МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021г., протокол №5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол № 10 , вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой

В.В.Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
"Дифференциальные уравнения"

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью
Прикладная математика и информатика
Форма обучения очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Буркин И.М., профессор, доктор физ.-мат.наук, доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Оглавление

1. Уравнения первого порядка………………………………………………… 4
1.1. Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения приводящиеся к ним…………………………………………………………………… 4
1.2. Геометрические и физические задачи…………………………………… 5
Задание 1.. 7
1.3. Однородные уравнения и уравнения приводящиеся к ним............... 10
Задание 2.. 11
1.4. Линейные уравнения и уравнения Бернулли 13
Задание 3 15
1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.. 16
Задание 4.. 18
1.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения………………………………………………………………… 20
Задание 5.. 22
1.7. Существование и единственность решения задачи Коши. Метод последовательных приближений.. 23
Задание 6.. 25
2. Дифференциальные уравнения n-го порядка.. 26
2.1. Методы интегрирования некоторых классов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.. 27
Задание 7.. 31
2.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.................... 32
Задание 8.. 35
Задание 9.. 36
Задание 10.. 37
Задание 11.. 38
3. Линейные системы с постоянными коэффициентами.............................. 40
3.1. Матричная кспонента.. 43
3.2. Формула Коши... 46
Задание 12.. 47
Задание 13.. 48
Задание 14.. 50
Библиографический список.. 51

1. Уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1.1)$$

(уравнение, неразрешенное относительно производной), или уравнение вида

$$y' = f(x, y) \qquad (1.2)$$

(уравнение, разрешенное относительно производной), связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производную, называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Задача отыскания решения уравнения (1.1) или (1.2), удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \qquad (1.3)$$

называется *задачей Коши.* Условие (1.3) – *начальное условие*.

Общим решением уравнения (1.1) или (1.2) называется функция $y = \varphi(x, C)$ такая, что

1) при любом значении постоянной C эта функция является решение уравнения;

2) по начальным условиям (3) можно указать значение постоянной $C = C_0$ так, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Решение, получающееся из общего, при конкретном значении произвольной постоянной – *частное решение.*

1.1.Уравнения с разделяющимися переменными и уравнения, приводящиеся к ним

Пусть правая часть уравнения (1.2) может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, или пусть уравнение (1.1) имеет вид $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0$. Тогда переменные в этих уравнения могут быть разделены, и мы получим следующие уравнения с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = -\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

Общие интегралы этих уравнений имеют вид:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,$$

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = -\int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy + C.$$

Замечание. При делении обеих частей уравнения на $f_2(y), \varphi_2(x), \psi_1(y)$ могли быть потеряны решения, являющиеся нулями этих функций.

Пример 1. Решить уравнение

$$3e^x tgy dx + \frac{(2-e^x)}{\cos^2 y}dy = 0.$$

Решение. После разделения переменных получим

$$\frac{3e^x dx}{2-e^x} = -\frac{dy}{tgy\cos^2 y}. \qquad (1.4)$$

Интегрируя обе части полученного равенства, будем иметь

$$-3\ln|2-e^x| = -\ln|tgy| + \ln C_1.$$

Здесь $C_1 > 0$ – произвольное число. Таким образом, $\ln C_1$ – произвольная постоянная. Потенцируя, можем записать

$$\frac{tgy}{(2-e^x)^3} = C \Rightarrow tgy - C(2-e^x)^3 = 0, C = \pm C_1.$$

Найден общий интеграл уравнения.

При разделении переменных могли быть потеряны решения, обращающие в ноль знаменатели дробей в (1.4): $y = \pi k \ (k \in Z), x = \ln 2.$ Непосредственная подстановка в исходное уравнение показывает, что эти функции являются его решениями. Причем решения вида $y = \pi k \ (k \in Z)$ могут быть получены из общего решения при $C = 0$, а решение $x = \ln 2$ должно быть добавлено к общему.

Уравнения вида $y' = f(ax + by + d) \ (b \neq 0)$ сводятся к уравнению с разделяющимися переменными заменой $u = ax + by + d$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y' = (4x + y + 1)^2$.

Решение. Выполним замену $u = 4x + y + 1 \Rightarrow u' = 4 + y'$. Уравнение примет вид $u' - 4 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{u^2+4} = dx \Rightarrow arctgu = x + C.$ Итак, общий интеграл уравнения имеет вид $x + C = arctg(4x + y + 1).$

1.2. Геометрические и физические задачи

При решении геометрических задач, в которых требуется найти уравнение кривой по заданным свойствам ее касательной, нормали или ограниченной ею криволинейной трапеции, используется геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным верхним пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой).

Пример 3. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0,-2), для которой угловой коэффициент касательной в любой точке на три единицы больше ординаты точки касания.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – искомая кривая. Исходя из геометрического смысла производной, можем записать

$$\frac{dy}{dx} = y + 3.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение уравнения $y = Ce^x - 3$. Поскольку кривая должна проходить через точку (0,-2), то для C получаем уравнение $-2 = C - 3 \Rightarrow C = 1$. Итак, $y = e^x - 3$ – искомая кривая.

Пример 4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1,1), если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, в два раза больше произведения координат точки $M(x, y)$ кривой ($x > 0, y > 0$).

Решение. Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t)dt = 2xy(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y = 2(y + xy')$, которое приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, получаем уравнение искомой кривой: $y = 1/\sqrt{x}$.

Общего метода составления дифференциальных уравнений для описания различных физических процессов не существует. Можно лишь дать некоторые указания. Пусть $y = y(x)$ – искомая зависимость между характеристиками x и y изучаемого процесса. При составлении дифференциального уравнения, решением которого является функция $y(x)$, необходимо выразить приращение Δy этой функции через приращение Δx независимой переменной, то есть выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый процесс. Во многих случаях искомая зависимость определяется исходя из закона или экспериментального факта, установленного для той или иной области естествознания.

Пример 5. Тело, имеющее в начальный момент температуру $T(0) = T_0$, поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равна T_1. Как будет меняться с течением времени температура тела, если скорость ее изменения пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Решение. Пусть $T(t)$ – температура тела в момент времени t. По условию задачи

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k\left(T(t) - T_1\right),$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{T - T_1} = -kdt \Rightarrow \ln|T - T_1| = -kt + \ln C \Rightarrow \ln\frac{T - T_1}{C} = -kt \Rightarrow T = T_1 + Ce^{-kt}.$$

Учитывая начальное условие $T(0) = T_0$, находим искомую зависимость

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Пример 6. Сосуд, площадь $S = S(h)$ поперечного сечения которого есть известная функция высоты h, наполнен жидкостью до высоты Н. В дне сосуда имеется отверстие площадью σ, через которое жидкость вытекает. Определить время t, за которое уровень жидкости понизится от начального положения до произвольного $h\,(0 \le h \le H)$ и время полного опорожнения сосуда, если известно, что скорость истечения жидкости через отверстие, находящееся не расстоянии l ниже уровня жидкости равна $a\sqrt{2gl}$.

Решение. Пусть высота жидкости в сосуде в некоторый момент времени t равна h. Количество жидкости ΔV, вытекающее из сосуда за промежуток времени Δt численно равно объему цилиндра с площадью основания σ и высотой $V(h)$: $\Delta V = \sigma V(h)\Delta t.$ Этот же объем может быть вычислен другим способом. За указанный промежуток времени уровень жидкости понизится на величину $-\Delta h$. Поэтому $\Delta V = -S(h)\Delta h.$ Итак, $\sigma V(h)\Delta t = -S(h)\Delta h.$ Разделив обе часть последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\sigma V(h) = -S(h)\frac{dh}{dt}.$$

По условию задачи $V(h) = a\sqrt{2gh}$. Разделяя переменные, получим

$$dt = -\frac{S(h)}{\sigma\, a\sqrt{2gh}}dh \Rightarrow t = \frac{-1}{a\sigma\sqrt{2g}}\int_H^h \frac{S(x)dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{S(x)dx}{\sqrt{x}}.$$

Полагая $h = 0$, находим время полного опорожнения сосуда

$$T = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(x)dx}{\sqrt{x}}.$$

Задание 1[1]

В задачах 1-3 принять, что скорость нагревания (остывания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

1. Тело охладилось за 10 минут от 100^0 до 60^0. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20^0. Когда тело остынет до 25^0?

2. В сосуд, содержащий 1 *кг* воды при температуре 20^0, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 *кг,* удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75^0. Через минуту вода нагрелась на 2^0. Когда температура воды и предмета будет

[1] Все задачи в данном задании сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

отличаться одна от другой на 1^0? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

3. Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

4. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/сек, через 4 сек. скорость ее 1 м/сек. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/сек? Какой путь может пройти лодка до остановки?

В задачах 5-6 использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени пропорционально количеству вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

5. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько дней останется 1% от первоначального количества вещества?

6. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

7. Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/сек пробивает стену толщиной 20 см и вылетает, имея скорость 100 м/сек. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

8. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/сек. Изменением плотности воздуха с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. (g=10 м/сек)

9. Футбольный мяч весом 0,4кГ брошен вверх со скоростью 20 м/сек. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0.48 Г при скорости 1 м/сек. Вычислить время подъема мяча на наибольшую высоту. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха? ($g=10$ м/сек).

