

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 17 » июня 2021 г., протокол №10,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года
Заведующий кафедрой

 В.В. Глаголев

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ
ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО
ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

"Уравнения математической физики"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Разработчик:

Кузнецов А.В., доцент, к.ф.-м.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций и индикаторов их достижения представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

2. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

5 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Написать формулу Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения
2. Сформулировать лемму Дюамеля для волнового уравнения
3. Определить тип уравнения $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 5x^2 u_{yy} = 0$
4. Решить уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$
5. Решить одномерную задачу Коши $u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin x$; $u|_{t=0} = e^{-x}$; $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Привести пример линейного, квазилинейного и сугубо нелинейного уравнения второго порядка
2. Написать задачу Коши, решением которой является функция $u = \frac{1}{2}((x+4t)^3 + (x-4t)^3)$
3. Привести уравнение к каноническому виду $4u_{xx} + 4u_{xy} - 2u_{yz} - u_{zz} = 0$
4. Решить двумерную задачу Коши

$$u_{tt} = 4\Delta u + x^4 y^2 t^2$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos 3y$$

$$u_t|_{t=0} = 3x^2 + 8xy - 6y^2$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - 2x^2 - 2t + t \cos \frac{x}{2}$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}$$

$$u_t|_{t=0} = x^2$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi^2 t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Написать формулу Даламбера решения задачи Коши

2. Написать задачу Коши, которой удовлетворяет функция $u = \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau \sin y dy d\tau$

3. Привести уравнение к каноническому виду $yu_{xx} + 4xu_{yy} = 0$, $x < 0, y > 0$.

4. Написать задачу Коши, решением которой является функция $u = \sin 3t \cos 2x \sin(y - 2z)$

5. Решить уравнение Пуассона.

$$\Delta u = \sin 3\pi x \sin y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = \sin 5y, \quad u|_{x=2} = 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin 3\pi x.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.1)

1. Как связаны уравнение Пуассона и уравнение Лапласа?

2. Каков принцип и конкретные действия перехода от задачи Коши для полубесконечной струны $x > 0$, к задаче Коши для бесконечной струны при условии, что на границе $u_x|_{x=0} = 0$?

3. Решить уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x + 5u_y = 0$

4. Определить при каких C существуют собственные функции следующей задачи Штурма-Лиувилля $y'' + 2y' = Cy$ и найти их.
 $y(0) = y'(0) = 0$

5. Решить трехмерную задачу Коши

$$u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin(x - 2y + 2z)$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos(y - z)$$

$$u_t|_{t=0} = x^2 yz$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.2)

1. Какой канонический вид имеет эллиптическое уравнение?
2. При какой размерности пространства для решения задачи Коши для волнового уравнения используется формула Пуассона?

3. Привести уравнение к каноническому виду $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{xz} + u_{zz} = 0$

4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = \sin y \sin 2\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \sin 2y,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin \pi x.$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.3)

1. Привести пример задачи Штурма-Лиувилля, решением которой являются функции ортогональные с весом отличным от 1.
2. При каком условии уравнение $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ будет являться уравнением эллиптического типа?

3. Привести уравнение к каноническому виду $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4. Провести обнуление граничных условий $u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t$.

$$u_{tt} - 2u_t = \Delta u - 2u_x + e^{2t} X_1 Y_3$$

5. Решить задачу $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

6 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Напишите рекуррентную формулу для функций Бесселя.
2. В чем суть метода отражения нахождения функции Грина для полуплоскости?
3. Найти первообразную $\int \frac{J_0(x)dx}{J_1(x)}$
4. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} = e^{-4x+3y}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Напишите формулу для вычисления производной функции Бесселя с понижением порядка функции Бесселя.
2. Напишите уравнение, которому удовлетворяют многочлены Лежандра.
3. Найти первообразную $\int \frac{J_1(x)dx}{J_0(x)}$
4. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} = e^{-4x+3y}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Принцип получения решения уравнения Лапласа для шара из решения для шарового слоя.
2. От какой переменной зависит решение в случае радиальной симметрии?
3. Найдите функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$
4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad x > 0, \\ u|_{x=0} = \frac{2y+3}{y^2+16}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.1)

1. Напишите представление функции Бесселя в виде ряда.
2. Следствие для гармонических функций из формулы Грина.
3. Найти функцию $P_5^2(\cos \theta)$.
4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = 2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ u|_{r=2} = \cos \theta.$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{49}{x^2}u$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2}J_7(\mu_4^{(7)}x)$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.2)

1. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.
2. В какой задаче математической физики при разделении переменных возникает уравнение Эйлера?

3. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u - 2u_y + e^{2t} X_2 Y_4$$

$$u|_{t=0} = X_2 Y_2$$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

4. Решить поставленную задачу

$$u_t = 5u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = e^{-x^2-x}.$$

5. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = r \cos 5\varphi, \quad 1 < r < 2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{r=1} = \sin 6\varphi,$$

$$u|_{r=2} = 1.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.3)

1. Запишите формулу Родрига для нахождения многочленов Лежандра.
2. Какова цель введения функции Неймана?
3. Найти первообразную $\int x^3 J_0(x) dx$

$$\Delta u = 0, \quad r > 1,$$

4. $u|_{r=1} = \sin \varphi.$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

3. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

5 семестр

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Написать формулу Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения

2. Сформулировать лемму Дюамеля для волнового уравнения

3. Определить тип уравнения $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 5x^2 u_{yy} = 0$

4. Решить уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$

5. Решить одномерную задачу Коши $u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin x$; $u|_{t=0} = e^{-x}$; $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Привести пример линейного, квазилинейного и сугубо нелинейного уравнения второго порядка

2. Написать задачу Коши, решением которой является функция

$$u = \frac{1}{2}((x+4t)^3 + (x-4t)^3)$$

3. Привести уравнение к каноническому виду $4u_{xx} + 4u_{xy} - 2u_{yz} - u_{zz} = 0$

4. Решить двумерную задачу Коши

$$u_{tt} = 4\Delta u + x^4 y^2 t^2$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos 3y$$

$$u_t|_{t=0} = 3x^2 + 8xy - 6y^2$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - 2x^2 - 2t + t \cos \frac{x}{2}$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}$$

$$u_t|_{t=0} = x^2$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi^2 t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Написать формулу Даламбера решения задачи Коши

2. Написать задачу Коши, которой удовлетворяет функция $u = \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau \sin y dy d\tau$

3. Привести уравнение к каноническому виду $yu_{xx} + 4xu_{yy} = 0$, $x < 0, y > 0$.

4. Написать задачу Коши, решением которой является функция $u = \sin 3t \cos 2x \sin(y - 2z)$

5. Решить уравнение Пуассона.

$$\Delta u = \sin 3\pi x \sin y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = \sin 5y, \quad u|_{x=2} = 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin 3\pi x.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.1)

1. Как связаны уравнение Пуассона и уравнение Лапласа?

2. Каков принцип и конкретные действия перехода от задачи Коши для полубесконечной струны $x > 0$, к задаче Коши для бесконечной струны при условии, что на границе $u_x|_{x=0} = 0$?

3. Решить уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x + 5u_y = 0$

4. Определить при каких C существуют собственные функции следующей задачи Штурма-Лиувилля $y'' + 2y' = Cy$ и найти их.
 $y(0) = y'(0) = 0$

5. Решить трехмерную задачу Коши

$$u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin(x - 2y + 2z)$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos(y - z)$$

$$u_t|_{t=0} = x^2 yz$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.2)

1. Какой канонический вид имеет эллиптическое уравнение?
2. При какой размерности пространства для решения задачи Коши для волнового уравнения используется формула Пуассона?

3. Привести уравнение к каноническому виду $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{xz} + u_{zz} = 0$

4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = \sin y \sin 2\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \sin 2y,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin \pi x.$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.3)

1. Привести пример задачи Штурма-Лиувилля, решением которой являются функции ортогональные с весом отличным от 1.

2. При каком условии уравнение $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ будет являться уравнением эллиптического типа?

3. Привести уравнение к каноническому виду $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4. Провести обнуление граничных условий $u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t$.

$$u_{tt} - 2u_t = \Delta u - 2u_x + e^{2t} X_1 Y_3$$

5. Решить задачу $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Напишите рекуррентную формулу для функций Бесселя.
2. В чем суть метода отражения нахождения функции Грина для полуплоскости?
3. Найти первообразную $\int \frac{J_0(x)dx}{J_1(x)}$
4. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} = e^{-4x+3y}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Напишите формулу для вычисления производной функции Бесселя с понижением порядка функции Бесселя.
2. Напишите уравнение, которому удовлетворяют многочлены Лежандра.
3. Найти первообразную $\int \frac{J_1(x)dx}{J_0(x)}$
4. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} = e^{-4x+3y}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Принцип получения решения уравнения Лапласа для шара из решения для шарового слоя.

2. От какой переменной зависит решение в случае радиальной симметрии?

3. Найдите функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что

$$u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$$

4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad x > 0, \\ u|_{x=0} = \frac{2y+3}{y^2+16}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.1)

1. Напишите представление функции Бесселя в виде ряда.

2. Следствие для гармонических функций из формулы Грина.

3. Найти функцию $P_5^2(\cos \theta)$.

4. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = 2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ u|_{r=2} = \cos \theta.$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{49}{x^2} u$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2} J_7(\mu_4^{(7)} x)$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$|u|_{x=0}| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.2)

5. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.
6. В какой задаче математической физики при разделении переменных возникает уравнение Эйлера?

7. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u - 2u_y + e^{2t} X_2 Y_4$$

$$u|_{t=0} = X_2 Y_2$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

8. Решить поставленную задачу

$$u_t = 5u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = e^{-x^2-x}.$$

5. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = r \cos 5\varphi, \quad 1 < r < 2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{r=1} = \sin 6\varphi,$$

$$u|_{r=2} = 1.$$

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-3.3)

1. Запишите формулу Родрига для нахождения многочленов Лежандра.
2. Какова цель введения функции Неймана?
3. Найти первообразную $\int x^3 J_0(x) dx$

$$\Delta u = 0, \quad r > 1,$$

4. $u|_{r=1} = \sin \varphi.$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0.$$