

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт Горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные
материалы и конструкции»
«20 » января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____ А.А. Трещев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
по дисциплине «Проектирование строительных конструкций»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
07.03.01 Архитектура

Формы обучения: очная, очно-заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 070301-01-20

Тула 2020 год
ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ

методических указаний по дисциплине

Разработчик:

И.А. Захарова, доцент, к.ф.-м.н

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

ВВЕДЕНИЕ

В методических указаниях отражены вопросы, связанные с решением конкретных задач по расчету статически определимых и неопределимых простейших схем. Практические занятия на первом этапе изучения теоретической механики являются основой приобретения практических навыков, расчета и проектирования конструкций.

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

Практические занятия способствуют применению теоретических знаний в расчетах конструкций.

Целью практических занятий является твердое усвоение основополагающих алгоритмов решения простейших задач по расчету геометрических характеристик сечений и построению эпюр внутренних усилий.

3 семестр

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

Очная и очно-заочная формы обучения

№ п/п	Темы практических (семинарских) занятий
1	Виды внешних нагрузок. Виды опорных закреплений
2	Кинематический анализ элементарных расчетных схем
3	Определение опорных реакций в элементарных расчетных схемах
4	Расчет плоской фермы
5	Кинематический анализ фермы. Определение опорных реакций
6	Метод вырезания узлов для определения усилий в стержнях фермы
7	Метод сечений для определения усилий в стержнях фермы
8	Построение диаграммы Максвелла-Кремоны для определения усилий в стержнях фермы
9	Центр тяжести твердого тела. Центр тяжести плоской фигуры. Примеры
10	Геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Статический момент.
11	Геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Определение положения центра тяжести.
12	Геометрические характеристики поперечного сечения стержня. Момент инерции. Главные моменты инерции. Радиус инерции
13	Вычисление моментов инерции сложных фигур

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

Большой объем разнообразных типов задач и ограниченный объем времени аудиторных занятий не позволяет проводить практические занятия в классическом стиле. Поэтому практические занятия рекомендуется проводить следующим образом. Преподаватель в начале занятия излагает на доске условия задачи и дает комментарий по особенностям данной задачи. С помощью студентов устанавливается тип задачи и на доске излагается обобщенный алгоритм решения. Затем все студенты решают задачу

самостоятельно. В конце занятия подводится итог решения задачи и разъясняются наиболее характерные ошибки студентов. При этом во время решения задачи преподаватель постоянно следит за работой и ошибками студентов.

Представление нагрузок в расчетных схемах

1. Распределенные нагрузки представляют собой систему сосредоточенных сил, расположенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга.

Как было указано выше, распределенные нагрузки могут быть объемами, поверхностными (рис. 1.25, б) и линейными (рис. 1.25, в). По интенсивности распределения такие нагрузки могут быть *равномерно распределенными* (рис. 1.25, г), *треугольными* (рис. 1.25, д) или *изменяющимися по любому закону* (см. рис. 1.25, в).

2. Сосредоточенная сила q_a (рис. 1.25, а) — основной вид представления нагрузки в расчетных схемах.

Сила характеризуется точкой приложения A , линией действия BC направлением, показываемым стрелкой. Таким образом, сила — векторная величина.

3. Пара сил представляет собой систему двух равных антипараллельных сил (рис. 1.25, е). Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил называется *плечом пары*.

Пара сил (или просто пара) характеризуется моментом пары (или просто моментом), численно равным произведению величины одной из сил пары на плечо:

$$M = q \cdot a^2.$$

В расчетных схемах данный вид нагрузки может быть изображен как в виде пары, так и в виде момента (рис. 1.25, ж).

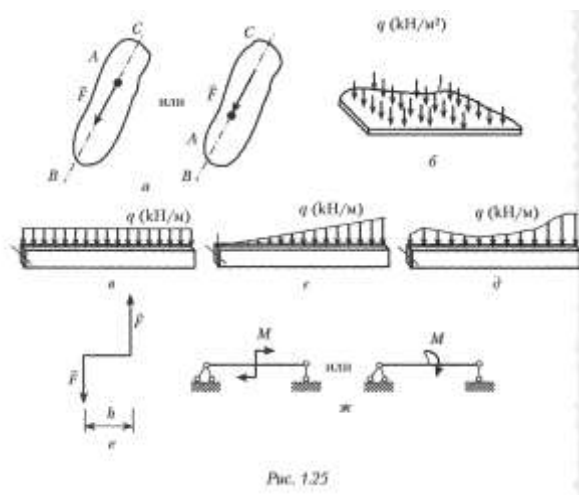


Рис. 1.25

Связи и узлы плоских расчетных схем

Соединение элементов расчетных схем и прикрепление их к основанию осуществляется с помощью связей.

Связью называется устройство, ограничивающее степень свободы твердого тела. Каждая связь имеет свою *кинематическую характеристику*, которая показывает, каким движениям твердого тела препятствует связь и сколько степеней свободы она уничтожает.

Условно различают связи между телами и связи опорные. Условность заключается в том, что любое основание, на которое опирается расчетная схема, также является твердым телом, но бесконечно большого размера по сравнению с размерами идеализированной схемы сооружения.

Соединение нескольких элементов системы в одной точке принято называть *узлом* расчетной схемы.

Различают следующие три вида связей (С) между дисками (Д) плоских систем.

1. *Простая линейная связь* (рис. 1.3, а). Ее кинематическая характеристика: связь препятствует поступательному перемещению одного диска относительно другого по направлению оси связи и уничтожает одну степень свободы взаимного перемещения дисков.

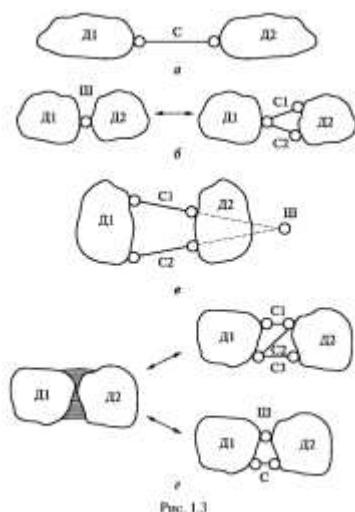
2. *Цилиндрический шарнир* (рис. 1.3, б). Его кинематическая характеристика: связь препятствует поступательным перемещениям одного диска относительно другого и уничтожает две степени свободы взаимного перемещения дисков.

Шарнир (Ш) эквивалентен двум простым линейным связям, сходящимся в точке соединения дисков.

Если два диска соединены двумя линейными связями, оси которых пересекаются за пределами соединения, точку их пересечения принято называть *фиктивным шарниром* (рис. 1.3, в).

3. *Жесткое соединение дисков* (рис. 1.3, г). Его кинематическая характеристика: жесткое соединение препятствует всем трем взаимным перемещениям соединяемых дисков, т. е. не допускает ни поступательных перемещений, ни вращения одного диска относительно другого, и уничтожает три степени свободы взаимного перемещения дисков, соединяя два диска в единое целое — один диск.

Жесткое соединение дисков эквивалентно трем не параллельным и не сходящимся в одной точке линейным связям или шарниру и одной линейной связи.



13

В системах, составленных из стержней, различают узлы *жесткие* (рис. 1.4), *шарнирные* (рис. 1.5) и *комбинированные* (рис. 1.6). На рис. 1.4, а, 1.5, а и 1.6, а показаны соответственно конструктивные схемы этих узлов, а на рис. 1.4, б, 1.5, б и 1.6, б — расчетные.

Шарнир, соединяющий два диска, обычно называют *простым*, причем он может быть сквозным (рис. 1.7, *а*) или в комбинированном узле — примыкающим (рис. 1.8, *а*).

Сквозные и примыкающие шарниры могут быть кратными. Для присоединения каждого последующего диска необходим один простой шарнир, поэтому в каждом кратном шарнире число простых шарниров будет на единицу меньше числа соединяемых в узле дисков: $\Pi = Д - 1$.

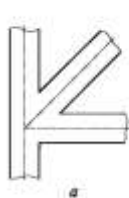
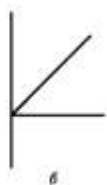


Рис. 1.4



б

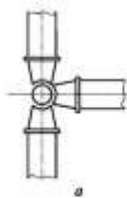
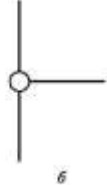
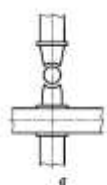


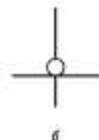
Рис. 1.5



б

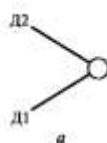


а

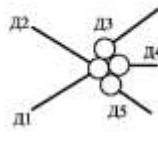


б

Рис. 1.6

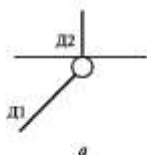


а

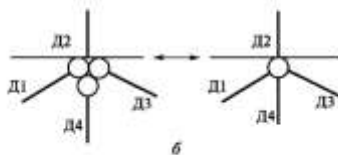


б

Рис. 1.7



а



б

Рис. 1.8

1.3.2. Опорные связи плоских расчетных схем

Прикрепление системы к основанию (земле) производится связями, которые называются *опорными*.

В расчетных схемах плоских систем используются следующие типы идеализированных схем опорных связей (табл. 1.1)

Таблица 1.1

Типы опорных связей плоских расчетных схем			
Наименование опоры	Конструктивная схема	Расчетная схема	Опорные реакции (см. рис. 2.6)
Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора		Основная Варианты 	
Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора		Основная Варианты 	
Полное защемление		Основная Варианты 	
Подвижное защемление		Основная Варианты 	
		Основная Варианты 	

16

1. Проведение кинематического анализа заданных расчетных схем.

