

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики**

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021г., протокол №5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол № 10, всту-
пающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой



В.В.Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)
"Дифференциальные уравнения"**

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью
Прикладная математика и информатика
Форма обучения очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Буркин И.М., профессор, доктор физ.-мат.наук, доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

Введение

Цель выполнения курсовой работы на тему «**Элементы качественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний**» - углубленное изучение теоретического материала и отработка практических навыков применения методов качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений и систем уравнений. Особое внимание уделяется вопросам исследования поведения решений уравнений и систем в окрестности особых точек, а также вопросам устойчивости и колебаний нелинейных систем.

Основное требование к курсовой работе – умение сочетать классические качественные методы исследования (прямой метод Ляпунова, теорию Пуанкаре-Бендиксона, метод Пуанкаре) с современными численно-аналитическими методами исследования уравнений и систем, предполагающими использование стандартных программ, заложенных в математических пакетах Mathcad, Maple, Matlab, Matematica.

Исходные данные заданий курсовой работы содержатся в данных методических указаниях. Данные по каждому разделу курсовой работы предваряются формулировкой заданий, необходимым теоретическим материалом для их выполнения, а также рекомендациями и примерами выполнения аналогичных заданий.

Курсовая работа предусматривает выполнение **семи заданий**, тематика которых сформулирована непосредственно в тексте данных методических указаний. **Объем** курсовой работы не регламентируется и может варьироваться в зависимости от конкретного варианта задания.

Курсовая работа выполняется в течение 4-го семестра обучения, по мере изложения в лекционном курсе соответствующего теоретического материала и его отработки на семинарских занятиях. **Защита курсовой работы** проходит в форме индивидуальной беседы с преподавателем во второй половине мая текущего учебного года.

Пояснительная записка к курсовой работе должна содержать перечень заданий, выполненных в работе, с указанием математического пакета, использованного автором работы при их выполнении. В пояснительной записке также необходимо указать прикладные задачи, при решении которых могут быть использованы рассмотренные в работе методы исследования нелинейных систем.

1. Исследование положений равновесия нелинейной системы второго порядка

Рассмотрим нелинейную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases}, \quad (1.1)$$

причем будем предполагать, что функции $f_1(x, y), f_2(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы во всей плоскости XOY .

Положения равновесия (точки покоя) системы (1.1) определяются как решения системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Обозначим эти точки через $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, k$.

Найдем матрицу Якоби $J(x, y)$ (якобиан) системы (1.1):

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

и вычислим значения $A_i = J(x_i, y_i)$ для каждой из точек покоя $M_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $A = (a_{ij})$ – одна из полученных матриц. Эта матрица задает линейную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.2)$$

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A системы (1.2). Положение равновесия $M_i(x_i, y_i)$, для которого найдена рассматриваемая матрица, будем называть *невырожденным*, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$. Оказывается, что в невырожденном случае поведение траекторий вблизи положения равновесия $M_i(x_i, y_i)$ для нелинейной системы (1.1) в существенном совпадает с поведением траекторий линейной системы (1.2) вблизи положения равновесия $(0, 0)$.

За положением равновесия $M_i(x_i, y_i)$ системы (1.1) сохраним те же названия, что и за положением равновесия системы (1.2): если λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака, то положение равновесия *узел* ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ – устойчивый, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ – неустойчивый). Если λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные с отрицательными (положительными) вещественными частями, то положение равновесия

$M_i(x_i, y_i)$ – устойчивый (неустойчивый) фокус. Если λ_1 и λ_2 вещественны и разных знаков, то положение равновесия – седло.

Следующие теоремы, определяют поведение траекторий нелинейной системы (1.1) вблизи невырожденного положения равновесия $M_i(x_i, y_i)$ в зависимости от типа точки покоя системы (1.2).

Теорема 1.1. *Предположим, что точка системы (1.2) является седлом. Пусть P – прямая, проходящая через точку $M_i(x_i, y_i)$ в направлении собственного вектора \bar{e}_1 матрицы $A=(a_{ij})$, соответствующего отрицательному собственному значению λ_1 , а Q – прямая, проходящая через точку $M_i(x_i, y_i)$ в направлении собственного вектора \bar{e}_2 матрицы $A=(a_{ij})$, соответствующего положительному собственному значению λ_2 . Тогда существуют ровно две траектории U_1 и U_2 системы (1.1), которые при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближаются к точке $M_i(x_i, y_i)$. Эти две траектории вместе с точкой O образуют непрерывно дифференцируемую кривую, касающуюся прямой P в точке $M_i(x_i, y_i)$. Точно также существуют ровно две траектории V_1 и V_2 , которые при $t \rightarrow -\infty$ асимптотически приближаются к точке $M_i(x_i, y_i)$, касаясь при этом прямой Q . Остальные траектории в окрестности точки $M_i(x_i, y_i)$ ведут себя так, как показано на рис.1. 1.*

Траектории U_1 и U_2 – устойчивые усы седла, траектории V_1 и V_2 – неустойчивые усы седла.

Теорема 1.2. *Пусть точка $M_i(x_i, y_i)$ устойчивый (неустойчивый) узел, то есть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$). В направлении собственного вектора, соответствующего λ_2 , проведем через точку M_i прямую P , а в направлении собственного вектора, соответствующего λ_1 – прямую Q . Оказывается, что все траектории, начинающиеся достаточно близко от точки M_i , асимптотически приближаются при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) к точке M_i и имеют в этой точке касательную. При этом только две траектории входят в точку M_i по касательной к прямой Q , а остальные – по касательной к прямой P (соответственно при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$) (см. рис. 1.2).*

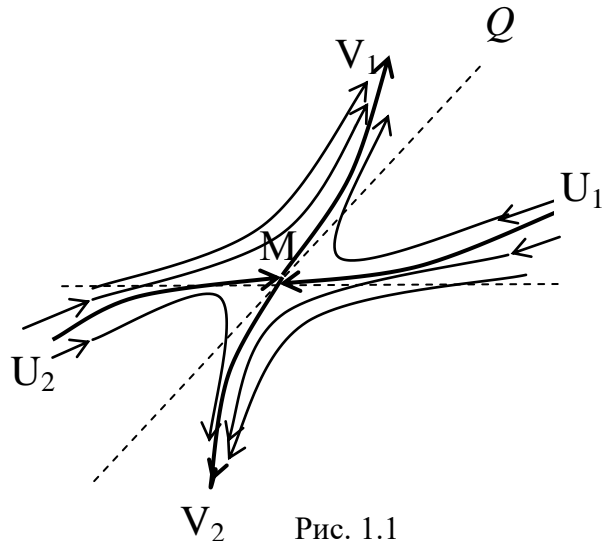


Рис. 1.1

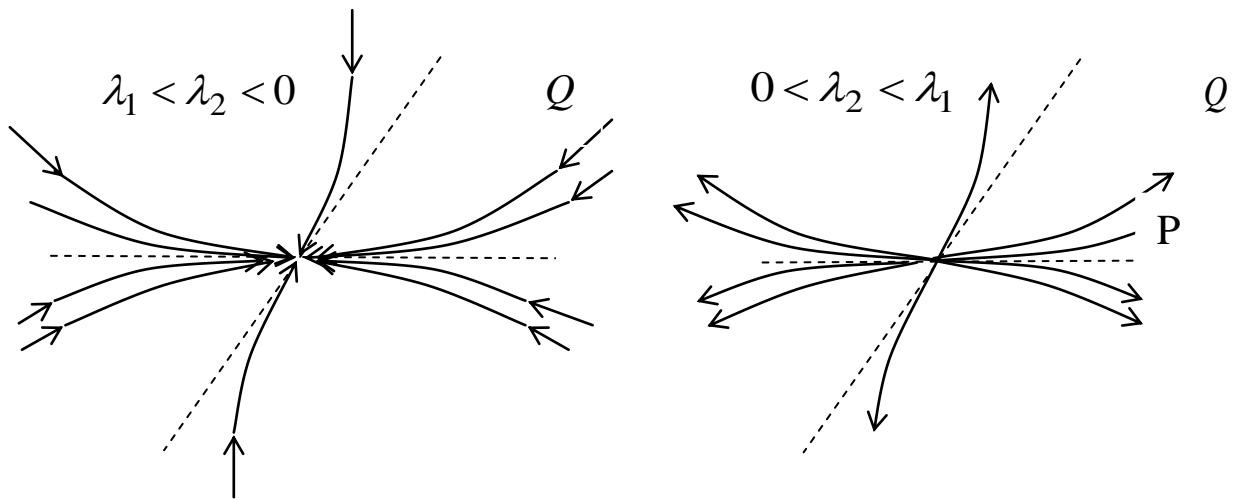
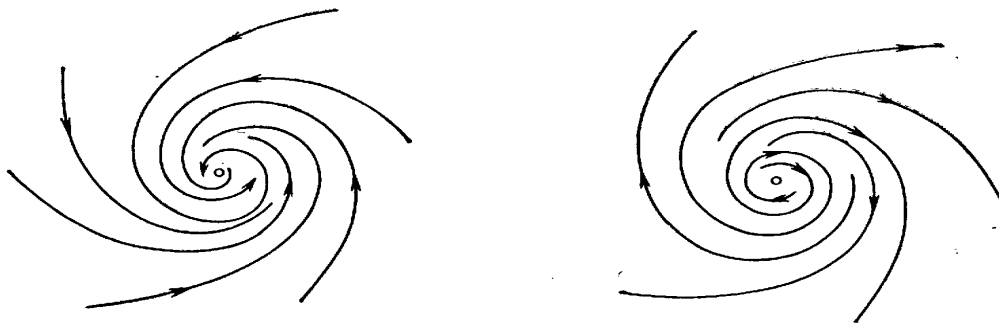


Рис. 1.2

Теорема 1.3.3. Пусть точка M_i – фокус, то есть $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда при $a < 0$ все траектории системы (1.1), проходящие вблизи точки M_i , при $t \rightarrow +\infty$ наматываются на точку M_i , а при $a > 0$ наматываются при $t \rightarrow -\infty$ на точку M_i как спирали (см. рис. 1.3).



Устойчивый фокус

Неустойчивый фокус

Рис. 1.3

Пример 1.1. Найти особые точки системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 2xy - 8, \end{cases} \quad (1.3)$$

определить их тип. Построить схематически фазовый портрет в окрестности каждой особой точки.

Решение. Для нахождения особых точек решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ -4x + 2xy - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, y_1 = 4; x_2 = -1, y_2 = -2.$$

Итак, особыми будут точки $M_1(2, 4)$ и $M_2(-1, -2)$.

Найдем матрицу Якоби системы: $J(x, y) = \begin{pmatrix} 8x & -2y \\ 2y-4 & 2x \end{pmatrix}$.

Для точки $M_1(2, 4)$ имеем $J(2, 4) = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = A_1$. Для точки $M_1(-1, -2)$ имеем

$$J(-1, -2) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} = A_2.$$

Собственные значения матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8$ – положительные,

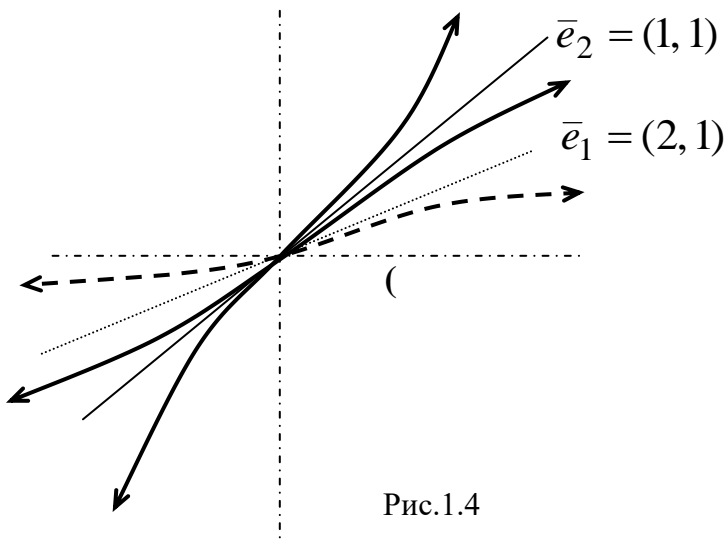


Рис.1.4

поэтому особая точка $M_1(2, 4)$ является точкой типа "неустойчивый узел".

Для построения фазового портрета в окрестности точки $M_1(2, 4)$ найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям матрицы A_1 . Имеем: $\bar{e}_1 = (2, 1), \bar{e}_2 = (1, 1)$. Согласно теореме 1.2, только две траектории выходят из особой точки $M_1(2, 4)$ по касательной к направлению, определяемому

собственным вектором \bar{e}_1 , а остальные выходят из нее по касательной к направлению, определяемому вектором \bar{e}_2 (рис.1.4)

Собственные значения матрицы $A_2 = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$ – комплексно-сопряженные

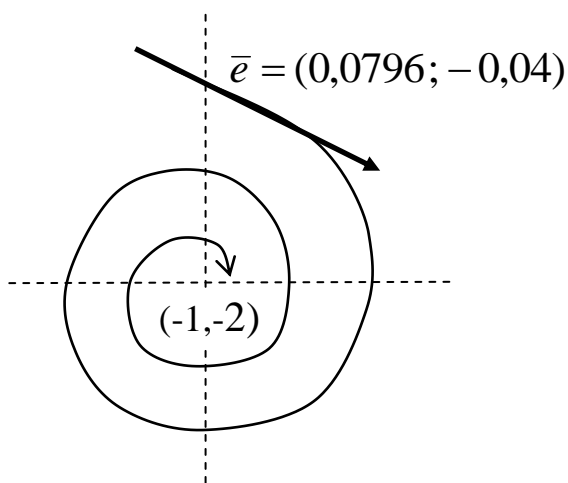


Рис. 1.5

числа $\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$. Поэтому состояние равновесия $M_2(-1, -2)$ – устойчивый фокус. Все траектории, начинающиеся в достаточно малой окрестности точки M_2 , спиралевидно наматываются на эту точку.

Для определения направления закручивания спиралей достаточно выбрать какую-либо точку в достаточно малой окрестности точки M_2 и найти вектор, касательный к траектории системы в выбранной точке. Так, например, для точки $M(-1; -1,98)$ вектор касательной будет таким: $\bar{e} = (0,0796; -0,04)$. Это означает, что

спирали будут закручиваться по ходу часовой стрелки (рис.1.5).

Замечание 1.1. Для того, чтобы найти особые точки уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{-4x + 2xy - 8}{4x^2 - y^2}$, следует перейти к эквивалентной системе (1.3) и рассуждать так же, как и в примере 1.1.