В задачах 10-13 принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, *где* $g=10$ *м/сек.,* h *– высота уровня воды над отверстием.*

10. За какое время вытечет вода из цилиндрического бака диаметром 1,8 метра и высотой 2,45 метра через отверстие в дне диаметром 6 см.

11. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

12. Воронка имеет форму конуса радиуса 6 см и высоты 10 см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса.

13. В прямоугольный бак размером 60см на 75см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 см^2. За какое время наполнится бак?

14. Найти кривую, у которой отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке.

15. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3,1), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью OX делится пополам в точке пересечения с осью OY.

16. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2,0), если отрезок касательной к кривой между точкой касания и осью OY имеет постоянную длину 2.

17. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

18. Найти кривую, для которой площадь S области, заключенная между этой кривой, осью OX и прямыми $X=0$ и $X=x$ есть заданная функция $S=a^2\ln\left(\dfrac{y}{a}\right)$.

19. Доказать, что кривая, все нормали к которой проходят через фиксированную точку, есть окружность.

20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0;2)$, если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

21. Найти кривую, проходящую через точку $(1;0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемая ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

22. Диск, начавший вращаться с угловой скоростью 5 оборотов в секунду, через 3 минуты вращается со скоростью 2 об/сек. Через сколько времени после начала вращения он будет вращаться со скоростью 1 об/сек если сила трения пропорциональна угловой скорости вращения.

23. Материальная точка движется прямолинейно, причем так, что ее кинетическая энергия в момент t прямо пропорциональна средней скорости движения в интервале времени от нуля до t. Известно, что при $t=0$ путь $s=0$. Показать, что движение равномерно.

24. Моторная лодка движется по озеру со скоростью 20 км/час. Через 40 с. после выключения двигателя ее скорость уменьшается до 8 км/час. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Какова скорость лодки через две минуты после выключения двигателя?

25. В резервуар, в котором находится 100 л. 10% -го раствора соли, каждую минуту вливается 30 л. воды и выливается 20 л. смеси. Какое количество соли останется в резервуаре через 10 минут (смесь непрерывно перемешивается)?

26. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная 4.

27. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, построенного как в задаче 26, есть величина постоянная, равная 2.

28. Количество света, поглощаемого слоем воды малой толщины пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на нее света. Какую часть света поглотит слой толщиной 2 м.

29. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

30. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

31. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки, равен 4.

1.3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Функция $P(x, y)$ называется *однородной степени* k, если $P(kx, ky) = kP(x, y)$.

Однородным называется уравнение, которое может быть приведено в виду $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, а также уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, в котором $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одинаковой степени однородности. Чтобы решить однородное уравнение, нужно сделать замену $y = xz(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. После такой замены получим уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к однородному с помощью замены $x = u + \alpha, y = v + \beta$, где α и β являются решением системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Если определитель этой системы равен нулю, то уравнение сразу приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_1x + b_1y$.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Выполним замену $y = xz(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx} = z + \sqrt{1 - z^2}$. После преобразований и разделения переменных получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \Rightarrow \arcsin z = \ln|x| + C .$$

Возвращаясь к исходным переменным, будем иметь $\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C$. Это общий интеграл исходного уравнения. Заметим, что при разделении переменных могли быть потеряны решения $z = \pm 1$. Непосредственная проверка показывает, что это действительно решения уравнения $z + x\dfrac{dz}{dx} = z + \sqrt{1 - z^2}$. Поэтому $y = x$ и $y = -x$ – решения исходного уравнения, не входящие в найденный общий интеграл.

Пример 2. Решить уравнение $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

Решение. Уравнение приводится к однородному заменой $x = u + \alpha, y = v + \beta$, где α и β являются решением системы

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2.$$

Итак, выполним замену $x = u + 1, y = v + 2$. Получим однородное уравнение $(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0$. Полагая в этом уравнении $v = zu$, последовательно получим

$2u(1 - 2z) + u(1 + z)(zdu + udz) = 0 \Rightarrow (z^2 - 3z + 2)du + u(1 + z)dz = 0$. Так как $z^2 - 3z + 2$ обращается в ноль при $z = 1$ и $z = 2$, то функции $z = 1$ и $z = 2$ – решения дифференциального уравнения. Остальные решения уравнения найдем, разделяя переменные

$$\frac{du}{u} = -\frac{1 + z}{z^2 - 3z + 2}dz \Rightarrow \frac{du}{u} = \left(\frac{2}{z - 1} - \frac{3}{z - 2}\right)dz \Rightarrow \ln|u| = \ln\frac{|z - 1|^2}{|z - 2|^3} + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\frac{(z - 2)^3}{(z - 1)^2} = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$(v - 2u)^3 = C(v - u)^2 \Rightarrow (y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$ – общий интеграл уравнения.

Функциям $z = 1$ и $z = 2$ в переменных x и y соответствуют решения исходного уравнения $y = x + 1$ и $y = 2x$. Решение $y = 2x$ содержится в общем интеграле и получается из него при $C = 0$.

Задание 2

Решить уравнение. Найти общее или частное решение.

1. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$

2. $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0,\ y(1)=1$
3. $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0, y(1)=0$
4. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$
5. $y^2+x^2y'=xyy'$
6. $(x^2+y^2)y'=2xy$
7. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
8. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(y^2+2xy-x^2\right)dy=0$
9. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$
10. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
11. $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x}$
12. $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$
13. $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$
14. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$
15. $(x+4y)y'=2x+3y-5$
16. $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$
17. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
18. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$
19. $xy'-y=\dfrac{x}{\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)}$
20. $3y\sin\left(\dfrac{3x}{y}\right)dx+\left[y-3x\sin\left(\dfrac{3x}{y}\right)\right]dy=0$
21. $(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}$
22. $y'=\dfrac{y+2}{x+1}+\mathrm{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$
23. $xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y$
24. $(2x^2y-2x^3)y'+2y^2x-6x^2y+4x^3=0$
25. $x^2(3y+2x)y'+3x(y+x)^2=0$
26. $(4y^2+x^2)y'=xy$
27. $(x+y)dx+(x-y-2)dy=0$

28. $2x+3y-5+(3x+2y-5)y'=0$

29. $xy'=y+x\cos^2\dfrac{y}{x}$

30. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

31. $xy'=y+x(1+e^{y/x})$

1.4. Линейные уравнения, уравнения Бернулли и уравнения Риккати

Линейным называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{1.5}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad (n\neq 0, n\neq 1) \tag{1.6}$$

называется уравнением Бернулли.

Уравнения (1.5) и (1.6) могут быть проинтегрированы с использованием одного и того же приема (метода Бернулли), который состоит в следующем: решения уравнений предлагается искать в виде произведения двух дифференцируемых функций $y=u(x)v(x)\Rightarrow y'=u'v+v'u$. Подставляя выражения для y и y' в левые части уравнений (1.5) или (1.6), получим соответственно

$$u'v+v'u+puv=q \quad \text{или} \quad u'v+v'u+puv=q(uv)^n. \tag{1.7}$$

В качестве функции $v(x)$ возьмем какое-либо решение уравнения $v'+pv=0$. Например, $v(x)=e^{-\int p(x)dx}$. Подставив найденное значение $v(x)$ в (1.7), получим уравнение для отыскания функции $u(x)$.

Уравнением Риккати называется уравнение вида

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{1.8}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – заданные непрерывные функции.

Заметим, что при $r(x)\equiv 0$ уравнение (1.8) является уравнением Бернулли.

Если известно частное решение $y_1(x)$ уравнения Риккати, то подстановкой

$$y(x)=y_1(x)+z(x). \tag{1.9}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, уравнение (1.8) приводится к уравнению Бернулли.

Частное решение $y_1(x)$, как правило, ищется подбором, чтобы будет продемонстрировано в приведенном ниже примере 3.

Пример 1. Найти решение уравнения $y'\sin 2x=2(y+\cos x)$, которое остается ограниченным при $x\to\pi/2$.

Решение. Решение уравнения ищем в виде $y=u(x)v(x)$. Имеем

$$\frac{du}{dx}v\sin 2x+u\frac{dv}{dx}\sin 2x=2uv+2\cos x.$$

Пусть $u(x)$ – решение уравнения $\frac{du}{dx}\sin 2x = 2u$. Например, $u(x) = tgx$. Функцию $v(x)$ найдем из уравнения $tgx\frac{dv}{dx}\sin 2x = 2\cos x$, или $\frac{dv}{dx} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Тогда $v(x) = -\frac{1}{\sin x} + C \Rightarrow y = Ctgx - \frac{1}{\cos x}$.

Для ограниченного при $x \to \pi/2$ решения имеем: $\lim\limits_{x\to\pi/2}(y(x)\cos x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to\pi/2}(y(x)\cos x) = \lim\limits_{x\to\pi/2}(C\sin x - 1) = 0$. Значит, $C = 1$. Итак, искомое решение имеет вид $y = tgx - \frac{1}{\cos x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'x^3\sin y + 2y = xy'$.

Решение. Запишем уравнение в виде $2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3\sin y$. Полученное уравнение является уравнением Бернулли , в котором роль независимой переменной играет y. Решение этого уравнения будем искать в виде $x = u(y)v(y)$. Подставляя в уравнение, получим $2y(u'v + v'u) - uv = -u^3v^3\sin y$. Функцию v найдем из уравнения $2y\frac{dv}{dy} = v \Rightarrow v = \sqrt{y}$. Для отыскания функции u получим уравнение

$$2\frac{du}{dy} = -u^3\sin y \Rightarrow \frac{1}{u^2} = C - \cos y \Rightarrow u = \pm\sqrt{\frac{1}{C - \cos y}}.$$

Итак, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{C-\cos y}}\sqrt{y} = \pm\sqrt{\frac{y}{C-\cos y}}$ – общее решение уравнения. Заметим, что функция $y = 0$ также является решением этого уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}$.