1.1. Количественный кинематический анализ.

Для проведения полного кинематического анализа необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом согласно Приложения (см. рис. 6).

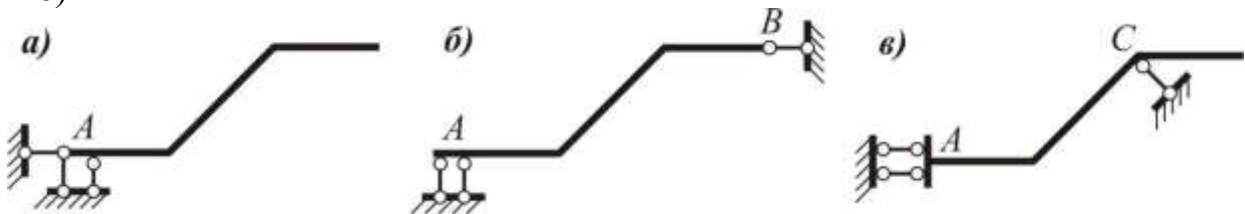


Рис. 6

Степень статической неопределимости заданных расчетных схем (ЗРС) определяется по формуле:

$$W = 3D - 2\Pi^{(1)} - C_0,$$

- ✓ число жестких дисков (стержней) системы: $D=1$;
- ✓ число простых шарниров, объединяющих жесткие диски системы: $\Pi^{(1)}=0$;
- ✓ число опорных стержней: $C_0=3$ (в схеме *a* — $C_0^A=3$; в схеме *б* — $C_0^A=2$, $C_0^B=1$; в схеме *в* — $C_0^A=2$, $C_0^C=1$).

- Если $w < 0$, то расчетная схема является *статически неопределимой*, т. е. имеет избыточное число связей.
- Если $w = 0$, то расчетная схема является *статически определимой*, т. е. число неизвестных реакций в связях расчетной схемы равняется числу

независимых уравнений равновесия, которые для нее могут быть составлены.

- Если $w > 0$, то расчетная схема является *геометрически изменяемой* и не может служить в качестве расчетной схемы строительной конструкции.

Имеем,

$$W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow \text{ЗРС статически определимы.}$$

1.2. Качественный кинематический анализ.

Заключается в проведении анализа на геометрическую неизменяемость ЗРС, которая обеспечивается наличием шарнирно-стержневого треугольника (ШСТ), образованного опорными связями, наложенными на диск (рис. 7).

Расчетная схема будет *геометрически неизменяемой*, если изменение ее формы или положения возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Для построения ШСТ необходимо:

- найти точку пересечения на продолжении двух *непараллельных* опорных стержней (если в этой точке нет уже имеющегося шарнира (а), то необходимо изобразить *мнимый шарнир* (б) МШ);
- соединить шарнир (мнимый шарнир) в точке пересечения с шарнирами по концам *оставшегося* опорного стержня.

Ломаный брус является *геометрически неизменяемым* (можно построить ШСТ), если он крепится к «Земле» при помощи *трех опорных стержней*, оси которых *не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке*.

а)

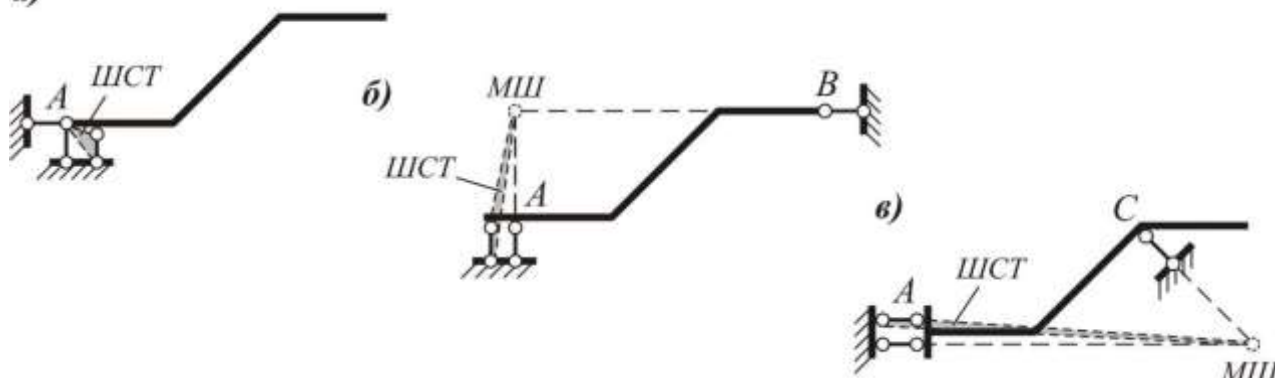


Рис. 7

2. Определение опорных реакций для расчетной схемы с наименьшим моментом M_A в заделке.

С целью уменьшения объема вычислительных работ приведем заданные физические величины к безразмерному виду.

Так, все длины на расчетных схемах уже заданы кратными масштабу длины a ($[l_k] = a$, где k – номер участка). Если принять интенсивность распределенной вдоль участка оси расчетной схемы нагрузки кратной масштабу q ($[q_k] = q$), будем иметь в качестве масштаба измерения сосредоточенных сил величину qa ($[P_k] = qa$), а изгибающего момента – qa^2 ($[M_k] = qa^2$).

Таким образом, получим:

$$P = 6 \text{ кН} = x \cdot qa \Rightarrow x = \frac{6}{qa} = \frac{6}{1,2 \cdot 1} = 5 \Rightarrow \underline{P = 5qa};$$

$$M = 9 \text{ кН} \cdot \text{м} = x \cdot qa^2 \Rightarrow x = \frac{9}{qa^2} = \frac{9}{1,2 \cdot 1^2} = 7,5 \Rightarrow \underline{M = 7,5qa^2}.$$

Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями согласно *Приложения*: в схеме *а* – X_A , Y_A , M_A , в схеме *б* – Y'_A , M'_A и X_B , в схеме *в* – X''_A , M''_A и R_C (рис. 8). При этом вводится правая декартова глобальная система координат со следующим обозначением осей:

- x – горизонтальная ось с *положительным направлением вправо*;
- y – вертикальная ось с *положительным направлением вверх*;
- z – горизонтальная ось с *положительным направлением*, перпендикулярным плоскости изображения и *направленным к зрителю*.

При таких условиях общепринятым является следующее математическое правило знаков векторных величин:

- *положительные* силы направлены вдоль *положительных направлений* осей координат;
- *положительные* моменты направлены *против часовой стрелки*, если смотреть со стороны *положительного направления* оси, относительно которой действует момент.

Обозначения реакций следует увязывать с обозначением оси, вдоль которой действует реакция, и номером узла, в котором она определяется. Все неизвестные реакции *до их определения* считаются *положительными* по математическому правилу знаков и в соответствии с ним изображаются на расчетной схеме.

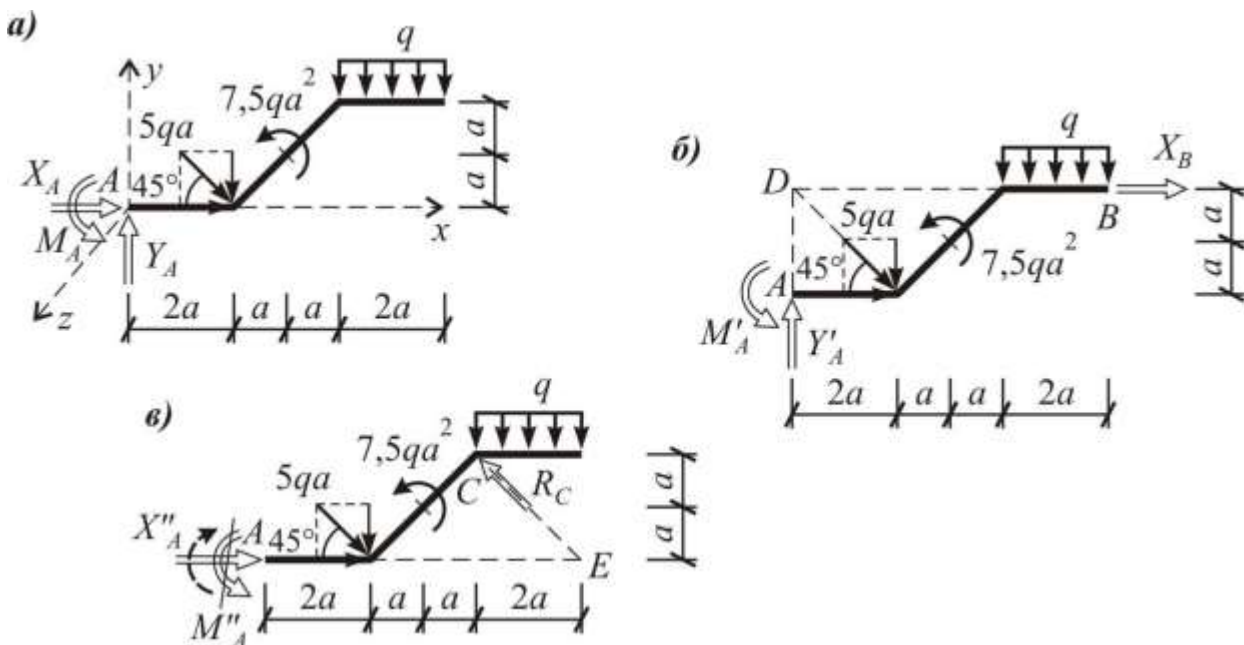


Рис. 8

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций. Для исключения взаимовлияния получаемых результатов для каждой заданной расчетной схемы необходимо подобрать такое уравнение равновесия, из которого бы однозначно определялась исследуемая реакция M_A (M'_A , M''_A) и,

таким образом, не учитывалось бы влияние двух других реакций X_A , Y_A (Y'_A , X_B и X''_A , R_C).

