МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
_____М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
«Алгебра и геометрия»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Ларин Н.В., доцент каф. ПМиИ, к.ф.-м.н., доцент _____

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Задание на самостоятельную работу

Основное задание на самостоятельную работу студента — изучение основных методов и аппаратов линейной алгебры и аналитической геометрии.

Форма отчетности

По основным темам, на лекциях и практических занятиях предусмотрены типовые расчёты и вопросы в экзаменационных билетах.

Краткая теоретическая справка

Проблемы современного математического моделирования в прикладных областях требуют от студента владение таких понятий, как алгебраические структуры, линейные пространства, линейные операторы, матрицы, евклидовы, унитарные, аффинные пространства , квадратичные формы, скалярное, векторное и смешанные произведения векторов, системы линейных уравнений , жордановы формы матриц и т.д.
Эти знания необходимы для дальнейшего изучения дисциплины "математический анализ," Функциональный анализ" , "Дискретная математика" , "Прикладная алгебра" , "Численный методы".

Рекомендации по выполнению типовых расчётов.

<u>Типовой расчёт № 1</u>

Задания типового расчёта № 1 находятся в (Кузнецов Л.А " Сборник задач по высшей математике . Типовые расчёты : Учебное пособие. 9-е издание, - СПБ.: Лань 2007, 240 страниц), глава IX Аналитическая геометрия.

<u>Указания к заданиям.</u>

<u>Задача 1.</u>

Написать разложение вектора $\bar{x}$ по векторам $\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}$

$\bar{x}$= (-1, 2, 3) $\bar{p}$= (0, 1, 1) $\bar{q}$= (1, 0, 1) $\bar{r}$= (1, 0,-1).

<u>Указание.</u>

Необходимо составить линейную комбинацию векторов $\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}$, через которую выражается вектор $\bar{x}$; построим векторное равенство

$\bar{x} = \alpha\,\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r}$. В координатной форме это выглядит так:

(-1, 2, 3) = α(0, 1, 1) + β(1, 0, 1) + γ(1, 0,-1).

Это неравенство эквивалентно системе уравнений :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -1 \\ \alpha = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 3 \end{cases}$$

решив его, найдём координаты искомого разложения , а, значит, и само разложение.

Задача №2.

Коллинеарны ли векторы c_1и c_2, построенные по векторам aи b?
a=(1, -2, -3), b= (2, 0, 1), c_1= 2a + 4b, c_2= 2b – a

Указание.

1) Найти координаты векторов C_1 и C_2
   C_1= 2(1, -2, -3) + 4(2, 0, 1) = (10, -4, -2)

   C_2= 2(2, 0, 1) – (1, _2, _3) = (3, 2, 5)

2) Найти векторное произведение. Если оно равно нулевому вектору, то C_1и C_2коллинеарны, в противном случае неколлинеарны.

3) Можно составить векторное уравнение $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$; $\alpha(10, -4, -2) + \beta(3, 2, 5) = (0, 0, 0)$ -> получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10\alpha + 3\beta = 0 \\ -4\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

   Если она имеет ненулевое решение, то C_1 и C_2коллинеарны. В противном случае - нет.

4) Можно составить отношения одноимённых координат C_1 и C_2. Если они равны, то коллинеарны, если нет, то не коллинеарны. В нашем случае $10/3 \neq -4/2$. Значит не коллинераны.

Задача №3.

Найти косинус угла между векторами АВи АС.

Указание.

1) Находим АВи АСв координатной форме:

   AB = (-1, -1, -5), AC = (2, 2, -4)

2) Воспользуемся формулой cosα = $\frac{\mathrm{X1X2+Y1Y2+Z1Z2}}{\sqrt{X1X1+Y1Y1+Z1Z2}*\sqrt{X2X2+Y2Y2+Z2Z2}} = \frac{-2-2+20}{\sqrt{27}*\sqrt{24}} = \frac{4*\sqrt{2}}{9}$.

Задача №4.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах аи b.a=p + q,

b=2p–q, |p|=1, |a|=3, угол между ри q = π\6

Указание.

1) Находим векторное произведение векторов аи b.

   a x b = (p + q)(2 x p-q) = p x 2p – p x q + q x 2p –q x q=0 – 3p x q – 0=-3p x q

2) Найдём модуль вектора -3p x q

   |-3p x q| = 3|p|x |q| Sin π\6 = 4,5.
   Площадь параллелограмма равна 4,5.

Задача №5.

Компланарны ли векторы a,b,c. a=(2, 1, 1), b=(0, 1, 0), c=(-1, 1, 1).

Указание.