Решение. Будем искать частное решение в виде $y_1(x) = \frac{a}{x}$. Подставляя $y_1(x)$ в уравнение, получаем

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = -\frac{1}{4x^2} \text{ или } a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Полагая $y(x) = \frac{1}{2x} + z(x)$, приходим к уравнению Бернулли $z' + \frac{z}{x} = -z^2$. Сделав замену $z = u(x)v(x)$, получим $u'v + v'u + \frac{uv}{x} = -(uv)^2$. Функцию u найдем из уравнения $\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{x}$. Для отыскания функции v получим уравнение

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v^2 \Rightarrow \frac{1}{v}=\ln|x|+C \Rightarrow v=\frac{1}{\ln|x|+C} \Rightarrow z=\frac{1}{x\left(\ln|x|+C\right)}.$$

Значит, $y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x\left(\ln|x|+C\right)}$ – общее решение уравнения.

Задание 3

В задачах 1 -9 найти решения, удовлетворяющие заданным условиям

1. $y'-y\ln 2=2^{\sin x}(\cos x-1), \quad |y|<const$ ďđč $x\to\infty$;
2. $y'-y=2e^{-x}, \ y\to 0$ ďđč $x\to\infty$;
3. $y'\sin x-y\cos x=\frac{\sin^2 x}{x^2}, \ y\to 0$ ďđč $x\to\infty$;
4. $x^2y'\cos\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{x}=-1, \ y\to 1$ ďđč $x\to\infty$;
5. $2xy'-y=1-\frac{2}{\sqrt{x}}, \quad y\to -1$ ďđč $x\to\infty$;
6. $x^2y'+y=(x^2+1)e^x, \ y\to 1$ ďđč $x\to-\infty$;
7. $xy'+y=2x, \ |y|<const$ ďđč $x\to 0$;
8. $y'\sin x+y\cos x=1, |y|<const$ ďđč $x\to 0$;
9. $y'\cos x-y\sin x=-\sin 2x, \ y\to 0$ ďđč $x\to\frac{\pi}{2}$.

Решить уравнения:

10. $(2e^y-x)y'=1$;
11. $(\sin^2 y+xctgy)y'=1$;
12. $(2x+y)dy=ydx+4\ln y dy$;
13. $y'=\frac{y}{3x-y^2}$;
14. $(1-2xy)y'=y(y-1)$;
15. $y'+2y=y^2e^x$;
16. $3xy^2y'-2y^3=x^3$;
17. $y'=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x}+x$;
18. $y'+2xy=y^2e^{x^2}$;
19. $\left(\sin x-1\right)y'+y\cos x=\sin x$;
20. $x^2y'=x^2y^2+xy+1$;
21. $2y'\ln x+\frac{y}{x}=y^{-1}\cos x$;

22. $2y'\sin x + y\cos x = y^3 \sin^2 x$;
23. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$;
24. $x^2 y' - y = x^2 e^{x - \frac{1}{x}}$;
25. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$;
26. $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$;
27. $x^2 y' + \left(xy - 2\right)^2 = 0$;
28. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;
29. $2x(x^2 + y)dx = dy$;
30. $(1 + y^2)dx = (arctgy - x)dy$;
31. $x^3 y' + x^2 y - y^2 = 2x^4$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.10}$$

называется уравнением *в полных дифференциалах*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – дифференцируемые функции, для которых

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \tag{1.11}$$

причем производные в (1.11) непрерывны в некоторой области, содержащей точку $P_0(x_0, y_0)$.

При выполнении условия (1.11) (и только в этом случае) левая часть уравнения (1.10) является полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $U(x, y)$:

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy. \tag{1.12}$$

Поэтому уравнение (1.10) имеет вид $dU(x, y) = 0$ и его общий интеграл – $U(x, y) = const$.

Функция $U(x, y)$ может быть найдена по формуле

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy, \tag{1.13}$$

или непосредственно исходя из справедливости соотношения (1.12).

Пример 1. Решить уравнение

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Это уравнение в полных дифференциалах, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + 2xy + 2x) = 6y + 2x = \frac{\partial}{\partial x}(6xy + x^2 + 3).$$

Функцию $U(x, y)$ найдем из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3.$$

Интегрируя, например, второе из этих уравнений по y (считая x постоянным), получаем

$$U(x,y) = \int (6xy + x^2 + 3)dy = 3xy^2 + x^2 y + 3y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – некоторая дифференцируемая функция. Подберем эту функцию так, чтобы выполнялось соотношение $\frac{\partial U}{\partial x} = (3y^2 + 2xy + 2x)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + x^2 y + 3y + \varphi(x)) = 3y^2 + 2xy + 2x \Rightarrow$$

$$3y^2 + 2xy + \varphi'(x) = 3y^2 + 2xy + 2x \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + const.$$

Итак, $U(x,y) = 3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2$ и общий интеграл уравнения имеет вид $3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2 = C.$

Если условие (1.11) не выполнено, то уравнение (1.10) не будет уравнением в полных дифференциалах. Можно попытаться найти функцию $\mu = \mu(x,y)$ (интегрирующий множитель) так, чтобы уравнение

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

стало уравнением в полных дифференциалах. Для этого должно выполняться условие

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \text{ или}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{1.14}$$

Предположим, что интегрирующий множитель является функцией только переменной x: $\mu = \mu(x)$. Тогда уравнение (1.14) принимает вид

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx. \tag{1.15}$$

Если правая часть уравнения в (1.15) есть функция, зависящая только от x, то интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ существует.

Аналогично получаем, что в случае, когда выражение $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ есть функция, зависящая только от y, существует интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(y)$, который находится из уравнения

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy \tag{1.16}$$

Пример 2. Решить уравнение $x\dfrac{dy}{dx}=(3x^2\cos y-\sin y)\cos y.$

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y dx-xdy=0. \tag{1.17}$$

Заметим, что

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=2tgy.$$

Поэтому существует интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(y)$, который может быть найден из уравнения (1.16):

$$\frac{d\mu}{\mu}=tgydy\Rightarrow \ln|\mu|=-2\ln|\cos y|+C.$$

В качестве $\mu(y)$ возьмем $\mu(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. Умножая обе части уравнения (1.17) на $\dfrac{1}{\cos^2 y}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(3x^2-tgy\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0.$$

Функцию $U(x,y)$ найдем по формуле (1.13), взяв $x_0=y_0=0$:

$$U(x,y)=\int_0^x(3x^2-tgy)dx=x^3-xtgy.$$

Итак, общий интеграл уравнения имеет вид $x^3-xtgy=C.$ Заметим, что при делении на $\cos^2 y$ потеряны решения исходного уравнения $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

Задание 4

Решить уравнения, убедившись предварительно, что они являются уравнениями в полных дифференциалах

1. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$
2. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$
3. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$
4. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$
5. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 xdy=0$

6. $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy$

7. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

8. $(2x+e^{\frac{x}{y}})dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0$

9. $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ *или* $\mu=\mu(y)$.

10. $(x+y^2)dx-2xydy=0$
11. $y(1+xy)dx-xdy=0$
12. $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$
13. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$
14. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$
15. $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$
16. $(x^2+y)dx-xdy=0$
17. $(x+y^2)dx-2xydy=0$
18. $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$
19. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$
20. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos ydy=0$
21. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$
22. $2xy\ln ydx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})dy=0$
23. $\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$
24. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$
25. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$
26. $xydx=(y^3+x^2y+x^2)dy$
27. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0$
28. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin(2y)dy=0$
29. $(xe^y+2x^2y)dx+(x^2e^y+x^3)dy=0$
30. $(y\sin x+y^2)dy+(y^2\cos x-x^2y)dx=0$
31. $\left(2\ln y-\ln^2 y\right)dy=ydx-xdy$

1.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Особые решения

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.18}$$

Для решения уравнения (1.18) желательно разрешить его относительно y'. При этом может получиться несколько уравнений $y' = f_k(x, y)\ (k = 1, 2, ..., m)$, разрешенных относительно производной. Если удается найти решения всех этих уравнений, то, объединяя их, получим общее решение уравнения (1.18) .

Пример 1. Решить уравнение $(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0.$

Решение. Представим данное уравнение в виде $(y' + y^2) \times (y' - xy) = 0.$ Следовательно, данное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений: $y' + y^2 = 0$ и $y' = xy.$ Решения первого из них $y = 0$ и $y = \dfrac{1}{x + C}$. Решение второго $y = Ce^{x^2/2}$. Окончательно получаем, что общее решение исходного уравнения $\left(y - Ce^{x^2/2}\right)\left(y - \dfrac{1}{x + C}\right) = 0.$

Однако уравнение (1.18) не всегда удается разрешить относительно y'. Часто разрешенное относительно y' уравнение плохо интегрируется. В некоторых случаях уравнение (1.18) удобнее интегрировать методом *введения параметра.*

Пусть, например, уравнение (1.18) легко разрешается относительно $y: y = f(x, y')$. Введем параметр $p = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда уравнение примет вид $y = f(x, p)$. Дифференцируя обе части последнего равенства по x, получим $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$. Если удается разрешить это уравнение относительно x, то есть найти $x = x(p, C)$, то получим решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(p, C), \\ y = f(x, p). \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение $y = (y')^2 e^{y'}$.

