

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные
материалы и конструкции»
«18» января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____  А. А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Современные методы расчета строительных конструкций»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Промышленное и гражданское строительство

Формы обучения: очная, заочная, очно-заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Судакова И.А., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

I. Введение

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студенту в его работе по изучению современных методов расчета строительных конструкций.

С этой целью студенту предлагаются общие и тематические методические указания, которые будут направлять его деятельность по приобретению знаний, умений и навыков в решении типовых задач по изучаемой дисциплине.

Работа над выданным индивидуальным заданием ведется в виде самостоятельной работы при консультативной помощи преподавателя. Результатом этой работы является усвоение алгоритмов решения типовых задач методом конечных элементов, а также языка описания расчетных схем и обозначений, используемых при формулировке математических задач, которые являются следствием применения метода конечных элементов.

Важно подчеркнуть, что приобретаемые в ходе практических занятий знания, умения и навыки являются основой для принятия решений при проектировании зданий и сооружений в курсовом и дипломном проектировании. В частности, умение правильно и быстро строить эпюры усилий гарантирует достоверную исходную информацию для определения сечений несущих элементов конструкций.

II. Общие методические указания

Основной объем материалов, необходимых для успешного выполнения заданий на практических занятиях по современным методам строительных конструкций, сконцентрирован в конспекте лекций. Поэтому рекомендуется указанный материал иметь с собой и пользоваться этими материалами для выполнения своего индивидуального задания.

Поскольку тематика практических занятий соответствует тематике глав, разделов и подразделов указанного конспекта лекций, рекомендуется перед каждым новым занятием познакомиться с материалами конспекта лекций и соответствующей темой в настоящих указаниях.

Исходные данные для формирования индивидуальной расчетной схемы является схема, на которой приведены внутренние и внешние связи, а также виды нагрузки без указания числовых значений. Кроме того, на схеме дана координатная сетка глобальной системы координат с шагом a по каждому координатному направлению в плоскости изображения (рис. 1).

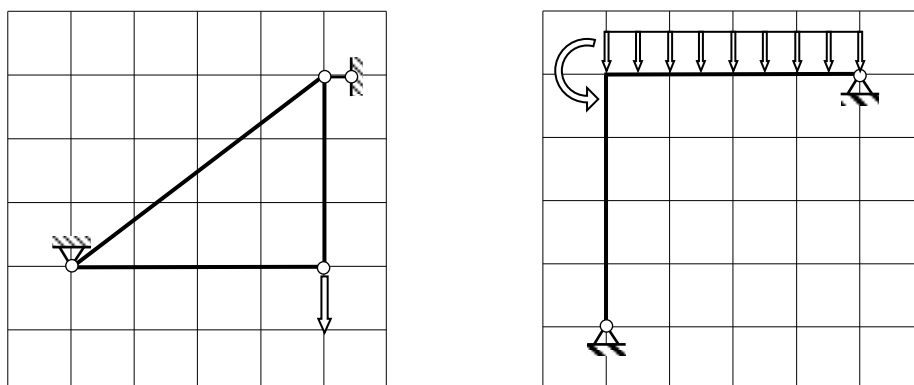


Рис. 1. Схемы для формирования расчетных схем индивидуальных заданий

Студент должен знать общепринятые обозначения внешних и внутренних связей, которые изучались в курсах дисциплин «Теоретическая механика», «Строительная механика». Кроме того, необходимо познакомиться с некоторыми уточнениями и дополнениями к этим обозначениям, принятым далее (рис. 2, рис. 3).

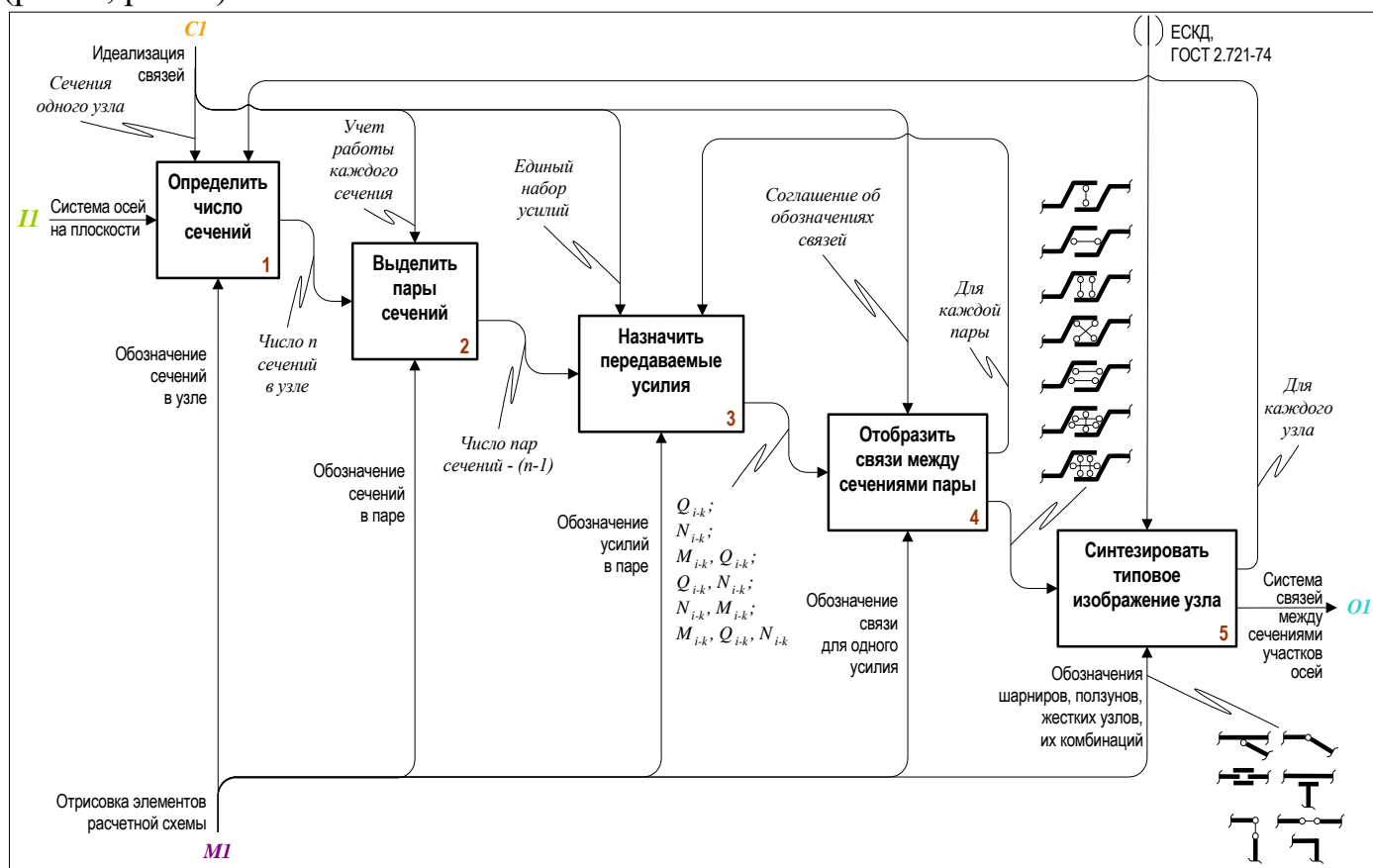


Рис. 2. Структура и обозначения внутренних связей между сечениями расчетной схемы