✓ Для схемы а

$$\sum \text{mom}_A = 0: M_A - 5qa \cdot \sin 45^\circ \cdot 2a + 7,5qa^2 - q \cdot 2a \cdot 5a = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = 9,571qa^2.$$

✓ Для схемы б

$$\sum \text{mom}_D = 0: M'_A + 7,5qa^2 - q \cdot 2a \cdot 5a = 0 \Rightarrow$$

$$M'_A = 2,5qa^2.$$

✓ Для схемы в

$$\sum \text{mom}_E = 0: M''_A + 5qa \cdot \sin 45^\circ \cdot 4a + 7,5qa^2 + q \cdot 2a \cdot a = 0 \Rightarrow$$

$$M''_A = -23,642qa^2.$$

Знак “–” рядом с найденным числовым значением опорной реакции указывает на то, что направление данной реакции надо изменить на противоположное. При этом «старый» вектор следует перечеркнуть, а рядом нарисовать вектор истинного (вычисленного) направления (см. рис. 8в).

Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

$$\sum X = 0: 5qa \cdot \cos 45^\circ + X_B = 0, \text{ откуда } X_B = -3,535qa;$$

$$\sum Y = 0: Y'_A - 5qa \cdot \sin 45^\circ - q \cdot 2a = 0, \text{ откуда } Y'_A = 5,535qa.$$

Итак, реакции опорных связей при закреплении бруса по схеме б определены, что позволяет указать на расчетной схеме все нагрузки в явном виде («в значениях»), как это сделано на рис. 9.

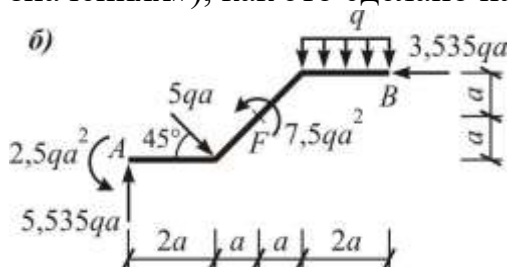


Рис. 9

Данные рис. 9 используются для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей по уравнению $\sum \text{mom}_F = 0$:

$$2,5qa^2 - 5,535qa \cdot 3a + 5qa \cdot \frac{a}{\cos 45^\circ} + 7,5qa^2 - q \cdot 2a \cdot 2a + 3,535qa \cdot a = 0 \equiv 0$$

При выборе уравнения для контроля правильности определения опорных реакций необходимо составить уравнение в моментах (ранее не использовавшееся) относительно такого сечения, чтобы обеспечить участие всех реакций и нагрузок в формировании соответствующего выражения.

Для получения численных значений опорных реакций для расчетной схемы в с наименьшим моментом в заделке по результатам, имеющимся в параметрической форме, используем исходные данные из табл. 1.

$$M'_A = 2,5qa^2 = 2,5 \cdot 1,2 \cdot 1^2 = 3,00 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$X_B = 3,535qa = 3,535 \cdot 1,2 \cdot 1 = 4,24 \text{ кН};$$

$$Y'_A = 5,535qa = 5,535 \cdot 1,2 \cdot 1 = 6,64 \text{ кН}.$$

1. Проведение количественного кинематического анализа.

Для проведения кинематического анализа необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом и обозначить эти сечения (рис. 4).

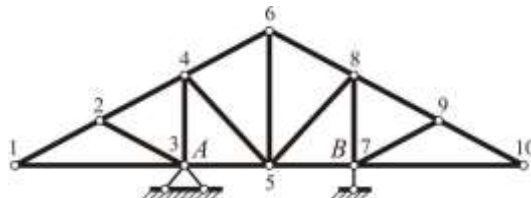


Рис. 4

Степень статической неопределимости расчетной схемы типа ферма определяется по формуле:

$$W = 2Y - S - C_0,$$

- ✓ число узлов фермы: $Y = 10$;
- ✓ число стержней фермы: $S = 17$;
- ✓ число опорных стержней: $C_0 = 3$.

Имеем,

$$W = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0 \Rightarrow \text{ЗРС статически определима}.$$

2. Определение опорных реакций.

На рис. 5 вводится система координат, оси которой определяют правило знаков для реактивных сил, заменяющих действие на конструкцию опорных связей. Реакции до их определения считаются *положительно* направленными, а их обозначения следует увязывать с обозначением оси, вдоль которой действует реакция, и узлом, в котором она определяется.

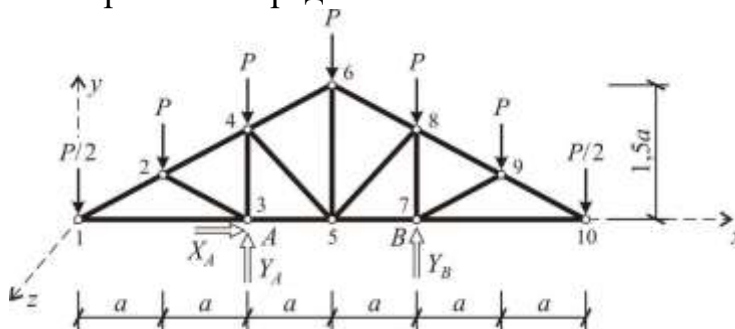


Рис. 5

При выборе уравнений равновесия для определения реакций опорных связей необходимо подобрать такие уравнения, из которых однозначно бы определялась только одна из реакций и, таким образом, не учитывалось бы влияние двух других реакций. Это позволит нам исключить взаимовлияние получаемых результатов.

$$\sum X = 0: \underline{X_A = 0}$$

$$\sum \text{mom}_B = 0: -Y_A \cdot 2a + \frac{P}{2} \cdot 4a + P \cdot 3a + P \cdot 2a + P \cdot a - P \cdot a - \frac{P}{2} \cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{Y_A = 3P}.$$

$$\sum \text{mom}_A = 0: Y_B \cdot 2a + \frac{P}{2} \cdot 2a + P \cdot a - P \cdot a - P \cdot 2a - P \cdot 3a - \frac{P}{2} \cdot 4a = 0 \Rightarrow \underline{Y_B = 3P}.$$

Итак, реакции опорных связей определены, что позволяет указать на расчетной схеме все нагрузки в явном виде («в значениях»), как это сделано на рис. 6.

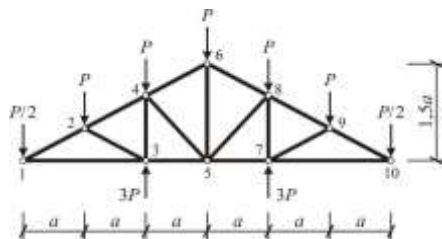


Рис. 6

Данные рис. 6 используются для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей по уравнению

$$\sum Y = -\frac{P}{2} - P - P + 3P - P - P + 3P - P - \frac{P}{2} = 0 \equiv 0.$$

Метод вырезания узлов

Метод вырезания узлов заключается в мысленном вырезании узла фермы с заменой действия на него стержней соответствующими внутренними усилиями. Эти усилия связаны между собой и приложенной к стержню внешней нагрузкой (или опорными реакциями) посредством статических уравнений равновесия. Для любого узла можно составить два таких уравнения - равенства нулю суммы проекций всех сил, например, на вертикальную и горизонтальную оси $\sum X=0$ и $\sum Y=0$. Очевидно, если в узле сходятся два стержня, то из этих уравнений могут быть найдены усилия в обоих из них. Если узел соединяет три стержня, но усилие в одном из них уже найдено из рассмотрения равновесия другого узла или использованием способа сечений, то из этих двух уравнений могут быть найдены усилия в двух оставшихся стержнях. После этого можно вырезать следующий узел и продолжить расчет.

В методе вырезания узлов необходимо установить порядок вырезания узлов. Например, для расчета фермы (рис. 8.1, а) сначала вырежем узел А (рис. 8.1, б) и запишем уравнения равновесия:

$$\sum X = N_{A-10} + N_{A-1} \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_{A-1} \cdot \sin \alpha + 1,5P = 0.$$

$$\text{Из них: } N_{A-1} = -1,5P / \sin \alpha; \quad N_{A-10} = 1,5P / \operatorname{tg} \alpha.$$

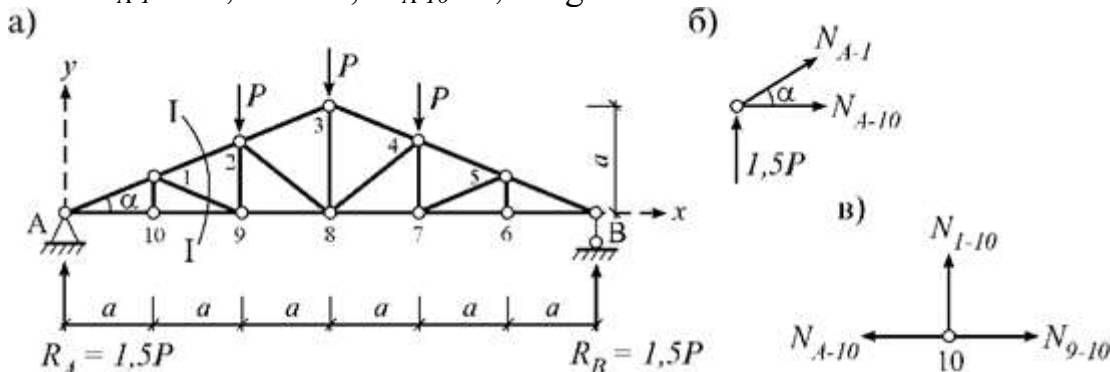


Рис. 8.1

Теперь вырежем узел 10 (рис. 8.1, в) и запишем условия равновесия

$$\Sigma X = N_{9-10} - N_{A-10} = 0;$$

$$\Sigma Y = N_{1-10} = 0.$$

Из них получаем: $N_{9-10} = N_{A-10} = 1,5P/\operatorname{tg}\alpha$; $N_{1-10} = 0$.