Решение. Введем параметр $p = \dfrac{dy}{dx}$. Тогда

$$y = p^2 e^p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = (2pe^p + p^2 e^p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = 0 \text{ или } dx = (p + 2)e^p dp.$$

Получаем, что $p = 0$ или $x = e^p(p + 1) + C$. Значению $p = 0$ соответствует решение $y = 0$.

Итак, решениями исходного уравнения являются $y=0$ и
$$\begin{cases} x = e^{p}(p+1)+C \\ y = p^2 y^p. \end{cases}$$

Пусть уравнение (1.18) может быть разрешено относительно x: $x=\psi(y,y')$. В этом случае уравнение может быть решено с использованием подстановки $y' = p(y)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $x = \sin y' + \ln y'$.

Решение.
$$\frac{dy}{dx} = p(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos p \frac{dp}{dy} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{dp}{dy}(\cos p + \frac{1}{p}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = (p\cos p + 1)dp \Rightarrow y = p\sin p + \cos p + p + C.$$

Итак, параметрические уравнения решения имеют вид
$$\begin{cases} x = \sin p + \ln p, \\ y = p\sin p + \cos p + p + C. \end{cases}$$

Как и уравнение, разрешенное относительно производной, уравнение (1.18) может иметь *особые решения,* то есть решения, целиком состоящие из особых точек (точек неединственности). Особые решения, если они имеются, удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0, \\ F(x,y,y') = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$
Для каждой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей системе (1.19), необходимо проверить, что она в самом деле является решением уравнения (1.18) и является особым решением, то есть в каждой точке кривой $y = y(x)$ ее касаются другие интегральные кривые того же уравнения.

Особым решением дифференциального уравнения (1.18) будет являться и *огибающая* семейства $\Phi(x,y,C)=0$ интегральных кривых этого уравнения. Для нахождения огибающей семейства интегральных кривых $\Phi(x,y,C)=0$ следует исключить параметр C из системы уравнений
$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \Phi'_C(x,y,C) = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$
и проверить, является ли полученная кривая огибающей, то есть, касаются ли ее в каждой точке кривые данного семейства.

Пример 4. Решить уравнение $-(y')^2 + 2y' + x = y$. Найти его особые решения (если они есть).

Решение. Положив $y' = p$, получим $y = x + 2p - p^2 \Rightarrow \ p = 1 + 2p' - 2pp'$. То есть $p - 1 = -2(p-1)\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow p = 1$ или $dx = -2dp \Rightarrow x = -2p + C$. Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = x + 1 \text{ и } \begin{cases} x = -2p + c \\ y = x + 2p - p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p, имеем $y = x + 1, y = C - \dfrac{(C-x)^2}{4}$.

Найдем теперь решения, "подозрительные" на особые. Система (1.19) в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} 2 - 2y' = 0 \\ y - x - 2y' + (y')^2 = 0. \end{cases}$$

Исключая из нее y', найдем: $y = x + 1$. Проверим, является ли решение $y = x + 1$ особым, то есть проверим касаются ли его кривые семейства решений $y = C - \dfrac{(C-x)^2}{4}$. Условия касания кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ выглядят так: $\varphi(x_0) = \psi(x_0), \varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$. В данном случае они примут вид

$$\begin{cases} x_0 + 1 = C - \dfrac{(C - x_0)^2}{4}, \\ 1 = \dfrac{C - x_0}{2}. \end{cases}$$

Исключая C из этой системы, получаем $x_0 + 1 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Последнее и означает, что $y = x + 1$ – особое решение.

Заметим, что это же особое решение могло быть найдено из системы (1.20), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{C - x}{2} = 0 \\ y = C - \dfrac{(C-x)^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y = x + 1.$$

Задание 5

Найти все решения данных уравнений. Выделить особые решения (если они есть).

1. $(1 + y')^3 = 27(x + y)^2$
2. $y^2(y'^2 + 1) = 1$
3. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$
4. $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$

5. $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$
6. $xy'^2 = y(2y' - 1)$
7. $y'^2 + x = 2y$
8. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$
9. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$
10. $\left(y'\right)^2 - \left(3x - 2y\right)y' + 2x^2 - xy - 3y^2 = 0$
11. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$
12. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$
13. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$

Уравнения 13-30 решить методом введения параметра. Найти особые решения (если они есть).

14. $x = y'^3 + y'$
15. $y'(x - \ln y') = 1$
16. $y = y'^2 + 2y'^3$
17. $y = \ln(1 + y'^2)$
18. $y = (y' - 1)e^{y'}$
19. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$
20. $y = xy' - y'^2$
21. $y = 2xy' - 4y'^3$
22. $xy' - y = \ln y'$
23. $xy'(y' + 2) = y$
24. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$
25. $x(y'^2 - 1) = 2y'$
26. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$
27. $y = xy' - 2 - y'$
28. $y = xy'^2 - 2y'^3$
29. $2xy' - y = \ln y'$
30. $y'^3 + y^2 = xyy'$
31. $y = xy' - x^2 y'^3$

1.7. Существование и единственность решения задачи Коши. Метод последовательных приближений

Укажем условия существования и единственности решения задачи Коши (1.2) – (1.3).

Теорема Пикара-Линделефа. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $G = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$ и удовлетворяет условию Липшица по y равномерно относительно x, то есть существует такая постоянная $L>0$, что для $\forall y_1, y_2 \in [-b,b]$ и $\forall x \in [-a,a]$ выполнено соотношение

$$| f(x,y_1) - f(x,y_2) | \le L | y_1 - y_2 |.$$

Пусть M является верхней границей для $| f(x,y) |$ на G, а $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Тогда задача Коши

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

имеет на отрезке $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ единственное решение.

Решение $y(x)$ задачи Коши при выполнении условий теоремы Пикара-Линделефа может быть найдено как предел при $n \to \infty$ равномерно сходящейся последовательности функций $\{y_n(x)\}$, определяемых рекуррентными соотношениями

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f[s, y_n(x)]ds, \quad y_0(x) = y_0,\ n = 0,1,2,... \qquad (1.21)$$

Оценка погрешности при замене точного решения $y(x)$ n-ым приближением $y_n(x)$ может быть выражена неравенством

$$| y_n(x) - y(x) | \le \frac{ML^n \alpha^{n+1}}{(n+1)!},\ x_0 - \alpha \le x \le x_0 + \alpha. \qquad (1.22)$$

Заметим, что если функция $f(x,y)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области G, то значение постоянной Липшица L может быть определено так: $L = \sup\limits_{(x,y)\in G} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$.

Пример 1. Найти область, в которой уравнение $y' = x\sqrt{1-y^2}$ имеет единственное решение.

Решение. Здесь $f(x,y) = x\sqrt{1-y^2}$. Функция $f(x,y)$ определена и непрерывна при $|y| \le 1$. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ непрерывна и ограничена при $|y| \le a < 1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение в любой полосе $-a \le y \le a$ $(0 < a < 1)$.

Пример 2. Для задачи Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ указать какой-либо интервал существования решения. Найти это решение методом последовательных приближений, ограничившись приближениями y_1, y_2, y_3 и оценить ошибку третьего приближения.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $G = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$. На множестве G $|f(x,y)| = x^2 + y^2 \le 2$. Поэтому интервал существования решения

$|x| \le \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Значит, решение существует при $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ и на этом же интервале сходятся последовательные приближения. Последовательные приближения найдем по формуле (1.21):

$$y_0(x) = 0,\ y_1(x) = \int_0^x (s^2 + y_0^2)ds = \frac{x^3}{3},\ y_2(x) = \int_0^x \left(\frac{s^6}{9} + s^2\right)ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63}\right)^2\right)ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

Оценим теперь ошибку третьего приближения, пользуясь формулой (1.22). В качестве значения постоянной L можно взять верхнюю границу для $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G:

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |2y| \le 2.$ Поэтому $|y_3(x) - y(x)| \le \dfrac{2 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = \dfrac{1}{24}$.

Задание 6

Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями:

1. $y' = x + y^3,\ y(0) = 0;$
2. $y' = 2y^2 - x,\ y(1) = 1;$
3. $\dfrac{dx}{dt} = t + e^x,\ x(1) = 0.$

Построить последовательные приближения y_1, y_2, y_3 *к решению данного уравнения с данными начальными условиями, указать какой-либо интервал, на котором сходится последовательность приближений:*

4. $y' = x^2 - y^2,\ y(-1) = 0$
5. $y' = x + y^2,\ y(0) = 0$
6. $y' = x + y,\ y(0) = 1$
7. $y' = 2y - 2x^2 - 3,\ y(0) = 2$
8. $xy' = 2x - y,\ y(1) = 2$
9. $y' = x - y^2,\ y(0) = 0$
10. $y' = y^2 + 3x^2 - 1,\ y(1) = 1$
11. $y' = y + e^{y-1},\quad y(0) = 1$
12. $y' = 1 + x\sin y,\ y(\pi) = 2\pi$
13. $y' = 2x + y^2,\ y(0) = 1$
14. $y' = x - 2y^2,\ y(1) = 2$

15. $2xy' = x + 2y,\ y(2) = 0$

16. $y' = \dfrac{y}{x^2} + 1,\ y(1) = 0$

17. $y' = y + x^2 - x,\ y(0) = 0$

18. $y' = 2 + xy^2,\ y(1) = 2$

19. $y' = 2x - y^2,\ y(0) = 1$

20. $y' = x - y^2,\ y\left(-1\right) = 0$

21. $y' = 2x + 5y,\ y(2) = 1$

Для следующих уравнений построить третье приближение в заданной области (или на заданном интервале) и оценить его ошибку.

