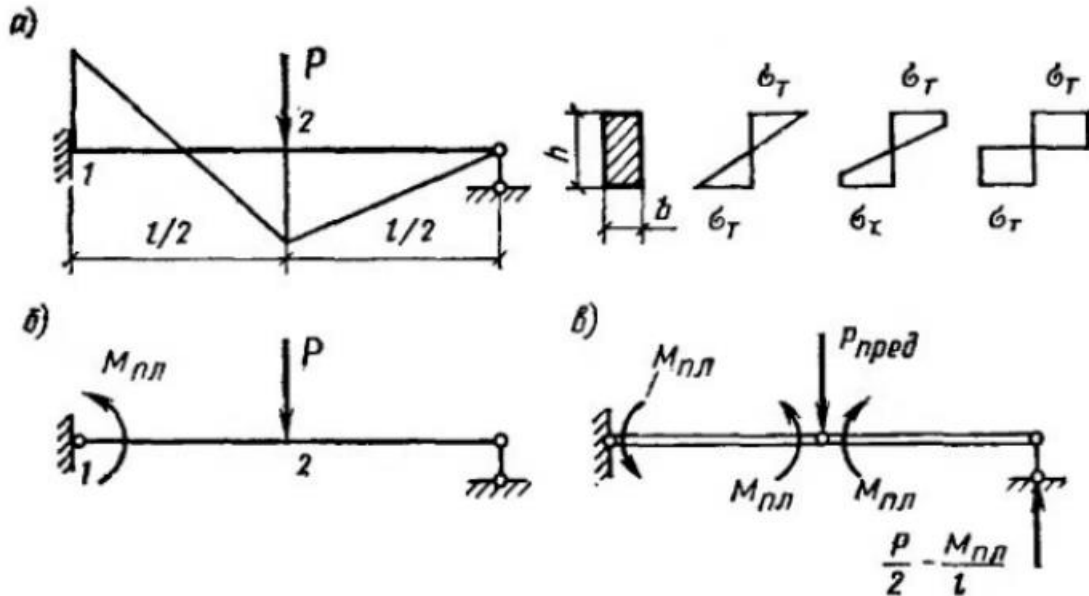


Рисунок 3.2 - Задача изгиба статически неопределимой балки от нагрузки P

При появлении текучести в крайних волокнах наиболее напряженного сечения 1 еще не исчерпывается несущая способность балки. При дальнейшем увеличении нагрузки текучесть проникает вглубь сечения вплоть до появления в нем пластического шарнира, когда $M_1 = M_{\text{пл}} = \sigma_T W_{\text{пл}}$. (Напомним, что, например, для прямоугольного сечения согласно последней эпюре рис. 10.2, а $W_{\text{пл}} = 2S_{\text{отс}}^{\text{max}} = bh^2/4$). Но и при этом несущая способность балки не исчерпывается. Система как бы превращается в статически определимую и геометрически неизменяемую (рис. 10.2, б) при $M_2 < M_{\text{пл}}$. Лишь после того как в сечении 2 изгибающий момент достигает значения $M_2 = M_{\text{пл}}$, система превращается в механизм (рис. 10.2, в). Из равновесия механизма в предельном состоянии можно определить предельную нагрузку

$$M_2 = M_{\text{пл}} = \frac{P_{\text{пред}} l}{4} - \frac{M_{\text{пл}}}{2},$$

откуда

$$P_{\text{пред}} = 6M_{\text{пл}}/l.$$

Аналогичная картина образования механизма предельного равновесия наблюдается и при нагружении пластин, оболочек и более сложных систем, состоящих из стержней, пластин и оболочек и выполненных из упруго-пластического материала.

Например, при разрушении шарнирно опертой прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 10.3, а), образуются пластические шарниры вдоль линий, показанных на рис. 10.3, б. Аналогично предельная нагрузка для оболочки вызывает появление пластических шарниров вдоль некоторых линий (рис. 10.3, в), положение которых, вообще говоря, заранее неизвестно.