После этого можно вырезать узлы 1, 9, 2, 3, 8, 4, 7, 6, 5.

У метода вырезания узлов есть недостаток: ошибка (неточность), допущенная при расчете одного узла, влияет на последующие вычисления. Поэтому результаты, полученные этим методом, надо контролировать. Например, результаты расчета фермы могут быть проверены по формуле

$$\Sigma N_i l_i = \Sigma P_x \cdot x + \Sigma P_y \cdot y,$$

где N_i – усилия в стержнях, l_i – длины стержней, P_x и P_y – проекции нагрузок (включая и опорные реакции), x и y – координаты нагрузок.

Из метода вырезания узлов вытекают несколько признаков (частных случаев), упрощающих расчет ферм:

1) если в узле сходятся два стержня и внешняя нагрузка не приложена (рис. 8.2, а), то оба усилия равны нулю: $N_1 = N_2 = 0$;

2) если в узле сходятся два стержня, а внешняя нагрузка действует в направлении одного стержня (рис. 8.2, б), то $N_1 = P$, $N_2 = 0$;

3) если в трехстержневом узле два стержня лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 8.2, в), то усилия в двух стержнях равны: $N_1 = N_2$, а усилие в боковом стержне равно нулю: $N_3 = 0$;

4) если в четырехстержневом узле стержни попарно лежат на одной прямой, а внешней нагрузки нет (рис. 8.2, г), то усилия также попарно равны между собой: $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$.

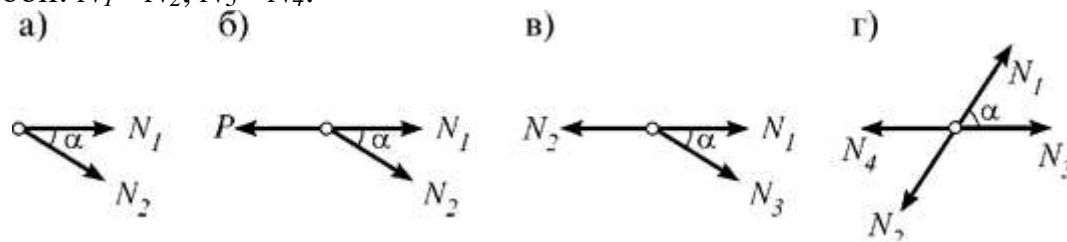


Рис. 8.2

Используя эти признаки легко определяются некоторые усилия рассмотренной фермы (рис. 8.1, а):

– по 2-му признаку $N_{1-10} = N_{1-9} = N_{2-9} = 0$; $N_{5-6} = N_{5-7} = N_{4-7} = 0$;

– по 3-му признаку $N_{A-10} = N_{9-10} = N_{8-9}$; $N_{B-6} = N_{6-7} = N_{7-8}$; $N_{A-1} = N_{1-2}$; $N_{B-5} = N_{4-5}$.

Метод сквозных сечений

Метод сквозных сечений состоит в мысленном рассечении фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из них. При этом действие отбрасываемой части на рассматриваемую должно быть заменено усилиями в стержнях ферм. Если провести сечение таким образом, чтобы оно проходило

через три стержня, то можно составить уравнения равновесия для рассматриваемой части фермы таким образом, чтобы найти усилия во всех трех стержнях. Так, в точке пересечения направлений двух из них составляется уравнение момента, из которого определяется третье усилие. Точка, в которой составляется уравнение момента, называется **моментной точкой**.

В качестве примера рассмотрим ту же ферму, проведя через нее сквозное сечение I-I (рис. 8.1, а). Рассматривая равновесие левой части от сечения (рис. 8.3), составим уравнение момента в точке 1:

$$\Sigma M_1 = N_{9-10} \cdot a/3 - 1,5P \cdot a = 0.$$

Отсюда получаем: $N_{9-10} = 4,5P$.

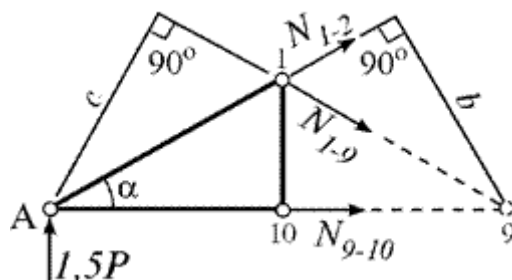


Рис. 8.3

Точка 9 является моментной точкой для N_{1-2} . Поэтому

$$\Sigma M_9 = -N_{1-2} \cdot b - 1,5P \cdot 2a = 0.$$

Так как $b = 2a \times \sin \alpha$, получаем $N_{1-2} = -1,5P / \sin \alpha$.

Для N_{1-9} : $\Sigma M_A = -N_{1-9} \cdot c = 0$. Отсюда получаем $N_{1-9} = 0$.

Иногда (например, когда два стержня параллельны) моментной точки не существует. В этом случае вместо уравнения момента следует составлять уравнение проекции на ось, перпендикулярную этим параллельным стержням.

У метода сквозных сечений есть один недостаток: в сложных фермах не удастся провести такое сквозное сечение, чтобы появились только три неизвестных усилия. В этом случае некоторые неизвестные нужно определять заранее или использовать другие методы (методы совместных сечений или замены связей).

Таким образом, усилие в любом стержне статически определимой фермы может быть определено в один или несколько шагов путем последовательных вырезаний узлов и/или рассмотрением равновесия отсеченных определенным образом частей фермы.

Очевидно, при использовании этих способов необходимо предварительное определение опорных реакций из уравнений равновесия фермы.

4. Определение продольных усилий в стержнях фермы *графическим* способом.

Идея графического способа определения усилий в стержнях фермы основана на том, что треугольник равновесных сил можно построить по *одному* заданному

вектору силы и известным направлениям двух других векторов, линии действия которых проведены через начало и конец заданного вектора. При этом заданный вектор может быть представлен отдельной силой (внешней или внутренней) или *равнодействующей* некоторой совокупности сил.

При реализации графического способа необходимо строгое соблюдения нескольких правил:

1) построения выполняются для *упорядоченных* последовательностей узлов, причем набор каждого уровня должен состоять из узлов, в которых сходятся *не более двух* неизвестных усилий;

2) в качестве *шаблона* для проведения линий, параллельных некоторому направлению, используются *оси* расчетной схемы с *одного и того же* рисунка;

3) при построении многоугольников сил (для расчетной схемы в целом и для отдельных узлов) выбирается *единственное*, общее для всех последующих рассуждений, *направление обхода сил* (против часовой стрелки);

4) *масштаб геометрических* построений назначается таким образом, чтобы погрешность определения усилий по расстояниям между точками рисунка не превышала 5-7 %.

Для уменьшения трудоемкости построений и повышения их точности **рекомендуется выполнять работу по формированию многоугольников сил на листе миллиметровой бумаги формата А4.**

Поскольку все реакции опорных связей уже определены (см. п. 2), приступаем к построению многоугольника внешних сил. Эта процедура основана на понятии «внешнего поля».

Внешние поля (рис. 14) делят плоскость чертежа *вне* расчетной схемы на части, границами между которыми являются векторы внешних сил. Каждое поле получает свое имя в виде буквы, благодаря чему при пересечении границы полей возникает возможность именования соответствующих векторов сил двумя буквами: одна буква соответствует началу вектора, а вторая – его концу.

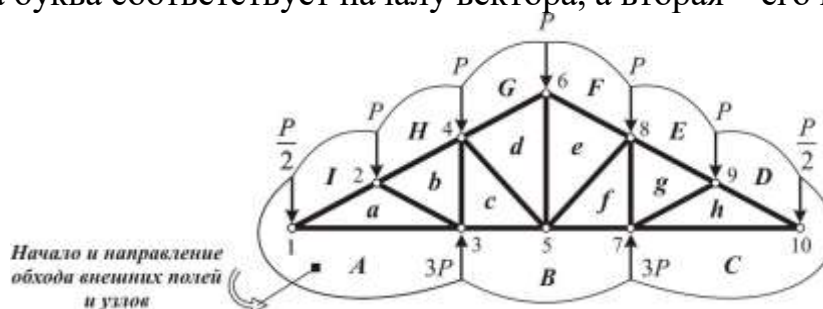


Рис. 14

Начало вектора силы определяется той буквой, поле которой названо первым при пересечении границы смежных полей в выбранном направлении обхода.

Многоугольник внешних сил в данном примере строится путем обхода внешних полей *против часовой стрелки*, начиная с поля «А», как это показано на рис. 14. По мере пересечения границ внешних полей соответствующая внешняя сила в назначенном масштабе наносится на поле диаграммы усилий (рис. 15).

Поскольку равновесие расчетной схемы соответствует нулевым значениям главного вектора и главного момента внешних сил, постольку *многоугольник*

внешних сил должен получиться замкнутым. Если это реализуется в ходе построения, то можно утверждать, что реакции в расчетной схеме найдены верно.