22. $y' = x^2 + y^2, \left|x\right| \le 1, \left|y\right| \le 1, y\left(0\right) = 0$

23. $y' = x - y^2, 0 \le x \le 0.5, y\left(0\right) = 0$

Для следующих уравнений выделить области на плоскости (x,y),в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения.

24. $y' = 2xy + y^2$

25. $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$

26. $(y-x)y' = y\ln x$

27. $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$

28. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$

29. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

30. $y' = \dfrac{y}{y - x}$

31. $y' = x^2 + \sqrt{x - y^2}$

2. Дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка не разрешенным относительно старшей производной. Если удается разрешить его относительно $y^{(n)}$, то получаем

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{2.1}$$

Теорема Коши (существования и единственности решения). Пусть функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, рассматриваемая как функция $n+1$ переменной, непрерывна в некоторой области $D \subset R^{n+1}$, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, вместе со своими частными производными

$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$. Тогда существует интервал (α, β) и определенная на нем n раз дифференцируемая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению (2.1) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2.2)$$

Функция $y(x)$, обладающая указанными свойствами, единственна.

Определение. Общим решением уравнения (2.1) (удовлетворяющего условиям теоремы Коши) называется функция $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, такая, что

1) для любых значений произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ есть решение уравнения (2.1);

2) существуют единственные значения $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ такие, что $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ есть решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию (2.2).

Если общее решение в области D задано неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом* уравнения.

Любое решение, получающееся из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением.*

2.1. Методы интегрирования некоторых классов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

Не существует общих приемов, позволяющих проинтегрировать произвольное дифференциальное уравнение высшего порядка. Однако в некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен и его решение может быть сведено к последовательному интегрированию нескольких дифференциальных уравнений первого порядка. Остановимся на этих случаях.

I. Решение уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ сводится к n-кратному интегрированию. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$y = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n} f(x)dxdx\cdots dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots C_{n-1}x + C_n.$$

Пример. Найти решение уравнения $y''' = x\ln x$, удовлетворяющее условиям

$$y(1) = 1,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = -1. \quad (2.3)$$

Решение. Последовательно интегрируя исходное уравнение, будем иметь

$$y'' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1,$$

$$y' = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Значения постоянных C_1, C_2, C_3 найдем из условий (2.3). Для отыскания C_1, C_2, C_3 получим систему уравнений

$$C_1 - \frac{1}{4} = -1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{4},$$

$$C_1 + C_2 - \frac{5}{36} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{8}{9},$$

$$C_3 + C_2 + \frac{C_1}{2} - \frac{13}{288} = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{17}{32}.$$

Итак, искомое решение имеет вид $y = \frac{x^4}{24}\ln x - \frac{13}{288}x^4 - \frac{3x^2}{8} + \frac{8}{9}x + \frac{17}{32}$.

II. Уравнение не содержит y и его производных до порядка $(k-1)$ включительно, то есть имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$.

Для понижения порядка уравнения применяется подстановка $y^{(k)} = v(x)$. После применения этой подстановки уравнение приобретает вид $F(x, v, v', \ldots, v^{(n-k)}) = 0$. Если удается найти общее решение последнего уравнения $v = v(x, C_1, C_2 \ldots C_{n-k}) = y^{(k)}$, то после k-кратного интегрирования получим общее решение исходного уравнения.

Пример. Проинтегрировать уравнение $xy^{V} - y^{IV} = 0$.

Решение. Уравнение не содержит y и его производных до третьего порядка включительно. Поэтому его порядок понижается путем введения замены $y^{IV} = v(x)$. Относительно новой переменной уравнение имеет вид

$$x\frac{dv}{dx} - v = 0 \Rightarrow v = C_1 x \Rightarrow y^{IV} = C_1 x.$$

Последовательно интегрируя последнее равенство четыре раза, получим

$$y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2,\ y'' = C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,\ y' = C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5 = \overline{C}_1 x^5 + \overline{C}_2 x^3 + \overline{C}_3 x^2 + C_4 x + C_5,$$

где $\overline{C_1}=\dfrac{C_1}{120}, \overline{C_2}=\dfrac{C_2}{6}, \overline{C_3}=\dfrac{C_3}{2}$.

III.<u>Уравнение не содержит явно переменной</u> x, то есть имеет вид $F(y,y',...,y^{(n)})=0$. В этом случае порядок уравнения понижается путем замены $y'=v(y)$. Последовательно получим

$$y'=v(y),\ y''=\frac{dv}{dy}v,\ y'''=\frac{d^2v}{dy^2}v^2+\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 v,...,y^{(n)}=\omega(v,\frac{dv}{dy},...,\frac{d^{(n-1)}v}{dy^n}).$$

Приходим к уравнению $(n-1)$-го порядка

$$F(y,v,...,\omega(v,\frac{dv}{dy},...,\frac{d^{(n-1)}v}{dy^n}))=0.$$

Если удалось найти общее решение последнего уравнения $v=\varphi(y,C_1,C_2,...,C_{n-1})$, то для отыскания y будем иметь уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1,C_2,...,C_{n-1}).$$

Пример. Проинтегрировать уравнение $yy''-y'^2=y^2\ln y$ в области $y>0, y'>0.$

Решение. Уравнение не содержит явно переменной x. Поэтому выполним замену $y'=v(y),\ y''=\dfrac{dv}{dy}v.$ Уравнение примет вид $yv\dfrac{dv}{dy}-v^2=y^2\ln y$. Разделив обе части этого уравнения на yv, получим $\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{1}{y}v=v^{-1}y\ln y$ – уравнение Бернулли относительно v. Решение этого уравнения будем искать в виде произведения функций $v=a(y)b(y)$. Подставляя в уравнение, будем иметь $a'b+b'a-\dfrac{ab}{y}=\dfrac{y\ln y}{ab}$. В качестве функции $b(y)$ возьмем решение уравнения $\dfrac{db}{dy}=\dfrac{b}{y}\Rightarrow b=y.$ Тогда для отыскания $a(y)$ получим:

$$\frac{da}{dy}y=\frac{\ln y}{a}\Rightarrow ada=\frac{\ln y dy}{y}\Rightarrow\frac{a^2}{2}=\frac{\ln^2 y}{2}+C_1\Rightarrow a=\sqrt{C_1+\ln^2 y}\Rightarrow$$

$$v=y\sqrt{C_1+\ln^2 y}\ \text{(так как } y'>0).$$

Итак,

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{C_1 + \ln^2 y} \Rightarrow \frac{dy}{y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}} = dx \Rightarrow$$

$$\ln|\ln y + \sqrt{C_1 + \ln^2 y}| = x + \ln C_2 \Rightarrow \ln y + \sqrt{C_1 + \ln^2 y} = C_2 e^x .$$

Найден общий интеграл уравнения.

IV. Уравнение однородное относительно y и его производных. Однородным называется уравнение , для которого выполнено

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}) .$$

Порядок однородного уравнения понижается путем введения новой переменной по правилу $z = \dfrac{y'}{y}$. Тогда получим

$$y' = zy,\ y'' = y(z' + z^2),\ y''' = y(z'' + 3zz' + z^3), ..., y^{(n)} = y\omega(z, z', ..., z^{(n-1)}) .$$

При этом исходное уравнение принимает вид

$$y^m F[x, 1, z, ..., \omega(z, z', ..., z^{(n-1)})] = 0 .$$

Пусть найдено его решение $z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$. Для нахождения y получаем уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dy}{dx} = y\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, решение которого имеет вид $y = C_n e^{\int \phi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx}$. Заметим, что решение $y = 0$ здесь не потеряно. Оно получается из последней формулы при $C_n = 0$.

Пример. Проинтегрировать уравнение $x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0.$

Решение. Левая часть уравнения– однородная функция относительно y, y', y''. Выполним замену $y' = zy,\ y'' = y(z' + z^2)$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2[x^2(z^2 + z') - (1 - xz)^2] = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ или } z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2} .$$

Общее решение последнего уравнения (линейного относительно z) имеет вид $z = \dfrac{C_1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$. Тогда $y = C_2 e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$. Решение $y = 0$ получается при $C_2 = 0.$

V. Уравнение имеет вид $\dfrac{d}{dx} P(x, y, y', ... y^{(n-1)}) = 0$. Иными словами, левая часть этого уравнения представляет собой полную производную по x от некоторой функции $P(x, y, y', ... y^{(n-1)})$. Интегрируя обе части такого уравнения по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу меньше, чем у исходного.

Пример. Проинтегрировать уравнение $yy'' - y'^2 = y'.$

Решение. Очевидным решением этого уравнения является функция $y \equiv 0$. Разделив обе части уравнения на y^2, получим

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2} \Rightarrow \left(\frac{y'}{y} + \frac{1}{y}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = C_1.$$

При $C_1 = 0$ получаем $y = -x + C$. При $C_1 \neq 0$ получаем линейное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C_2 e^{C_1 x} + \dfrac{1}{C_1}$.