1) Найдём смешанное произведение векторов a,b,c:

$$(a,b,c) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

2) Делаем вывод: так как (a,b,c)≠0, то векторы не компланарны.

Задача №6.

Вычислить объём тетраэдра с вершинами в точках A_1A_2 A_3 A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань A_1 A_2 A_3.

Указание.

1) Найдём смешанное произведение векторов A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 . Полученный результат разделим на 6. Это и будет искомый объём.

2) Найдём векторное произведение векторов A_1A_2 x A_1 A_3 , затем найдём его модуль и разделим результат на 2. Это и будет площадь основания тетраэдра.

3) Для нахождения высоты воспользуемся формулой $H = \frac{3*V}{S}$.

Задача 7.

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1 M_2 M_3 .

Указание.

Пусть M_0 имеет координаты ($x_0 y_0 z_0$), M_1 ($x_1 y_1 z_1$), M_2 ($x_2 y_2 z_2$), M_3 ($x_3 y_3 z_3$) .

1). Найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x0 - x1 & y0 - y1 & z0 - z1 \\ x2 - x1 & y2 - y1 & z2 - z1 \\ x3 - x1 & y3 - y1 & z3 - z1 \end{vmatrix} = 0$$

Получим уравнение вида: ax+by+cz+d=0

2). Найдем расстояние от точки до плоскости по формуле $x = \frac{|ax_0+by_0+zc_0+d}{\sqrt[2]{a^2+b^2+c^2}}$

<u>Задача 8</u>.

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору $\overline{BC}$.

<u>Указание.</u>

1). Найдем координаты вектора $\overline{BC}$.

2). Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через точку А (x_0 y_0 z_0) перпендикулярно $\overline{BC}$ = (a,b,c) :$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)=0$.

<u>Задача 9.</u>

Найти угол между плоскостями.

<u>Указание.</u>

Косинус угла между плоскостями $ax+by+cz+d=0$ и $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ находится по формуле $\cos\alpha = \frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt[2]{a^2+b^2+c^2}*\sqrt[2]{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$. Если $\cos\alpha>0$, то надо поменять знак на противоположный.

<u>Задача 10.</u>

Найти координаты точки А, равноудаленной от точек В и С :А (х,0,0), В (-2,-4,-6), С (-1,-2,-3) .

Указание.

Пользуясь условием задачи, составим уравнение: $\sqrt{(x+2)^2+4+36} = \sqrt{(x+1)^2+4+9}$.

Решим его: $(x+2)^2+4+36=(x+1)^2+4+9$.

$x^2+4x+4+4+36=x^2+2x+1+4+9$.

$2x=10-40$.

$X= -15$.

Искомая точка имеет вид: А (-15,0,0) .

Задача 11.

Пусть К – с центром в начале координат. Верно ли, что А принадлежит плоскости α ?А (0,3,-1), α: 2x-y-+3z-1=0, k=2.

Указание.

Уравнение образа плоскости α при данной гомотетии с коэффициентом k имеет вид: 2x-y+3z-k*1=0. Подставим координаты точки в полученное уравнение: 2*0-3-3-2=-8. -8 не равно 0, значит А не принадлежит α.

Задача 12.

Написать каноническое уравнение прямой: 2x-3y-2z+6=0; x-3y+z+3=0.

<u>Указание.</u>

1). Найти направляющий вектор прямой пересечения плоскостей как векторное произведение их направляющих векторов. В данном случае:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9i - 4j - 3k$$

Можно изменить знак и тогда получим вектор $\overline{p}$ = (9,4,3).

2). Найти общую точку двух плоскостей. Для этого надо решить систему уравнений:

$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 \\ x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$ Пусть z=0, тогда

$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Общая точка А имеет координаты: (-3,0,0) .

3). Воспользуемся формулой канонических уравнений прямой: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$. В нашем случае получим: (x+3)/9 = y/4 = z/3 .

<u>Задача 13</u>.

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$; 2x+y+7z-3=0.

<u>Указание.</u>

1). Точку пересечения можно разыскивать, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 7z - 3 = 0 \\ \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-3}{1} \\ \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \end{cases}$$

2). Если написать параметрические уравнения данной прямой:

$\begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = t + 3 \\ z = -1 - 2t \end{cases}$, То получим следующую систему: $\begin{cases} 2x + y + 7z - 3 = 0 \\ x = 3t + 7 \\ y = t + 3 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$

Решим её: 2(3t+7)+(t+3)+7(-2t-1)-3=0;

6t+14+t+3-14t+7-3=0;

-7t=-21; t=3.

$$\begin{cases} x = 3 * 3 + 7 \\ y = 3 + 3 \\ z = -2 * 3 - 1 \end{cases}$$

Искомая точка пересечения имеет координаты: (16, 6, -7).