Задание 1

Найти особые точки следующих систем. Определить их тип. Построить схематически фазовый портрет в окрестности каждой особой точки.

$$1) \begin{cases} \dot{x} = 1 - y + x(y - 1) \\ \dot{y} = xy - 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \dot{x} = y - x - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = -2x(y + 1) \\ \dot{y} = x^2 + y^3 - 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2x(y - 2) - 8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 4y^2 + x^2 - 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 + 12 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 20 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = \ln \frac{1 - x + x^2}{3} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x} \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \ln(5 - x^2) \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \dot{x} = (y - 1)(3x + y - 5) \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 5 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 2) + y \\ \dot{y} = x(3x^4 - 1) - 2y \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2) - \ln 3 \\ \dot{y} = \arctg(x^2 - y^2) \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + 3x - x^2) \\ \dot{y} = x^2 + 3y^2 - 12 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \dot{x} = -10x^2 + y^2 - 9 \\ \dot{y} = e^{4x - x^2} - 1 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \dot{x} = 1 - e^{x^2 - y^2} \\ \dot{y} = -\ln(1 + y^2) + \ln 2 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5) \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2xy + y^2 \\ \dot{y} = x - 2x^2 - xy \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \dot{x} = \arctg(x + y + y^2) \\ \dot{y} = y^2 - 4x \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \dot{x} = -\sin y \\ \dot{y} = \sin x + \sin y \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2 \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2 \\ \dot{y} = \arctg(x^2 + xy) \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^3 \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \dot{x} = x + xy \\ \dot{y} = -y + y^2 + xy - x^3 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \dot{x} = (1 - x - \frac{2y}{1+x})x \\ \dot{y} = (2 - \frac{y}{1+x})y \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{x^5}{16} - y \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \dot{x} = 2x - xy \\ \dot{y} = 2x^2 - y \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2\arctg(x + y) \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \dot{x} = -x + y - xy + y^2 \\ \dot{y} = -2x + x^2 - xy \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \dot{x} = -x + y + 0.5xy + y^2 \\ \dot{y} = -0.5x - 0.5x^2 - xy \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9 \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9 \end{cases}$$

2. Производная в силу системы. Первые интегралы

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, f(x) = \text{col}(f_i(x)), i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Определение 2.1. Функция $u(x)$ называется **первым интегралом** автономной системы (2.1), если она постоянна вдоль каждой фазовой траектории этой системы, то есть если $u[\varphi(t)] = \text{const}$ для любого решения $x = \varphi(t)$ системы (2.1).

Теорема. Для того, чтобы функция $u(x)$ была первым интегралом системы (2.1), необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу этой системы тождественно обращалась в нуль, то есть чтобы выполнялось соотношение:

$$\dot{u}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(x) = (\text{grad } u, f(x)) = 0. \quad (2.2)$$

Первый интеграл $u(x)$ системы, это некоторый закон сохранения энергии в этой системе. При движении вдоль траекторий системы величина $u(x)$ сохраняет свое первоначальное значение. Именно из этих соображений и были получены первые интегралы многих уравнений классической механики.

Пример 2.1. Одномерное движение материальной частицы массы m в потенциальном поле описывается уравнением Ньютона:

$$m\ddot{x} = -U'(x). \quad (2.3)$$

Здесь $U(x)$ – потенциал поля. Первый интеграл уравнения (2.3) – функция $v(x, \dot{x})$, которая постоянна при $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$, где $x = \varphi(t)$ – решение этого уравнения.

Для того, чтобы найти первый интеграл, умножим обе части уравнения (2.3) на \dot{x} :

$$m\ddot{x}\dot{x} = -U'(x)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0.$$

Таким образом, $v(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$ и есть первый интеграл уравнения (2.3).

Этот интеграл носит название *интеграл энергии*, поскольку он равен сумме кинетической $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ и потенциальной $U(x)$ энергии частицы. Как видим, в данном случае сумма кинетической и потенциальной энергии механической системы постоянна:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = \text{const}, \quad (2.4)$$

то есть рассеяние энергии отсутствует. Такие системы называют *консервативными*. Если заданы начальные условия $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, то $E = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0)$.

Отметим, что уравнение (2.3) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{U'(x)}{m}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Точки покоя системы (2.5) определены соотношениями $y = 0, U'(x) = 0$, то есть имеют координаты $(\tilde{x}_i, 0)$, где \tilde{x}_i – абсциссы точек экстремума функции $U(x)$.

Соотношение (2.4) позволяет исследовать и построить фазовый портрет уравнения (2.3) на плоскости (x, \dot{x}) (системы (2.5) на плоскости (x, y)), рассматривая ее фазовые траектории как однопараметрическое семейство кривых, где роль параметра играет величина E полной энергии системы.

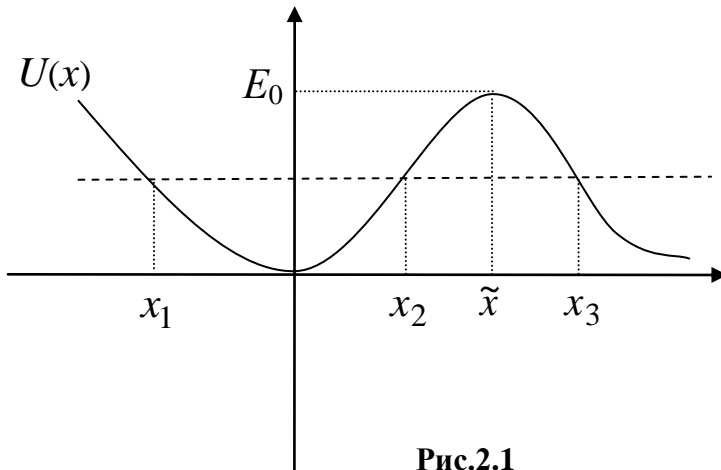


Рис.2.1

Пусть, например, график функции $U(x)$, имеет вид, показанный на рис. 2.1. Точки O и \tilde{x} соответствуют состояниям равновесия системы (точкам экстремума функции $U(x)$ потенциальной энергии системы).

Построим фазовый портрет системы. Положим $E_0 = \max U(x) = U(\tilde{x})$. Зададимся некоторым значением $E < E_0$. Из (2.4) следует, что

$U[x(t)] = E - \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} < E$ вдоль любого решения системы (2.5). Значит траектории этих решений таковы, что $x(t) \in (x_1, x_2)$ или $x(t) \in (x_3, \infty)$. При этом связь между x и $y = \dot{x}$ определяется соотношением

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}. \quad (2.6)$$

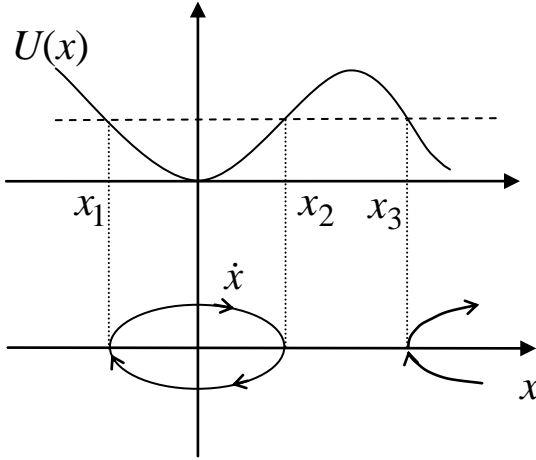


Рис. 2.2

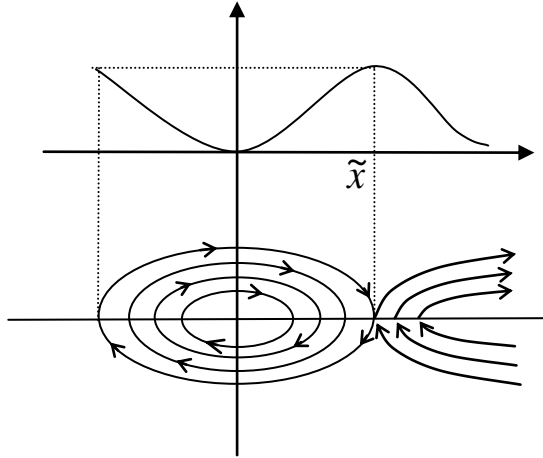


Рис. 2.3

Направление движения вдоль траекторий определяется так: при $\dot{x} > 0$ (то есть в верхней полуплоскости) $x(t)$ возрастает как функция времени. Соответственно, в нижней полуплоскости она убывает. Для значения E , выбранного так, как указано на рис.2.2, получим две траектории системы (см. рис.2.2). Варьируя значения E , можем схематически построить фазовый портрет системы (2.5) (рис.2..3).

Отметим, что структура траекторий в окрестности точки $(\tilde{x}, 0)$ такая же, как и в окрестности седла. Кривые «входящие» в указанную особую точку и «выходящие» из нее – *сепаратрисы седла*. Сепаратрисы разделяют области на фазовой плоскости с различным типом поведения траекторий.

Структура траекторий в окрестности точки $(0,0)$ такая же, как в окрестность центра. Все траектории в указанной окрестности являются замкнутыми траекториями (циклами), что соответствует периодическим движениям системы. Периодическое движение происходит в области $x_{\min} = x_1 \leq x \leq x_2 = x_{\max}$, в которой $U(x) \leq E$, причем равенство достигается на концах интервала, т.е. x_{\min} и x_{\max} представляют собой корни уравнения $U(x) = E$. В этом случае мы можем проинтегрировать выражение (2.6) по всей замкнутой фазовой кривой и определить период колебания $T = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$. Используя правило вычисления криволинейного интеграла, этому интегралу можно придать вид

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (2.7)$$

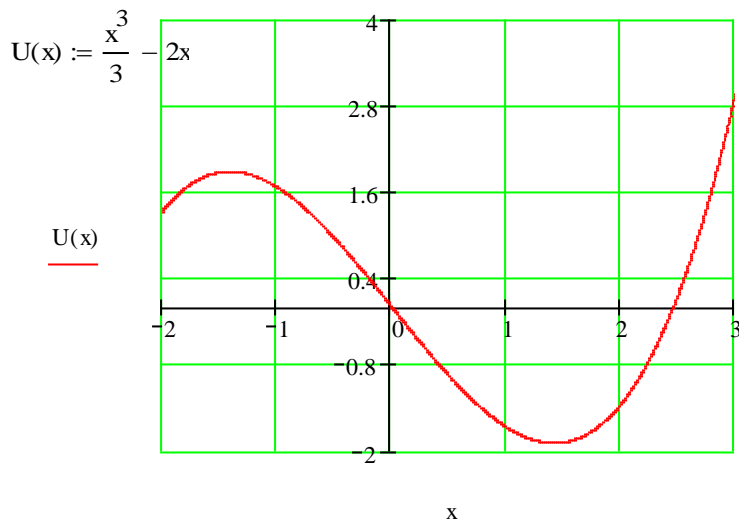
Определение 2.2. Периодические движения системы (2.5) в окрестности точки типа "центр" называются *изохронными*, если их период не зависит от уровня энергии E и *неизохронными* в противном случае.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение линейного гармонического осциллятора $m\ddot{x} + x = 0, m > 0$. Здесь $U(x) = \frac{x^2}{2}$. Значения x_{\min} и x_{\max} находятся из уравнения $E = \frac{x^2}{2}$, что дает $x_{\min} = -\sqrt{2E}, x_{\max} = \sqrt{2E}$. По формуле (2.7) имеем

$$T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{x^2}{2}}} = 2\sqrt{m} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} \Big|_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} = 2\pi\sqrt{m}.$$

Таким образом, период колебаний не зависит от уровня энергии E и колебания являются изохронными.

Пример 2.3. Рассмотрим систему с $U(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$. С помощью пакета Mathcad проведем расчет зависимости периода колебаний от уровня энергии



$$\Delta := 0.2$$

$$i := 1..18$$

$$E_i := 1.8 - i \cdot \Delta$$

$$S(i, x) := \text{root}(U(x) - E_i, x)$$

$$x_0 := 0$$

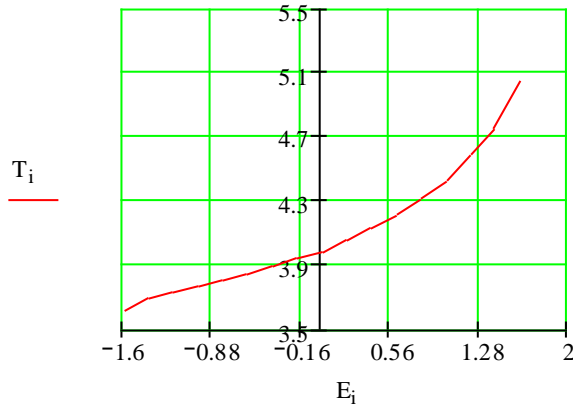
$$x_i := S(i, x_{i-1})$$

$$G(i, y) := \text{root}(U(y) - E_i, y)$$

$$y_0 := 3$$

$$y_i := G(i, y_{i-1})$$

$$T_i := \sqrt{2} \cdot \int_{x_i+0.001}^{y_i-0.001} \frac{1}{\sqrt{E_i - U(x)}} dx$$



Как видим, при увеличении уровня энергии системы от -1,6 до 1,6 период колебаний растет. Значит, движение в рассматриваемом случае не является изохронным.

Замечание. При вычислении интеграла введены поправки в пределы интегрирования для того, чтобы нивелировать погрешность, допускаемую системой Mathcad при подсчете значений x_i и y_i . Если этого не сделать, то некоторые значения T_i оказываются комплексными.

Задание 2

Найдя первый интеграл, изобразить фазовый портрет уравнения на плоскости (x, \dot{x}) .

1) $\ddot{x} + 4x - 2x^3 = 0$	2) $\ddot{x} + \left(\frac{x - 4x^3}{1 + x^4} \right)' = 0$	3) $\ddot{x} - \frac{x^2 + 3}{2(1 + x^2)} = 0$
4) $\ddot{x} + x - 2x^3 = 0$	5) $\ddot{x} - 3x + 4x^3 = 0$	6) $\ddot{x} = 2xe^{-x^2}(x^2 - 1)$
7) $\ddot{x} - x = 2 - x^2$	8) $\ddot{x} = 4 - x^2$	9) $\ddot{x} + \sin x = 1/2$
10) $\ddot{x} - x = x^2 - 5$	11) $4\ddot{x} - 5x = x^2 + 4$	12) $\ddot{x} + \left(\frac{x^3 - x}{1 + x^4} \right)' = 0$
13) $\ddot{x} - 4x = -3 - x^2$	14) $\ddot{x} - 2\frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2} = 0$	15) $\ddot{x} - 4x + x^3 = 0$
16) $\ddot{x} - 2\sin 2x = 0$	17) $\ddot{x} = \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$	18) $\ddot{x} = -2\frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2}$
19) $\ddot{x} = 3(1 - x^2)$	20) $\ddot{x} + 6x - x^3 = 0$	21) $\ddot{x} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$
22) $\ddot{x} - x + 2x^3 = 0$	23) $\ddot{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} = 0$	24) $\ddot{x} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$
25) $\ddot{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$	26) $\ddot{x} + \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 0$	27) $\ddot{x} - \frac{x^2 + 3}{2(1 + x^2)} = 0$
28) $\ddot{x} + \frac{4x}{(4x^2 + 5)^2} = 0$	29) $\ddot{x} + \cos x = -1/2$	30) $\ddot{x} + 5x = -x^2 + 2$
31) $\ddot{x} + \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$		

3. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка с частными производными называется уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.1)$$

где $a_i(x_1, \dots, x_n)$ – заданные функции, определенные в некоторой области $D \subset R^n$, а $u(x_1, \dots, x_n)$ – искомая функция.

Линейным неоднородным уравнением первого порядка с частными производными называется уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2)$$

где $a_i(x_1, \dots, x_n), b(x_1, \dots, x_n)$ – заданные функции, определенные в некоторой области $D \subset R^n$, а $u(x_1, \dots, x_n)$ – искомая функция.

Квазилинейным уравнением первого порядка с частными производными называется уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u), \quad (3.3)$$

где $a_i(x_1, \dots, x_n, u), b(x_1, \dots, x_n, u)$ – заданные функции, определенные в некоторой области $D \subset R^{n+1}$, а $u(x_1, \dots, x_n)$ – искомая функция.