Задание 7

Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка. Найти общее или (если заданы начальные условия) частное решение.

1. $xy'' - y' - x\sin\dfrac{y}{x} = 0$
2. $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$
3. $x^2 y''' = y''^2$
4. $(2y + y')y'' = (y')^2$
5. $yy'' - 2yy'\ln y - y'^2 = 0$
6. $yy'' + y'^2 = x$
7. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$
8. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$
9. $\begin{cases} (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, \\ y(0) = y'(0) = 1; \end{cases}$
10. $\begin{cases} y''\cos y + y'^2 \sin y - y' = 0, \\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2; \end{cases}$
11. $yy'' - y'^2 = y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
12. $yy'' = 2xy'^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0.5$
13. $2xy'y'' = y'^2 - 1$
14. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$
15. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$
16. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$
17. $y'^2 = (3y - 2y')y''$
18. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$
19. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$

20. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$
21. $xy'' - y' = x^2yy'$
22. $y^3y'' = -1, \; y(1) = 1, \; y'(1) = 0$
23. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$
24. $xyy'' = y'(y + y')$
25. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$
26. $yy'' + y = y'^2$
27. $y''(e^x + 1) + y' = 0$
28. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$
29. $xy'' = 2yy' - y'$
30. $y'' = xy' + y + 1$
31. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$

2.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{2.4}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \cdots + a_n = 0 \tag{2.5}$$

и найти его корни $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (2.4) есть линейная комбинация слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (2.5) и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \cdots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$$

для каждого корня λ уравнения (2.5) кратности k. Все C_i – произвольные постоянные. Корни характеристического уравнения могут быть как действительными, так и комплексными числами.

Если все коэффициенты уравнения (2.4) вещественные, то его решение всегда может быть записано в вещественной форме даже в случае комплексных корней уравнения (2.5). Для каждой пары комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения в формулу общего решения включаются слагаемые $\tilde{C}_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + \tilde{C}_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$, если эти корни простые, и слагаемые $P_{k-1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, если каждый из комплексных корней имеет кратность k. Здесь $P_{k-1}(x), Q_{k-1}(x)$ – многочлены степени $k-1$, коэффициенты которых – произвольные постоянные.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y^{VI} - 4y^{V} + 8y^{IV} - 8y''' + 4y'' = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни. Имеем

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 1 + i, \lambda_5 = \lambda_6 = 1 - i.$ Поэтому общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \cos x + C_6 x \sin x),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \qquad (2.6)$$

имеет вид $y = y_0 + \bar{y}$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (24), а $\bar{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения (2.6).

Для уравнения (2.6) с постоянными коэффициентами a_i и правой частью $f(x)$ *специального вида*, то есть состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 x + \cdots + b_l x^l, e^{\alpha x}, \cos \beta x, \sin \beta x,$ частное решение $\bar{y}$ можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью вида

$$f(x) = P_m(x) e^{ax}, \qquad (2.7)$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, частное решение имеет вид $\bar{y} = x^r Q_m(x) e^{ax}$. Здесь $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m, а $r = 0$, если a не является корнем характеристического уравнения (2.5), если же a – корень характеристического уравнения, то r – его кратность. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, нужно подставить в уравнение (2.6) значение $\bar{y} = x^r Q_m(x) e^{ax}$ и его производных и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях получившегося равенства.

Для уравнения с правой частью вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x) \qquad (2.8)$$

можно искать частное решение в виде $\bar{y} = x^r e^{\alpha x}(R_N(x) \cos \beta x + G_N(x) \sin \beta x)$, где $N = \max(l, s)$, а $r = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения (2.5) и r равно кратности этого корня в противном случае.

Если правая часть уравнения представляет собой сумму $f_1 + f_2 + \cdots f_k$ функций вида (2.7) и (2.8), то частное решение ищется в виде суммы $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_k$, где $\bar{y}_k$ – частное решение уравнения (2.6) с $f(x) = f_k(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' = 2xe^x + 3\sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Частное решение неоднородного уравнения представляет собой сумму $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, где $\bar{y}_1$– частное решение уравнения

$$y''' - y'' = 2xe^x, \tag{2.9}$$

а $\bar{y}_2$ – частное решение уравнения

$$y''' - y'' = 3\sin 2x. \tag{2.10}$$

Так как число 1 является корнем характеристического уравнения, то $\bar{y}_1$ будем искать в виде $\bar{y}_1 = x(ax+b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$. Подставив в уравнение (2.9) выражения для $\bar{y}_1$ и его производных и приведя подобные члены, получим

$$[ax^2 + (6a+b)x + 6a + 3b]e^x - [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b]e^x = 2xe^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a-2)x + (4a+b) = 0 \Rightarrow 2a - 2 = 0, 4a + b = 0 \Rightarrow a = 1, b = -4.$$

Итак, $\bar{y}_1 = (x^2 - 4x)e^x$.

Поскольку числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то $\bar{y}_2$ будем искать в виде $\bar{y}_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$. Подставив в уравнение (2.10) выражения для $\bar{y}_1$ и его производных и приведя подобные члены, получим

$$8(A\sin 2x - B\cos 2x) - 4(-A\cos 2x - B\sin 2x) = 5\cos 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (8A + 4B)\sin 2x + (4A - 8B - 5)\cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8A + 4B = 0, 4A - 8B - 5 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{2}.$$

Итак, $\bar{y}_2 = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$

Окончательно получаем

$$y = y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + (x^2 - 4x)e^x \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Частное решение линейного уравнения (2.6) с произвольной правой частью может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots C_n y_n$ линейного однородного уравнения (2.4). Тогда частное решение неоднородного уравнения (2.6) ищется в виде $\bar{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots C_n(x) y_n$. Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned}
&C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\
&C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\
&C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + y = 0$. Корни его характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0 : \lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Для нахождения производных функций $C_1(x), C_2(x)$ запишем систему (2.11):

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $C_1'(x) = -tgx, C_2'(x) = 1 \Rightarrow C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}$, $C_2(x) = x + \tilde{C}_2$.

Итак, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Здесь $\cos x \ln|\cos x| + x \sin x$ – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Задание 8

Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$
2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$
3. $y''' - y' = x^2 + x$
4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$
5. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$
6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$
7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$
8. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$
9. $3y^{IV} - y''' = 6x - 1$
10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$
11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$
12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$
13. $7y''' - y'' = 12x$
14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$
15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$
16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$
17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$
18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$
20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$
21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$
22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$
23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$
24. $y^{IV} + y''' = x$
25. $y''' - y'' = 6x + 5$
26. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^2 - 4x$
27. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$
28. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$
29. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$
30. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$
31. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$

Задание 9

Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$
2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}$
3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$
4. $y''' - 2y'' + y' = (5 + 2x)e^{2x}$
5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$
6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}$
7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}$
8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$
9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^{x}$
10. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$
11. $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$
12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{x}$
13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$
14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^{x}$
15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^{x}$
16. $y''' - 3y'' + 2y' = \left(4x + 2\right)e^{x}$
17. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}$
18. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^{x}$
19. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$

20. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$
21. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$
22. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$
23. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$
24. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^{x}$
25. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^{x}$
26. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^{x}$
27. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$
28. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^{x}$
29. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^{x}$
30. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^{x}$
31. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$

Задание 10

Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' - 2y' = 2ch2x$
2. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}$
3. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x$
4. $y'' - 3y' = 2ch3x$
5. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$
6. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}$
7. $y'' - 4y' = 16ch4x$
8. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$
9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$
10. $y'' - 5y' = 50ch5x$
11. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$
12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$
13. $y'' - y' = 2chx$
14. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$
15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$
16. $y'' + 2y' = 2sh2x$
17. $y'' - 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$
18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$
19. $y'' + 3y' = 2sh3x$
20. $y'' + 4y = 12\sin 2x + 16\cos 2x - 6e^{4x}$
21. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$

22. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72\left(\cos 6x + \sin 6x\right)$
23. $y'' + 4y' = 16sh4x$
24. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$
25. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49\left(\cos 7x + \sin 7x\right)$
26. $y'' + 5y' = 50sh5x$
27. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$
28. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 24e^{8x}$
29. $y''' + y' = 2shx$
30. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$
31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$

Задание 11

Найти решение задачи Коши

1. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$
2. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}},\ y(0) = \ln 4,\ y'(0) = 3\left(1 - \ln 2\right)$
3. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$
4. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}},\ y(0) = 1 + \ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2$
5. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
6. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x},\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$
7. $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\left(x/\pi\right)},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}},\ y(0) = 4\ln 4,\ y'(0) = 3\left(3\ln 4 - 1\right)$
9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$
10. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}},\ y(0) = 1 + \ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3$
11. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x},\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$

13. $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x},\ y(0)=1,\ y'(0)=0$

14. $y''-y'=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}},\ y(0)=\ln 27,\ y'(0)=\ln 9-1$

15. $y''+4y=4\operatorname{ctg} 2x,\ y(\pi/4)=1,\ y'(\pi/4)=2$

16. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}},\ y(0)=1+8\ln 2,\ y'(0)=14\ln 2$

17. $y''-6y'+8y=\dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

18. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{4-x^2}}.y(0)=1,y'(0)=2$

19. $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x},\ y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\pi$