<u>Типовой расчет №2</u>

Задания типового расчета №2 находится в (Кузнецов Л.А " Сборник задач по высшей математике . Типовые расчёты : Учебное пособие. 9-е издание, - СПБ.: Лань 2007, 240 страниц),глава X. линейная алгебра

<u>Указания к заданиям.</u>

<u>Задача 1.</u>

Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых элементов а и в и произведение любого элемента а на любое действительное число α ?

<u>Указание.</u>

При ответе на этот вопрос необходимо проверить выполнение аксиом линейного пространства. Если хотя бы одна из них не выполняется , то множество заданными операциями линейное пространство не образуется.

Пример.

Множество всех векторов трех мерного пространства , где сумма $\overline{a} \oplus \overline{в} = \overline{a}$ x $\overline{в}$ и произведение обычное $\alpha \frac{1}{a}$.

Проведем аксиому коммутативности: $\overline{a} \oplus \overline{в} = \overline{a}$ x $\overline{в}$, $\overline{в} \oplus \overline{a} = -\overline{a}$ x $\overline{в}$ следовательно, . Множество линейным пространством не является.

Пример.

Множество всех положительных функций, где $f\ (t) \oplus g(t) = f\ (t) \cdot g(t)$, $\alpha * f\ (t) = [f\ (t)\ ]^{\alpha}$ проверим, что множество абелева группа.

1. Замкнутость. т.к. произведение множественных функций есть функция положительная , то замкнутость доказана.

2. Ассоциативность . т.к. произведение чисел ассоциативно, то отсюда следует и ассоциативность определенного таким образом сложения.

3. Наличие нейтрального элемента.
   В качестве такого можно взять единичную функцию т.е. в смысле нашего сложения роль нулевого элемента выполняет единичная функция.

4. Наличие обратного элемента.

Для любого f из нашего множества в качестве -f можно взять и f^{-1}. $f^{-1} > 0$ и всегда существует в единственном числе.

5. Коммутативность . Коммутативность сложения в нашем смысле вытекает из коммутативности умножения чисел.

Таким образом мы имеем абелеву группу по сложению.

Проверяем выполнимость аксиом умножения на число.

1. Замкнутость т.к. $f(t) > 0$, то $[f(t)]^{\alpha} > 0$ при любом $\alpha \in R$. Замкнутость доказана.

2. $1 \cdot f = f$. т.к. $1 \cdot f(t) = f^{1}(t) = f(t)$,то это свойство имеет место.

3. $\alpha(\beta \cdot f) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f$. т.к. $\alpha \cdot (\beta \cdot f(t)) = [f^{\beta}(t)]^{\alpha}$,то по свойству степеней $[f^{\beta}(t)]^{\alpha} = f^{\alpha\beta}(t) = \lfloor \alpha\, \beta \rfloor \cdot f$ т.е равенство верно и свойство доказано.

4. $(\alpha+\beta)f = \alpha f \oplus \beta f$. Т.к. $(\alpha+\beta)f = [f(t)]^{\alpha+\beta}$, то по свойству степеней $[f(t)]^{\alpha+\beta} = f^{\alpha}(t) \cdot f^{\beta}(t) = \alpha f \oplus \beta f$. Свойство доказано.

5. $\alpha(f \oplus g) = \alpha f \oplus \alpha g$. Т.к. $\alpha(f \oplus g) = [f(t) \cdot g(t)]^{\alpha}$, то по свойству степеней $[f(t) \cdot g(t)]^{\alpha} = f^{\alpha}(t) \cdot g^{\alpha}(t) = \alpha f \oplus \alpha g$. Свойство доказано. Таким образом данное множество с данными операциями образует линейное пространство.

<u>Задача 2.</u>

Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

<u>Указание.</u>
Исследование линейной зависимости систему векторов можно свести к задаче о нахождении ненулевых решений некоторой однородной системы линейных уравнений.
<u>Пример:</u>$\bar{a}$=(-2, 1, 5), $\bar{b}$=(4, -3, 0), $\bar{c}$=(0, -1, 10).

<u>Указание:</u>

1) Составить линейную комбинацию данных векторов и приравнять ее нулевому вектору $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0$
2) Записать данные равенств в координатном виде и получить систему линейных уравнений. В нашем случае получим: $\alpha(-2,1,5) + \beta(4,-3,0) + \gamma(0,-1,10) = (0,0,0)$

Система имеет вид: $\begin{cases} -2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta - \gamma = 0 \\ 5\alpha + 10\gamma = 0 \end{cases}$. Решим ее и получим $\beta + \gamma = 0$.
Система имеет ненулевое решение при $\beta = 1, \gamma = -1,\ \alpha = 2$.