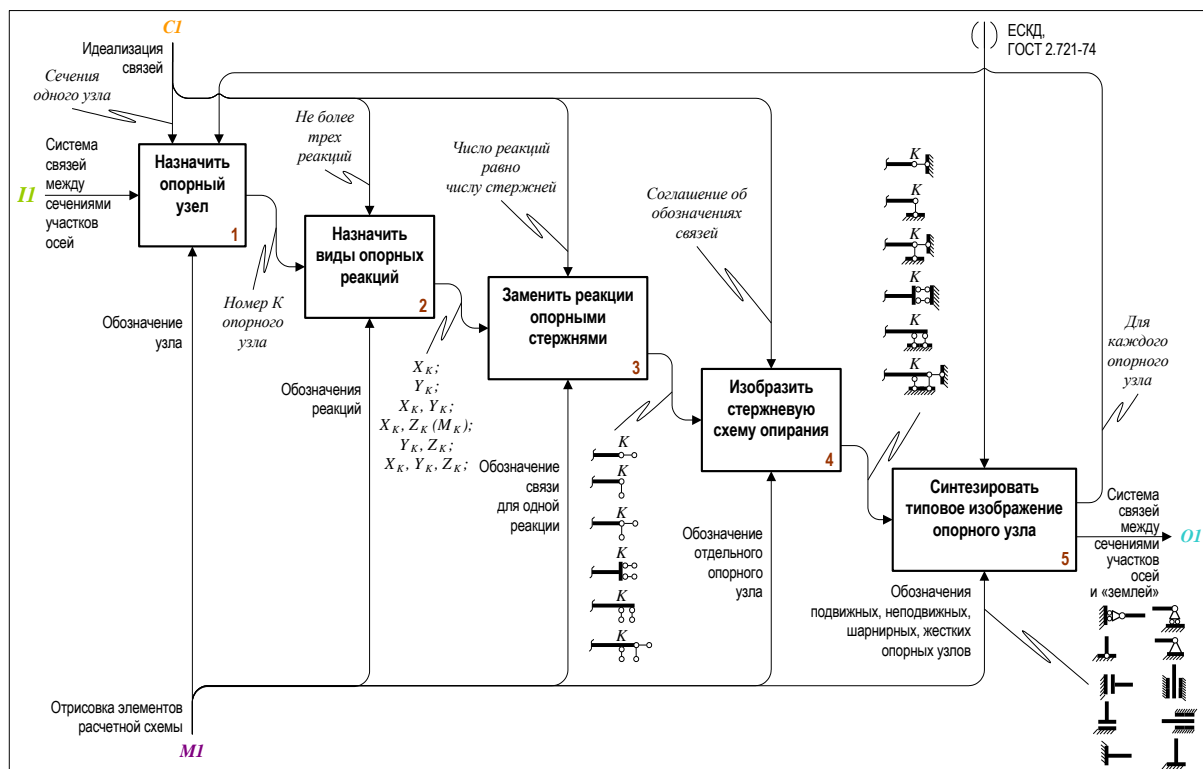


Рис. 3. Структура и обозначения внешних связей в узлах опирания расчетной схемы

Ясное и четкое представление о связях и их комбинациях в узлах расчетной схемы необходимо для того, чтобы не ошибиться в определении усилий, возникающих в сечениях узлов. Поэтому очень важно помнить все варианты комбинации усилий и реакций, которые характерны для типовых расчетных схем (рис. 4., рис. 5).