20. $y''+16y=\dfrac{16}{\cos 4x},\ y(0)=3,\ y'(0)=0$

21. $y''-2y'=\dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}},\ y(0)=\ln 4,\ y'(0)=\ln 4-2$

22. $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2},\ y(\pi)=2,\ y'(\pi)=\dfrac{1}{2}$

23. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{2+e^{-x}},\ y(0)=1+3\ln 3,\ y'(0)=5\ln 3$

24. $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{2+e^{x}},y(0)=0,y'(0)=0$

25. $y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x},y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2,y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi$

26. $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x},y(0)=2,y'(0)=0$

27. $y''+y'=\dfrac{e^{x}}{2+e^{x}},y(0)=\ln 27,y'(0)=1-\ln 9$

28. $y''+y=2\operatorname{ctg} x,y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

29. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}},y(0)=1+2\ln 2,y'(0)=3\ln 2$

30. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}},y(0)=0,y'(0)=0$

31. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x},y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (однородная или неоднородная) всегда может быть проинтегрирована путем сведения ее к одному уравнению высшего порядка.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + t; \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение системы: $\ddot{x} = 2\dot{x} - \dot{y} + 1$. В правую часть полученного равенства подставим выражение для $\dot{y}$ из второго уравнения системы: $\ddot{x} = 2\dot{x} - x - y - e^t + 1 \Rightarrow \ddot{x} - 2\dot{x} + x = -y - e^t + 1$. Выразим y из первого уравнения системы

$$y = 2x - \dot{x} + t \tag{3.1}$$

Тогда для отыскания $x(t)$ получим неоднородное уравнение

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 3x = 1 - t - e^t.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$x_0 = e^{\frac{3}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\bar{x} = At + B + Ce^t$. Используя стандартные приемы, находим: $A = -\frac{1}{3}, B = 0, C = -1$. Итак,

$$x(t) = x_0 + \bar{x} = e^{\frac{3}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{3}t - e^t.$$

Используя формулу (3.1), получаем

$$y(t) = e^{\frac{3}{2}t}\left[\left(\frac{1}{2}C_1 - \sqrt{3}C_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{1}{2}C_1 + \sqrt{3}C_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] + \frac{1}{3}(t+1) - e^t.$$

Изложенный метод удобен только для решения несложных систем. В общем случае для решения линейных систем может быть использован "матричный метод".

Пусть имеется линейная система

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \tag{3.2}$$

где $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ постоянная матрица, $y = col(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ собственные значения матрицы A.

Если все собственные значения матрицы различны, то общее решение системы (3.2) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}\bar{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}\bar{e}_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}\bar{e}_n, \qquad (3.3)$$

где $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ собственные векторы, соответствующие указанным собственным значениям.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2; \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2; \\ y_3' = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 5.$$

Ненулевые собственные векторы $\bar{e}_i \ (i = 1,2,3)$, соответствующие найденным собственным значениям, могут быть найдены как алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы $A - \lambda_i E$. Так, например, в качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 1$, возьмем алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, согласно формуле (3.3), общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5x} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^x + C_3 e^{5x} \\ -9C_1 e^x + C_3 e^{5x} \\ 7C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 5C_3 e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Если среди различных корней характеристического уравнения имеются комплексно-сопряженные $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$, то каждой такой паре корней соответствуют два комплексных решения $\bar{y}_1 = e^{(a+bi)x}\bar{e}_1, \bar{y}_2 = e^{(a-bi)x}\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – комплексные собственные векторы. Комбинируя эти решения, легко получить два решения в вещественной форме. В качестве таких решений можно взять $\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}(e^{(a+bi)x}\bar{e}_1)$, $\tilde{y}_2 = \mathrm{Im}(e^{(a+bi)x}\bar{e}_1)$.

Если среди корней характеристического уравнения имеется корень λ кратности r, то этому корню соответствует решение вида

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x + \cdots + d_1 x^{r-1} \\ a_2 + b_2 x + \cdots + d_2 x^{r-1} \\ \vdots \\ a_n + b_n x + \cdots + d_n x^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \qquad (3.4)$$

Для нахождения значений неизвестных коэффициентов $a_j, b_j, ..., d_j$ $(j = 1,2,...,n)$ нужно подставить выражение (3.4) в систему (3.2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получившихся равенств. При этом следует помнить, что ровно r из отыскиваемых коэффициентов могут быть выбраны произвольно, а остальные должны быть выражены через них.

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3; \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3; \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } -\lambda(1-\lambda)^2 = 0.$$

имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1$.

Простому собственному значению $\lambda_1 = 0$ соответствует собственный вектор $e_1 = col(2,-1,1)$ и решение вида

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ -C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Решение, соответствующее двукратному корню $\lambda_{2,3} = 1$, в соответствии с формулой (3.4), будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x + A_2 \\ B_1 x + B_2 \\ D_1 x + D_2 \end{pmatrix} e^x \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x + A_2 + A_1 \\ B_1 x + B_2 + B_1 \\ D_1 x + D_2 + D_1 \end{pmatrix} e^x.$$

Получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} A_1 x + A_2 + A_1 \\ B_1 x + B_2 + B_1 \\ D_1 x + D_2 + D_1 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 x + A_2 \\ B_1 x + B_2 \\ D_1 x + D_2 \end{pmatrix} e^x$$

или

$$\begin{pmatrix} A_1x + A_2 + A_1 \\ B_1x + B_2 + B_1 \\ D_1x + D_2 + D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B_1 + D_1)x + B_2 + D_2 \\ (A_1 + B_1 - D_1)x + A_2 + B_2 - D_2 \\ (B_1 + D_1)x + B_2 + D_2 \end{pmatrix}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 = B_1 + D_1 \\ A_1 + A_2 = B_2 + D_2 \\ B_1 = A_1 + B_1 - D_1 \\ B_1 + B_2 = A_2 + B_2 - D_2 \\ D_1 = B_1 + D_1 \\ D_1 + D_2 = B_2 + D_2 \end{cases} \Rightarrow B_1 = 0, D_1 = A_1, B_2 = A_1, D_2 = A_2.$$

Считая $A_1 = C_2, A_2 = C_3$ произвольными постоянными, окончательно находим

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2x + C_3 \\ C_2 \\ C_2x + C_3 \end{pmatrix} e^x.$$

Складывая, наконец, последнее выражение с (3.5), получаем общее решение системы

$$y_1 = 2C_1 + (C_2x + C_3)e^x,$$

$$y_2 = -C_1 + C_2e^x,$$

$$y_3 = C_1 + (C_2x + C_3)e^x.$$

3.1. Матричная экспонента

Другой метод решения линейных систем с постоянными коэффициентами основан на использовании в качестве фундаментальной матрицы матричной экспоненты e^{Ax}. Матрица e^A определяется как сумма ряда

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots.$$

Если матрица e^{Ax} найдена, то решение системы (3.1) с начальным условием $y(x_0) = y^0$ имеет вид $y = e^{A(x-x_0)}y^0$.

Для отыскания матрицы e^{Ax} могут быть применены различные приемы, в зависимости от структуры спектра матрицы A.

I. Если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A – действительные различные числа, то матрицу e^{Ax} удобно находить так:

$$e^{Ax} = Te^{Mx}T^{-1}, \tag{3.6}$$

где $T=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$ (матрица, составленная из столбцов координат собственных векторов матрицы A), а

$$e^{Mx}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

II. Если среди различных собственных значений матрицы A имеются комплексные, то матрица e^{Ax} в вещественной форме может быть найдена с помощью следующего приема: нужно найти общее решение системы (3.1) так, как это было описано выше, а потом составить матрицу, i-ым столбцом которой будет решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $y_i(0)=1$, $y_k(0)=0\ (i\neq k)$.

Пример 4. Для матрицы системы из примера 2 найти e^{Ax}.

Решение. Составим матрицу T из столбцов координат собственных векторов матрицы A:

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{Ax}=T\begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5x} \end{pmatrix}T^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{e^x+3e^{5x}}{4} & \dfrac{-e^x+e^{5x}}{4} & 0 \\ \dfrac{-3e^x+3e^{5x}}{4} & \dfrac{3e^x+e^{5x}}{4} & 0 \\ \dfrac{7e^x-52e^{4x}+45e^{5x}}{12} & \dfrac{-7e^x-8e^{4x}+15e^{5x}}{12} & e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ найти e^{Ax}.