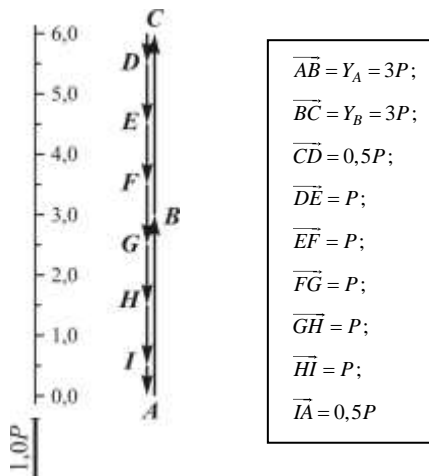


Рис. 15

Дальнейшие построения связаны с определением внутренних сил (усилий) в стержнях фермы. В основе этой процедуры лежит построенный многоугольник внешних сил (см. рис. 15), а приведенные выше приемы рассуждений применяются к полям, окружающим каждый узел.

Важно помнить, что выбор узла при построении многоугольника сил, в нем сходящихся, определяется тем, что в узле может сходиться *не более двух неизвестных усилий*. При этом направление обхода полей узла должно соответствовать направлению обхода, использованному при построении многоугольника внешних сил, т. е. против часовой стрелки.

На рис. 16-24 последовательно отображены результаты построения многоугольников сил в узлах заданной расчетной схемы. Для пояснения совершаемых действий используются следующие обозначения:

«||» – означает, что проводится линия по направлению, параллельному пересекаемому стержню фермы, обозначенному парой букв;

« через ... » – точка вектора, через которую проводится параллельная прямая, упоминаемая выше;

«■» – поле, с которого начинается обход полей, расположенных вокруг узла;

« \rightarrow » – вектор силы, участвующей в создании многоугольника равновесных сил, сходящихся в *текущем* узле.

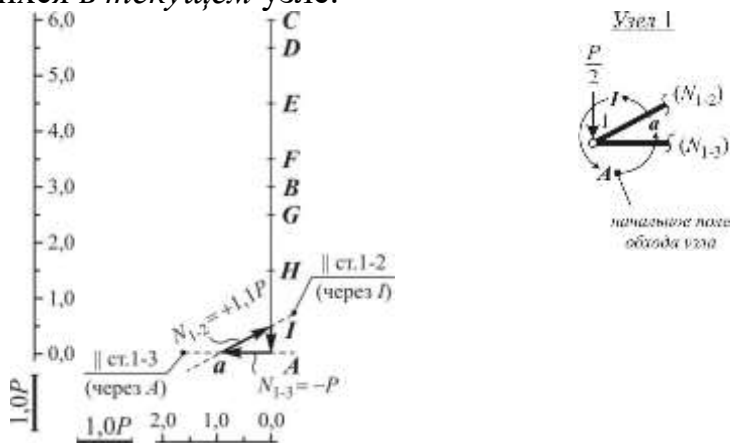


Рис. 16

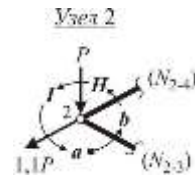
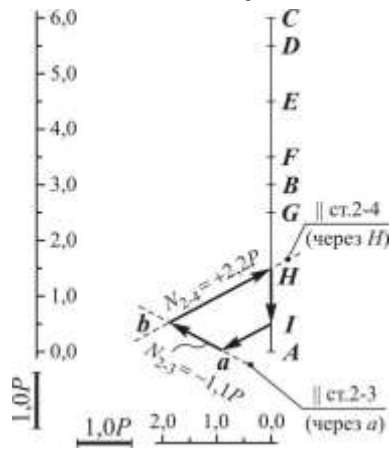


Рис. 17

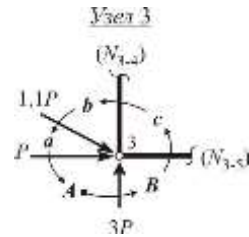
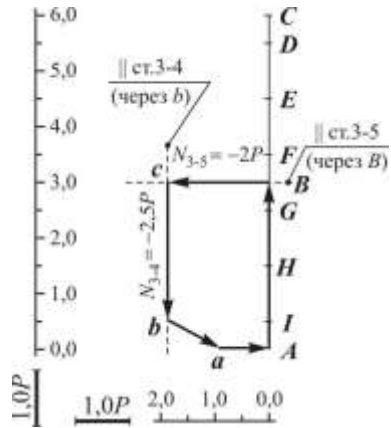


Рис. 18

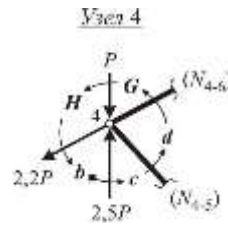
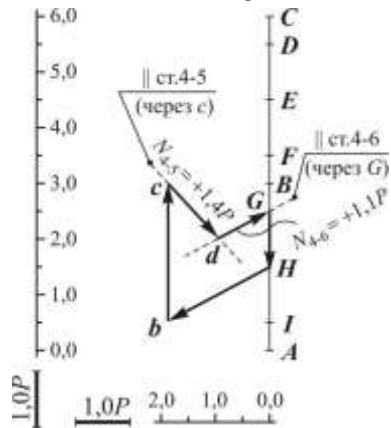


Рис. 19

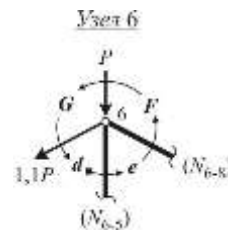
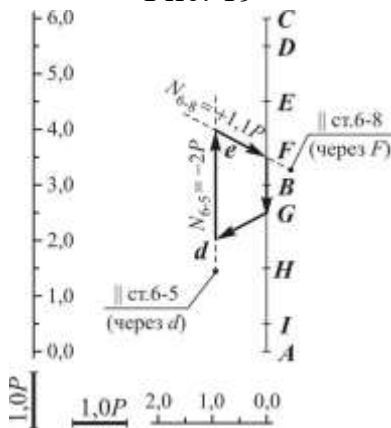


Рис. 20

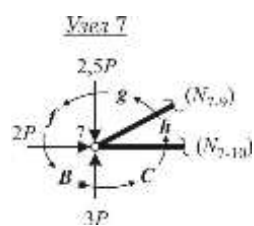
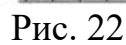
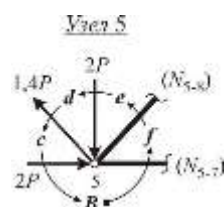


Рис. 23

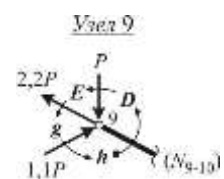


Рис. 24

В данном примере реализуется последовательность узлов, основанная на результатах *текущих* построений (каждый *последующий* узел превращается в узел с двумя неизвестными усилиями вследствие решения задачи о равновесии *предыдущего* узла) и включает узлы 1, 2, 3, 4.

Однако узел 5 уже не может рассматриваться вслед за узлом 4, поскольку к этому моменту содержит три неизвестных усилия (N_{5-6} , N_{5-7} и N_{5-8}). Поэтому далее выбирается узел 6 с двумя неизвестными усилиями (N_{6-5} и N_{6-8}), а за ним становится возможным перейти к узлу 5 с неизвестными к этому моменту усилиями N_{5-7} и N_{5-8} . Далее аналогично рассматриваются узлы 8, 7 и, наконец, построения в узле 9 с единственным неизвестным усилием N_{9-10} завершают решение задачи.

Определение *величины усилия* проводится *измерением длины* построенного *вектора*, а *знак усилия* определяется тем, как *вектор направлен* по отношению к рассматриваемому узлу: если направление «от узла», то в соответствии с «инженерным» правилом знаков это означает «*положительность*» искомого усилия; если же направление «к узлу» – «*отрицательность*» усилия.

Решение задачи в окончательном виде представлено на рис. 25 и табл. 4. Следует подчеркнуть, что данные табл. 4 получены измерением усилий на рис. 16-24 (рис. 25) с использованием выбранного масштаба построений. Рис. 25 носит название «*диаграммы Максвелла-Кремоны*» или «*диаграммы усилий*».

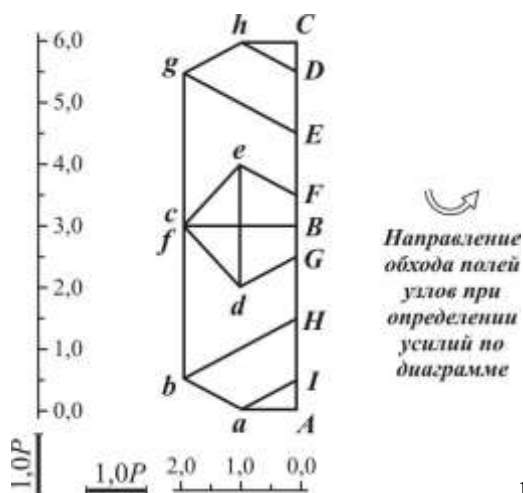


рис. 25

Таблица 4

Номер стержня	1–2	1–3	2–3	2–4	3–4	3–5	4–5	4–6	6–5
	9–10	7–10	7–9	8–9	7–8	5–7	5–8	6–8	
Знак усилия	+	–	–	+	–	–	+	+	–
Усилие N_{i-j}, P	1,1	1	1,1	2,2	2,5	2	1,4	1,1	2

При соблюдении правил построения диаграмма усилий позволяет быстро и достаточно точно решить задачу об определении усилий в статически определимой расчетной схеме типа «ферма». Поэтому графический способ определения усилий рекомендуется всегда, когда допустимая погрешность определения усилий находится в пределах 10 %.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

2. Центр тяжести объёма, площади, линии

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести. Точка приложения этой силы - центром тяжести. Поскольку силы тяжести действуют на каждую частицу тела, то её надо считать распределённой. При небольших /по сравнению с Землёй/ размерах тела силы тяжести с большой степенью точности можно считать параллельными. Для определения равнодействующей и точки приложения силы тяжести разобьём тело на "n" достаточно малых элементов. Предельным переходом, устремляя $n \rightarrow \infty$, получим точные формулы.

$$\bar{r}_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k G_k}{\sum G_k} = \frac{1}{G} \int \bar{r} dG, \quad G = \int dG$$

$$x_c = \frac{1}{G} \int x dG; \quad y_c = \frac{1}{G} \int y dG; \quad z_c = \frac{1}{G} \int z dG;$$

Вес элементарного объёма можно выразить через удельный вес γ формулой $dG = \gamma dV$

При вычислении центра тяжести пластинки постоянной толщины h его элементарный объём можно представить в виде $dV = h dS$

При вычислении элементарного объёма стержня можно воспользоваться соотношением $dV = S dl$, где S - площадь поперечного сечения стержня.