Очевидно, что уравнения (3.1) и (3.2) являются частным случаем уравнения (3.3), поэтому ниже ставятся задачи и рассматриваются методы решения квазилинейных уравнений (3.3). Результаты для уравнений вида (3.1) и (3.2) получаются как следствия из них.

Система $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \\ \frac{du}{dt} &= b(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\end{aligned}\tag{3.4}$$

называется *системой уравнений характеристик* для уравнения (3.3), а ее фазовые кривые *характеристиками* уравнения (3.3). Исключив параметр t из системы (3.4), получим систему уравнений характеристик в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, u)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, u)} = \dots = \frac{du}{b(x_1, x_2, \dots, u)}. \quad (3.5)$$

Пусть найдено n независимых первых интегралов

$$v_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

системы (3.5). Тогда общее решение уравнения (3) в неявном виде определяется равенством

$$\Phi[v_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)] = 0, \quad (3.7)$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция.

Если функция u входит только в один из первых интегралов (6), например, в $v_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$, то решение уравнения (3) может быть записано в виде $v_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, где φ – произвольная дифференцируемая функция. Разрешив последнее уравнение относительно u , получим общее решение в явном виде.

Точно также может быть найдено общее решение линейного неоднородного уравнения (2).

Общее решение линейного однородного уравнения (1) имеет вид

$$u(x_1, \dots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \quad (3.8)$$

где $u_i(x_1, \dots, x_n) = C_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ – независимые первые интегралы системы уравнений характеристик, а φ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3.9)$$

Решение. Уравнение (3.9) – линейное однородное уравнение. Уравнение для характеристик в симметричной форме имеет вид $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Найдем независимые первые интегралы этого уравнения.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{z}{x} = C_2$$

Согласно формуле (3.8), общее решение уравнения (9) имеет вид $u = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$,

где $\varphi(\cdot, \cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2. \quad (3.10)$$

Решение. Уравнение (10) – линейное неоднородное уравнение. Уравнение для характеристик в симметричной форме имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x^2 + y^2}. \quad (3.11)$$

Найдем независимые первые интегралы этого уравнения. Один первый интеграл находится из уравнения $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ и имеет вид $x^2 - y^2 = C_1$. Для нахождения еще одного первого интеграла применим прием, позволяющий найти интегрируемую комбинацию. Воспользуемся следующим утверждением: если

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = t$, то при любых p_1, p_2, \dots, p_m справедливо равенство

$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_m a_m}{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \dots + p_m b_m} = t$. Используя это утверждение, из (3.11) получим

$$\frac{ydx + xdy}{y^2 + x^2} = \frac{dz}{y^2 + x^2} \Rightarrow d(xy) = dz \Rightarrow z - xy = C_2.$$

Поскольку функция z входит только в последний интеграл, решение уравнения может быть записано в виде $z - xy = \varphi(x^2 - y^2)$ или $z = xy + \varphi(x^2 - y^2)$, где $\varphi(\cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z. \quad (3.12)$$

Решение. Уравнение (3.12) – квазилинейное. Уравнение для характеристик в симметричной форме имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy + z}. \quad (3.13)$$

Найдем независимые первые интегралы этого уравнения. Один первый интеграл находится из уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ и имеет вид $\frac{y}{x} = C_1$. Для нахождения еще одного первого интеграла применим описанный выше прием, позволяющий найти интегрируемую комбинацию. Из (3.13) последовательно получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydx + xdy}{2xy} = \frac{dz}{xy + z} = (t) \Rightarrow \frac{ydx + xdy - dz}{xy - z} = (t) = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(xy - z)}{xy - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln |xy - z| = \ln |x| + \ln C_2 \Rightarrow \frac{xy - z}{x} = C_2$$

Согласно формуле (3.7), общее решение уравнения (3.12) в неявном виде определяется равенством $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{xy - z}{x}\right) = 0$, где Φ – некоторая дифференцируемая функция. Поскольку z входит только в один первый интеграл, то решение может быть записано в виде $\frac{xy - z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, или, окончательно $z = xy - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ – некоторая дифференцируемая функция.

Задача Коши для уравнения с частными производными

Мы сформулируем задачу Коши для квазилинейного уравнения (3.3), ограничившись для простоты и наглядности случаем трех переменных. Для линейных уравнений (3.1) и (3.2), которые могут рассматривать как частный случай квазилинейного уравнения (3.3), задача Коши формулируется точно также.

Итак, рассмотрим квазилинейное уравнение

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z) \quad (3.14)$$

и соответствующее уравнения характеристик

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)}. \quad (3.15)$$

Пусть пространственная кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (3.16)$$

Обозначим через γ проекцию этой кривой на плоскость xOy . Задача Коши для уравнения (3.14) ставится так: *в окрестности кривой γ найти интегральную поверхность уравнения (3.3), проходящую через заданную кривую Γ , т.е. найти такое решение уравнения (3.14), которое принимает заданные значения в точках кривой γ .*

Задача Коши имеет единственное решение, если кривая Γ не является характеристикой уравнения (3.14). Если же Γ – характеристика, то задача Коши имеет бесконечно много решений.

Пусть найдены два независимых первых интеграла системы (3.15)

$$f_1(x, y, z) = C_1, f_2(x, y, z) = C_2. \quad (3.17)$$

Выразив x, y, z через параметр t из соотношений (3.16) и подставив эти выражения в (3.17), получим два соотношения вида $F_1(t) = C_1, F_2(t) = C_2$. Исключив t из последних соотношений, получим выражение вида $\Phi(C_1, C_2) = 0$. Подставив в это выражение вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (3.17), получим искомое уравнение интегральной поверхности, которое и будет решением поставленной задачи Коши.

Часто кривая Γ задается соотношениями $\psi_1(x, y, z) = 0, \psi_2(x, y, z) = 0$. В этом случае в качестве параметра на кривой можно выбрать x или y . Иначе говоря, для получения соотношения $\Phi(C_1, C_2) = 0$ нужно исключить переменные x, y, z из системы уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x, y, z) = 0, \\ \psi_2(x, y, z) = 0, \\ f_1(x, y, z) = C_1, \\ f_2(x, y, z) = C_2 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Пример 4. Найти решение уравнения $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, удовлетворяющее

условию $z = y + e^y$ при $x = 1$.

Решение. Заданное уравнение является линейным неоднородным. Уравнения характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{x-y}$. Из соотношения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ получаем первый ин-

теграл $xy = C_1$. Сложив числители и знаменатели первых двух дробей и приравняв полученный результат к третьей дроби, получим

$$\frac{dx + dy}{x - y} = \frac{dz}{x - y} \Rightarrow d(x + y) = dz \Rightarrow z - x - y = C_2.$$

Найдены два независимых первых интеграла. Теперь запишем систему (3.18) для данной задачи:

$$\begin{cases} z = y + e^y, \\ x = 1, \\ xy = C_1, \\ z - x - y = C_2. \end{cases} \Rightarrow C_2 = e^{C_1} - 1.$$

Подставив в последнее соотношение вместо C_1, C_2 левые части выражений для первых интегралов, получим $z - x - y = e^{xy} - 1$. Окончательно: $z = x + y + e^{xy} - 1$.

Пример 5. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ и проходящую через линию $z = 1 + x^2, y = 2$.

Решение. Требуется найти частное решение квазилинейного уравнения. Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}. \quad (3.19)$$

Из соотношения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ получаем первый интеграл $\frac{y}{x} = C_1$. Умножим числитель и знаменатель первой дроби в (3.19) на y , второй дроби – на x и сложим числители и знаменатели полученных дробей с числителем и знаменателем третьей дроби в (3.19): $\frac{ydx + xdy + dz}{xy + xy + z - xy} = \frac{d(z + xy)}{z + xy}$. Приравняем полученную дробь к первой дроби в (3.19):

$$\frac{d(z + xy)}{z + xy} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |z + xy| = \ln |x| + \ln C_2 \Rightarrow \frac{z + xy}{x} = C_2.$$

Итак, найдены два независимых первых интеграла. Теперь запишем систему (3.18) для данной задачи.

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1, \\ \frac{z + xy}{x} = C_2, \\ y = 2, \\ z = 1 + x^2. \end{cases} \Rightarrow \left(1 + \frac{2}{C_1}\right)^2 = \frac{2C_2}{C_1}.$$

Подставив в последнее соотношение вместо C_1, C_2 левые части выражений для первых интегралов, будем иметь

$$\left(1 + \frac{2x}{y}\right)^2 = 2 \frac{z + xy}{x} \cdot \frac{x}{y} \Rightarrow z = \frac{(2x + y)^2}{2y} - xy \quad - \text{уравнение искомой поверхности.}$$

сти.

Задание 3

Найти общее решение уравнения

1. $2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$
2. $yx \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$
3. $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z + x^2 y.$
4. $(y^2 + x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2.$
5. $2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - yx \frac{\partial z}{\partial y} - x\sqrt{z^2 + 1} = 0.$
6. $x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} - x - y = 0.$
7. $yx \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} - yz = 0.$
8. $(z + x) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} - x - y = 0.$
9. $(y + zx) \frac{\partial z}{\partial x} + (yz + x) \frac{\partial z}{\partial y} - 1 + z^2 = 0.$
10. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} - xy = 0.$

Найти решения уравнения, удовлетворяющие заданным условиям

11. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z(0, y) = y.$
12. $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z(1, y) = y^2.$
13. $\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2x, \quad z = x^2 + x \text{ при } y = 2x^2.$
14. $y \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z = -y^2 \text{ при } x = 0.$

$$15. \quad zx \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y, \quad z = 4y^3 \text{ при } x = 3y^2.$$

Найти поверхность, удовлетворяющую заданному уравнению и проходящую через заданную линию

$$16. \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad z = y^2, x = 0.$$

$$17. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad z = x^2, y = 1.$$

$$18. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - yx, \quad z = y^2 + 1, x = 2.$$

$$19. \quad \operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad z = x^3, x = y.$$

$$20. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), \quad z = -\frac{1}{y}, x = 1.$$

$$21. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \quad z = x - x^2, y = -2.$$

$$22. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad z^2 = 4 - y^2, x = 2.$$

$$23. \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2zx, \quad yz = 1, x + y = 2.$$

$$24. \quad z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = -x, \quad y = x^2, 2x = z.$$

$$25. \quad (y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad z = y, x = -y.$$

$$26. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad 2z = y + x, xz = 1.$$

$$27. \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + zy \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2, \quad zy = x - 1, x - y = 0.$$

$$28. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, \quad 2z = y, x + 2y = z.$$

$$29. \quad (x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, \quad z + 2x = 1, x - y = 2.$$

$$30. \quad xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z, \quad z^3 = -x, y = z^2$$

$$31. \quad (y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad z = x, x^2 = y.$$

4. Исследование устойчивости вторым методом Ляпунова

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, (f(a) = 0) \quad (4.1)$$

и будем исследовать устойчивость ее положения равновесия $x = a$.

Определение 4.1. *Положение равновесия $x = a$ системы (4.1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:*

- 1) *если $|x_0 - a| < \delta$, то решение $x(t, x_0)$ системы (4.1) определено при всех $t \geq 0$;*
- 2) *при всех $t \in [0, \infty)$ выполнено условие $|x(t, x_0) - a| < \varepsilon$.*

Если к тому же $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0) - a| = 0$, то состояние равновесия $x = a$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пусть $V(x)$ – функция переменной $x \in R^n$. Будем говорить, что функция $V(x)$ положительно определена в окрестности U точки $x = a$, если $V(x) > 0$ при $x \in U (x \neq a)$ и $V(a) = 0$. Если же в окрестности U выполнены условия $V(x) < 0$ при $x \neq a$ и $V(a) = 0$, то будем говорить, что функция $V(x)$ отрицательно определена в окрестности U .

Приведенная ниже теорема А.М.Ляпунова является одной из центральных теорем так называемого *второго метода Ляпунова*, играющего важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений.

Теорема 4.1. (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Если в некоторой окрестности U положения равновесия $x = a$ системы (4.1) существует непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция $V(x)$ такая, что ее производная в силу этой системы $\dot{V}(x) = (\text{grad} V(x), f(x))$ не положительна в указанной окрестности, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 4.2. (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть в некоторой окрестности U положения равновесия $x = a$ системы (4.1) существует непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция $V(x)$ такая, что ее производная $\dot{V}(x)$ в силу этой системы отрицательно определена в U . Тогда положение равновесия $x = a$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Везде ниже, без ограничения общности, будем считать, что $a = 0$, т.е. $x = 0$ – положение равновесия системы (4.1), и будем исследовать устойчивость этого положения равновесия.

Теорема 4.2 не дает оценки скорости стремления $|x(t, x_0)|$ к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Следующее утверждение позволяет получить такую оценку.

Теорема 4.3. *Пусть $x = 0$ положение равновесия системы (4.1) и существует положительно определенная в некоторой окрестности точки $x = 0$ функция $V(x)$ такая, что*

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x), \quad V(x) \geq M |x|^\beta, \quad (4.2)$$

где α, β, M – некоторые положительные числа.

Тогда существует такая постоянная $C > 0$, что $|x(t, x_0)| \leq C e^{\frac{-\alpha t}{\beta}}$ при $t \geq 0$ для всех достаточно малых $|x_0|$.

Существуют теоремы, устанавливающие условия неустойчивости положения равновесия системы (4.1). Наиболее сильной из них является теорема Четаева. Для того, чтобы сформулировать эту теорему, введем некоторые дополнительные понятия. Пусть $V(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат $x = 0$. Предположим, что $V(0) = 0$ и что существует сколь угодно близкая к началу координат точка x_0 такая, что $V(x_0) > 0$. Выберем $r > 0$ так, чтобы шар $U = \{x \in R^n : \|x\| \leq r\}$ содержался в D и положим

$$U_1 = \{x \in U : V(x) > 0\} \quad (4.3)$$

Множество U_1 непустое и содержится в U (рис.4.1). Его границу составляют поверхность $V(x) = 0$ и сфера $\|x\| = r$. Поскольку $V(0) = 0$, начало координат лежит на границе множества U_1 .

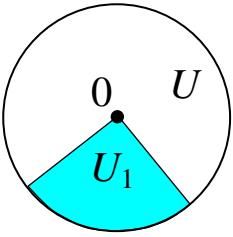


Рис.4.1

Теорема 4.4. (теорема Четаева). Пусть $x = 0$ – положение равновесия системы (4.1). Пусть $V(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $V(0) = 0$ и $V(x_0) > 0$ для некоторой точки x_0 такой, что $\|x_0\|$ произвольно малая величина. Определим U_1 соотношением (4.3) и предположим, что $\dot{V}(x) > 0$ в U_1 . Тогда $x = 0$ – неустойчивое положение равновесия системы (4.1).

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих применение теорем Ляпунова и Четаева.

Пример 4.1. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2.$$

Здесь, очевидно, $x_1 = 0, x_2 = 0$ – положение равновесия. Для исследования его на устойчивость рассмотрим функцию $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$. Производная этой функции в силу рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2ax_1 \dot{x}_1 + 2bx_2 \dot{x}_2 = 2ax_1(x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5) + 2bx_2(-x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2) = \\ &= 2(a-b)x_1 x_2 + (6a+2b)x_1^3 x_2^2 - 8ax_1^6 - 2bx_2^4. \end{aligned}$$

Положим $a = b = \frac{1}{2}$. Тогда $V > 0$, а $\dot{V} = -(2x_1^3 - x_2^2)^2 \leq 0$

Следовательно, возмущенное движение устойчиво по Ляпунову. Однако асимптотическую устойчивость мы гарантировать не можем.