Решение. Собственные значения матрицы A – комплексно сопряженные числа $\lambda_{1,2}=-6\pm i$. Собственный вектор, соответствующий $\lambda=-6+i$

$$\bar{e}=\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\mathrm{Re}\left(e^{(-6+i)x}\overline{e}\right)=\mathrm{Re}\left\{e^{-6x}(\cos x+i\sin x)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]\right\}=e^{-6x}\begin{pmatrix}\cos x+\sin x\\2\cos x\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Im}\left(e^{(-6+i)x}\overline{e}\right)=\mathrm{Im}\left\{e^{-6x}(\cos x+i\sin x)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]\right\}=e^{-6x}\begin{pmatrix}\sin x-\cos x\\2\sin x\end{pmatrix}.$$

Поэтому общее решение линейной системы (3.2) с заданной матрицей A имеет вид

$$y_1(x)=[(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x]e^{-6x};$$

$$y_2(x)=(2C_1\cos x+2C_2\sin x)e^{-6x}.$$

Найдем**,** сначала частное решение, удовлетворяющее условию $y_1(0)=1, y_2(0)=0$. Оно будет иметь вид

$$y_1(x)=(\cos x-\sin x)e^{-6x};$$

$$y_2(x)=-2\sin x e^{-6x}.$$

Частное решение, удовлетворяющее условиям $y_1(0)=0, y_2(0)=1$**,** имеет вид

$$y_1(x)=\sin x\, e^{-6x};$$

$$y_2(x)=(\cos x+\sin x)\ e^{-6x}.$$

Поэтому

$$e^{Ax}=e^{-6x}\begin{pmatrix}\cos x-\sin x & \sin x\\ -2\sin x & \cos x+\sin x\end{pmatrix}.$$

III. Если среди собственных значений матрица A имеются кратные, то следует отыскать матрицу Q, приводящую матрицу A к жордановой форме:

$$B=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}J_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_k\end{pmatrix}.$$

Жорданова клетка $J(\lambda)$, соответствующая корню λ кратности r**,** имеет вид

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Для такой клетки легко находится

$$e^{J(\lambda)x} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \dfrac{x^2}{2!} & \cdots & \dfrac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \dfrac{x^{r-2}}{(r-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{x^{r-3}}{(r-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.7)}$$

Проведя такие построения для каждой клетки Жордана, находим e^{Bx}**.** Тогда $e^{Ax} = Qe^{Bx}Q^{-1}$.

Пример 6**. Вычислить матрицу** e^{At}**, если** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Решение**. Собственные значения данной матрицы** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$**. Так как ранг матрицы** $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **равен 1, то жорданова форма матрицы *A* имеет вид** $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**. Матрицу** Q**, приводящую матрицу *A* к жордановой форме, найдем из уравнения** $Q^{-1}AQ = J \Rightarrow AQ = QJ$ **. Пусть** $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$**. Тогда для отыскания элементов матрицы** Q **получим уравнение**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это матричное уравнение эквивалентно системе

$$3a + c = 2a,\ 3b + d = a + 2b,\ c - a = 2c,\ d - b = c + 2d,$$

решение которой следующее: $a = 1, b = -2, c = -1, d = 3$. Итак,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (3.7) $e^{Jt} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Поэтому**

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

3.2. Формула Коши

Решение неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}(x), \qquad \textbf{(3.9)}$$

удовлетворяющее начальному условию $\bar{y}(x_0) = \bar{y}^0$, может быть выражено через экспоненциал матрицы системы по формуле

$$\bar{y}(x) = e^{A(x-x_0)}\bar{y}^0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)}\bar{f}(s)ds. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Если решение системы (3.9) записано в виде (3.10), то говорят, что оно записано в форме Коши.

Пример 7**. Найдя матрицу e^{At}, записать решение системы**

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + t^2e^t; \\ \dot{y} = -x + y + e^{2t}. \end{cases}$$

в форме Коши.

Матрица e^{At} для рассматриваемой системы уже была найдена в предыдущем примере, и она имеет вид (3.8). Согласно формуле (3.10), можем записать

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-t_0+1)e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)e^{2(t-t_0)} \\ -(t-t_0)e^{2t} & (1-t+t_0)e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} (t-s+1)e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ -(t-s)e^{2s} & (1-t+s)e^{2(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s^2e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix}ds.$$

Задание 12

Решить линейную систему путем сведения ее к одному уравнению высшего порядка

1. $\begin{cases} \dot{x} - 3x = -2y + t; \\ \dot{y} = 3x - 4y; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y; \\ \dot{y} = x + y + e^t; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}; \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t; \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1; \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} + 2x - y = -e^{2t}; \\ \dot{y} + 3x - 2y = 6e^{2t}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}; \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t; \\ \dot{y} = x + 4y + e^{2t}; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t; \\ \dot{y} = x + \cos t; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^t; \\ \dot{y} = x + y - e^t; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1; \\ \dot{y} = x - 2y + t; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + e^t; \\ \dot{y} = x - y + e^t; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} + y = t^2; \\ \dot{y} - x = t^3; \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + y = e^{-t}; \\ 2\dot{x} + \dot{y} + 2y = \sin t; \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}; \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y; \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y; \\ \dot{y} = 2x + 3y + t; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = e^{3t} - y; \\ \dot{y} = 2e^{3t} - x; \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 2(x + y); \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t; \\ \dot{x} - 2y = 5x + e^t; \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t; \\ \dot{y} = -x + 2\sin t; \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} - y = \cos t; \\ \dot{y} = 1 - x; \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} + y = \cos t; \\ \dot{y} + x = \sin t; \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} + 5x + y = e^t; \\ \dot{y} + 3y - x = e^{2t}; \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + t; \\ \dot{y} = 2x - y + \sin t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = 3y - 2x - 5te^t; \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = 2y - x - e^t \sin t; \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}; \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x; \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t; \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

Задание 13

Решить систему матричным методом

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y; \\ \dot{y} = x + y - z; \\ \dot{z} = 2x - y; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z; \\ \dot{y} = y - x + z; \\ \dot{z} = x - z; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z; \\ \dot{y} = x + 2y - z; \\ \dot{z} = x - y + 2z; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z; \\ \dot{y} = -z - x + 2y; \\ \dot{z} = x - y + 2z; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z; \\ \dot{y} = x + y + z; \\ \dot{z} = 4x - y + 4z; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z; \\ \dot{y} = x + y; \\ \dot{z} = 3x + z; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = x + 3y - z; \\ \dot{z} = 2y + 3z - x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y; \\ \dot{y} = x + 2z; \\ \dot{z} = y - 2x - z; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z; \\ \dot{y} = x + 2y - z; \\ \dot{z} = x - y + 2z; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z; \\ \dot{z} = 2z - x + y; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z; \\ \dot{y} = x - 2y + 2z; \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z; \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z; \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z; \\ \dot{z} = 2x - 4y; \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z; \\ \dot{y} = x + y - z; \\ \dot{z} = 2z - y; \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x; \\ \dot{y} = 4x + y; \\ \dot{z} = 2x + y - z; \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 2y + 4z; \\ \dot{z} = x - z; \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 2x - y - 2z; \\ \dot{z} = 2z - x + y; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y; \\ \dot{y} = 3x + y - z; \\ \dot{z} = x + z; \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z; \\ \dot{y} = x - y + z; \\ \dot{z} = x + y - z; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z; \\ \dot{y} = x + 2y - z; \\ \dot{z} = x - y + 2z; \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z; \\ \dot{y} = -3x + z - y; \\ \dot{z} = -x + 2y; \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z; \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z; \\ \dot{z} = -x + 2y; \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 6y + 6z; \\ \dot{y} = 4x - y + 4z; \\ \dot{z} = 5z + 4x - 2y; \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 6y + 6z; \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2z; \\ \dot{z} = 2x + 2y + 3z; \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 13x + 2y - 2z; \\ \dot{y} = 6x + 9y - 6z; \\ \dot{z} = 2x - 2y + 5z; \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y + 4z; \\ \dot{y} = 2x + y + 2z; \\ \dot{z} = 2x + 3z; \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{19}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3}z; \\ \dot{y} = 2x + 5y - 2z; \\ \dot{z} = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{11}{3}z; \end{cases}$

28. $$\begin{cases} \dot{x} = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z; \\ \dot{y} = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}z; \\ \dot{z} = z; \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y - z; \\ \dot{y} = -x + 3y - z; \\ \dot{z} = 2z + x - 2y; \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z; \\ \dot{y} = y; \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}z; \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} \dot{x} = 9x + 4y - 2z; \\ \dot{y} = -2x + 3y - 2z; \\ \dot{z} = 9z. \end{cases}$$

Задание 14

Найти e^{At}*, где A – матрица линейной части системы из задачи 12 и записать решение этой системы по формуле Коши.*

Библиографический список

1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения: учебник для втузов/С.А.Агафонов, А.Д.Герман, Т.В.Муратова; под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко.— 4-е изд.,испр. — М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2006.— 352 с.
2. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях/В.В.Амелькин.— М.: Едиториал УРСС, 2009.— 208 с.
3. Демидович, Б.П., Моденов, В.П. Дифференциальные уравнения/Б.П. Демидович, В.П. Моденов. — СПб.: Лань, 2006.— 288 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. Егоров, А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями/А.И. Егоров.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 448с.

5. Краснов, М.Л., Киселев, А.И., Макаренко, Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями/М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. — М.: КомКнига, 2005.— 256 с. — (Вся высшая математика в задачах).
6. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты: учеб. пособие/Л.А. Кузнецов.— 9-е изд., стер.— Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2007.— 240 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям/Н.М. Матвеев.— СПб.: Лань, 2002. — 432 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).
8. Самойленко, А.М., Кривошея, С.А., Перестюк, Н.А. Дифференциальные уравнения. Практический курс/А. М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. — М.: Высшая школа, 2006. — 384 с.
9. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения/В.А. Треногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 312 с.
10. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения/М.В. Федорюк. — М.: Либроком, 2009. — 448 с.
11. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/А.Ф. Филиппов. — М.: Либроком, 2013. — 240 с. — (Классический учебник МГУ).
12. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения/Л.Э. Эльсгольц. — М.: ЛКИ, 2013. — 312 с. — (Классический учебник МГУ).