Заметим, что нагрузка в общем случае характеризуется несколькими параметрами и заранее неизвестны не только механизм разгужения, но и наиболее опасное сочетание нагрузок.

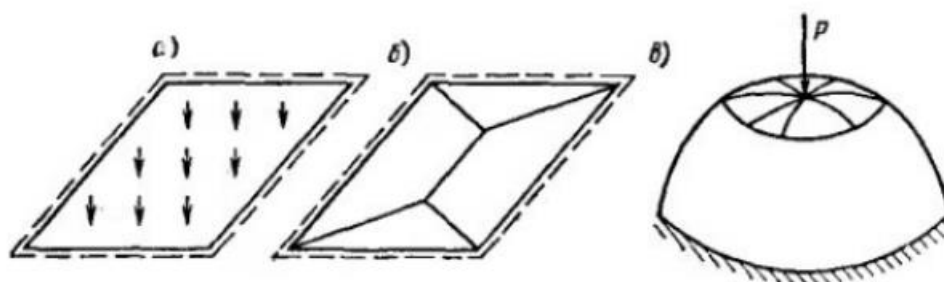


Рисунок 3.3 – Разрушение шарнирно опертой прямоугольной пластины, оболочки

Для анализа предельного равновесия сложных систем используются так называемые статическая и кинематическая теоремы о предельном равновесии и вытекающие из них свойства предельных нагрузок. В разработку соответствующих методов большой вклад внесли работы советских ученых А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича, А. Р. Ржаницына и многих других.

3.2. Теоремы о предельном равновесии

Системы, находящиеся в состоянии предельного равновесия, обладают экстремальными свойствами. Вернемся вначале к примеру, показанному на

рисунке 10.1, в. Рассмотрим произвольное статически возможное состояние, которое может и не удовлетворять уравнениям совместности деформаций. Очевидно, что в данном примере при произвольных напряжениях хотя бы в одном из стержней напряжение будет меньше σ_b , и из уравнения равновесия $\sum M_A = 0$ получим для соответствующей силы P^* значение меньше предельного $P^* < P_{\text{пред}}$.

Можно доказать, что и в произвольном случае упругопластического тела нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию, меньше чем предельная. Это и является формулировкой статической теоремы. Из нее вытекает соответствующий метод определения предельной нагрузки как наибольшей, при которой возможно равновесие системы. Для статически определимой системы такой подход очевиден. Но уже применительно к стержневым статически неопределимым системам его реализация нуждается в пояснении. Например, системы, показанные на рис. 10.4, один раз статически неопределимы.

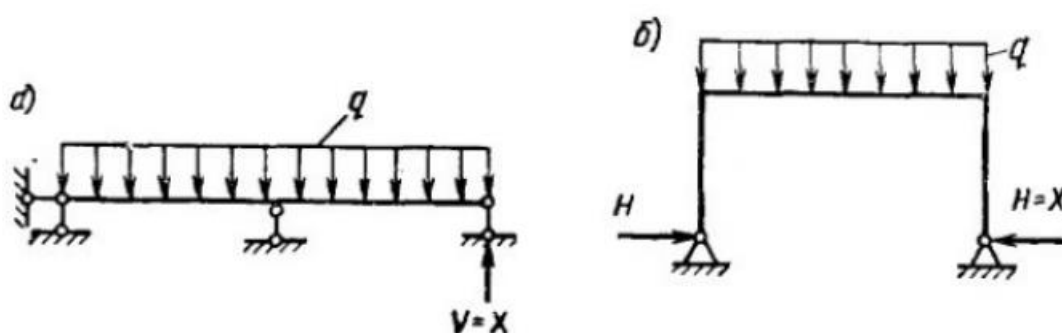


Рисунок 3.4 – Один раз статически неопределимые системы

В упругой стадии значения $V=X$ для системы на рис. 10.4, а или $H=X$ для системы на рис. 10.4, б легко определяются, например методом сил, из уравнений совместности деформаций. После перехода системы в упругопластическую стадию эти значения изменяются. Но для выяснения возможных пределов изменения q и X легко написать условия – ограничения. Например, эпюра изгибающих моментов для системы на рис. 10.4, б имеет вид, показанный на рис. 10.5, а. Она имеет две характерные ординаты в сечениях 1 (или 3) и 2. Будем пренебрегать влиянием продольных сил N и считать, что

переход в состояние предельного равновесия происходит, как и в балках, вследствие достижения моментами соответствующих предельных значений $M_{пл}$.