Если система записана в координатной форме, то можно сразу вычислять определитель матрицы, построенной данной системой векторов. В нашем случае $\Delta = \begin{matrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \end{matrix} = 60 - 20 + 0 - 0 - 0 - 40 = 0$. Тогда делаем вывод о линейной зависимости. В противном случае система линейно независима.
<u>Пример:</u>e(x), sh(x), ch(x) на (-∞,+∞).

<u>Указание:</u>

1) Воспользоваться определителем Вронского:
$$\begin{matrix} e^x & shx & chx \\ (e^x)' & (shx)' & (chx)' \\ (e^x)'' & (shx)'' & (chx)'' \end{matrix} = \begin{matrix} e^x & shx & chx \\ e^x & chx & shx. \\ e^x & shx & chx \end{matrix}$$
Т.к. в определителе две строки одинаковые, то он равен нулю при всех $x\epsilon(-\infty, +\infty)$. Значит система векторов линейно зависима. В противном случае – линейно независима. В нашем случае система линейно зависима.

2) Можно рассмотреть систему функций при конкретных значениях переменной. Т.к. имеем три функции, то надо взять три значения переменной. Пусть есть система функций 1, tg(x), sin(x)на области определения функции tg(x). Пусть x=0, тогда получим тройку чисел 1,0,0. Пусть $x = \frac{\pi}{4}$, тогда имеем тройку 1,1,$\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть $x = \frac{\pi}{6}$, тогда получим тройку 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{2}$. Составим определитель $\Delta = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{2} \end{matrix}$.

   Вычислим его. В нашем случае $\Delta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} \neq 0$. Вывод: система векторов 1, tg(x), sin(x) линейно независима. Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

3) Если имеется система функций, заданных на отрезке, то определив на нем скалярное произведение, можно построить определитель Грама. В случае если он равен нулю – система линейно зависима. В противном случае – линейно независима.

Задача 3.

Найти общее решение для данных систем уравнений и проанализировать его структуру (показать базис пространства решений однородной системы, установить размерность пространства, выделить частное решение неоднородной системы).

Пример $\begin{cases} x1 - x2 + x3 - 2x4 + x5 = 0 \\ x1 + x2 - 2x3 - x4 + 2x5 = 0 \\ x1 - 3x2 + 4x3 - 3x4 = 0 \end{cases}$

Указание

1) Найдем ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1, -1, 1, -2, 1 \\ 1, 1, -2, -1, 2 \\ 1, -3, 4, -3, 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, -1, 1, -2, \ 1 \\ 0, -2, -3, 1, 1 \\ 0, -2, 3, -1, -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, -1, 1, -2, \ 1 \\ 0, -2, -3, 1, 1 \\ 0, 0, -6, -2, -2 \end{pmatrix}$$

r=3;

2) Выделим ненулевой минор матрицы и преобразуем систему:

$$\begin{cases} x1 - x2 + x3 = 2x4 + x5 \\ x1 + x2 - 2x3 = x4 + 2x5 \\ x1 - 3x2 + 4x3 = 3x4 \end{cases}$$

Размерность подпространства решений равна n-r=5-3=2.

Итак размерность установлена и равна двум.

3) Находим базис подпространства решений.

Пусть x_4=1; x_5=0.

Тогда получи систему:

$$\begin{cases} x1 - x2 + x3 = 2 \\ x1 + x2 - 2x3 = 1 \\ x1 - 3x2 + 4x3 = 3 \end{cases}$$

Решим ее и найдем x_1=5/12; x_2=0; x_3=7/12

Первый базисный вектор имеет вид: ($\frac{5}{12}$; 0; $\frac{7}{12}$; 1; 0). Можно его заменить на более удобный для вычислений: (5, 0, 7, 12, 0)

Пусть x_4=0; x_5=1.

Тогда получим систему: $\begin{cases} x1 - x2 + x3 = -1 \\ x1 + x2 - 2x3 = -2 \\ x1 - 3x2 + 4x3 = 0 \end{cases}$ решим ее и найдем x_1= -1; x_2=0; x_3=0.

Второй базисный вектор имеет вид: (-1, 0, 0, 0, 1).

Итак размерность подпространства решений равно двум. Базисные векторы подпространства имеют вид: (5, 0, 7, 12, 0), (-1, 0, 0, 0, 1).