Пример 4.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1x_2 - x_1^5 - \frac{1}{2}x_1x_2^2,$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2^2 + x_1^2x_2.$$

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 > 0. \text{ Имеем,}$$

$$\dot{V} = (3x_1 - x_2)\dot{x}_1 - (x_1 - x_2)\dot{x}_2 = 3x_1^4 + 2x_1^2x_2 - x_2^2 = -2x_1^4 - x_2^2 - (x_1^2 - x_2)^2 < 0.$$

По теореме 4.2 состояние равновесия $(0,0)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 4.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^2, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Тогда

$$\dot{V} = -(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2) + (3a - 2b)(xy + 2x^2y^2). \text{ Полагая } a = 2, b = 3, \text{ получим}$$

$$V = 2x^2 + 3y^2 > 0, \dot{V} = -2(2x^2 + y^2) < 0.$$

Заметим, что $\dot{V} = -4x^2 - 2y^2 \leq -\frac{4}{3}x^2 - 2y^2 = -\frac{2}{3}(2x^2 + 3y^2) = -\frac{2}{3}V$. Кроме того, $V = 2x^2 + 3y^2 \geq 2(x^2 + y^2)$. То есть, выполнены соотношения (4.2) с $M = \beta = 2, \alpha = -\frac{2}{3}$. Поэтому, согласно теореме 4.3, существует такая постоянная $C > 0$, что $|x(t, x_0)| \leq Ce^{-\frac{t}{3}}$ при $t \geq 0$ для всех достаточно малых $|x_0|$.

Пример 4.4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + 2x_1x_2^2,$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2.$$

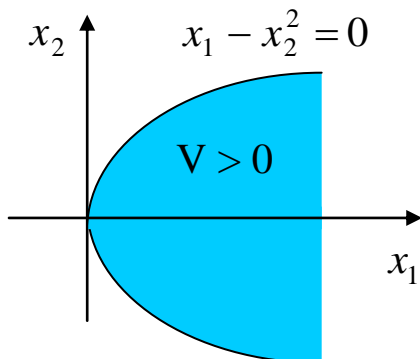


Рис. 4.2

Пусть $V(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$. $\dot{V} = \dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = x_1^3$. Очевидно, $\dot{V}(x) > 0$ в той области на плоскости (x_1, x_2) , где $V(x) > 0$ (рис. 4.2). Значит, выполнены все условия теоремы Четаева, и состояние равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Задание 4

Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y - x + xy \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y \\ \dot{y} = x^6 - y^3 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 5y \\ \dot{y} = -10x - y^3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y(1 - x^2) \\ \dot{y} = -(x + y)(1 - x^2) \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3 \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3 \\ \dot{y} = x^2 - y^3 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \dot{x} = -x - xy \\ \dot{y} = y^3 - x^4 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x^3 + x^2 y \\ \dot{y} = -y + y^2 + xy - x^3 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3 \\ \dot{y} = -16x - y^3 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4xy^2 \\ \dot{y} = y + x^2 y \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^3 \\ \dot{y} = 2x - 3y^3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2 \\ \dot{y} = 2x - y - y^3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = x + x^3 y^4 \\ \dot{y} = y - y^3 x^2 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2 \\ \dot{y} = -2y + 4x^2 y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 - y^3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} = x^2 y - 6y \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = x^4 y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3 y^6 \\ \dot{y} = -0.5x^2 y - 0.25y^3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = 2x - y^2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x - y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y \\ \dot{y} = -x^4 - x^3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \dot{x} = xy^4 - 2x^3 - y \\ \dot{y} = 2x^2 y^3 - y^7 + 2x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 y - 0.25x^5 \\ \dot{y} = x - x^3 - 0.5y^3 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 2xy \\ \dot{y} = x^4 - y^3 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y \\ \dot{y} = x^4 - x^2 y - x^3 \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} \dot{x} = -x - xy \\ \dot{y} = y^3 - x^3 \end{cases}$$

5. Исследование на устойчивость по первому приближению

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Пусть $x = a$ – положение равновесия системы (5.1). Будем предполагать, что функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Разложим каждую из функций f_i в ряд Тейлора в окрестности точки a :

$$f(x) = J(a)(x-a) + g(x), \quad (|g(x)| \leq C|x-a|^2),$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $g(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n)$,

$$J(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (5.1) будет иметь вид:

$$\dot{x} = J(a)(x-a) + g(x), \quad (|g(x)| \leq C|x-a|^2), \quad (5.2)$$

Отбросив в разложении (5.2) нелинейный член $g(x)$, квадратичный по $(x-a)$, получим линейную систему

$$\dot{y} = J(a)y, \quad y = x - a. \quad (5.3)$$

Система (5.3) – линеаризованная в окрестности точки $x=a$ система (5.1), или система линейного приближения (система первого приближения).

Теорема 5.1 (об устойчивости по первому приближению). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x=a$. Если вещественные части всех собственных значений матрицы Якоби $J(a)$ отрицательны, то положение равновесия $x=a$ асимптотически устойчиво по Ляпунову и справедлива оценка

$$|x(t, x_0) - a| \leq N e^{-\alpha t} |x_0 - a|, \quad t \geq 0,$$

где $N > 0, \alpha > 0$ – некоторые положительные постоянные, для всех x_0 достаточно близких к точке $x=a$.

Замечание 5.1. Теорема 5.1 не охватывает так называемый критический случай, когда хотя бы одно собственное значение матрицы $J(a)$ имеет вещественную часть равную нулю, а остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае на устойчивость решения $x=a$ начинают влиять квадратичные члены и исследование на устойчивость по первому приближению невозможно.

Теорема 5.2 (о неустойчивости по первому приближению). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x=a$. Если хотя бы одно собственное значение матрицы Якоби

$J(a)$ имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $x = a$ неустойчиво по Ляпунову.

Замечание 5.2. Теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению остаются справедливыми и в том случае, когда исходная система неавтономная, то есть имеет вид $\dot{x} = f(t, x)$. При этом предполагается, что $f(t, a) \equiv 0$ и система может быть представлена в виде $\dot{x} = f'_x(a)(x - a) + g(t, x)$, $|g(t, x)| \leq C |x - a|^2$.

Пример 5.1.

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5e^{-y} - 4\cos x); \\ \dot{y} = -8e^{-x} + 4 \cdot \sqrt[3]{8-3y}; \\ \dot{z} = -\operatorname{tg} z. \end{cases}$$

Решение. Найдем матрицу Якоби системы:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{4 \sin x}{5e^{-y} - 4 \cos x} & \frac{-5e^{-y}}{5e^{-y} - 4 \cos x} & 0 \\ 8e^{-x} & \frac{-4}{\sqrt[3]{(8-3y)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 z} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение полученной матрицы $(\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 32) = 0$.

Один из корней характеристического уравнения $\lambda_1 = -1$. Два других корня имеют отрицательные вещественные части в следствие гурвицевости полинома $\lambda^2 + 2\lambda + 32$.

Значит, нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 5.2.

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость все состояния равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x^2 - x); \\ \dot{y} = -x^2 + 2y - y^2. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения состояний равновесия решим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - x) = 0 \\ -x^2 + 2y - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = 2; x_3 = 1, y_3 = 1.$$

Итак, рассматриваемая система имеет следующие состояния равновесия: $M_1(0;0)$, $M_2(0;2)$ и $M_3(1;1)$.

Найдем матрицу Якоби системы: $J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x-1}{1+(x^2-x)^2} & 0 \\ -2x & 2-2y \end{pmatrix}$.

Для точки $M_1(0;0)$ матрица Якоби имеет вид $J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Поэтому решение $x = 0, y = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

С помощью пакета Maple построим фазовый портрет рассматриваемой системы в окрестности начала координат.

```
> with(DEtools):
> DEplot([diff(x(t), t) = arctan(x(t)^2 - x(t)), diff(y(t), t) = -x(t)^2 + 2*y(t) - y(t)^2],
[x(t), y(t)], t = -20..20, [[x(0) = 0.1, y(0) = 0.1], [x(0) = -0.1, y(0) = -0.2], [x(0) = -0.2, y(0) = 0.2], [x(0) = 0.4, y(0) = -0.2], [x(0) = 0.2, y(0) = 0.1], [x(0) = -0.15, y(0) = -0.05], [x(0) = -0.1, y(0) = 0.2], [x(0) = 0.15, y(0) = -0.4]], x = -0.5..0.5, y = -0.5..0.5, stepsize = 0.1, method = rkf45, arrows = SLIM, linecolour = magenta, color = x);
```

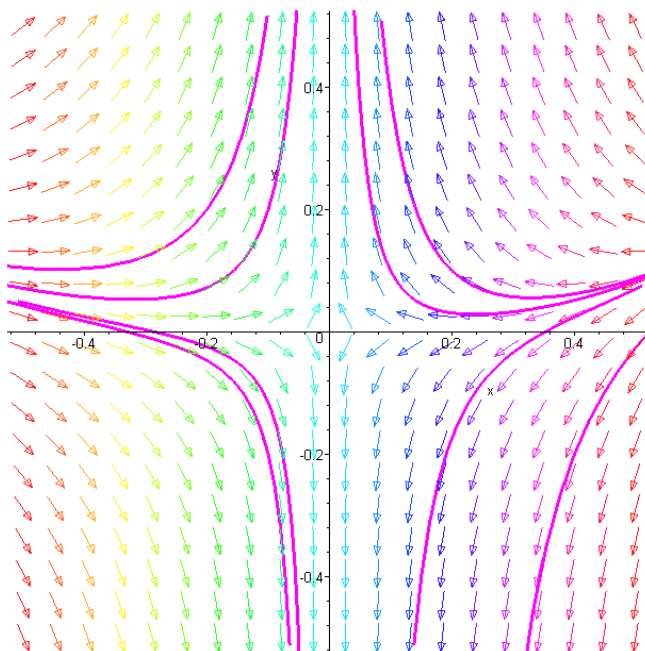


Рис. 5.1. Фазовый портрет системы в окрестности точки $M_1(0;0)$

Для точки $M_2(0;2)$ матрица Якоби имеет вид $J(0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Поэтому решение $x = 0, y = 2$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

С помощью пакета Maple построим фазовый портрет рассматриваемой системы в окрестности точки $M_2(0;2)$.

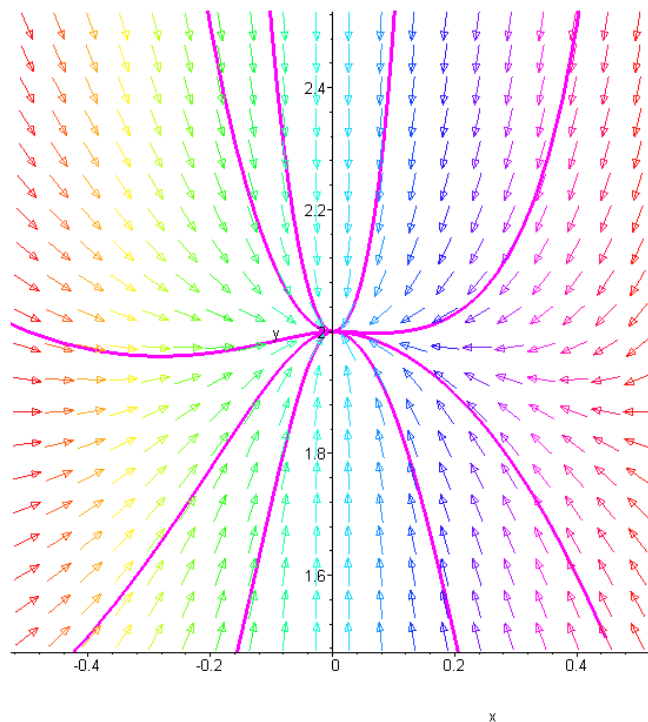


Рис. 5.2. Фазовый портрет системы в окрестности точки $M_2(0;2)$

Для точки $M_3(1;1)$ матрица Якоби имеет вид $J(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ее собственные значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Поэтому решение $x = 1, y = 1$ неустойчиво по Ляпунову.

С помощью пакета Maple построим фазовый портрет рассматриваемой системы в окрестности точки $M_3(1;1)$.

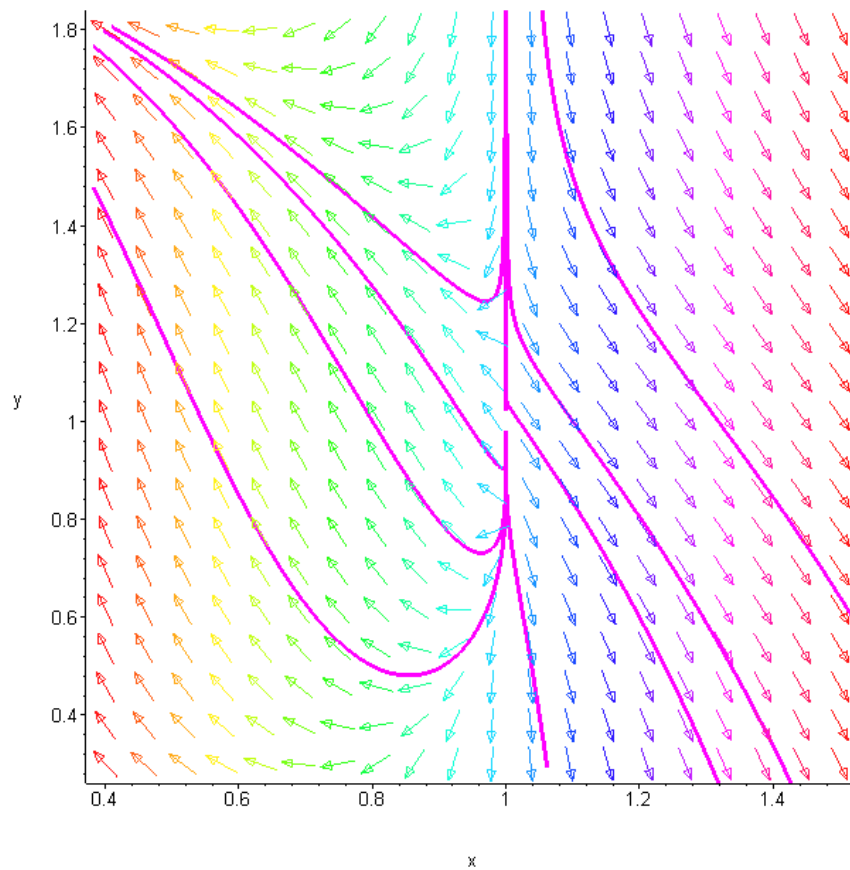


Рис. 5.3. Фазовый портрет системы в окрестности точки $M_3(1;1)$

Пример 5.3.