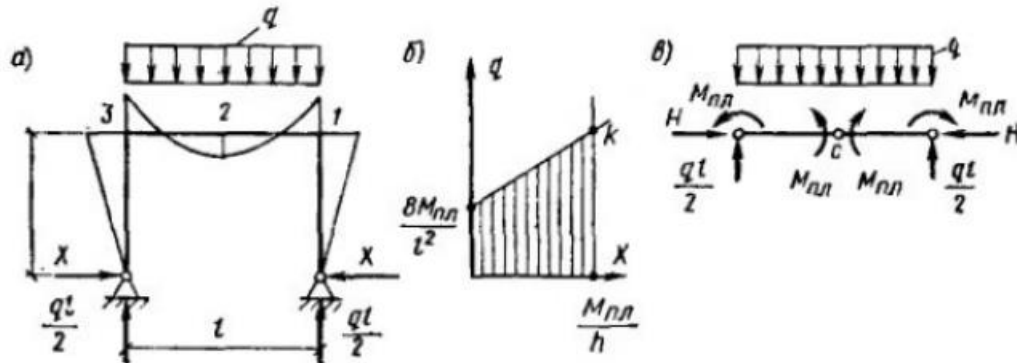


Рисунок 3.5 -

Тогда для момента в узле M_1 имеем ограничения $M_1 = Xh \leq M_{пл}$, откуда

$$X < \left(\frac{M_{пл}}{h}\right). \quad (3.1)$$

Для момента в сечении 2

$$M_2 = \frac{ql^2}{8} - Xh < M_{пл},$$

откуда

$$q < \frac{8}{l^2} (M_{пл} + Xh) \quad (3.2)$$

Неравенствами (10.1), (10.2) соответствует область статически возможных значений q и X , показанная на рис. 10.5, б. В соответствии со статической теоремой предельными значениями нагрузки q будет $q_{пред} = 16M_{пл}/l^2$ при $X = M_{пл}/h$ (точка k диаграммы). К такому же значению $q_{пред}$ можно прийти в результате анализа равновесия механизма ригеля рамы (рис. 10.5, в) в состоянии предельного равновесия

$$\sum M_c = 0; \left(\frac{ql}{2}\right)\frac{l}{2} - \left(\frac{ql}{2}\right)\frac{l}{4} - 2M_{пл} = 0,$$

Откуда

$$q_{пред} = 16M_{пл}/l^2.$$

Положение сечений с максимальными моментами не всегда заранее известно. Например, для балки на рис. 10.4, а одно сечение будет над опорой 1,

а второе в пролете (рис.10.6, а) на расстоянии z от крайней опоры. Расстояние z изменяется при увеличении нагрузки после появления пластического шарнира в сечении 1.