Пример. $\begin{cases} x1 + x2 - 3x3 - 4x4 = 1 \\ 4x1 + 5x2 - 2x3 - x4 = 3 \\ 3x1 + 4x2 + x3 + 3x4 = 2 \end{cases}$

1)Выясним совместность системы.

Найдем ранг расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1,1,-3,-4 & 1 \\ 4,,5,-2,-1 & 3 \\ 3,4,1,3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1,1,-3,-4 & 1 \\ 0,1,10,\ \ 17 & -1 \\ 0,1,10,17 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1,1,-3,-4 & 1 \\ 0,1,10,\ \ 17 & -1 \\ 0,0,0,0 & 0 \end{array}\right)$$

Итак, ранг основной матрицы равен рангу расширенной равен двум. Значит система совместна(т. Кронекера- Каппели)

Таким образом можно заменить исходную систему ей равносильной:

$$\begin{cases} x1 + x2 - 3x3 - 4x4 = 1 \\ 4x1 + 5x2 - 2x3 - x4 = 3 \end{cases}$$

Рассмотрим приведенную систему: $\begin{cases} x1 + x2 - 3x3 - 4x4 = 0 \\ 4x1 + 5x2 - 2x3 - x4 = 0 \end{cases}$

Из вышерассмотренного следует, что ее ранг равен двум. Следовательно подпространство решений двумерно.

Найдем общее решение однородной системы. Для этого надо найти ее базис.

Решая приведенную систему при x_3=1, x_4=0 и x_3=0, x_4=1, получим базис: (13,-10,1,0), (19,-15,0,1)

Общее решение имеет вид: x= α(13,-10,1,0+β(19,-15,0,1)

В координатах: $\begin{cases} x1 = 13\alpha + 19\beta \\ x2 = -10\alpha - 15\beta \\ x3 = \alpha \\ x4 = \beta \end{cases}$

Разложим в общей системе x_3 =0; x_4 =0.

Тогда получим систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$

Решив её, найдем x_1 = 2; x_2 = -1.

Частое решение имеет вид: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$;

Общее решение исходной системы имеет вид :

$$\bar{x} = \alpha(13, -10, 1, 0) + \beta(19, -15, 0, 1) + (2, -1, 0, 0);$$

В координатной форме: $\begin{cases} x_1 = 13\alpha + 19\beta + 2; \\ x_2 = -10\alpha - 15\beta - 1; \\ x_3 = \alpha; \\ x_4 = \beta; \end{cases}$

Задача 4:

Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе ($\overline{e_1'}$, $\overline{e_2'}$, $\overline{e_3'}$), если он задан в базисе ($\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$).

Пример:

$$\bar{x} = (1,10,10) \quad \begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 11\overline{e_3} \\ \overline{e_2'} = \frac{11}{10}\overline{e_1} - \overline{e_2} \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} \end{cases}$$

Указания:

1) Найдем матрицу перехода P от первого базиса ко второму:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ \frac{11}{10} & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

2) Транспонируем её:

$$P^{т} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3) Найдем обратную к ней:

$$(P^{т})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -\frac{1}{10} \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & \frac{121}{10} & \frac{21}{10} \end{pmatrix};$$

4) Находим координаты вектора $\bar{x}$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (P^{т})^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{10} & -\frac{1}{10} \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & \frac{121}{10} & \frac{21}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & +\frac{11}{10} * 10 & -\frac{1}{10} * 10 \\ -10 & -120 & -20 \\ -11 & +\frac{121}{10} * 10 & +\frac{21}{10} * 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -150 \\ 131 \end{pmatrix}$$

Искомые координаты имеют вид:

$y_1 = 11$; $y_2 = -150$; $y_3 = 131$.

Задача 5.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

$A\bar{x} = (x_1^3;\ \ x_1 - x_3 ; x_2 + x_3)$;

$B\bar{x} = (1; x_1 - x_3; x_2 + x_3)$;

$C\bar{x} = (x_1; x_1 – x_3; x_2 + x_3)$;

Указания:

Для того, чтобы преобразование было линейным необходимо и достаточно, чтобы компоненты образа имели вид: Ax1 + Bx2 + Cx3.

Поэтому C – линейное преобразование, A, B – нет.

Задача 6:

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. $A\bar{x} = (x_2 - x_3 , x_1 , x_1 + x_3)$; $B\bar{x} = (x_2, 2x_3, x_1)$.