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению найти значения параметров a и b , при которых асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - ay + 4 \sin(y^2); \\ \dot{y} = \operatorname{tg}(bx) + (2 - a)y. \end{cases}$$

Решение. Система первого приближения в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - ay; \\ \dot{y} = bx + (2 - a)y. \end{cases}$$

Составим соответствующее ей характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -a \\ b & 2 - a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (a - 3)\lambda + 2 + ab - a = 0.$$

Оба корня полученного уравнения будут иметь отрицательные вещественные

части, если выполняются условия $\begin{cases} a > 3; \\ 2 + ab - a > 0. \end{cases}$ Область асимптотической

устойчивости рассматриваемой системы на плоскости (a, b) изображена на расположенном ниже рисунке.

```

> with(plots):
> L1 := implicitplot(2 + a·b - a < 0, a=0..6, b=0..3, coloring=[white, black], thickness=3,
    filledregions=true, legend='b = a - \frac{2}{a}'):
> L2 := inequal(a > 3, a=0..6, b=0..3, optionsfeasible=(color=blue), optionsopen=(color=red,
    thickness=2, linestyle=spacedash), optionsexcluded=(color=white),):
> display({L1, L2}, axes=boxed);

```

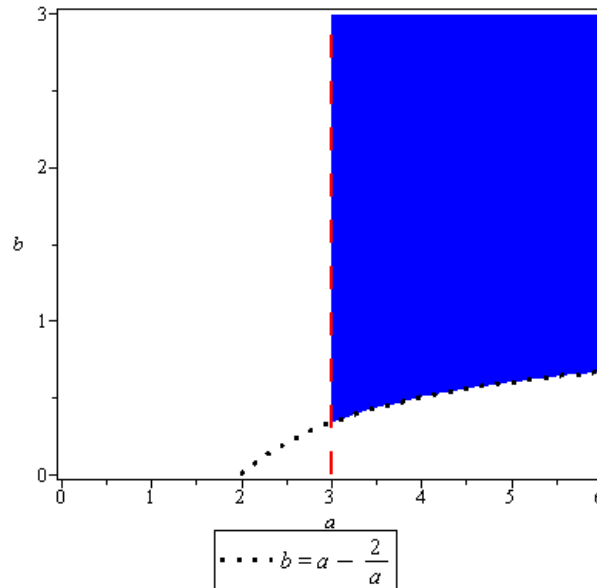


Рис. 5.4. Область асимптотической устойчивости в пространстве параметров

Результаты численного интегрирования рассматриваемой системы показывают, что при $a = 4$, $b = 1$ точка покоя $(0;0)$ является устойчивой (устойчивый фокус), а при $a = 5$, $b = 0,2$ – неустойчивой (точка покоя типа «седло»).

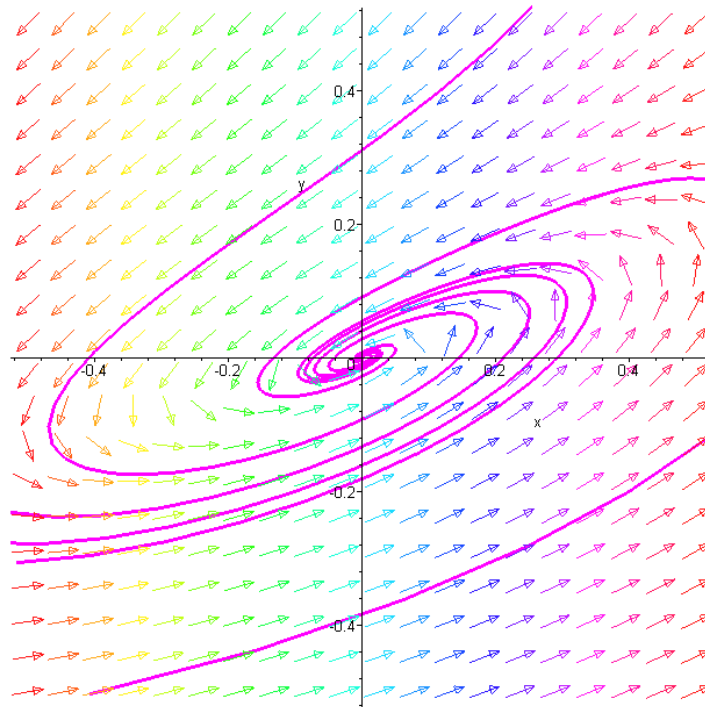


Рис. 5.5. Фазовый портрет системы при $a = 4$, $b = 1$

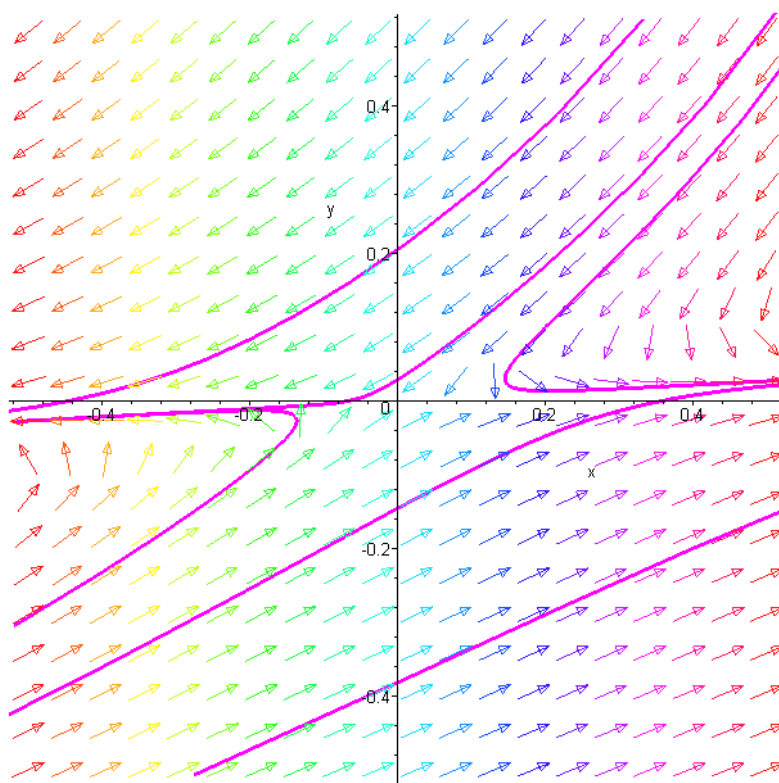


Рис. 5.6. Фазовый портрет системы при $a = 5$, $b = 0,2$

Пример 5.4.

Исследовать на устойчивость решение $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + x^2, \\ \dot{y} = x + 2y - x^2 \sin t. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы первого приближения имеет вид:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво по Ляпунову.

Задание 5

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + \sin y + z \\ \dot{y} = e^{2x} - 1 + 2y + 3z \\ \dot{z} = x + 2y - 5tg z \end{cases}$	2. $\begin{cases} \dot{x} = tg(z - y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$	3. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4\cos y^2 \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = 2.5xe^x - 3y + \sin x^2 \\ \dot{y} = 2x + ye^{-0.5y^2} - y^4 \cos x \end{cases}$	5. $\begin{cases} \dot{x} = 0.25(e^x - 1) - 9y + x^4 \\ \dot{y} = 0.2x - \sin y + y^{14} \end{cases}$	6. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y \end{cases}$	8. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + e^{x+2y} - \cos 2x \\ \dot{y} = 1 + \sqrt{1+2x} - 2e^y - 3y \end{cases}$	9. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x + \sin z \\ \dot{y} = -x + 4ye^y + 5z \\ \dot{z} = e^x - e^{yz} \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z} \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y) \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x) \end{cases}$	11. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4 \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + 2.5x \end{cases}$	12. $\begin{cases} \dot{x} = 0.75 \sin x - 7y\sqrt[3]{1-y} + x^5 \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5 \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$	14. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y-x) \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos(\frac{\pi}{3} - x) \end{cases}$	15. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 - x^4 \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2 \end{cases}$

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость все состояния равновесия системы

16. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x+y^2} - 2 \end{cases}$	17. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$	18. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4+x^2+y} \\ \dot{y} = \ln(x^2-3) \end{cases}$
19. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$	20. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+y+\sin x) \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8} \end{cases}$	21. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x+y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$
22. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x+y) \end{cases}$	23. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1-3x-\sin y} \end{cases}$	

С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению найти значения параметров a и b , при которых асимптотически устойчиво нулевое решение системы:

24. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} = x + y + xy \end{cases}$	25. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2 \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2 \end{cases}$	26. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay} \\ \dot{y} = \ln(1+x+ay) \end{cases}$
27. $\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - ay \\ \dot{y} = 2x + (2-a)y \end{cases}$	28. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2 \\ \dot{y} = x + ay + y^2 \end{cases}$	29. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}$
30. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e+ax) - e^y \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tgy} \end{cases}$	31. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)x^2 \\ \dot{y} = x + ay \end{cases}$	

6. Методы доказательства существования цикла

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), x \in R^2. \quad (6.1)$$

Будем считать, что для этой системы везде в R^2 выполнены условия теоремы существования и единственности решения и имеет место непрерывная зависимость решений от начальных данных. Все эти условия, например, выполнены, если правая часть системы есть дифференцируемая функция везде в R^2 .

Принцип кольца

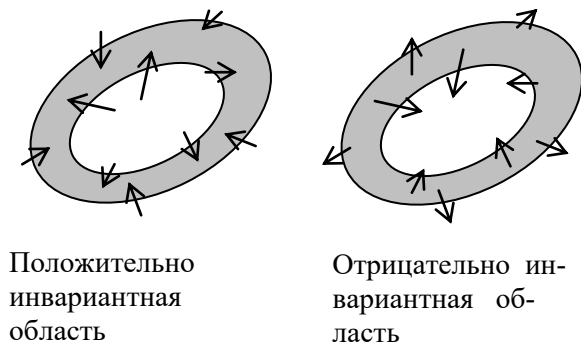


Рис. 6.1

Пусть на плоскости имеется замкнутая кольцеобразная область, ограниченная двумя замкнутыми гладкими кривыми γ_1 и γ_2 (γ_1 и γ_2 не являются траекториями системы (6.1)), такая, что все траектории системы (6.1) входят вовнутрь этой области с ростом t и в дальнейшем не покидают ее (или входят в эту область при убывании t и не покидают ее при $t \rightarrow -\infty$). Такая область называется *положительно (отрицательно) инвариантной* для траекторий системы (рис. 6.1).

Лемма 6.1. Если внутри положительно (отрицательно) инвариантной для траекторий системы (6.1) области нет состояний равновесия системы, то в этой области содержится по крайней мере один цикл системы (6.1).

Существование циклов у систем с единственным положением равновесия

Теорема 6.1. Если все собственные значения матрицы Якоби $J(x)$ системы (6.1) при $x = 0$ имеют положительные вещественные части и система диссипативна, то она имеет по крайней мере один цикл.

Критерии диссипативности

Теорема 6.2. Система $\dot{x} = Ax + \varphi(x, t)$ с гурвицевой матрицей A и ограниченной функцией $\varphi(t, x)$ диссипативна по Левинсону.

Теорема 6.3. Пусть $\int_0^\sigma \psi(\tau) d\tau$ ограничен при всех σ и матрица A гурвицева. Тогда система $\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma)\dot{\sigma}$ ($\varphi(\sigma)$ – скалярная функция переменной $\sigma = c^T x$, b и c – n -векторы.) диссипативна.

Теорема 6.3. Пусть на множестве $\{x : |x| \geq R_1\}$ определена неотрицательная дифференцируемая функция $v(x)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = +\infty$,
- 2) $\dot{v}(x) = (\text{grad } v(x) \cdot f(x)) \leq 0$ при $|x| \geq R_1$,
- 3) среди решений $x(t)$ системы (2.7.8) не существует таких, для которых $\dot{v}[x(t)] \equiv 0$ при $|x| \geq R_1$.

Тогда система (6.1) диссипативна.

Проиллюстрируем на примерах применение леммы 6.1 и теоремы 6.1 для доказательства существования циклов.

Пример 1. Доказать, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - 5y + y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (6.2)$$

имеет цикл.

Покажем, что система (6.2) имеет единственное состояние равновесия $(0;0)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -5x + y + x(x^2 + y^2) = 0, \\ -x - 5y + y(x^2 + y^2) = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5x - y}{x}, \\ -x - 5y + y(x^2 + y^2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5x - y}{x}, \\ -x - 5y + \frac{5xy - y^2}{x} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5x - y}{x}, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $v(x, y) = x^2 + y^2$. Ее производная в силу системы (6.2) имеет вид $\dot{v} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 5)$. Рассмотрим две концентрические окружности $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 7$. На первой из них выполнено условие $\dot{v} < 0$, а на второй $\dot{v} > 0$. Поэтому траектории системы пересекают первую окружность по направлению «к центру», а вторую – по направлению «от центра».

Значит, в фазовом пространстве рассматриваемой системы имеется отрицательно инвариантное кольцо (рис. 6.1), в котором нет точек покоя системы. Согласно лемме 6.1, такая система имеет цикл.

На приведенном ниже рис. 6.1. изображен цикл системы (6.2), найденный путем численного интегрирования, а также траектории, навивающиеся на этот цикл при $t \rightarrow -\infty$ изнутри и снаружи.

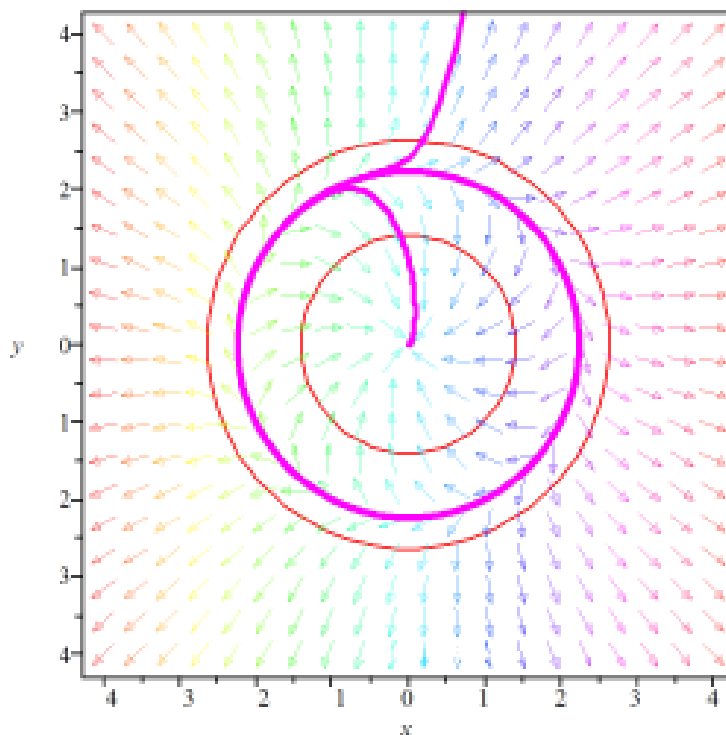


Рис. 6.2. Численное интегрирование системы (6.2)

Пример 2. Доказать, что уравнение $\ddot{x} + \frac{x^4 - 3}{x^4 + 4} \dot{x} + 2x = 0$ имеет цикл.

Решение:

Запишем данное уравнение в виде эквивалентной системы в R^2 , сделав замену $x = x_1, \dot{x} = x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{3 - x_1^4}{x_1^4 + 4} \cdot x_2 - 2x_1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Покажем, что система (6.3) имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0;0)$:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \frac{3 - x_1^4}{x_1^4 + 4} \cdot x_2 - 2x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Составим якобиан системы и найдем его значение в точке $(0;0)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{-(x_1^4 + 4) + 7}{x_1^4 + 4} \cdot x_2 - 2x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + \frac{7x_2}{x_1^4 + 4}. \end{cases}$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \frac{28x_1^3 \cdot x_2}{(x_1^4 + 4)^2} & -1 + \frac{7}{x_1^4 + 4} \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + 2 = 0$$

Оба корня характеристического уравнения имеют положительные вещественные части.