Исходя из этого можно написать формулы для определения центра тяжести плоской фигуры /площади/

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dS}{\int dS} = \frac{1}{S} \int \bar{r} dS$$

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dl}{\int dl} = \frac{1}{L} \int \bar{r} dl$$

и кривого стержня /линии/

Координаты центра тяжести простых фигур

Форма сечения	Площадь сечения	Координаты центра тяжести
<p>1. Прямоугольник</p>	$A = b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{2}b$ $y_c = \frac{1}{2}h$
<p>2. Прямоугольный треугольник</p>	$A = \frac{1}{2}b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{3}b$ $z'_c = \frac{2}{3}b$ $y_c = \frac{1}{3}h$ $y'_c = \frac{2}{3}h$
<p>3. Равнобедренный треугольник</p>	$A = \frac{1}{2}b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{2}b$ $y_c = \frac{1}{3}h$ $y'_c = \frac{2}{3}h$
<p>4. Круг</p>	$A = \pi r^2 = 3,14 r^2$	$z_c = \frac{d}{2} = r$ $y_c = \frac{d}{2} = r$
<p>5. Полукруг</p>	$A = \frac{\pi r^2}{2} = 1,57 r^2$	$z_c = \frac{d}{2} = r$ $y_c = 0,424 r$ $y'_c = 0,576 r$
<p>6. Четверть круга</p>	$A = \frac{\pi r^2}{4} = 0,785 r^2$	$z_c = 0,424 r$ $z'_c = 0,576 r$ $y_c = 0,424 r$ $y'_c = 0,576 r$

Геометрические характеристики плоских сечений

Статические моменты сечений.

Статическим моментом S_x сечения относительно оси x называется геометрическая характеристика, определяемая интегралом вида

$$S_x = \int_F y dF, \quad (4.1)$$

где y - расстояние от элементарной площадки dF до оси x .

Если отождествить площадь с силой, действующей перпендикулярно плоскости чертежа, то интеграл (4.1) можно рассматривать как сумму моментов сил относительно оси x . По известной из теоретической механики теореме Вариньона о моменте равнодействующей можно написать

$$S_x = \int_F y dF = F \cdot y_c, \quad (4.2)$$

где площадь сечения F представляет собой равнодействующую, координата y_c - плечо равнодействующей, c - центр тяжести сечения.

Аналогично, статический момент относительно оси y равен

$$S_y = \int_F x dF = F \cdot x_c, \quad (4.3)$$

откуда следуют формулы для определения координат центра тяжести

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F} \quad (4.4)$$

Статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. В частности, относительно любых центральных осей (проходящих через центр тяжести C обозначаются x_c, y_c) статические моменты $S_{x_c} = S_{y_c} = 0$. Размерность статических моментов L^3 .

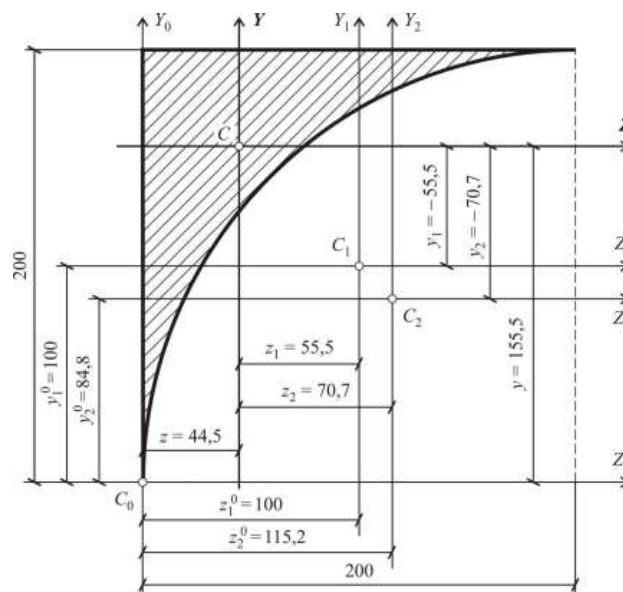


Рис. 5

Вычислим координаты центров тяжести сечений каждого элемента относительно центральных осей Z и Y :

1) квадрат:

$$z_1 = z_1^0 - z = 10 - 4,45 = 5,55 \text{ см};$$

$$y_1 = y - y_1^0 = -15,55 - (-10) = -15,55 + 10 = -5,55 \text{ см};$$

2) четверть круга:

$$z_2 = z_2^0 - z = 11,52 - 4,45 = 7,07 \text{ см};$$

$$y_2 = y - y_2^0 = -15,55 - (-8,48) = -15,55 + 8,48 = -7,07 \text{ см.}$$

Полученные значения координат проставляем на чертеже (рис. 5).

Определим значение статических моментов площади сечения всей заданной фигуры относительно центральных осей Z и Y

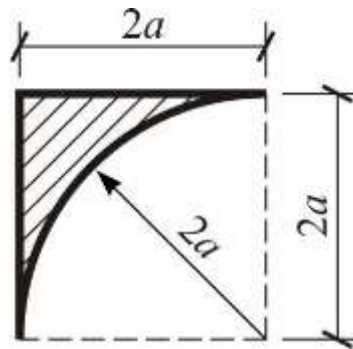
$$S_z = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 = 400 \cdot (-5,55) - 314 \cdot (-7,07) = -0,02 \approx 0;$$

$$S_y = A_1 \cdot z_1 - A_2 \cdot z_2 = 400 \cdot 5,55 - 314 \cdot 7,07 = 0,02 \approx 0$$

Полученные значения статических моментов S_z и S_y равны нулю. Это свидетельствует о том, что координаты центра тяжести заданной фигуры определены правильно.

Определение положения центра тяжести фигуры.

Рис. 1



Заданное

несимметричное сечение

необходимо разбить на отдельные простейшие фигуры, площади и положения центров тяжести которых известны (см. Приложение). В нашем случае таких отдельных элементов будет два:

- 1) квадрат со стороной $h = 20$ см (рис. 2а);
- 2) четверть круга радиусом $r = 20$ см (рис. 2б).

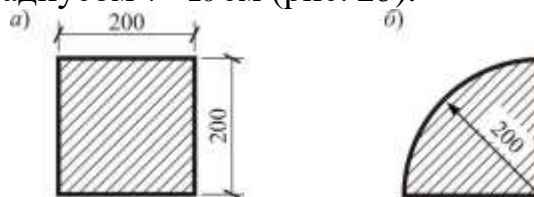


Рис. 2

Выберем произвольно вспомогательную прямоугольную систему координат $Z_0C_0Y_0$. Через центры тяжести каждого элемента (C_1 , C_2) проводим горизонтальные (Z_1 и Z_2) и вертикальные оси координат (Y_1 и Y_2), параллельные осям Z_0 и Y_0 (см. рис. 5).

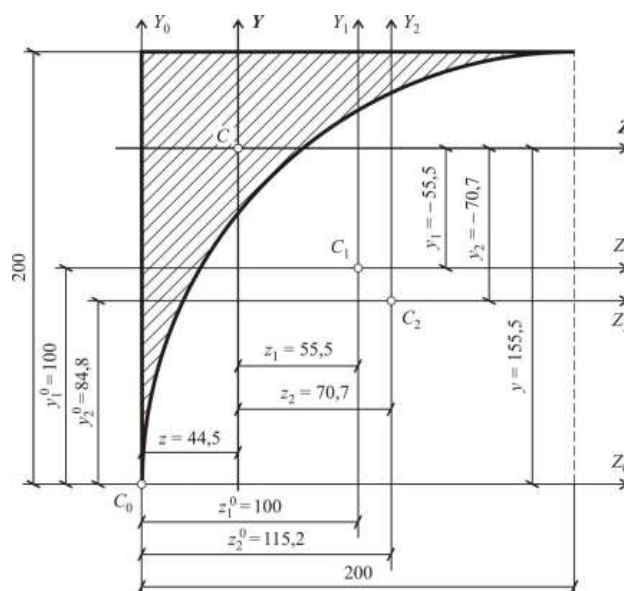


Рис. 5

Определим геометрические характеристики отдельных элементов фигуры (см. Приложение):

- площадь

- 1) квадрат: $A_1 = h^2 = 20^2 = 400 \text{ см}^2$;
- 2) четверть круга: $A_2 = 0,785 \cdot r^2 = 0,785 \cdot 20^2 = 314 \text{ см}^2$;
- 3) общая площадь фигуры: $A = A_1 - A_2 = 400 - 314 = 86 \text{ см}^2$;

- координаты центров тяжести в осях Z_0, Y_0

- 1) квадрат:

$$z_1^0 = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}; \quad y_1^0 = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см};$$

- 2) четверть круга:

$$z_2^0 = h - 0,424r = 20 - 0,424 \cdot 20 = 11,52 \text{ см};$$

$$y_2^0 = 0,424r = 0,424 \cdot 20 = 8,48 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести всего сечения относительно выбранных координатных осей $Z_0 C_0 Y_0$ определим по формулам

$$z = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot z_1^0 - A_2 \cdot z_2^0}{A_1 - A_2} = \frac{400 \cdot 10 - 314 \cdot 11,52}{400 - 314} = 4,45 \text{ см};$$

$$y = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1^0 - A_2 \cdot y_2^0}{A_1 - A_2} = \frac{400 \cdot 10 - 314 \cdot 8,48}{400 - 314} = 15,55 \text{ см}.$$

На чертеже (рис. 5) в выбранном масштабе наносим положение центра тяжести всего сложного сечения (точку C) и указываем величины координат z и y . Через точку C проводим центральные оси Z и Y , параллельные вспомогательным осям Z_0, Y_0 .