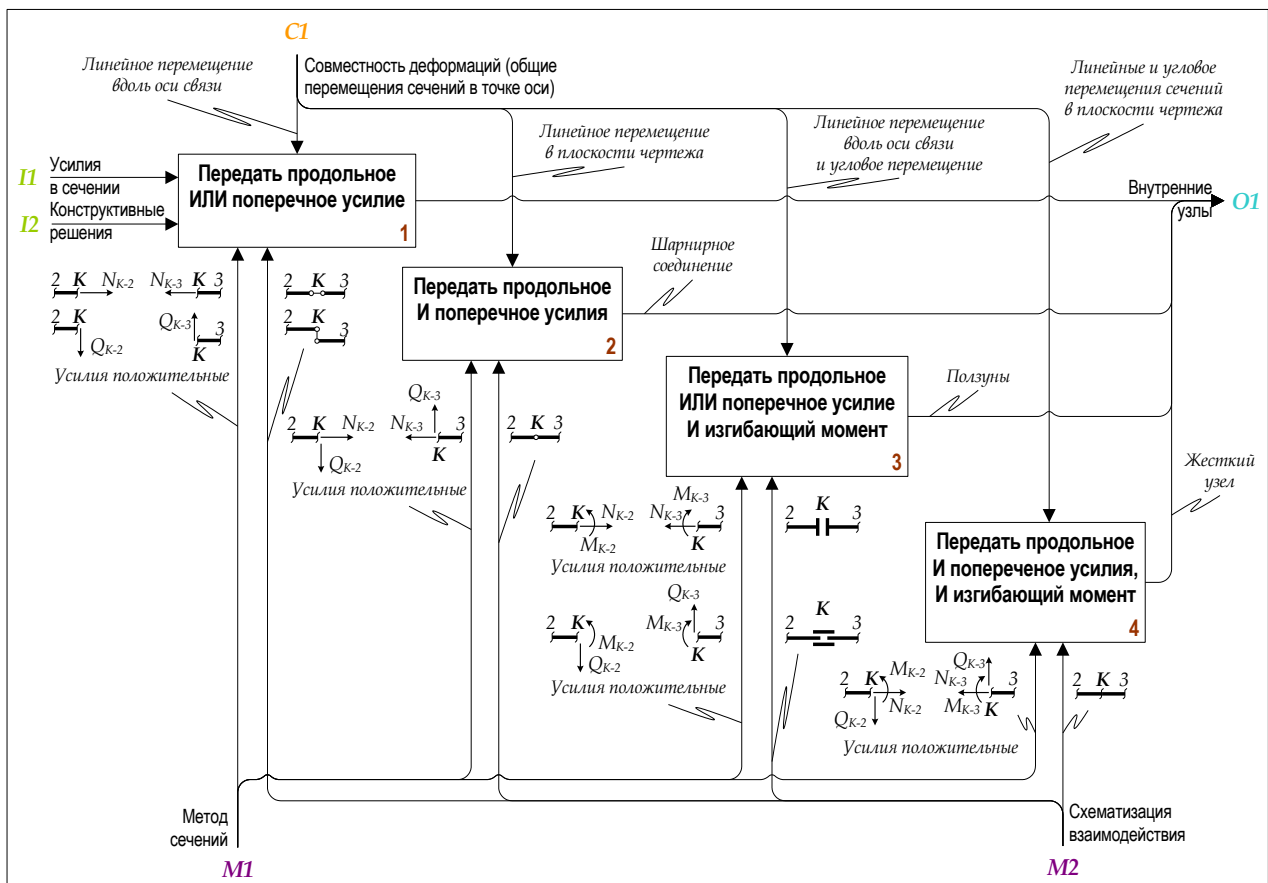


Рис. 4. Структура и обозначения усилий в узлах расчетной схемы

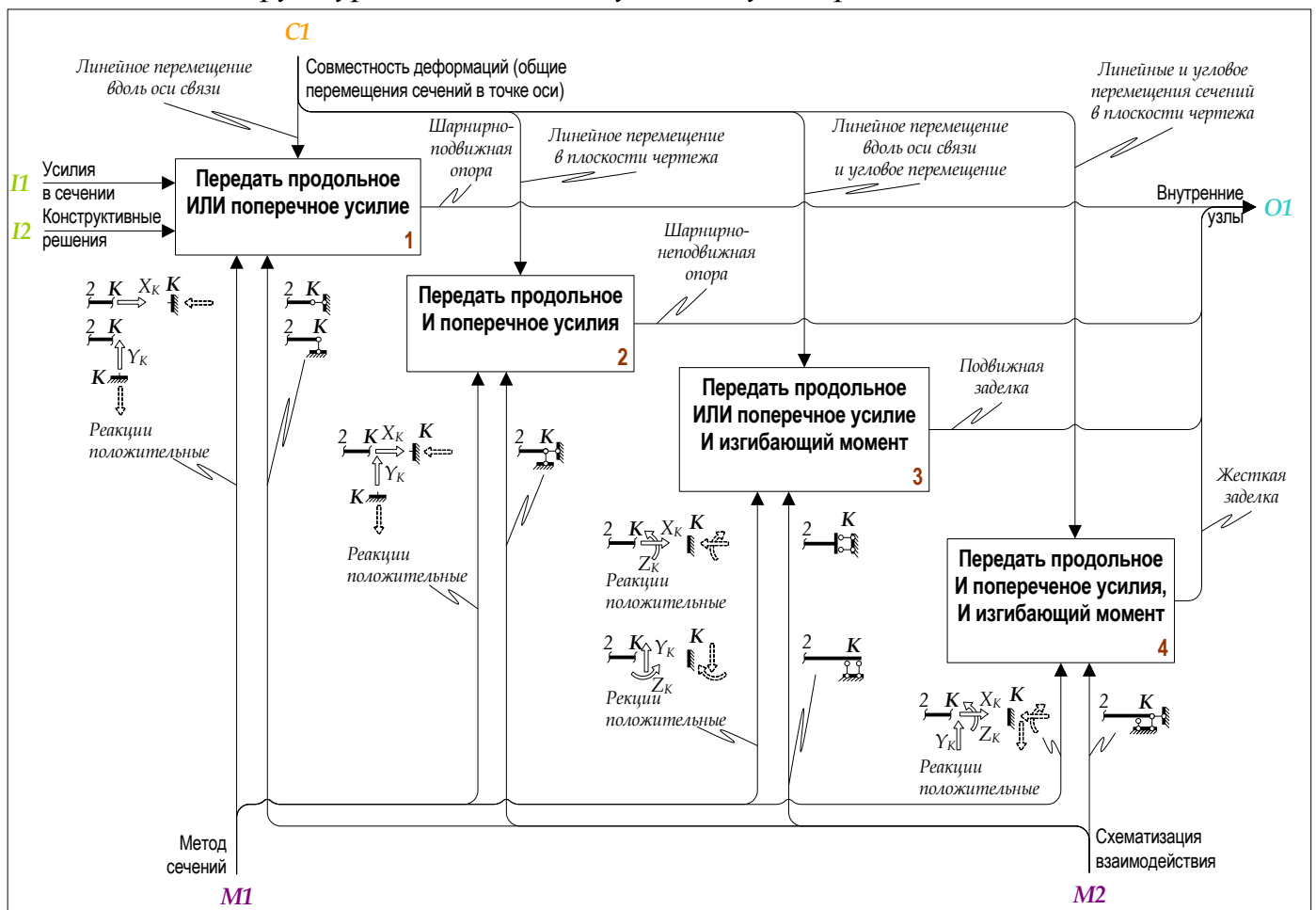


Рис. 5. Структура и обозначения реакций в узлах расчетной схемы

Весьма полезно помнить характерные частные случаи передачи усилий и реакций, представленные на рис. 6.

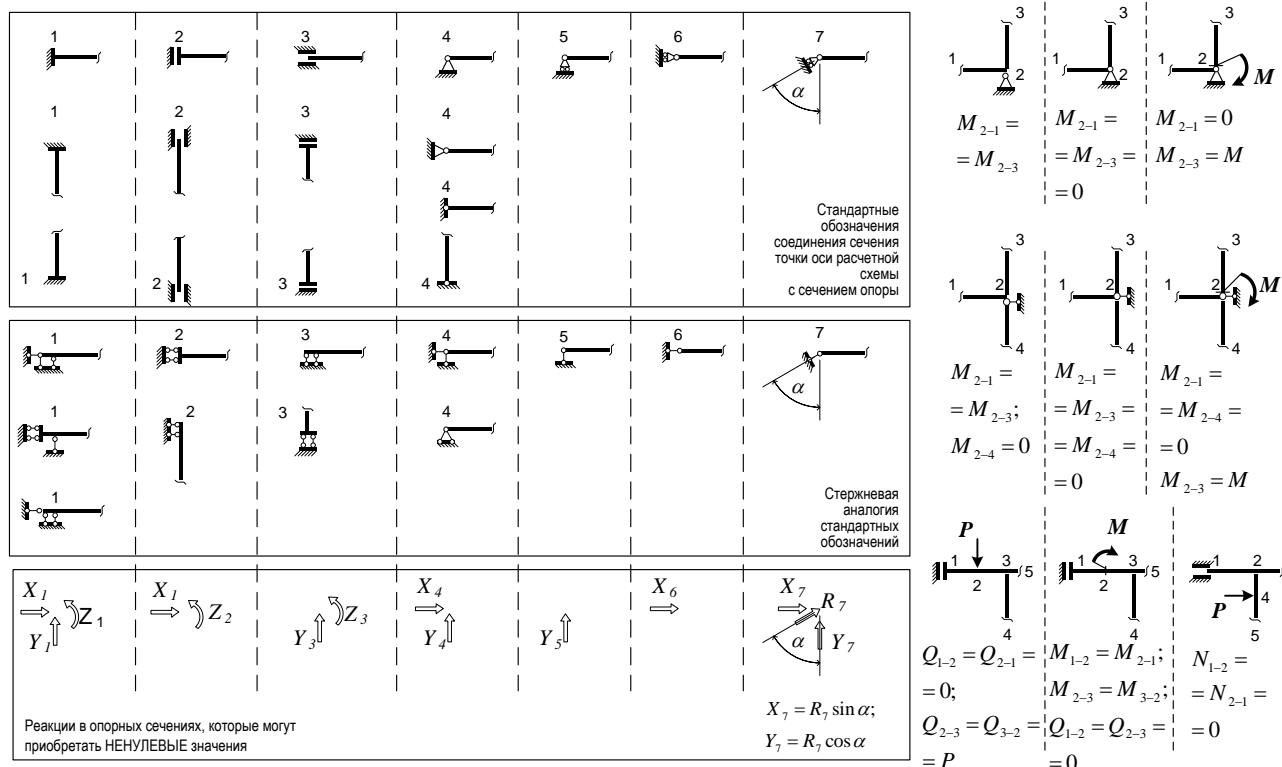


Рис. 6. Некоторые особенности передачи усилий и реакций через сечения узлов

Важно также помнить о характерных решениях, полученных для элементарных расчетных схем, работающих на изгиб, в курсе строительной механики (рис. 7).