Значит, система (6.3) имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0;0)$.

Докажем, что система диссипативна.

Очевидно, что систему можно записать в виде $\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma)\dot{\sigma}$, где $\sigma = c^T x$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \sigma = x_1, \varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma^4 + 4}.$$

Характеристический полином линейной части системы $\lambda^2 + \lambda + 2$ гурвицев.

Докажем ограниченность интеграла $\int_0^\sigma \varphi(t) dt = \int_0^\sigma \frac{dt}{t^4 + 4}$.

$$\int_0^\sigma \frac{dt}{t^4 + 4} < \int_0^\infty \frac{dt}{t^4 + 4}$$

Интеграл $\int_0^\infty \frac{dt}{t^4 + 4}$ сходится, так как выполнено условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{t^4 + 4} = 1 \neq 0$.

Значит, система (6.3) диссипативна согласно теореме 6.3.

Таким образом, по теореме 6.1 система (6.4) по крайней мере один цикл.

На рис. 6.3 представлены результаты численного интегрирования системы (6.3).

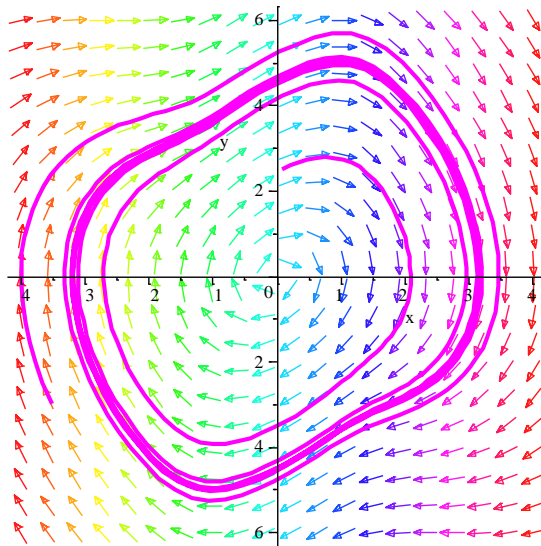


Рис. 6.3. Численное интегрирование системы (6.3)

Пример 3. Доказать, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + \frac{20x}{x^2 + 8} \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (6.4)$$

имеет цикл.

Решение:

Покажем, что система (6.4) имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0;0)$:

$$\begin{cases} x = 0, \\ -2x - 3y + \frac{20x}{x^2 + 8} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Составим якобиан системы и найдем его значение в точке $(0;0)$.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2 + 20 \cdot \frac{8 - x^2}{(x^2 + 8)^2} & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + 3 = 0$$

Оба корня характеристического уравнения имеют положительные вещественные части.

Значит, система имеет единственное неустойчивое состояние равновесия $(0;0)$.

Докажем, что система диссипативна.

Система имеет вид $\dot{x} = Ax + \varphi(x)$. Матрица A для рассматриваемой системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический полином $\lambda^2 + 2\lambda + 3$ гурвицев, а функция $\frac{20x}{x^2 + 8}$ ограничена.

Значит, система диссипативна согласно теореме 6.2.

Таким образом, все собственные значения матрицы Якоби $J(x, y)$ системы в точке $(0;0)$ имеют положительные вещественные части и система диссипативна, следовательно, она имеет по крайней мере один цикл.

На рис. 6.4 представлены результаты численного интегрирования системы (6.4).

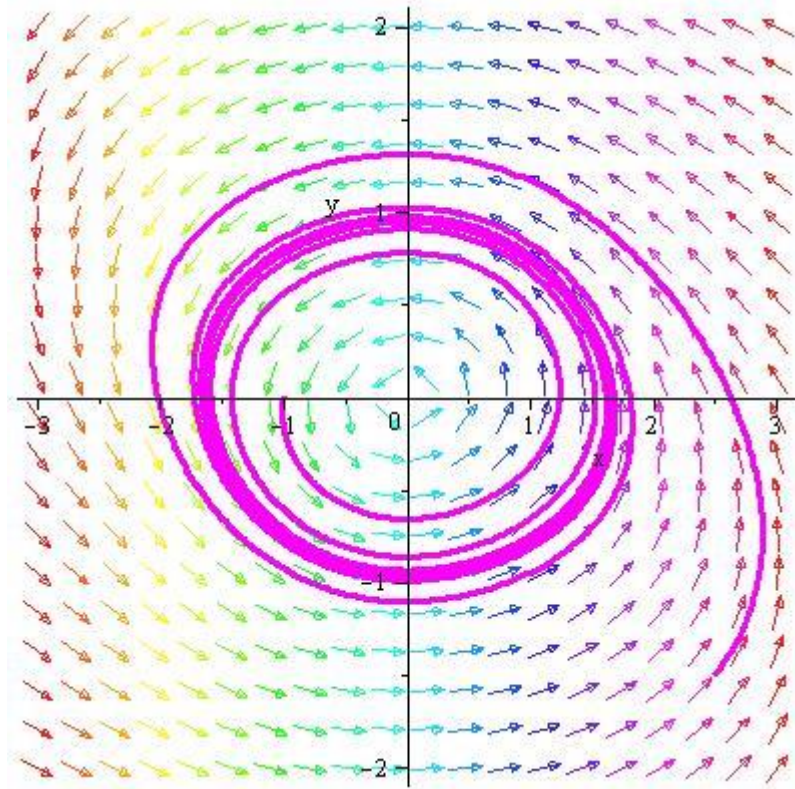


Рис. 6.4. Численное интегрирование системы (6.4)

Задание 6

Используя теорему Пуанкаре-Бендиксона, доказать существование цикла у уравнения или системы

1. $\ddot{x} + [2 + e^{-2x^2}(x-3)]\dot{x} + 5x = 0$	2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 3x - 0.5y - \frac{4y}{y^2 + 2} \end{cases}$	3. $\ddot{x} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\dot{x} + x = 0$
4. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = (x^4 + y^2 - 4)y + x \end{cases}$	5. $\begin{cases} \dot{x} = -0.1x + 2y + \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$	6. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y - 2y^2(x + 2y) \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = y - x(4 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = -x - y(4 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases}$	8. $\ddot{x} + (x^2 + e^{x^2} - 2)\dot{x} + x = 0$	9. $\ddot{x} + \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 + 2}\dot{x} + 8x = 0$
10. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 3\sqrt{2}\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \dot{y} = -0.2x \end{cases}$	11. $\ddot{x} + \left[1 - \frac{2 + \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1}\right]\dot{x} + x = 0$	12. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + 2\operatorname{arctg} x \\ \dot{y} = -3x \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = -(3 - 2\sqrt{x^2 + 2y^2})y + x \end{cases}$	14. $\ddot{x} + (\sqrt{x^2 + \dot{x}^2} - 8)\dot{x} + x = 0$	15. $\ddot{x} + [1 + (x^2 - 3)e^{-x^2}]\dot{x} + x = 0$
16. $\ddot{x} - (5^{x^2 + \dot{x}^2} - 8)\dot{x} + x = 0$	17. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \left(e^{\sqrt{2x^2 + y^2}} - 2\right)y + x \end{cases}$	18. $\ddot{x} + \left(3 - \frac{17 - 2\operatorname{arctg} x}{x^2 + 4}\right)\dot{x} + 0.8x = 0$
19. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \frac{y}{3} + xe^{-x^2 - y^2} \\ \dot{y} = -9x + y + ye^{-x^2 - y^2} \end{cases}$	20. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \frac{y}{3} + xe^{-x^2 - y^2} \\ \dot{y} = -9x + y + ye^{-x^2 - y^2} \end{cases}$	21. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (4 - y^2 - 3x^2)y - x \end{cases}$
22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + 3y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$	23. $\ddot{x} + \frac{x^4 - 1}{x^4 + x^2 + 1}\dot{x} + \frac{7}{8}x = 0$	24. $\ddot{x} + \frac{x^4 - 1}{x^4 + 2}\dot{x} + 3x = 0$
25. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - 4y + y(x^2 + y^2) \end{cases}$	26. $\ddot{x} + \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 3}\dot{x} + 2x = 0$	27. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - x^3 + x^2 \\ \dot{y} = -y - 4x \end{cases}$
28. $\ddot{x} + \left(2 - \frac{9 + x}{\sqrt{x^6 + 16}}\right)\dot{x} + 1.2x = 0$	29. $\begin{cases} \dot{x} = y + (x + 1)^2 e^{-x^2} - x - 1 \\ \dot{y} = -3x \end{cases}$	30. $\begin{cases} \dot{x} = -0.1x - y \\ \dot{y} = x + 2y - y^3 + y^2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(2 - 3x^2 - 2y^2) \end{cases}$		
---	--	--

7. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.

Неавтономные уравнения.

Метод Пуанкаре предназначен для построения периодических решений нелинейных систем, дифференциальные уравнения которых содержат малый параметр μ . При этом предполагается, что обращение в нуль малого параметра не понижает порядка системы.

Метод Пуанкаре базируется на двух положениях:

1) порождающая система, т.е. система, получающаяся из исходной при $\mu=0$, содержит периодические решения с некоторым периодом, частным случаем которых могут быть постоянные величины;

2) периодические решения исходной системы строятся при помощи подбора начальных данных всех входящих в систему неизвестных функций.

Начнем с решения следующей задачи: требуется найти периодическое решение периода T дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (7.1)$$

Заметим, что если решение уравнения (7.1) имеет период T , то $x(t+T) \equiv x(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t+T)$, то есть функция $f(t)$ обязана быть периодической с периодом T . Выполнив в (7.1) замену времени $t_1 = \frac{2\pi}{T}t$ и положив

$$f_1(t_1) = f\left(\frac{t_1 T}{2\pi}\right), \text{ получим}$$

$$f_1(t_1 + 2\pi) = f\left(\frac{(t_1 + 2\pi)T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{t_1 T}{2\pi} + T\right) = f(t+T) = f(t) = f_1(t_1).$$

То есть новая правая часть в новом времени будет 2π -периодической функцией. Поэтому правую часть уравнения (2.9.1) можно без ограничения общности считать 2π -периодической функцией.

Будем считать, что функция $f(t)$ непрерывна и может быть разложена в сходящийся ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (7.2)$$

Пользуясь принципом суперпозиции, частное решение уравнения (7.1) будем искать в виде ряда

$$\bar{x}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \quad (7.3)$$

Дифференцируя ряд (7.3) почленно два раза и подставляя в (7.1), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \right) \omega^2 =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках слева и справа в последней формуле, будем иметь

$$A_0 \omega^2 = a_0, A_k (\omega^2 - k^2) = a_k, B_k (\omega^2 - k^2) = b_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{\omega^2}, A_k = \frac{a_k}{\omega^2 - k^2}, B_k = \frac{b_k}{\omega^2 - k^2}.$$

Тогда

$$\bar{x}(t) = \frac{a_0}{2\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{\omega^2 - k^2} \quad (7.4)$$

Из предположения о непрерывности $f(t)$ следует, что ряд (7.4) можно почленно дифференцировать. Поэтому ряд (7.4) есть решение уравнения (7.1), если только $\omega^2 \neq k^2$ ни для какого k . Если же число ω целое ($\omega = k$), то соответствующее слагаемое в правой части (7.4) обращается в ∞ , и периодическое решение не существует.

Полученный результат можно было легко предугадать, если вспомнить, что при $\omega = k$ линейное уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = a \cos kt + b \sin kt$ имеет решение вида $\bar{x}(t) = t(A \cos kt + B \sin kt)$, не являющееся периодическим.

Из приведенных рассуждений вытекает следующий вывод: если ω не является целым числом, а $f(t)$ — 2π -периодическая функция, то уравнение (7.1) всегда имеет 2π -периодическое решение, доставляемое формулой (7.4). Если же $\omega = k$ — целое число, то 2π -периодическое решение уравнения (7.1) существует лишь в том случае, когда в разложении функции $f(t)$ в ряд Фурье отсутствуют «резонирующие члены» a_k и b_k , то есть если:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt = 0. \quad (7.5)$$

Если $\omega = k$ и выполнено условие (7.5), то уравнение (7.1) имеет бесконечное число 2π -периодических решений, которые даются формулой:

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{a_0}{2\omega^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos mt + b_m \sin mt}{\omega^2 - m^2}.$$

Если же $\omega \neq k$ ($\forall k \in N$), то уравнение (7.1) имеет единственное периодическое решение (7.4).

Пример 7.1. Существуют ли периодические решения уравнения $\ddot{x} + 4x = \sin^2 t$?

Здесь $\omega = 2$ — целое число.

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos 2t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \cos 2t dt \neq 0,$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin 2t dt = 0.$$

Так как условия $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ не выполняются, то периодического решения у рассматриваемого уравнения нет.

Аналитическая зависимость решений от параметров.

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.6)$$

$$x_i(0) = a_i(\mu),$$

где μ является параметром.

Теорема 7.1. Если в системе (7.6) функции f_i непрерывны по переменной t , а также функции f_i и a_i аналитические функции параметра μ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, то решение $x(t)$ ($x(t) \in R^n$) этой системы разлагается в сходящийся при малых μ ряд по степеням параметра μ :

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots + \mu^n x_n(t) + \dots \quad (7.7)$$

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко и здесь опущено.

Метод разложения решения по степеням малого параметра лежит в основе многих приемов исследования нелинейных колебаний с малой нелинейностью.

Рассмотрим следующую задачу: найти периодическое решение уравнения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}) \quad (7.8)$$

с 2π -периодическими по переменной t функциями $f(t)$ и $F(t, x, \dot{x})$, считая, что 2π -периодическое решение $x_0(t)$ порождающего уравнения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad (7.9)$$

существует и нам известно. Считая, что функция $F(t, x, \dot{x})$ непрерывна по t и является аналитической по переменным x и \dot{x} , на основании приведенной выше теоремы, будем искать решение уравнения (7.8) в виде ряда (7.7).

Разложим функцию $F(t, x, \dot{x})$ в ряд по степеням $(x - x_0), (\dot{x} - \dot{x}_0)$ в окрестности точки $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$

Для определения $x_1(t)$ имеем второе уравнение из (7.11). Оно будет иметь периодическое решение, если

$$\int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0) \cos ntdt = 0, \quad \int_0^{2\pi} F(t, x_0, \dot{x}_0) \sin ntdt = 0. \quad (7.13)$$

Уравнения (7.13) содержат C_{10}, C_{20} , которые, вообще говоря, определяются из этой системы. Если C_{10}, C_{20} удовлетворяют системе (7.13), то все решения второго уравнения в (7.11) будут периодическими с периодом 2π и будут иметь вид:

$$x_1(t) = C_{11} \cos nt + C_{21} \sin nt + \varphi_1(t) \quad (7.14)$$

При этом C_{11}, C_{21} опять определяются из двух условий, аналогичных (7.12) и (7.13), для третьего уравнения из (7.11). И так далее.

Как мы видим, в случае 2) (резонансный случай), вообще говоря, не любому 2π -периодическому решению порождающего уравнения соответствует периодическое решение уравнения (7.8), задаваемое рядом (7.7), которое при $\mu \rightarrow 0$ сходится к решению порождающего уравнения. Существование подобного решения нужно доказать. Такое доказательство составляет содержание известной теоремы Пуанкаре. Но это доказательство очень громоздко и здесь не приводится.