Вычислим координаты центров тяжести сечений каждого элемента относительно центральных осей Z и Y :

1) квадрат:

$$z_1 = z_1^0 - z = 10 - 4,45 = 5,55 \text{ см};$$

$$y_1 = y - y_1^0 = -15,55 - (-10) = -15,55 + 10 = -5,55 \text{ см};$$

2) четверть круга:

$$z_2 = z_2^0 - z = 11,52 - 4,45 = 7,07 \text{ см};$$

$$y_2 = y - y_2^0 = -15,55 - (-8,48) = -15,55 + 8,48 = -7,07 \text{ см}.$$

Полученные значения координат проставляем на чертеже (рис. 5).

Моменты инерции сечений.

Моментами инерции сечения называются геометрические характеристики, определяемые интегралами вида:

$$J_x = \int_F y^2 dF,$$

$$J_y = \int_F x^2 dF,$$
(4.6)

- осевые (экваториальные) моменты инерции относительно осей x и y соответственно;

$$J_p = \int_F \rho^2 dF,$$
(4.7)

- полярный момент инерции сечения относительно данной точки (полюса), где ρ - расстояние от площадки dF до полюса,

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$
(4.8)

- центробежный момент инерции сечения.

Если полярный момент инерции вычисляется относительно начала системы координат (рис. 4.1), то $\rho^2 = x^2 + y^2$ и

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF,$$

следовательно

$$J_p = J_x + J_y,$$
(4.9)

т.е. сумма осевых моментов инерции сечения относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через данную точку равна полярному моменту инерции этого сечения относительно этой точки.

Размерность моментов инерции L^4 . Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным, равным нулю.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей, хотя бы одна из которых является осью симметрии, равен нулю. Действительно, для

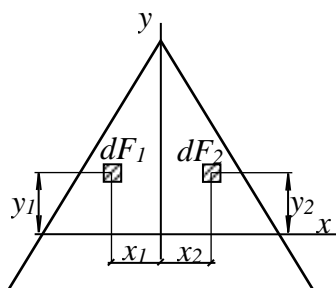


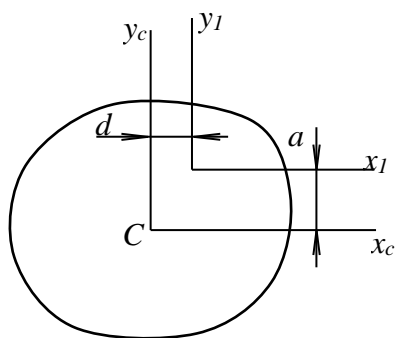
Рис.4.2

симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис. 4.2), которые имеют одинаковые ординаты $y_1=y_2=y$ и равные по величине, но противоположные по знаку абсциссы $x_1=x$ и $x_2=-x$. Тогда

$$J_{xy} = \int_F xy dF = \int_{F/2} x_1 y_1 dF_1 + \int_{F/2} x_2 y_2 dF_2 = \int_{F/2} xy dF + \int_{F/2} (-x) y dF = 0$$

Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей.

Пусть x_c, y_c - центральные оси сечений, $J_{x_c}, J_{y_c}, J_{x_c y_c}$ - моменты инерции сечения относительно этих осей. Определим моменты инерции сечения относительно новых осей x_1, y_1 , параллельных центральным осям и смещенных относительно них на расстояния a и d . Пусть dF - элементарная площадка в окрестности точки M с координатами x и y в центральной системе координат. Из рис.4.7 видно, что координаты точки B в новой системе координат будут



равны

$$x_1 = x + d, \quad y_1 = y + a.$$

Определим момент инерции сечения относительно оси x_1 :

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

Очевидно, что первый интеграл дает J_{x_c} , второй - $S_{x_c} = 0$, т.к. исходная система координат - центральная, а третий - площадь сечения F . Таким образом,

$$J_{x_1} = J_{x_c} + a^2 F. \quad (4.16)$$

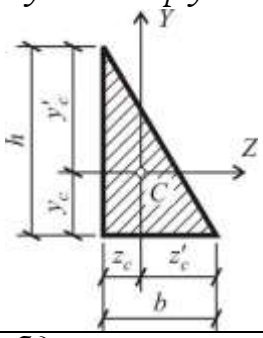
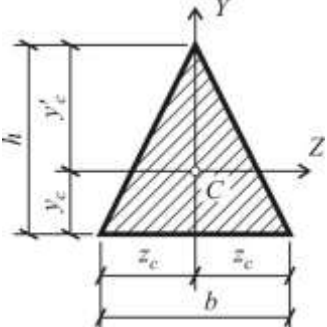
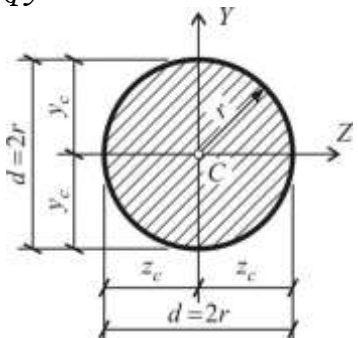
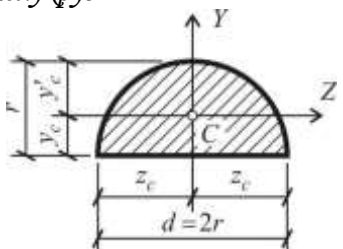
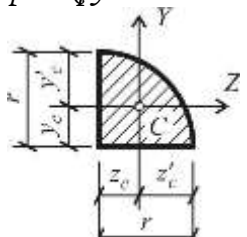
Аналогично,

$$J_{y_1} = J_{y_c} + a^2 F, \quad (4.17)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{x_c y_c} + adF.$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Форма сечения	Площадь сечения	Координаты центра тяжести	Моменты инерции: осевые J_z, J_y ; центробежный J_{zy}
<p>1. Прямоугольник</p>	$A = b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{2} b$ $y_c = \frac{1}{2} h$	$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $J_{zy} = 0^*$

Форма сечения	Площадь сечения	Координаты центра тяжести	Моменты инерции: осевые J_z, J_y ; центробежный J_{zy}
<p>2. Прямоугольный треугольник</p> 	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{3} b$ $z'_c = \frac{2}{3} b$ $y_c = \frac{1}{3} h$ $y'_c = \frac{2}{3} h$	$J_z = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $J_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$ $J_{zy} = -\frac{b^2 h^2}{72}^{**}$
<p>3. Равнобедренный треугольник</p> 	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$z_c = \frac{1}{2} b$ $y_c = \frac{1}{3} h$ $y'_c = \frac{2}{3} h$	$J_z = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $J_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$ $J_{zy} = 0^*$
<p>4. Круг</p> 	$A = \pi r^2 = 3,14 r^2$	$z_c = \frac{d}{2} = r$ $y_c = \frac{d}{2} = r$	$J_z = \frac{\pi r^4}{4} = 0,785 r^4$ $J_y = \frac{\pi r^4}{4} = 0,785 r^4$ $J_{zy} = 0^*$
<p>5. Полукруг</p> 	$A = \frac{\pi r^2}{2} = 1,57 r^2$	$z_c = \frac{d}{2} = r$ $y_c = 0,424 r$ $y'_c = 0,576 r$	$J_z = 0,11 r^4$ $J_y = \frac{\pi r^4}{8} = 0,393 r^4$ $J_{zy} = 0^*$
<p>6. Четверть круга</p> 	$A = \frac{\pi r^2}{4} = 0,785 r^2$	$z_c = 0,424 r$ $z'_c = 0,576 r$ $y_c = 0,424 r$ $y'_c = 0,576 r$	$J_z = 0,0549 r^4$ $J_y = 0,0549 r^4$ $J_{zy} = -0,0165 r^4^{**}$

Примечания: *) Центробежный момент инерции площади сечения относительно двух любых взаимно-перпендикулярных осей, из которых одна или обе являются осями симметрии, равен нулю (сечения 1, 3, 4, 5).

**) При повороте координатных осей на 90° центробежный момент инерции,

Форма сечения	Площадь сечения	Координаты центра тяжести	Моменты инерции: осевые J_z, J_y ; центробежный J_{zy}
сохраняя свою величину, изменяет знак на обратный (сечения 2, б).			

2. Определение моментов инерции относительно центральных осей фигуры.