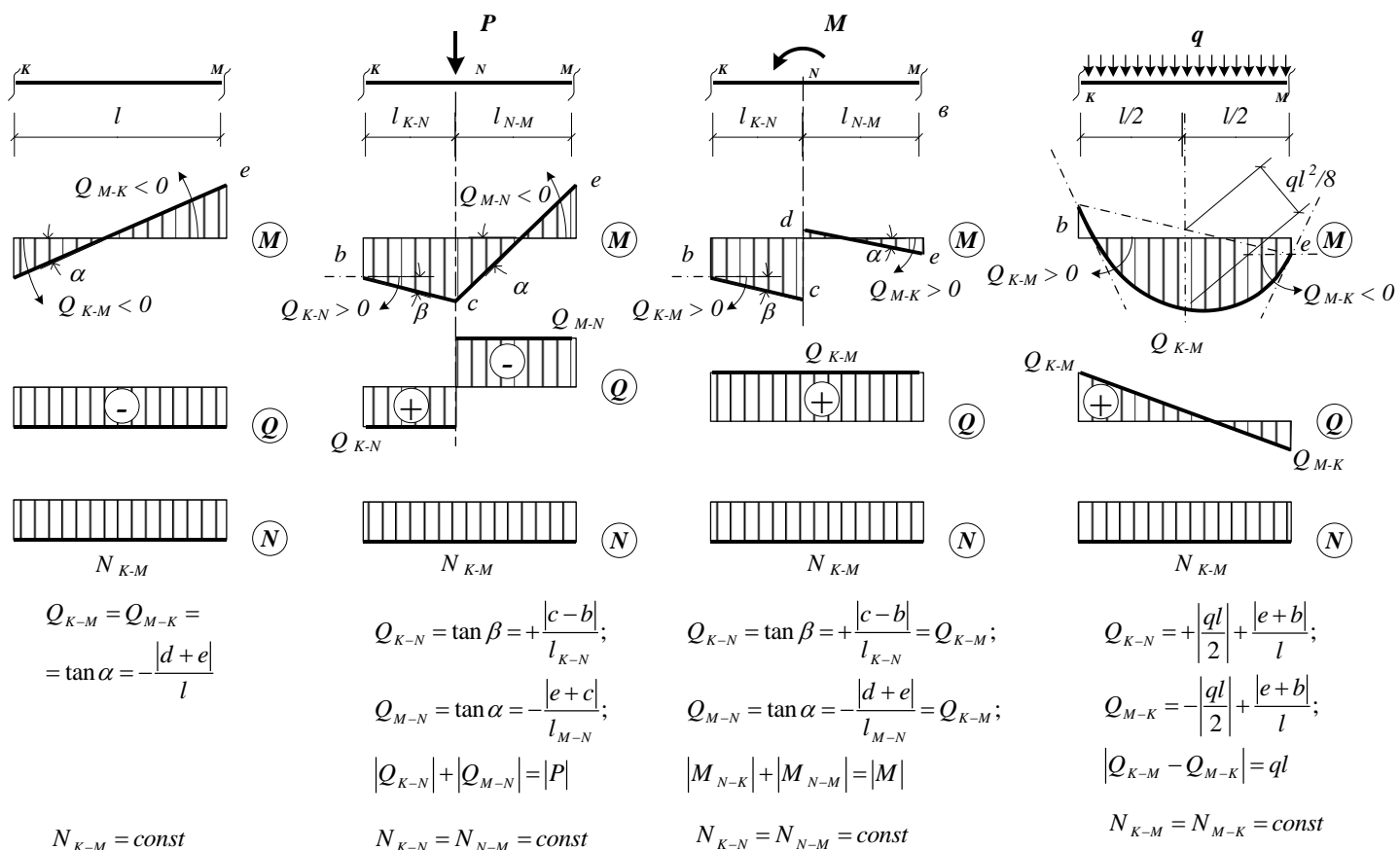


Рис. 7. «Инженерное» правило знаков усилий и характерные особенности эпюр усилий на прямолинейном участке оси

При формировании индивидуального задания следует соблюдать следующие **соглашения об обозначениях и используемых единицах** измерения физических величин.

Для изучения и применения метода конечных элементов абсолютные значения характеристик расчетной схемы значения не имеют, поэтому с целью уменьшения объема вычислительных работ в каждой из задач используются физические величины, численные значения которых заданы в некотором масштабе измерения.

Так, все длины задаются кратными масштабу длины a ($[l_k] = a$, k – номер участка), а все интенсивности распределенной вдоль участка оси расчетной схемы нагрузки кратны масштабу q ($[q_k] = q$), так что масштабом измерения сосредоточенных сил будет величина qa ($[P_k] = qa$), а момента — qa^2 ($[M_k] = qa^2$).

Все значения площадей поперечных сечений кратны масштабу F , а все моменты инерции на изгиб кратны масштабу J .

Значения модуля упругости (модуля Юнга) кратны масштабу E .

В отдельных задачах могут использоваться и другие параметры, однако общим принципом остается приведение задачи к безразмерному виду с тем, чтобы сосредоточить внимание на проблемах собственно метода конечных элементов.

Для уменьшения объема вычислений разрешается геометрические размеры на расчетной схеме задавать в масштабе координатной сетки, а значения каждого вида нагрузки принимать единичными (в соответствующем масштабе). Для всех случаев расчетных схем рамы принимать изгибную жесткость на всех участках одинаковую EJ . Таким образом, задание на типовой расчет должно иметь вид рис. 8.