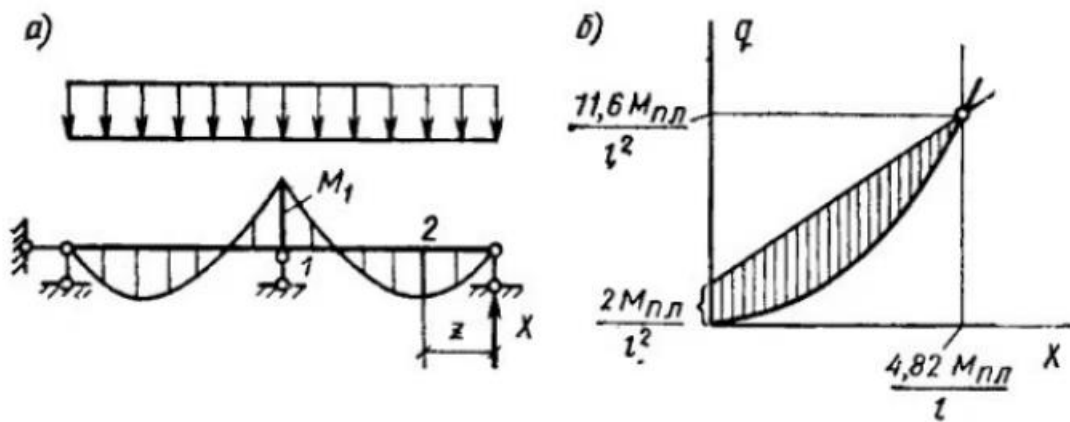


Рисунок 3.6 – Вариант расположения сечения с максимальным моментом

Однако z можно выразить через q и X так как в сечении 2 с экстремальными изгибающим моментом поперечная сила равна нулю: $Q_2=0$, $qz-X=0$, откуда $z=X/q$.

Записывая ограничения для M_1 и M_2

$$M_1 = \frac{ql^2}{2} - Xl < M_{пл}; \quad q < \frac{2}{l^2}(M_{пл} + Xl) \quad (3.3)$$

$$M_2 = Xz - \frac{qz^2}{2} < M_{пл} \quad (3.4)$$

И подставляя в (10.4) выражение $z=X/q$, получим

$$q > X^2/2M_{пл}. \quad (3.5)$$

Множество значений q и X , удовлетворяющих неравенствам (3.3), (10.5), показано на рис. 3.6, б. Согласно статической теореме предельное значение нагрузки равно наибольшему значению $q_{пред}=11,6 M_{пл}/l^2$ при $X=4,82 M_{пл}/l$.

Другим инструментом исследования предельного равновесия является кинематическая теорема, согласно которой нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию, больше, чем предельная. В кинематическом методе, основанном на этой теореме, сравниваются величины нагрузок, соответствующих различными кинематически возможным состояниям системы, и из них выбирается наименьшее. В сочетании со статической теоремой это дает оценки для предельной нагрузки снизу и сверху.

При исследовании кинематически возможных схем предельного равновесия будем использовать принцип возможных перемещений. При расчете рам будем пренебрегать влиянием продольных сил N и изгибающие моменты $M_{пл}$, соответствующие появлению пластических шарниров, считать такими же как и в балках. Составляя выражения возможной работы механизма, необходимо учесть работу внешних сил $\sum_k P_k \Delta_k$ и работу внутренних сил – моментов M_j в пластических шарнирах - $\sum_j M_j \theta_j$, где угол θ_j – угол, характеризующий возможную деформацию в j -м шарнире. Таким образом, для любой кинематической схемы перемещений рамы будем иметь уравнение равновесия

$$\sum_k P_k \Delta_k - \sum_j M_j \theta_j = 0$$

Или

$$\sum_k P_k \Delta_k = \sum_j M_j \theta_j \quad (3.6)$$

Будем рассматривать так называемое простое нагружение, когда силы возрастают пропорционально одному параметру, для определения предельного значения которого и составляются уравнения равновесия (10.6). При этом во всех пластических шарнирах идет развитие пластических деформаций, т.е. слагаемые $M_j \theta_j$ должны быть положительными. Число кинематически возможных состояний зависит от числа характерных сечений, в которых могут образовываться пластические шарниры. При использовании кинематического метода в общем случае нет необходимости в предварительном расчете по упругой стадии и анализе последовательности образования пластических шарниров, что, например, было сделано в предыдущем параграфе при определении предельного значения нагрузки для балки (см. рис. 3.2). Выражая для каждого кинематически возможного состояния перемещения Δ_k и углы θ_j через один параметр и сокращая на него уравнения (3.6), получаем соответствующие значения $P^* > P_{пред}$. Выбирая из них наименьшее, получим для $P_{пред}$ оценку сверху.