Найти $(3B + 2A^2)\bar{x}$;

Указание:

Запишем преобразовании A и B в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3B + 2A^2 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 & -2x_3 \\ 2x_2 & +4x_3 \\ 5x_1 & +2x_2 \end{pmatrix};$$

Таким образом:

$(3B + 2A^2)\bar{x} = (3x_2 - 2x_3, 2x_2+4x_3, 5x_1+2x_2)$.

Задача 7.

Найти матрицу линейного оператора в базисе ($\overline{e}_1$’,$\overline{e}_2$’,$\overline{e}_3$’), где $\overline{e}_1$’=$\overline{e}_1$’ - $\overline{e}_2$’+ $\overline{e}_3$’; $\overline{e}_2$’= - $\overline{e}_1$’+ $\overline{e}_2$’-2 $\overline{e}_3$’ ; $\overline{e}_3$’= - $\overline{e}_1$’+2 $\overline{e}_2$’+ $\overline{e}_3$’, если она задана в базисе

$$(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)\ A=\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

Указание.

Если e’ = Pe, где P – матрица перехода от базиса e к базису e_1, то матрица оператора A в базисе e в базисе e’ будет иметь матрицу $B=(P^T)^{-1}A(P^T)$.

В нашем случае $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$P^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; Найдём $(P^T)^{-1}$.

$$\mathfrak{X}=\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}=1-2-2+1+4-1=1;$$

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5$; $A_{12}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$; $A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1$;

$A_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$; $A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1$;

$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3$; $A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1$; $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$;

Матрица из дополнений имеет вид: $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Транспонируем её и все элементы разделим на $\mathfrak{X}$. Получим обратную матрицу $(P^T)^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 8 & 5 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -2 & 15 \\ -3 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} -9 & -2 & 15 \\ -3 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 8.

Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), образ и ядро оператора проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z=0.(\alpha)$

Указание.

Пусть (x_0, y_0, z_0) координаты произвольной точки плоскости. Проведём через неё прямую, перпендикулярную данной плоскости. Это означает, что направляющий вектор плоскости можно взять за направляющий вектор прямой: в нашем случае: $(a,b,c)=(1,0, -\sqrt{3})$; Запишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x0 + t \\ y = y0 \\ z = z0 - \sqrt{3}t \end{cases}$$

Найдём точку пересечения прямой с плоскостью α.

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}z = 0 \\ x = \alpha 0 + t;\ y=y0 \\ z = z0 - \sqrt{3}t \end{cases}$$

Делаем подстановку и получим:

$(x_0+t)-\sqrt{3}(z_0-\sqrt{3}t)=0;$

$x_0+t-\sqrt{3}z_0+3t=0;$

$4t=\sqrt{3}z_0 - x_0;$

$t= \frac{\sqrt{3}}{4}z_0 - \frac{1}{4}x_0$

Таким образом: $x= x_0+\frac{\sqrt{3}}{4}z_0 - \frac{1}{4}x_0$; $y=y_0$

$z=z_0- \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{4}z_0 - \frac{1}{4}x_0)=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0- \frac{3}{4}z_0+z_0=\frac{\sqrt{3}}{4}x_0 + \frac{1}{4}z_0$

$A(x_0, y_0, z_0) = (\frac{3}{4}x_0+\frac{\sqrt{3}}{4}z_0;\ y_0;\ \frac{\sqrt{3}}{4}x_0 + \frac{1}{4}z_0)$

Это линейный оператор, т.к. его компоненты являются линейными формами от переменных x_0, y_0, z_0. Найдём ядро. Для этого решим операторное уравнение $A\bar{x} = \bar{0}$.

В координатной форме получим систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x0 + \frac{\sqrt{3}}{4}z0 = 0 \\ y0 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x0 + \frac{1}{4}z0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{3}x0 + z0 = 0 \\ y0 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ равен двум. Значит, пространство решений, т.е. ядро, одномерно. Найдём его. Пусть z_0=-1, тогда $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, y_0=0. Базис ядра имеет вид: $(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; -1)$. Значит, ядро – это множество радиус-векторов вида: $(\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda; 0; -\lambda)$, $\lambda \epsilon R$.

Для нахождения образа надо построить его базис. Для этого дополним базис ядра до базиса всего пространства: (1 0 0); (0 1 0). Матрица искомого оператора в базисе $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ имеет вид:

$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ Тогда образы дополнительных векторов будут базисом образа оператора.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, базис образа имеет вид:

$(\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4})$, (0,1,0), а образ-это подпространство, порожденное этими векторами.

<u>Задача 9</u>

Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Указание</u>.