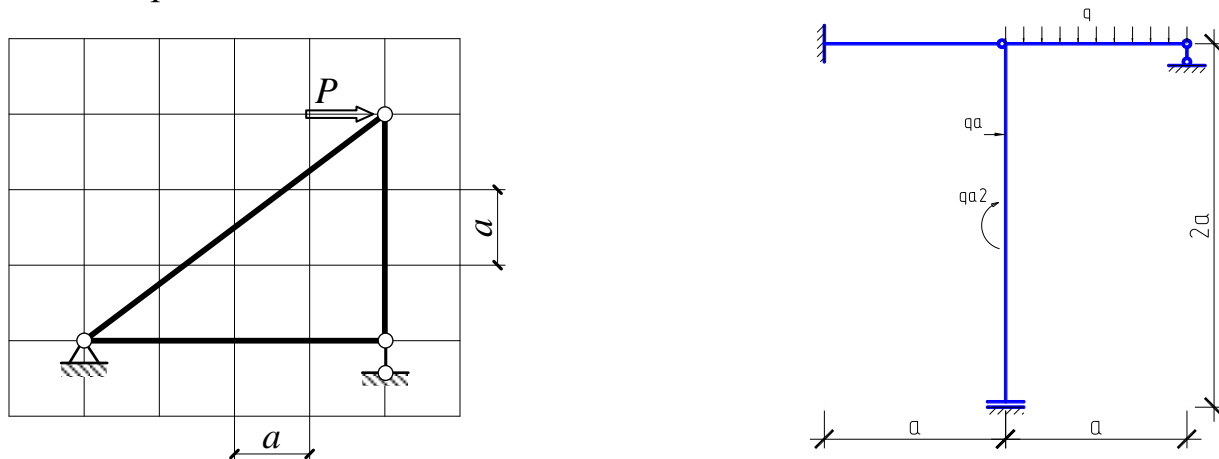


Рис. 8. Примеры сформированного индивидуального задания

Решение типовой задачи на базе сформированного индивидуального задания должно осуществляться в соответствии с методическими указаниями к РГР и оформляться по правилам, описанным выше и продемонстрированным на примерах-образцах.

При оформлении эпюр усилий и других графиков в надписи на рисунке следует указывать масштаб измерения величины, отображаемой графиком. На самом же графике указываются только абсолютные значения ординат с принятой в расчетах точностью (достаточной является точность расчетов, в которой удерживается четыре верные значащие цифры в промежуточных результатах, и три – в окончательных). Число значащих цифр регулируется правилами округления.

Знаки ординат на эпюрах усилий проставляются на основании «инженерного» правила знаков (рис. 7), которое было определено в дисциплине «Строительная механика».

Вместе с тем целесообразно напомнить, что в строительной механике знак изгибающего момента особого значения не имеет, поскольку эпюра этого усилия строится на растянутых волокнах сечения. В связи с этим знак изгибающего момента на эпюре не проставляется.

Указание знаков поперечного и продольного усилий на каждом участке является обязательным требованием.

Для идентификации сечений и узлов расчетной схемы используется их нумерация. Изображение расчетной схемы выполняется в правой декартовой глобальной системе координат со следующим обозначением осей:

X – горизонтальная ось с положительным направлением вправо;

Y – вертикальная ось с положительным направлением вверх;

Z – горизонтальная ось с положительным направлением, перпендикулярным плоскости изображения и направленным к зрителю.

При таких условиях общепринятым является следующее («математическое») **правило** знаков векторных величин:

- положительные векторы направлены вдоль положительных направлений осей координат;

- положительные моменты (углы поворота) направлены против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси, относительно которой действует момент или совершается поворот.

III. Примеры решения задач методом конечных элементов

Занятие № 1. Расчет плоской фермы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС фермы. На этом примере требуется определить усилия в стержнях фермы методом конечных элементов.

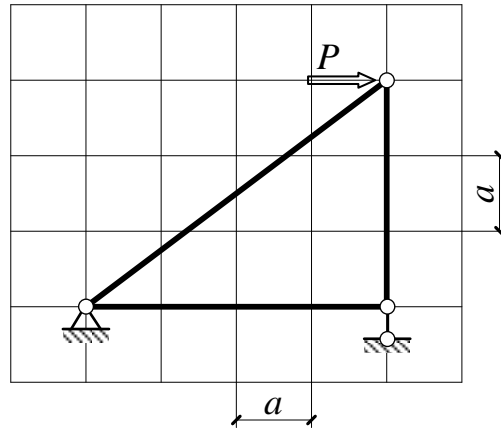


Рис.1. Заданная расчетная схема фермы

1. Разработка схемы дискретизации.

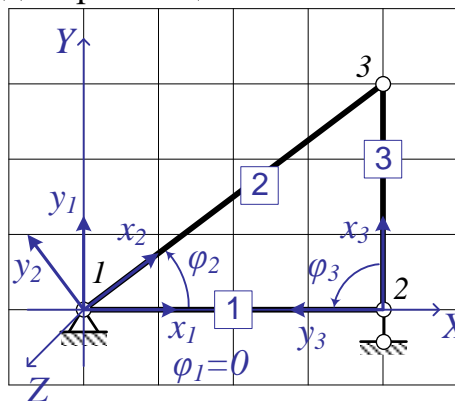


Рис.2. Схема дискретизации

1.1. Обозначение ГСК - глобальной системы координат XYZ . Начало координат находится в самой нижней и самой левой точке фермы. Ось X направлена вправо, Y - вверх, Z - смотрит на нас.

1.2. Нумерация узлов фермы (см. рис.2). Обычно слева направо, снизу вверх. В фермах с большим количеством узлов надо стремиться к тому, чтобы разность между номерами узлов одного конечного элемента была минимальной.

1.3. Нумерация КЭ - конечных элементов соответствует нумерации узлов фермы. Первым нумеруют КЭ, которые берут свое начало в точке 1. Первый элемент 1-2, второй - 1-3. Третий элемент 2-3.

1.4. Обозначение ЛСК для каждого КЭ - локальной системы координат xuz . Начало координат находится в начальном узле КЭ. Ось x направлена вдоль КЭ, y - против часовой стрелки под углом 90° к оси x , z - смотрит на нас.

1.5. Обозначение направляющих углов φ для каждого КЭ. Этот угол определяется от оси X ГСК против часовой стрелки до совмещения с осью x ЛСК каждого КЭ (см. рис.2).

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3
x, a	0	4	4
y, a	0	0	3

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

i - номер начального узла КЭ; j - номер конечного узла КЭ; $i < j$;

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}; \cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

$$l_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 4a;$$

$$\cos \varphi_{12} = \frac{X_2 - X_1}{l_{12}} = \frac{4a - 0}{4a} = 1; \sin \varphi_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{l_{12}} = \frac{0 - 0}{4a} = 0.$$

$$l_{13} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (3a - 0)^2} = 5a;$$

$$\cos \varphi_{13} = \frac{X_3 - X_1}{l_{13}} = \frac{4a - 0}{5a} = 0,8; \sin \varphi_{13} = \frac{Y_3 - Y_1}{l_{13}} = \frac{3a - 0}{5a} = 0,6.$$

$$l_{23} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} = \sqrt{(4a - 4a)^2 + (3a - 0)^2} = 3a;$$

$$\cos \varphi_{23} = \frac{X_3 - X_2}{l_{23}} = \frac{4a - 4a}{3a} = 0; \sin \varphi_{23} = \frac{Y_3 - Y_2}{l_{23}} = \frac{3a - 0}{3a} = 1.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	i	j	l_k, a	$\cos \varphi_k$	$\sin \varphi_k$
1	1	2	4	1	0
2	1	3	5	0,8	0,6
3	2	3	3	0	1

Матрицы преобразования для стержневого конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 \\ 0 & \cos \varphi_k \\ 0 & \sin \varphi_k \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; (p)_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; (p)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

В локальной системе координат матрица жесткости отдельного стержневого КЭ имеет вид:

$$[k_k^n] = \frac{E \cdot F}{l_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где EF - жесткость конечного элемента на растяжение-сжатие (принимается одинаковой для всех элементов), тогда для каждого КЭ, подставляя данные из таблицы 2, получим:

$$[k_1^n] = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_2^n] = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_3^n] = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^r] = (p)_k \cdot [k_k^n] \cdot (p)_k^T.$$

$$[k_1^r] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_2^r] = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix}$$

;

$$[k_3^r] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формирование матрицы жесткости для ансамбля конечных элементов в ГСК.