Рассмотрим, например, задачу определения предельного значения $P_{\text{пред}}$ нагрузки из двух одинаковых сил P для рамы (рис. 3.7, а). Механизм здесь может быть образован после появления пластических шарниров в сечениях 1, 2 и 3, причем достаточно появления шарниров в двух сечениях. Например, уравнения (3.6) равновесия механизма, показанного на рис. 10.7, б, запишем через θ : $\theta_1 = \theta_2 = \theta$; $\Delta_1 = \Delta_2 = h\theta$; $2P_1^* \Delta = 2M_{\text{пл}} \theta$, откуда при $\Delta = h\theta$ получаем $P_1^* = M_{\text{пл}}/h$.

Из уравнения равновесия второго механизма (рис. 3.7, в)

$$P(h\theta) + P(2h\theta) = M_{\text{пл}}\theta + M_{\text{пл}}\theta$$

Получаем $P_2^* = 2M_{\text{пл}}/3h$.

Выбирая из выражений $P_1^* = M_{\text{пл}}/h$ и $P_2^* = 2M_{\text{пл}}/3h$ наименьшее значение, получаем $P_{\text{пред}} < 2M_{\text{пл}}/3h$. В этой задаче несложно доказать, что полученное значение P_2^* будет предельным. Действительно, рассматривая механизм (рис. 3.7, г) с произвольным значением $\theta_2 = k\theta$, где $0 \leq k \leq 1$, получим уравнение равновесия

$$Ph\theta + P(2h\theta - kh\theta) = M_{\text{пл}}\theta + M_{\text{пл}}k\theta + M_{\text{пл}}(\theta - k\theta),$$

Откуда

$$P = \frac{2}{3-k} \frac{M_{\text{пл}}}{h}.$$

Поскольку k не может быть отрицательным, так как в том случае отрицательная работа момента M_2 , наименьшее возможное значение P равно $2M_{\text{пл}}/3h$. В этом можно убедиться, используя статическую теорему.

Согласно рис. 3.8, а условия ограничения для M_1 , M_2 , M_3 имеют следующий вид:

$$M_1 = 3hP - Xl < M_{\text{пл}};$$

$$M_2 = Xl - hP < M_{\text{пл}};$$

$$M_3 = Xl < M_{\text{пл}}$$

Или

$$P < \frac{1}{3h} (M_{\text{пл}} + Xl);$$

$$P > \frac{1}{h}(Xl - M_{пл}); \quad (3.7)$$

$$Xl < M_{пл}.$$

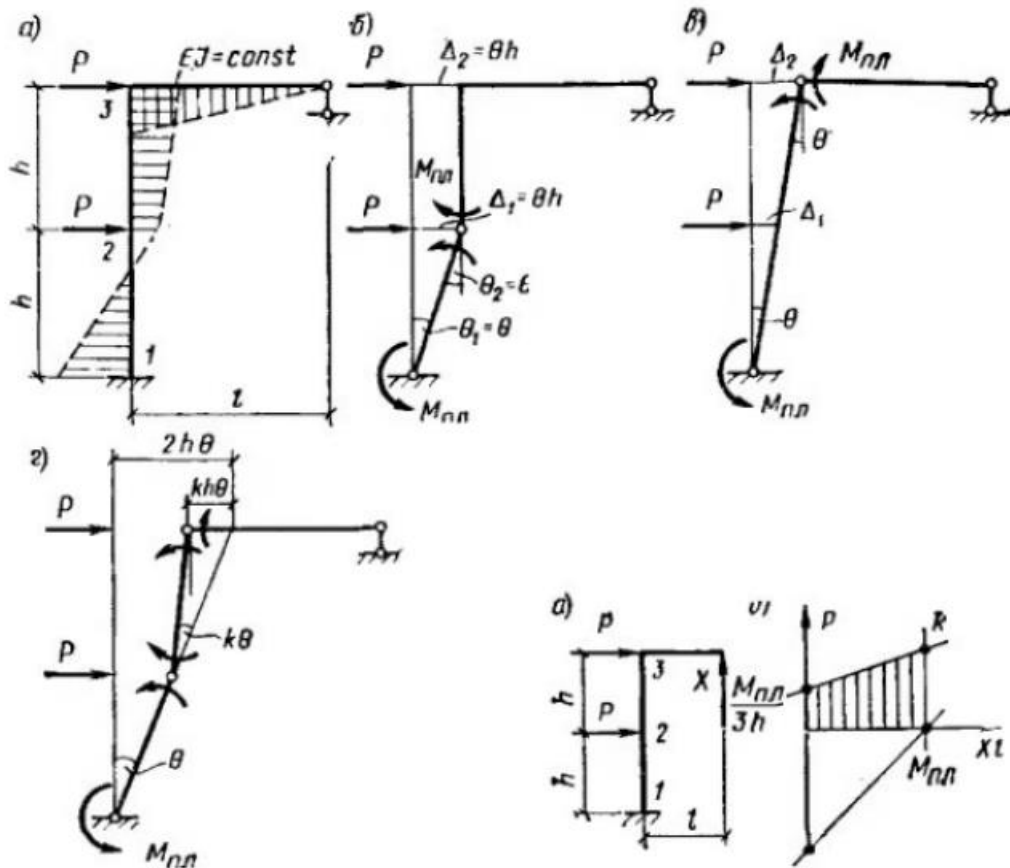


Рисунок 3.7, 3.8 - Статически возможные значения параметров P и Xl

Неравенствам (3.7) соответствует область статически возможных значений параметров P и Xl , показанных на рис. 3.8, б. Максимальное возможное значение $P = 2M_{пл}/3h$. Таким образом, полученное значение $P_{пред} = 2M_{пл}/3h$ является предельным.

Аналогично исследуют и механизмы предельного равновесия более сложные стержневые системы, пластин, оболочек. Ввиду большого количества возможных состояний ЭВМ и современные математические методы.

Основная литература

1. Баландин В.А., Шапошников Н.Н. Расчет осесимметричных круглых пластин и оболочек по методу конечных элементов с учетом поперечного сдвига. – В кн.: Вопросы прочности в химическом машиностроении. М., 2001
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М., Машиностроение, 2010
3. [Теличко, Григорий Николаевич](#). Основы строительной механики плоских стержневых систем : учебник для вузов и сузов / Г. Н. Теличко .— 3-е изд., стер .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2010 .— 440 с.: ил. — Предм. указ.: с. 427-430 .— Библиогр.: с. 431-432 .— ISBN 978-5-7679-1533-0 : 204,00. 82 экз.
4. Кривошапко, С. Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы : учеб.пособие для вузов / С. Н. Кривошапко.— М.: Высш. шк., 2008.— 392 с.: ил. — (Для высших учебных заведений:Строительство и архитектура).— Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-06-005754-6 (в пер.). 10 экз.
5. Бабанов, В. В. Строительная механика: учебник для вузов: в 2 т. / В. В. Бабанов .— 2-е изд., стер. — Москва: Академия, 2012.— (Высшее профессиональное образование.Строительство) (Бакалавриат).—Т. 1 .— 2012 .— 304 с. : ил. — ISBN 978-5-7695-9298-0 (т. 1) . 5 экз.

Дополнительная литература

1. Н.Н.Анохин. Строительная механика в примерах и задачах. Часть 3. Динамика сооружений. Учебное пособие. – М.: , 2016. – с...: ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 978-5-4323-0174-1
2. И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. Строительная механика. – М.: Проспект, 2011. – 432 с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 978-5-392-01474-3.
3. А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев. Строительная механика. В 2 книгах. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с...: ил. – ISBN: 978-5-06-005356-2.
4. [В.И. Коробко, А.В. Коробко. Строительная механика. Динамика и устойчивость стержневых систем. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 400 с.— Библиогр.в конце кн. — ISBN 978-5-93093-546-2.](#)