Составим определитель, порождающий характеристический многочлен:

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ = (4-λ)(2-λ)^2+3-3-3(2-λ)-(4-λ)+3(2-λ)=(4-λ)(2-λ)^2-(4-λ)

=(4-λ)(λ^2-4λ+4-1)=(4-λ)(λ^2-4λ+3)=(4-λ)(λ-1)(λ-3).

Характеристический многочлен имеет вид: (4-λ)(λ^2-4λ+3)=(4-λ)(λ-1)(λ-3). Его корни и будут собственными значениями оператора λ_1=1, λ_2=3, λ_3=4. Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Эта матрица получается из условия A$\bar{x}$=λ$\bar{k}$ λ, при которых решение уравнения (A-λE)$\bar{x}$=$\bar{0}$ нетривиально, порождают ядра оператора A-λE. Это и есть собственные векторы оператора.

Пусть λ=1, тогда (A-λE)$\bar{x}$=$\bar{0}$ в виде системы линейный уравнений выглядит так:

$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ r=2, значит ядро одномерно, т. е. подпространство для собственных векторов для λ=1 одномерно. Найдем его базис, являющийся собственным вектором.

Пусть x_3=3, x_2=0. Для λ=1собственный вектор имеет вид: (-1; 0; 1).
Аналогично находятся собственные векторы для собственных значений λ=3, λ=4.

Задача 10.

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$.

Указания.

1) Фиксируем переменную x_1 и группируем слагаемые, содержащие x_1 дополняя получившуюся сумму до полного квадрата, далее это же самое необходимо выполнить для переменной x_2, дополнение до полного квадрата позволит получить последнее слагаемое в виде ax_3^2.

2) Вводим новые переменные для линейных выражений, стоящих в скобках, получаем канонический вид квадратичной формы.

Пример

$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+ 2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$

$= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+ (x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2 - x_2-2 x_2x_3 - x_3^2+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2 +x_2^2+2 x_2x_3+2x_3^2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2 +x_2^2+2 x_2x_3+x_3^2+x_3^2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2 +(x_2+x_3)^2+x_3^2= y_1^2+y_2^2+y_3^2$, где $y_1= x_1+x_2+x_3$, $y_2= x_2+x_3$, $y_3= x_3$.

<u>Задача 11.</u>

Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

<u>Указание:</u>

1) Находят собственные числа матрицы квадратичной формы и соответствующие им собственные векторы.
2) По собственным векторам строят ортонормированный базис. Базис порождает матрицу замены переменных, выполнив которую, получим канонический вид квадратичной формы с коэффициентами, равными собственным числам матрицы.

<u>Пример:</u>

$-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Матрица квадратичной формы имеет вид: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Находим собственные числа:

$-3-\lambda$, 1, 4
1, $9-\lambda$, 2 = $(-3-\lambda)(9-\lambda)(3-\lambda)+8+8-16(9-\lambda)+4(3+\lambda)-(3-\lambda) = (\lambda-9)(9-\lambda^2)+16-144+\underline{16\lambda}+$
4, 2, $3-\lambda$

$+12+\underline{4\lambda}-3+\underline{\lambda} = 9\lambda-\lambda^3-81+9\lambda^2-119+21\lambda = -\lambda^3+9\lambda^2+30\lambda-200$;

$\lambda^3-9\lambda^2-30\lambda+200 = 0$;

<u>$\lambda=10$</u>

<u>$\lambda=4$</u>

<u>$\lambda=-5$;</u>

находим собственный вектор для <u>$\lambda=10$</u>

$$\begin{pmatrix} -13 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получим систему уравнений: $\begin{cases} -13x1 + x2 + 4x3 = 0 \\ x1 - x2 + 2x3 = 0 \\ 4x1 + 2x2 - 7x3 = 0 \end{cases}$

Найдём ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} -13 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -13 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r = 2;

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x1 - x2 + 2x3 = 0 \\ 4x1 + 2x2 - 7x3 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_3=1, тогда

$$\begin{cases} x1 - x2 = -2 \\ 4x1 + 2x2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x1 = 1/2 \\ x2 = 5/2 \end{cases}$$

Собственный вектор имеет координаты: (1$\underline{\sqrt{2};}$ 5$\underline{\sqrt{2};}$ 1). Если упростить, то

<u>(1 5 2).</u> Нормируем его <u>(1/$\sqrt{30}$; 5/$\sqrt{30}$; 2/$\sqrt{30}$;)</u>.