Обозначим перемещения узлов фермы в ГСК. Для этого в каждом узле фермы обозначим по две степени свободы - горизонтальную и вертикальную.

Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК. Так как на ферму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены оба перемещения - горизонтальное и вертикальное, а в точке 2 - только вертикальное. Таким образом, получаем следующие перемещения фермы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2, второе - горизонтальное в точке 3 и третье - вертикальное в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, а потом вертикальное перемещение.

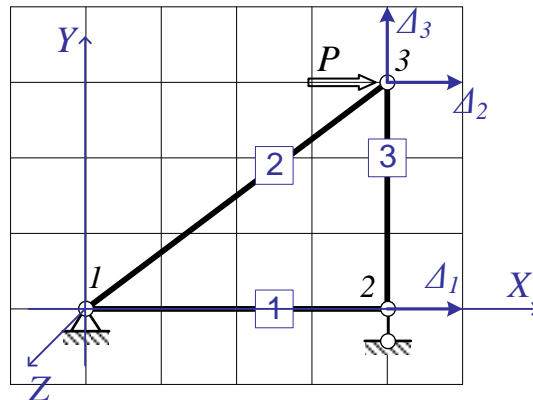
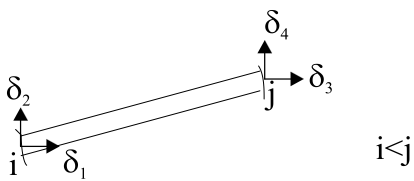


Рис. 3 Векторы перемещений в глобальной системе координат

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ				
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
1	0	0	1	0
2	0	0	2	3
3	1	0	2	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля КЭ имеет размер 3х3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$K_{11} = k_{1,33}^{\Gamma} + k_{3,11}^{\Gamma} = \frac{EF}{4a}(1) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,25 \frac{EF}{a};$$

$$K_{12} = k_{3,13}^{\Gamma} = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{13} = k_{3,14}^{\Gamma} = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{22} = k_{2,33}^{\Gamma} + k_{3,33}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,64) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,128 \frac{EF}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,34}^{\Gamma} + k_{3,34}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,48) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,096 \frac{EF}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,44}^{\Gamma} + k_{3,44}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,36) + \frac{EF}{3a}(1) = 0,4053 \frac{EF}{a};$$

4. Разрешающие уравнения метода конечных элементов.

Для решения задачи методом конечных элементов с использованием стержневых конечных элементов разрешающая система уравнений имеет вид:

$$-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \text{вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Решение СЛАУ

Переносим вектор внешних нагрузок в правую часть уравнения

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

и решаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta_1 = 0; \Delta_2 = 9,5 \frac{Pa}{EF}; \Delta_3 = -2,25 \frac{Pa}{EF}.$$

5. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_3^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}.$$

$$\{\delta_l^{\eta}\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_2^{\mathcal{N}}\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_3^{\mathcal{N}}\} = (p)_3^T \cdot \{\delta_3^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix};$$

Вычисление усилий:

$$\{N_1^{\mathcal{N}}\} = [k_1^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_1^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_2^{\mathcal{N}}\} = [k_2^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_2^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -1,25 \\ 1,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_3^{\mathcal{N}}\} = [k_3^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_3^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \end{Bmatrix}.$$

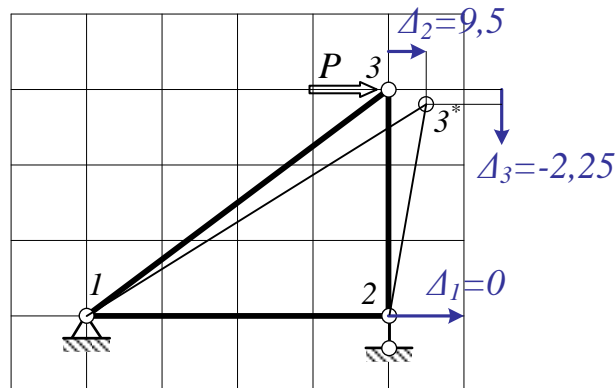


Рис.4. Схема деформирования заданной расчетной схемы

6. Проверка равновесия узлов фермы

Определим опорные реакции фермы от заданной внешней нагрузки (см. рис. 5)

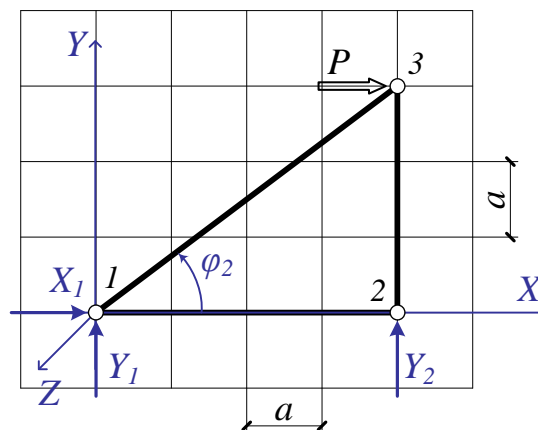


Рис.5. Опорные реакции заданной расчетной схемы

$$\begin{aligned}\sum X &= P + X_1 = 0; X_1 = -P; \\ \sum \text{mom}_1 &= -P \cdot 3a + Y_2 \cdot 4a = 0; Y_2 = 0,75P; \\ \sum \text{mom}_2 &= -P \cdot 3a - Y_1 \cdot 4a = 0; Y_1 = -0,75P.\end{aligned}$$

Проверим равновесие узлов фермы методами строительной механики (см. рис. 6):

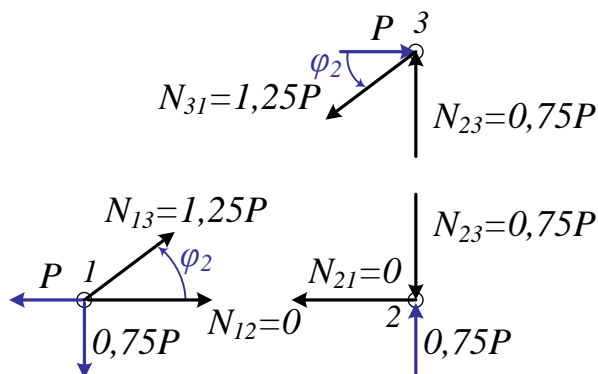


Рис.6. Равновесие узлов фермы

Узел 1.

$$\sum X = -P + N_{12} + N_{13} \cdot \cos \varphi_2 = -P + 0 + 1,25P \cdot 0,8 = 0; -P + P = 0;$$

$$\sum Y = -0,75P + N_{13} \cdot \sin \varphi_2 = -0,75P + 1,25P \cdot 0,6 = 0; -0,75P + 0,75P = 0.$$

Узел 2.

$$\sum X = -N_{21} = 0;$$

$$\sum Y = 0,75P - N_{23} = 0,75P - 0,75P = 0.$$

Узел 3.

$$\sum X = P - N_{31} \cdot \cos \varphi_2 = P - 1,25P \cdot 0,8 = 0; P - P = 0;$$

$$\sum Y = 0,75P - N_{31} \cdot \sin \varphi_2 = 0,75P - 1,25 \cdot 0,6 = 0; 0,75P - 0,75P = 0.$$

Проверка выполняется.

ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены.

Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении заданной расчётной схемы под действием внешней силы, направленной горизонтально.

Занятие № 2. Расчет плоской рамы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС рамы. На этом примере требуется определить внутренние усилия в раме методом конечных элементов.

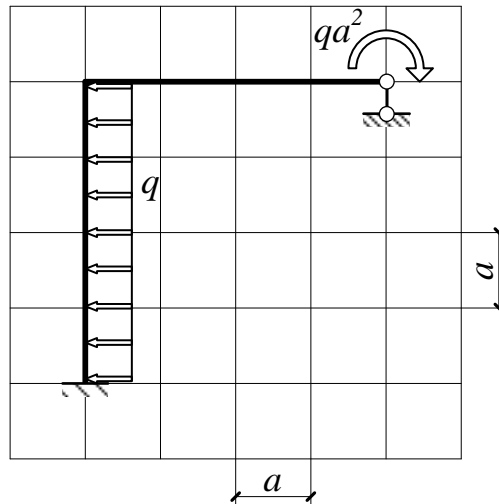


Рис.1. Заданная расчетная схема рамы.

1. Разработка схемы дискретизации.

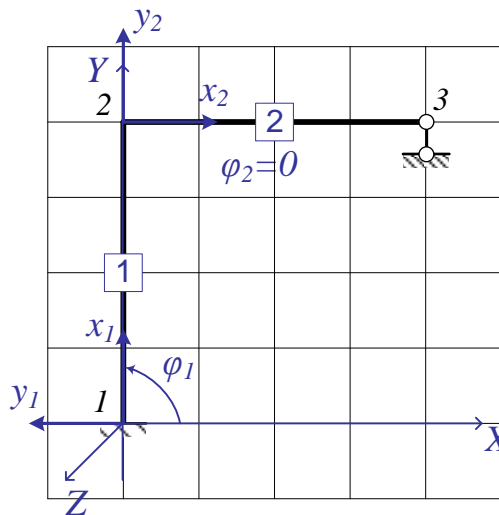


Рис.2. Схема дискретизации.

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3
x, a	0	0	4
y, a	0	4	4

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2};$$

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	i	j	l_k, a	$\sin \varphi_k$	$\cos \varphi_k$
1	1	2	4	1	0
2	2	3	4	0	1

Матрицы преобразования для балочного конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (p)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

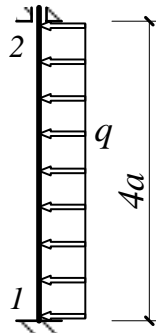
В локальной системе координат матрица жесткости для балочного конечного элемента записывается следующим образом (EJ - жесткость стержней на изгиб, принимается одинаковой для всех участков):

$$[k_k^n] = \frac{E \cdot J}{l_k^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

$$[k_1^n] = [k_2^n] = \frac{EJ}{(4a)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 4a & -12 & 6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 \\ -12 & -6 \cdot 4a & 12 & -6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}$$

4. Вычисление реакций на внутрипролетную нагрузку, приложенную к КЭ.

Из ЗРС видно, что к первому КЭ приложена распределенная нагрузка. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:



$$\alpha = 1/12;$$

$$\gamma = 1/2;$$

$$M_1 = M_2 = \alpha q l^2 = \frac{1}{12} q (4a)^2 = 1,333 q a^2;$$

$$Q_1 = Q_2 = \gamma q l = \frac{1}{2} q \cdot 4a = 2qa.$$

$$\{S_{q,1}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_1^n \\ M_1^n \\ Q_2^n \\ M_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix}; \quad \{S_{q,2}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_2^n \\ M_2^n \\ Q_3^n \\ M_3^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^r] = (p)_k \cdot [k_k^n] \cdot (p)_k^T.$$

$$\begin{aligned}
[k_I^r] &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} -3 & -6a & 3 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6a & -3 & 0 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 16a^2 & 6a & 0 & 8a^2 \\ -3 & 0 & 6a & 3 & 0 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 8a^2 & 6a & 0 & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6a & 0 & -3 & 6a \\ 0 & 6a & 16a^2 & 0 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6a & 0 & 3 & -6a \\ 0 & 6a & 8a^2 & 0 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}.$$

4. Матрицы реакций на внутриволетную нагрузку в глобальной системе координат:

$$\{S_{q,1}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_1^n \\ M_1^n \\ Q_2^n \\ M_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix};$$

$$\{S_{q,1}^r\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,333a \\ 2 \\ 0 \\ 1,333a \end{Bmatrix} qa;$$

$$\{S_{q,2}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_2^n \\ M_2^n \\ Q_3^n \\ M_3^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S_{q,2}^r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Формирование матрицы жесткости для ансамбля КЭ в ГСК.

Обозначим перемещения узлов рамы в ГСК. Для этого в каждом узле рамы обозначим по три степени свободы - горизонтальную, вертикальную и угловую. Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК, поворот - против часовой стрелки. Так как на раму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены три перемещения - горизонтальное, вертикальное и угловое, а в точке 3 - только вертикальное. Кроме этого, перемещениями, возникающими вследствие растяжения-сжатия КЭ пренебрегаем. Таким образом, получаем следующие перемещения рамы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2 и 3 (то есть эти перемещения будут одинаковыми), второе - угловое в точке 2 и третье

- угловое в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, потом вертикальное, а затем угловое перемещение.

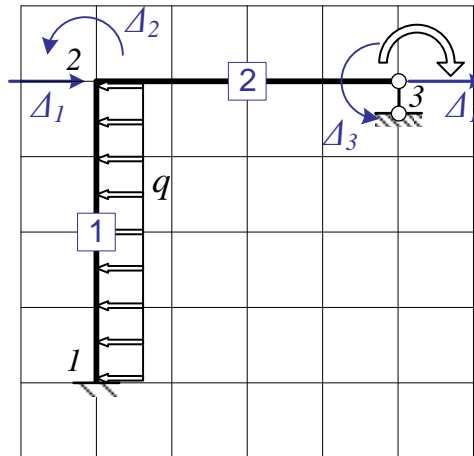
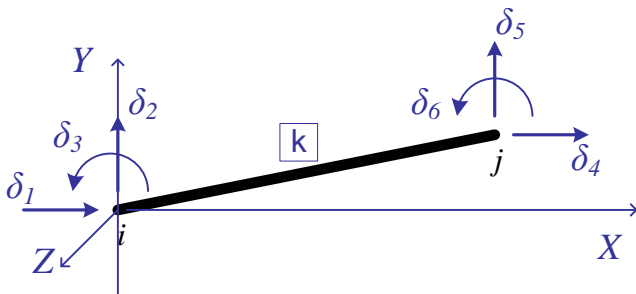


Рис.3. Векторы перемещений в глобальной системе координат.