Пример 7.2. Найти приближенно периодическое решение уравнения:

$$\ddot{x} + 2x = \sin 2t + \mu \dot{x}^2, \quad \text{где } \mu - \text{малый параметр.}$$

Решение будем искать в виде ряда по степеням малого параметра, то есть в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \mu \dot{x}_1(t) + \mu^2 \dot{x}_2(t) + \dots$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \mu^2 \ddot{x}_2(t) + \dots$$

Подставим ряды в исходное уравнение

$$(\ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \mu^2 \ddot{x}_2(t) + \dots) + 2(x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots) =$$

$$= \sin 2t + \mu(\dot{x}_0^2 + \mu^2 \dot{x}_1^2 + \mu^4 \dot{x}_2^2 + 2\mu \dot{x}_0 \dot{x}_1 + 2\mu^2 \dot{x}_0 \dot{x}_2 + 2\mu^3 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dots)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{aligned} \mu^0 \left| \begin{aligned} \ddot{x}_0 + 2x_0 &= \sin 2t \\ \mu^1 \left| \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2x_1 &= \dot{x}_0^2 \\ \mu^2 \left| \begin{aligned} \ddot{x}_2 + 2x_2 &= 2\dot{x}_0 \dot{x}_1 \\ \dots \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned} \right. \quad (7.15)$$

Поскольку $\omega = \sqrt{2}$, порождающее уравнение имеет единственное периодическое решение, которое будем искать в виде:

$$x_0 = A \sin 2t + B \cos 2t.$$

После двукратного дифференцирования и подстановки в первое уравнение (7.15), получим:

$$-4A \sin 2t - 4B \cos 2t + 2A \sin 2t + 2B \cos 2t = \sin 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} \sin 2t.$$

Для отыскания x_1 имеем уравнение

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \cos^2 2t = \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)$$

Будем искать x_1 в виде:

$$x_1 = M + N \cos 4t + L \sin 4t$$

После двукратного дифференцирования и подстановки в уравнение получим:

$$-14N \cos 4t - 14L \sin 4t + 2M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4t \Rightarrow N = -\frac{1}{28}, L = 0, M = \frac{1}{4}.$$

Итак, $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{28} \cos 4t$.

Подставим найденные функции x_0 и x_1 в правую часть последнего уравнения (7.15). Тогда оно примет вид

$$\ddot{x}_2 + 2x_2 = -\frac{2}{7} \cos 2t \sin 4t = -\frac{1}{7} \sin 6t - \frac{1}{7} \sin 2t. \quad (7.16)$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде

$$x_2 = A \sin 6t + B \cos 6t + C \sin 2t + D \cos 2t.$$

После двукратного дифференцирования последнего выражения и подстановки в уравнение (7.16), находим

$$A = \frac{1}{266}, B = 0, C = \frac{1}{42}, D = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{266} \sin 6t + \frac{1}{42} \sin 2t.$$

Итак, справедливо приближенное равенство

$$x(t) \approx -\frac{1}{2} \sin 2t + \mu \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{28} \cos 4t \right) + \mu^2 \left(\frac{1}{266} \sin 6t + \frac{1}{42} \sin 2t \right). \quad (7.17)$$

Используя пакет Mathcad, сравним полученное решение (7.17) с точным решением исходного уравнения на периоде $[0, 2\pi]$. Для этого найдем для решения (7.17) значения $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, после чего найдем решение исходного уравнения с заданными начальными условиями, например, методом Рунге-Кутты. Результаты расчетов приведены ниже.

Исследуемое уравнение: $\ddot{x} + 2x = \sin 2t + \mu(\dot{x})^2$

$$\mu := 0.5$$

$$y(t) := \frac{-1}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) + \left[\mu \cdot (0.25 - 0.035714 \cos(4 \cdot t)) + \right. \\ \left. \mu^2 \cdot (0.00376 \sin(6 \cdot t) - 0.02381 \sin(2t)) \right]$$

$$g(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$t := 0, 0.01 \dots 2 \cdot \pi$$

$$x := \begin{pmatrix} y(0) \\ g(0) \end{pmatrix} \quad D(\tau, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ -2 \cdot x_0 + \mu \cdot (x_1)^2 + \sin(2 \cdot \tau) \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(x, 0, 2 \cdot \pi, 300, D) \quad i := 0 \dots 300$$

График для $\mu=0.5$ (жирная линия – решение методом Рунге-Кутты)

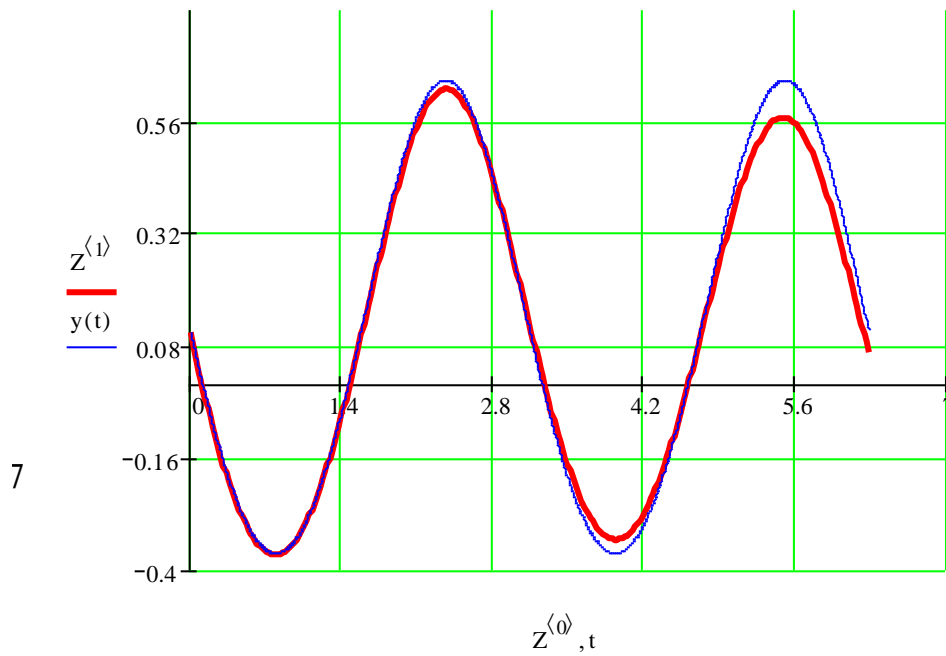
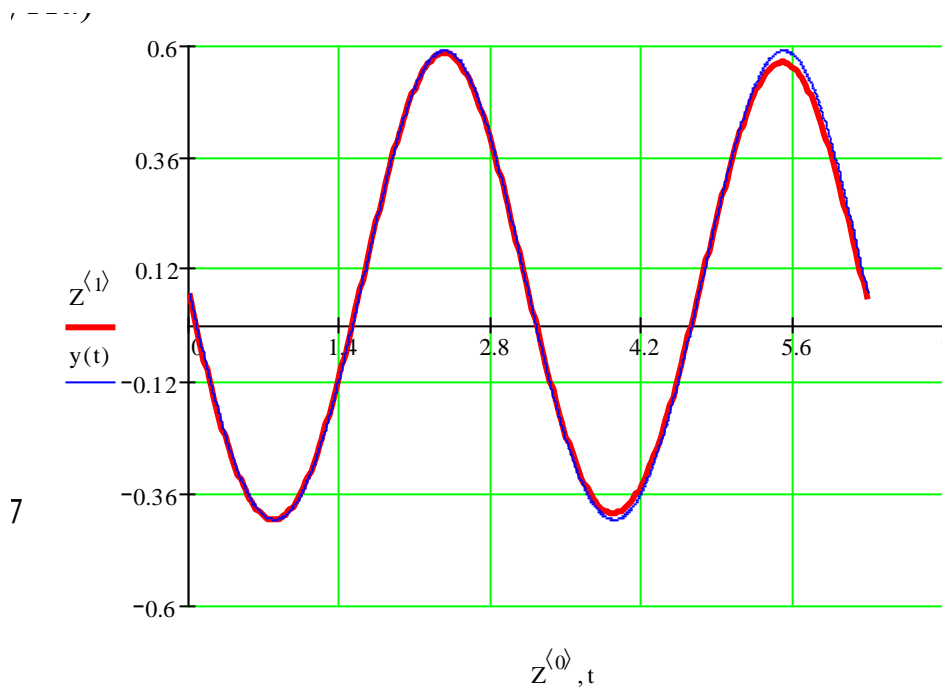


График для $\mu=0.3$ (жирная линия – решение методом Рунге-Кутты)



Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.

Автономные уравнения

Пусть задано уравнение, правая часть которого не зависит явно от t :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F(x, \dot{x}). \quad (8.1)$$

Отсутствие t в правой части приводит к усложнению задачи, так как период искомого решения оказывается неизвестным. Он будет, вообще говоря, зависеть от параметра μ .

Для решения задачи в этом случае нужно преобразовать уравнение к новой независимой переменной так, чтобы по новой переменной уравнение уже имело постоянный период, а уже затем искать решение в виде ряда по параметру μ .

Предварительно выполним в (8.1) замену времени, положив $t_1 = \omega t$. Тогда в новом времени уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + x = \mu F_1(x, \dot{x}), \quad (8.2)$$

где производные \dot{x} и \ddot{x} вычислены по переменной t_1 , а $F_1(x, \dot{x}) = F\left(x, \omega \frac{dx}{dt_1}\right)$.

При $\mu=0$ порождающее уравнение $\ddot{x} + x = 0$ имеет 2π -периодическое решение вида $x(t_1) = C \cos(t_1 - t_0)$, удовлетворяющее начальным условиям

$x(t_0) = C, \dot{x}(t_0) = 0$. Периодические решения уравнения (8.2), если они существуют, будут иметь период $2\pi + \alpha(\mu)$, причем $\alpha(\mu)$ – аналитическая функция μ и $\alpha(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Пусть:

$$\alpha(\mu) = \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \dots + \alpha_n\mu^n + \dots.$$

Тогда:

$$2\pi + \alpha(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots), \text{ где } h_i = \frac{\alpha_i}{2\pi}.$$

Преобразуем уравнение (8.2) так, чтобы его решение $x(t, \mu)$ имело постоянный период 2π . Этого можно добиться заменой переменных:

$$t_1 = \tau(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots) \quad (8.3)$$

Действительно, если t_1 меняется от 0 до $2\pi + \alpha(\mu)$, то τ меняется от 0 до 2π .

В новых переменных уравнение (8.2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 x = \\ & = \mu(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^2 \times \\ & \times F_1(x, (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots + h_n\mu^n + \dots)^{-1} \dot{x}), \end{aligned} \quad (8.4)$$

где все производные вычислены по переменной τ .

Периодическое решение уравнения (8.4) будем искать в виде ряда

$$x(\tau, \mu) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \dots + \mu^n x_n(\tau) + \dots, \quad (8.5)$$

где все $x_i(\tau)$ – 2π -периодические функции переменной τ . Подставляя (8.5) в уравнение (8.4), получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0(\tau) + \mu \ddot{x}_1(\tau) + \mu^2 \ddot{x}_2(\tau) + \dots + (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots)^2 \times \\ & \times (x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots) = \\ & = \mu(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots)^2 F_1[(x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots), (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots)^{-1} \times \\ & \times (\dot{x}_0(\tau) + \mu \dot{x}_1(\tau) + \mu^2 \dot{x}_2(\tau) + \dots)] \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ в левой и правой частях последнего равенства, последовательно получим:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \Rightarrow x_0 = C \cos(\tau - t_0) \\
\ddot{x}_1 + x_1 &= -2h_1 x_0 + F_1(x_0, \dot{x}_0) = \\
&= -2h_1 C \cos(\tau - t_0) + F_1(C \cos(\tau - t_0), -C \sin(\tau - t_0)) \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Для того, чтобы второе уравнение в (8.6) имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы в его правой части отсутствовали резонирующие члены, то есть чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F_1[C \cos(\tau - t_0), -C \sin(\tau - t_0)] \sin(\tau - t_0) d\tau = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \{-2h_1 C \cos^2(\tau - t_0) + F_1[C \cos(\tau - t_0), -C \sin(\tau - t_0)] \cos(\tau - t_0)\} d\tau = \\
&= -2\pi h_1 C + \int_0^{2\pi} F_1[C \cos(\tau - t_0), -C \sin(\tau - t_0)] \cos(\tau - t_0) d\tau = 0
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Первое из этих уравнений дает возможность найти C (начальное условие периодического решения), а второе – найти h_1 . Таким образом, будет приближенно определен период искомого периодического решения:

$$2\pi + \alpha(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1 \mu).$$

Зная C и h_1 , можно определить $x_1(\tau)$ и, если это необходимо, $x_2(\tau), x_3(\tau)$ и так далее.

Пример 8.1. Определить решения порождающего уравнения, к которым при $\mu \rightarrow 0$ приближаются периодические решения уравнения:

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x}(9 - x^2) \tag{8.8}$$

Решения порождающего уравнения имеют вид $x(t) = C \cos(t - t_0)$. Для определения искомых значений C воспользуемся первым из уравнений (8.7):

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} C(9 - C^2 \cos^2(t - t_0)) \sin^2(t - t_0) dt = 0 \Rightarrow \pi C(9 - \frac{C^2}{4}) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow C_1 = 0, C_{2,3} = \pm 6.
\end{aligned}$$

При $C=0$ получаем тривиальное решение $x \equiv 0$ порождающего уравнения, которое остается решением уравнения (8.8) при любом μ .

При $C_{2,3} = \pm 6$ получаем $x = \pm 6 \cos(t - t_0)$.

Теорема Ляпунова и несколько практических замечаний

Теорема Ляпунова выделяет класс систем, у которых в некоторой окрестности состояния равновесия существует периодическое решение и дает метод отыскания этого решения.

Теорема 8.1. Если уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = f(x, \dot{x})$ обладает аналитическим первым интегралом $H(x, \dot{x}) = \text{const}$, причем разложение $H(x, \dot{x})$ в окрестности точки $x = 0, \dot{x} = 0$ начинается с членов второго порядка малости:

$$H(x, \dot{x}) = a_{11}x^2 + a_{12}x\dot{x} + a_{22}\dot{x}^2 + \dots,$$

то все решения уравнения с достаточно малыми начальными условиями $x(0) = c, \dot{x}(0) = 0$ есть периодические функции t . Каждое такое решение является аналитической функцией параметра c .

Сформулированная теорема позволяет искать период периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(x, \dot{x})$$

в виде

$$T = 2\pi(1 + ch_1 + c^2h_2 + c^3h_3 + \dots)$$

и вводить новое время по формуле

$$t = \tau(1 + ch_1 + c^2h_2 + c^3h_3 + \dots), \quad (8.9)$$

не вводя малого параметра μ . При этом решение $x(\tau)$ следует искать в виде ряда

$$x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(\tau) \quad (8.10)$$

Заметим, что если в уравнении не присутствует явно малый параметр и при этом в окрестности состояния равновесия выполнены условия теоремы Ляпунова, то для поиска периодического решения можно либо воспользоваться его разложимостью в ряд по начальным отклонениям c (формулой (8.10)), либо ввести малый параметр и использовать разложение по степеням малого параметра.

Пример 8.2. Найти приближенно периодическое решение уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0, \quad x(0) = c, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (8.11)$$

Для решения задачи можно ввести малый параметр:

$$x = \mu y \Rightarrow \mu \ddot{y} + \mu y = \mu^3 y^3 \Rightarrow \ddot{y} + y = \mu^2 y^3.$$

Здесь μ считаем малым. Теперь можно воспользоваться рассмотренной выше процедурой отыскания решения уравнения с малым параметром.