Рассмотрим λ=4; получим систему:

$$\begin{cases} -7x1 + x2 + 4x3 = 0 \\ x1 + 5x2 + 2x3 = 0 \\ 4x1 + 2x2 - x3 = 0 \end{cases} -$$

Найдём ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 36 & 18 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 36 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r=2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x1 + 5x2 + 2x3 = 0 \\ 4x1 + 2x2 - x3 = 0 \end{cases}$$

(третье уравнение есть линейная комбинация этих уравнений)

Пусть x_3=1. Тогда

$$\begin{cases} x1 + 5x2 = -2 \\ 4x1 + 2x2 = 1 \end{cases}$$

x_1=1/2;

x_2=-1/2;

x_3=1

собственный вектор имеет вид: (1$\underline{\sqrt{2}}$; -1$\underline{\sqrt{2}}$; 1). После упрощения и нормирования получим: $\underline{(1/\sqrt{6};\ -1/\sqrt{6};\ 2/\sqrt{6})}$

Рассмотрим λ=-5.

Получим систему : $\begin{cases} 2x1 + x2 + 4x3 = 0 \\ x1 + 14x2 + 2x3 = 0 \\ 4x1 + 2x2 + 8x3 = 0 \end{cases}$

Найдём ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 14 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

т.к. $\begin{matrix} 1 & 14 \\ 2 & 1 \end{matrix} \neq 0$, то r=2;

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x1 + 14x2 + 2x3 = 0 \\ 2x1 + x2 + 4x3 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_3=1, тогда будем рассматривать систему:

$x_1+14x_2 = -2$
$2x_1+x_2 = -4$

$x_1=-2$;

$x_2=0$.

Получим собственный вектор (-2, 0, 1).

Нормируем его <u>(-2/$\sqrt{5}$; 0; 1/$\sqrt{5}$).</u>

Получим матрицу перехода от стандартного базиса к базису из собственных нормированных векторов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Выполним замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Получим $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{2}{\sqrt{y}} y_3 \\ x_2 = \frac{5}{\sqrt{30}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_3 \end{cases}$

Сделав подстановку в исходную форму, получим канонический вид:

$10y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$

Задача 12.

Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

Указание.

При исследовании кривой $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ надо сделать следующее:

1) Найти характеристические числа квадратичной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

а) если они не нулевые и имеют одинаковые знаки, значит это эллиптическая кривая (эллипс, точка, мнимый эллипс);

б) если они не нулевые и имеют разные знаки, значит это гиперболическая кривая (гипербола, пересекающиеся прямые);

в) если одно из них равно нулю, а другое нет, то получим нецентральную кривую (парабола, параллельные прямые, совпавшие прямые, мнимые прямые).

В случае, если кривая центральная (собственные числа ненулевые или

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$), находим координаты центра линии.

Для этого решаем систему уравнений: $\begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$.

Пусть x_0, y_0 ее решения. Тогда, выполнив преобразование параллельного переноса $\begin{cases} x = x_0 + x_1 \\ y = y_0 + y_1 \end{cases}$, преобразуем уравнение кривой второго порядка к виду: $ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2+f_1=0$. Найдя собственные числа, векторы, нормируя их, получим матрицу преобразования переменных $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. После чего получим уравнение кривой в каноническом виде: $\lambda_1x_2^2+ \lambda_2y_2^2+f_1=0$; построение осуществляется в соответствии с преобразованием координат.

В случае нецентральной кривой выполняется преобразование

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. оно приводит уравнение к виду: $\lambda_1 x_1^2 + px_1 + qy_1 + f = 0$; или $\lambda_2 y_1^2 + px_1 + qy_1 + f = 0$. Далее кривая приводится к виду $y_2^2 = 2mx_2$ с помощью параллельного переноса, который будет получен заменой переменных в одном из уравнений. Например так:

$(\lambda > 0)$ $x_1 + \frac{p}{\lambda_1} x_1 + \frac{p^2}{4\lambda_1^2} + qy_1 + f_1 - \frac{p^2}{4\lambda_1^2} = 0$;

$(x_1 + \frac{p}{2\lambda_1})^2 = -q(y_1 + f_2)$;

$$\begin{cases} x_1 = y_2 - \frac{p}{2\lambda_1} \\ y_1 = x_2 - f_2 \end{cases}$$

Библиография:

1) Кузнецов Л.А " Сборник задач по высшей математике . Типовые расчёты : Учебное пособие. 9-е издание, - СПБ.: Лань 2007, 240 стр.

2) Кострыкин А.И. Введение в алгебру часть I. Основы алгебры. Учебник для вузов. М: Физико-математическая литература, 2006, 368с.

3) Ван дер Варден Линейная алгебра. СПб: Лань, 2004, 624 с.

4) Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. СПб: Лань, 2008, стр. 416.

5) Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб: Лань, 2007, стр. 482.