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ						
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
1	0	0	0	1	0	2
2	1	0	2	1	0	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля конечных элементов имеет размер 3x3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица вычисляется по формулам:

$$K_{11} = k_{1,44}^{\Gamma} + k_{2,11}^{\Gamma} + k_{2,44}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(3) + 0 + 0 = 0,1875 \frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{12} = k_{1,46}^{\Gamma} + k_{2,13}^{\Gamma} + k_{2,43}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(6a) + 0 + 0 = 0,375 \frac{EJ}{a^2};$$

$$K_{13} = k_{2,16}^{\Gamma} + k_{2,46}^{\Gamma} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{22} = k_{1,66}^{\Gamma} + k_{2,33}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) + \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) = 2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,36}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3} (8a^2) = 0,5a^2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,66}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3} (16a^2) = 1 \frac{EJ}{a}.$$

6. Формирование вектора реакций на внутрипролетную нагрузку:

$$S_{q,1} = S_{q,1(4)}^{\Gamma} + S_{q,2(1)}^{\Gamma} + S_{q,2(4)}^{\Gamma} = 2qa + 0 + 0 = 2qa;$$

$$S_{q,2} = S_{q,1(6)}^{\Gamma} + S_{q,2(3)}^{\Gamma} = 1,333qa^2 + 0 = 1,333qa^2;$$

$$S_{q,3} = S_{q,2(6)}^{\Gamma} = 0.$$

$$[S_q] = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa.$$

Разрешающие уравнения метода.

$$-[K] \cdot \{\Delta\} - \{S_q\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} qa^2. \text{ - вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1a \end{Bmatrix} qa = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

7. Решение СЛАУ.

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -1qa^2 \end{Bmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -17,00qa^4 / EJ;$$

$$\Delta_2 = 3,167qa^3 / EJ;$$

$$\Delta_3 = -2,5835qa^3 / EJ.$$

8. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_l^\Gamma\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}; \quad \{\delta_2^\Gamma\} = \begin{Bmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}.$$

$$\{\delta_k^\eta\} = (p)_k^T \cdot \{\delta_k^\Gamma\} = 0;$$

$$\{\delta_l^\eta\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^\Gamma\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{Bmatrix}$$

;

$$\{\delta_2^\eta\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^\Gamma\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix}.$$

9. Вычисление усилий:

$$\{S^\eta\} = [k^\eta] \cdot \{\delta^\eta\} + \{S_q^\eta\};$$

$$\{S_l^\eta\} = [k_l^\eta] \{\delta_l^\eta\} + \{S_{q,l}^\eta\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -6,125a \\ 0 \\ -1,875 \end{Bmatrix} qa;$$

$$\{S_2^{\pi}\} = [k_2^{\pi}] \{\delta_2^{\pi}\} + \{S_{q,2}^{\pi}\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2187 \\ 1,875a \\ -0,2187 \\ -1,000 \end{Bmatrix} qa;$$

Деформированное состояние ЗРС, отвечающее полученному решению, приведено на рис.4.

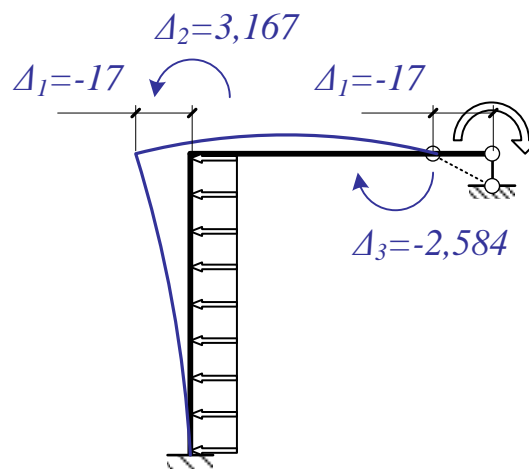


Рис.4. Схема перемещений.

На рис. 6 показан результат построения эпюр.

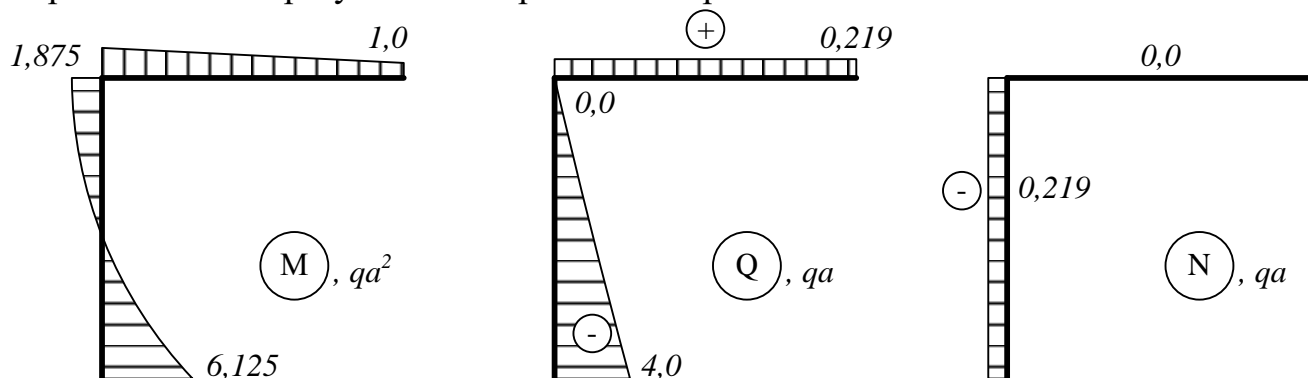
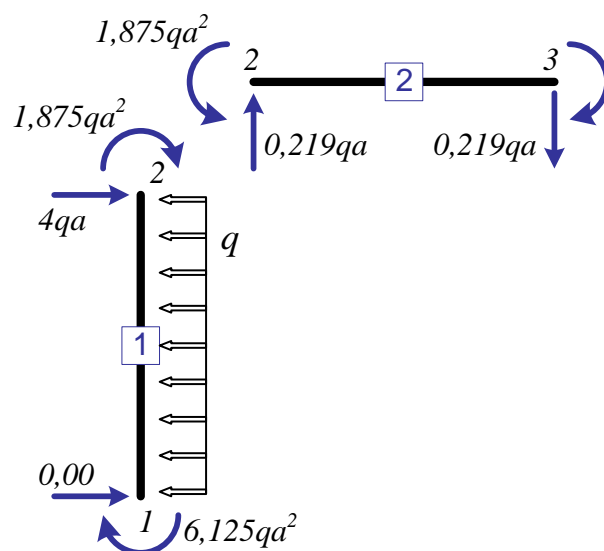


Рис.6.

10. Контроль проведенных построений осуществляется проверкой условий равновесия узлов ЗРС и ее произвольной части.



ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены. Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении ЗРС рамы под действием сил.