Заметим, что уравнение Дуффинга обладает аналитическим первым интегралом, для которого выполнены условия теоремы Ляпунова:

$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = C$. Поэтому данное уравнение можно решать, выполнив замену переменных (8.9) и отыскивая решение в виде ряда (8.10) по степеням начального возмущения c .

Выполним замену (8.9). Тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} \frac{1}{(1 + ch_1 + c^2 h_2 + \dots)^2}$$

и уравнение примет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = (x^3 - x)(1 + 2ch_1 + 2c^2 h_2 + c^2 h_1^2 + c^4 h_2^2 + 2c^3 h_1 h_2 + \dots) \quad (8.12)$$

Решение $x(\tau)$ будем искать в виде ряда (8.10). После двукратного дифференцирования и подстановки этого ряда в уравнение (8.12) будем иметь:

$$c\ddot{x}_1 + c^2\ddot{x}_2 + c^3\ddot{x}_3 + \dots = (c^3 x_1^3 + 3c^2 x_1^2 \cdot c^2 x_2 + 3cx_1 \cdot c^4 x_2^2 + c^6 x_2^3 + \dots - \\ - cx_1 - c^2 x_2 - c^3 x_3)[1 + 2ch_1 + c^2(2h_2 + h_1^2) + 2c^3 h_1 h_2 + c^4 h_2^2].$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях c в обеих частях последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -x_2 - 2x_1 h_1 \\ \ddot{x}_3 &= -x_3 - x_1(2h_2 + h_1^2) + x_1^3 - 2h_1 x_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (8.13)$$

Начальные условия для этих уравнений определяются так:

$$x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0 \quad (8.14)$$

Первое из уравнений (8.13) будет иметь общее решение вида $x_1(\tau) = A \cos \tau + B \sin \tau$. Из начальных условий находим, что $A = 1, B = 0$. Итак, $x_1(\tau) = \cos \tau$. Второе уравнение тогда примет вид

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2h_1 \cos \tau.$$

Для того, чтобы это уравнение имело периодическое решение, в его правой части должны отсутствовать резонирующие члены. Это имеет место лишь при $h_1 = 0$. Таким образом, для x_2 получаем уравнение $\ddot{x}_2 + x_2 = 0$, из которого, с учетом начальных условий (8.14), находим $x_2(\tau) \equiv 0$.

Для $x_3(\tau)$ получаем уравнение

$$\ddot{x}_3 + x_3 = -2h_2 \cos \tau + \cos^3 \tau.$$

Запишем условия отсутствия резонирующих членов в правой части этого уравнения:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (-2h_2 \cos \tau + \cos^3 \tau) \cos \tau d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-2h_2 \cos \tau + \cos^3 \tau) \sin \tau d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Второе из выписанных соотношений всегда выполнено, а первое дает условие

$$\pi\left(\frac{3}{4} - 2h_2\right) = 0 \Rightarrow h_2 = \frac{3}{8}.$$

Итак, $x_3(\tau)$ следует искать из уравнения:

$$\ddot{x}_3 + x_3 = -\frac{3}{4} \cos \tau + \cos^3 \tau = -\frac{1}{4} \cos 3\tau.$$

Отыскивая 2π -периодическое решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x_3(0) = 0$, $\dot{x}_3(0) = 0$, получим:

$$x_3(\tau) = \frac{1}{32} \cos \tau - \frac{1}{32} \cos 3\tau.$$

Итак,

$$x(\tau) = c \cos \tau + c^3 \left(\frac{1}{32} \cos \tau - \frac{1}{32} \cos 3\tau \right) + o(c^4).$$

Учитывая (8.9), окончательно получим

$$\begin{aligned} x(t) &\approx c \cos \left(\frac{t}{1 + \frac{3}{8}c^2 + o(c^3)} \right) + \\ &+ c^3 \left[\frac{1}{32} \cos \left(\frac{t}{1 + \frac{3}{8}c^2 + o(c^3)} \right) - \frac{1}{32} \cos 3 \left(\frac{t}{1 + \frac{3}{8}c^2 + o(c^3)} \right) \right] + o(c^3) \end{aligned}$$

Пример 8.3. Найти приближенно периодическое решение уравнения:

$$\ddot{x} + x = \mu(4 - x^2)\dot{x}$$

Выполним замену времени $t = \tau(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots h_n\mu^n + \dots)$. Тогда в

новом времени исходное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots h_n\mu^n + \dots)^2 x = \\ = \mu(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \dots h_n\mu^n + \dots)(4 - x^2)\dot{x} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Решение уравнения (8.15) будем искать в виде ряда (8.5). При этом будем искать решение с начальными условиями $x(0) = c, \dot{x}(0) = 0$. Тогда:

$$x_0(0) = c, \dot{x}_0(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0.$$

Здесь $x_0(\tau)$ – решение порождающего уравнения, то есть уравнения (8.15) при $\mu = 0$. Поэтому $x_0(\tau) = c \cos \tau$.

Сравнивая коэффициенты при μ^1 в обеих частях равенства (8.15), найдем

$$\ddot{x}_1 + x_1 = (4 - x_0^2)\dot{x}_0 - 2h_1x_0$$

Учитывая вид $x_0(\tau)$, получим

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -(4 - c^2 \cos^2 \tau)c \sin \tau - 2h_1c \cos \tau \quad (8.16)$$

Найдем условия существования периодического решения у уравнения (8.16). Для этого запишем соотношения (8.7). Чтобы записать это соотношение, нужно последовательно умножить правую часть уравнения (8.16) на $\sin \tau$ и $\cos \tau$ и, проинтегрировав полученные выражения, приравнять интегралы к нулю. В данном случае (убедиться в этом самостоятельно) результатом реализации описанных операций будут соотношения:

$$c \left(4 - \frac{1}{4}c^2 \right) = 0, h_1 = 0.$$

Таким образом, $c = 0$ или $\dot{h} = \pm 4$. Для $c = 0$ получаем тривиальное решение порождающего уравнения, которое остается решением исследуемого уравнения при любом μ . Для $c = 4$ получаем периодическое решение порождающего уравнения $x_0(\tau) = 4 \cos \tau$. Тогда для определения $x_1(\tau)$ будем иметь уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 = -(4 - 16 \cos^2 \tau)4 \sin \tau = -16 \left(1 - 4 \frac{1 + \cos 2\tau}{2} \right) \sin \tau = \\ = 16(\sin \tau + 2 \cos 2\tau \sin \tau) = 16 \sin 3\tau. \end{aligned}$$

Итак, для $x_1(\tau)$ получаем уравнение

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 16 \sin 3\tau. \quad (8.17)$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид:

$$x_1(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau + A \sin 3\tau + B \cos 3\tau.$$

Дважды дифференцируя это выражение и подставляя в (8.17), найдем значения A и B :

$$A = -2, B = 0 \Rightarrow x_1(\tau) = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau - 2 \sin 3\tau.$$

Используя начальное условие $\dot{x}_1(0) = 0$, находим $C_2 = 6$.

Итак, $x_1(\tau) = C_1 \cos \tau + 6 \sin \tau - 2 \sin 3\tau$. Теперь, приравнявая коэффициенты при μ^2 слева и справа в (8.15), найдем (учитывая, что $h_1 = 0$):

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2h_2 x_0 + (4 - x_0^2) \dot{x}_0 - 2x_0 x_1 \dot{x}_0.$$

Подставляя найденные выше значения $x_0(\tau)$ и $x_1(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 = & -8h_2 \cos \tau - 16 \sin \tau + 64 \sin \tau \cos^2 \tau + 32C_1 \sin \tau \cos^2 \tau + \\ & + 256 \cos \tau - 512 \cos^3 \tau + 256 \cos^5 \tau = F(\tau). \end{aligned}$$

Запишем условия существования периодического решения для последнего уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\tau) \cos \tau d\tau = -8h_2 + 32\pi = 0, & \Rightarrow C_1 = 0, \\ \int_0^{2\pi} F(\tau) \sin \tau d\tau = 8C_1 \pi = 0 & h_2 = 4. \end{aligned}$$

Теперь окончательно можем записать $x_1(\tau) = 6 \sin \tau - 2 \sin 3\tau$, $h_2 = 4$.

Выпишем, наконец, приближенное решение исходного уравнения

$$\begin{aligned} x(t) \approx & 4 \cos \left(\frac{t}{1 + 4\mu^2 + o(\mu^2)} \right) + \\ & + \mu \left[6 \sin \left(\frac{t}{1 + 4\mu^2 + o(\mu^2)} \right) - 2 \sin 3 \left(\frac{t}{1 + 4\mu^2 + o(\mu^2)} \right) \right] + o(\mu^2). \end{aligned}$$

Используя пакет Mathcad, сравним полученное решение с решением исходного уравнения методом Рунге-Кутты на периоде $[0, 2\pi]$.

Исследуемое уравнение: $\ddot{x} + x = \mu(4 - x^2)\dot{x}$

$$\mu := 0.1$$

$$y(t) := 4 \cdot \cos \left(\frac{t}{1 + 4 \cdot \mu^2} \right) + \mu \cdot \left(6 \cdot \sin \left(\frac{t}{1 + 4 \cdot \mu^2} \right) - 2 \cdot \sin \left(\frac{3 \cdot t}{1 + 4 \cdot \mu^2} \right) \right)$$

$$g(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$t := 0, 0.01 \dots 2 \cdot \pi$$

$$x := \begin{pmatrix} y(0) \\ g(0) \end{pmatrix} \quad D(\tau, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_0 - \mu \cdot (4 - x_0^2) x_1 \end{bmatrix}$$

$$Z := rkfixed(x, 0, 2 \cdot \pi, 300, D) \quad i := 0 \dots 300$$

График для $\mu=0.1$ (жирная линия – решение методом Рунге-Кутты)

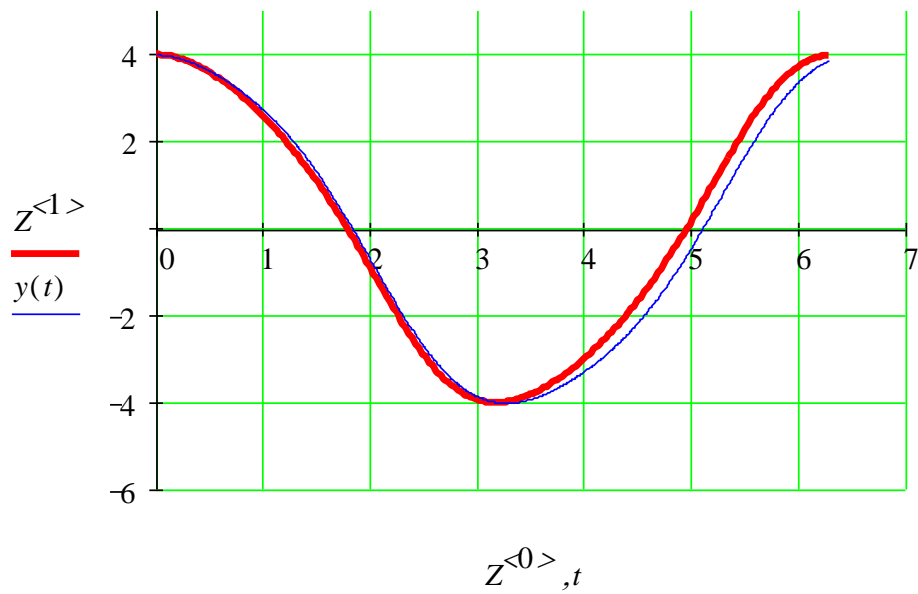
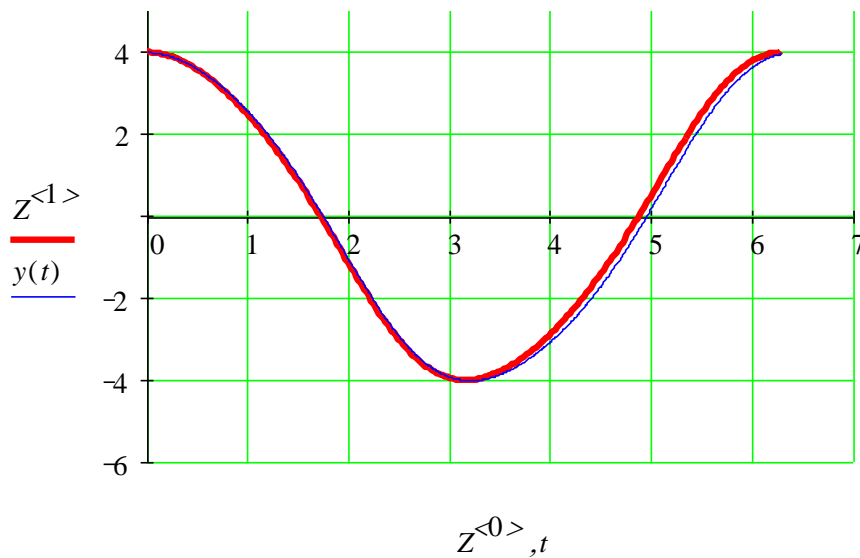


График для $\mu=0.07$ (жирная линия – решение методом Рунге-Кутты)



Задание 7
Методом Пуанкаре найти приближенно периодические решения
данных уравнений

1. $\ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \mu \dot{x}^2$

16. $\ddot{x} + \sin x = 0$

2. $\ddot{x} + 7x = 3 \cos t + \mu x^2$

17. $\ddot{x} + x + \sin x = 0$

3. $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$

18. $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$

4. $\ddot{x} + 2x = 5 \sin 2t + \mu \dot{x}^2$

19. $\ddot{x} + x = \mu(x^2 - 16)\dot{x}$

5. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\mu \cos t$

20. $\ddot{x} + x = \mu(8 - 5x^2)\dot{x}$

6. $\ddot{x} + 5x = \sin t + \mu x^2$

21. $\ddot{x} + x = \mu(2 - \dot{x}^2)x$

7. $\ddot{x} + 2x = x^3 + \mu \sin 2t$

22. $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$

8. $\ddot{x} + x^2 = 1 + \mu \sin t$

23. $\ddot{x} + x = \mu(2 - 3x^2)\dot{x}$

9. $\ddot{x} + x^2 - 4 = 2\mu \cos 2t$

24. $\ddot{x} + x = \mu[(1 - 2x^2)\dot{x} + x^2]$

10. $\ddot{x} + \sin x = \mu \sin 2t$

25. $\ddot{x} + x = \mu[(x^2 - 2)\dot{x} - x^2]$

11. $\ddot{x} + \sin 2x = \mu \cos t$

26. $\ddot{x} + x = \mu[(2x^2 - 5) + 4x^2]$

12. $\ddot{x} + x - x^2 = 0$

27. $\ddot{x} + x^2 = 16 + 4\mu \cos 2t$

13. $\ddot{x} + x + 2x^3 = 0$

28. $\ddot{x} + x^2 - 4 = \mu \sin 2t$

14. $\ddot{x} + x + 4x^2 = 0$

29. $\ddot{x} + 3x = 2 \cos 2t + \mu \dot{x}^2$

15. $\ddot{x} + 2x - 3x^3 = 0$

30. $\ddot{x} + 5x + x^3 = 2\mu \sin t$

31. $\ddot{x} + 4x = \mu(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{4})$