Сначала определим осевые и центробежный моменты инерции относительно собственных главных центральных осей каждого элемента сечения, согласно *Приложения*:

1) квадрат:

$$J_{1z_1} = \frac{h^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1y_1} = \frac{h^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1z_1y_1} = 0;$$

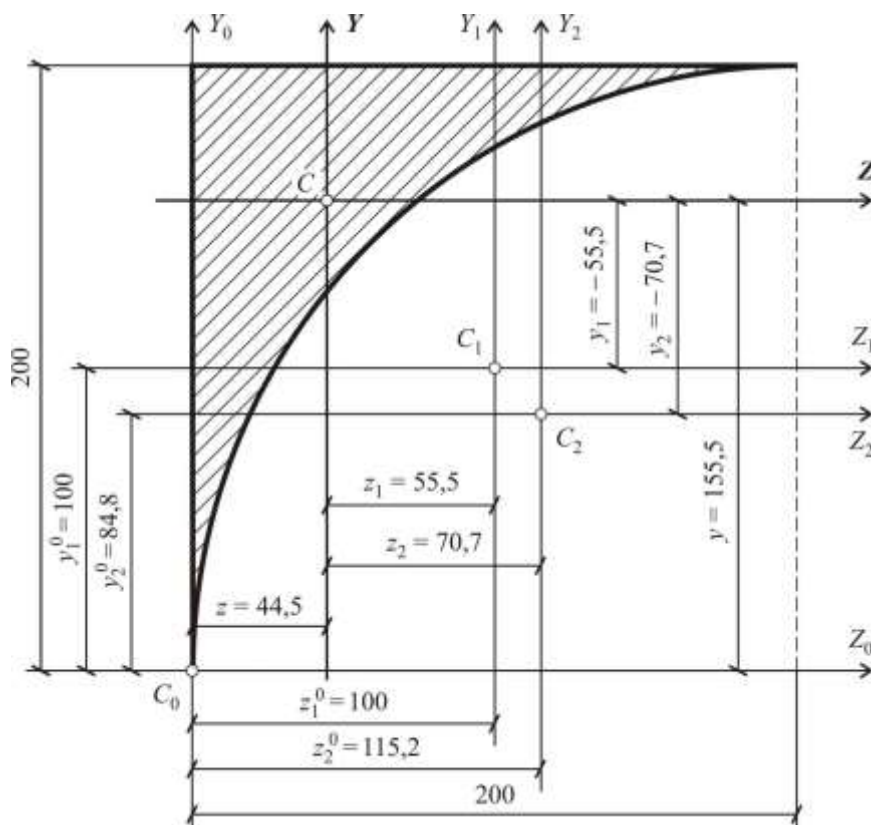


Рис. 5

2) четверть круга:

$$J_{2z_2} = 0,0549 r^4 = 0,0549 \cdot 20^4 = 8784 \text{ см}^4;$$

$$J_{2y_2} = 0,0549 r^4 = 0,0549 \cdot 20^4 = 8784 \text{ см}^4;$$

$$J_{2z_2y_2} = 0,0165 r^4 = 0,0165 \cdot 20^4 = 2640 \text{ см}^4.$$

Вычислим значения моментов инерции отдельно взятых элементов сечения относительно центральных осей Z и Y , используя при этом формулы перехода к параллельным осям:

1) квадрат:

$$J_{1z} = J_{1z_1} + A_1 \cdot y_1^2 = 13333,33 + 400 \cdot (-5,55)^2 = 25654,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1y} = J_{1y_1} + A_1 \cdot z_1^2 = 13333,33 + 400 \cdot 5,55^2 = 25654,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1zy} = J_{1z_1y_1} + A_1 \cdot z_1 \cdot y_1 = 0 + 400 \cdot 5,55 \cdot (-5,55) = -12321 \text{ см}^4;$$

2) четверть круга:

$$J_{2z} = J_{2z_2} + A_2 \cdot y_2^2 = 8784 + 314 \cdot (-7,07)^2 = 24479,26 \text{ см}^4;$$

$$J_{2y} = J_{2y_2} + A_2 \cdot z_2^2 = 8784 + 314 \cdot 7,07^2 = 24479,26 \text{ см}^4;$$

$$J_{2zy} = J_{2z_2y_2} + A_2 \cdot z_2 \cdot y_2 = 2640 + 314 \cdot 7,07 \cdot (-7,07) = -13055,26 \text{ см}^4;$$

Моменты инерции всего сечения относительно центральных осей Z и Y :

$$J_z = J_{1z} - J_{2z} = 25654,33 - 24479,26 = 1175,07 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{1y} - J_{2y} = 25654,33 - 24479,26 = 1175,07 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = J_{1zy} - J_{2zy} = -12321 - (-13055,26) = -12321 + 13055,26 = 734,26 \text{ см}^4.$$

Проверим правильность нахождения значений моментов инерции площади заданной фигуры относительно центральных осей. Для этого определим значения J_{z_0} , J_{y_0} и $J_{z_0y_0}$ для всей фигуры относительно вспомогательных координатных осей Z_0 , Y_0 , используя при этом формулы перехода к параллельным осям:

1) квадрат:

$$J_{1z_0} = J_{1z_1} + A_1 \cdot (y_1^0)^2 = 13333,33 + 400 \cdot 10^2 = 53333,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1y_0} = J_{1y_1} + A_1 \cdot (z_1^0)^2 = 13333,33 + 400 \cdot 10^2 = 53333,33 \text{ см}^4;$$

$$J_{1z_0y_0} = J_{1z_1y_1} + A_1 \cdot z_1^0 \cdot y_1^0 = 0 + 400 \cdot 10 \cdot 10 = 40000 \text{ см}^4;$$

2) четверть круга:

$$J_{2z_0} = J_{2z_2} + A_2 \cdot (y_2^0)^2 = 8784 + 314 \cdot 8,48^2 = 31363,86 \text{ см}^4;$$

$$J_{2y_0} = J_{2y_2} + A_2 \cdot (z_2^0)^2 = 8784 + 314 \cdot 11,52^2 = 50455,06 \text{ см}^4;$$

$$J_{2z_0y_0} = J_{2z_2y_2} + A_2 \cdot z_2^0 \cdot y_2^0 = 2640 + 314 \cdot 11,52 \cdot 8,48 = 33314,53 \text{ см}^4;$$

Для всего сечения будем иметь:

$$J_{z_0} = J_{1z_0} - J_{2z_0} = 53333,33 - 31363,86 = 21969,47 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = J_{1y_0} - J_{2y_0} = 53333,33 - 50455,06 = 2878,27 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_0y_0} = J_{1z_0y_0} - J_{2z_0y_0} = 40000 - 33314,53 = 6685,47 \text{ см}^4.$$

Вычислим по формуле параллельного переноса осей моменты инерции площади заданной фигуры относительно центральных осей Z и Y :

$$J_z = J_{z_0} - A \cdot y^2 = 21969,47 - 86 \cdot 15,55^2 = 1174,46 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_0} - A \cdot z^2 = 2878,27 - 86 \cdot 4,45^2 = 1175,26 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = J_{z_0y_0} - A \cdot z \cdot y = 6685,47 - 86 \cdot 4,45 \cdot 15,55 = 734,48 \text{ см}^4.$$

Нетрудно заметить, что полученные значения моментов инерции площади заданной фигуры относительно центральных осей Z и Y практически совпали с ранее найденными, следовательно, они определены верно.

Окончательно принимаем следующие значения:

- *осевой момент инерции* относительно центральной оси Z

$$J_z = 1175 \text{ см}^4;$$

- *осевой момент инерции* относительно центральной оси Y

$$J_y = 1175 \text{ см}^4;$$

- *центробежный момент инерции* относительно центральных осей Z и Y

$$J_{zy} = 734 \text{ см}^4.$$

4 семестр

Очная форма обучения

№ п/п	Темы практических (семинарских) занятий
14	Однопролетные балки. Кинематический анализ. Определение опорных связей
15	Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в однопролетных статически определимых балках
16	Расчеты на прочность. Подбор сечения балки
17	Определение изгибающего момента методом контролируемых сечений в элементарных расчетных системах
18	Определение зависимых усилий в элементарных расчетных схемах.
19	Перемещения при изгибе. Формула Верещагина. Формула Симпсона. Матричный метод
20	Кинематический анализ и расчет многопролетных балок
21	Построение и использование линий влияния для многопролетных статически определимых балок.
22	Метод сил. Подготовка данных для его применения
23	Построение грузовой и направляющих эпюр определяющего усилия. Построение схемы дискретизации для реализации метода сил.
24	Метод сил. Матричная форма реализации
25	Способы минимизация размеров матрицы податливости. Матричная форма определения составляющих канонической системы уравнений метода сил.
26	Построение окончательной эпюры определяющего усилия. Построение эпюр зависимых усилий.

1. Проведение кинематического анализа заданной расчетной схемы

1.1. Количественный кинематический анализ.

Для проведения полного кинематического анализа необходимо заменить опорные связи их шарнирно-стержневым аналогом и обозначить эти сечения (см. рис. 6).



Рис. 6

Определим степень статической неопределимости заданной расчетной схемы (ЗРС) по формуле:

$$W = 3D - 2\Pi^{(1)} - C_0,$$

- ✓ число жестких дисков (стержней) системы: $D=1$;
- ✓ число простых шарниров, объединяющих жесткие диски системы: $Ш^{(1)}=0$;
- ✓ число опорных стержней: $C_0=3$ ($C_0^A=2$, $C_0^B=1$).

Имеем, $W=3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow$ ЗРС статически определима.

1.2. Качественный кинематический анализ.

Проведем анализ ЗРС на геометрическую неизменяемость, которая обеспечивается наличием шарнирно-стержневого треугольника (ШСТ), образованного опорными связями, наложенными на диск (рис. 7).



Рис. 7

Таким образом, ЗРС геометрически неизменяема.

2. Определение опорных реакций для заданной расчетной схемы

На рис. 8 введем систему координат, оси которой определяют правило знаков для опорных реакций, заданных своими обозначениями, при этом неизвестные реакции считаются положительно направленными.

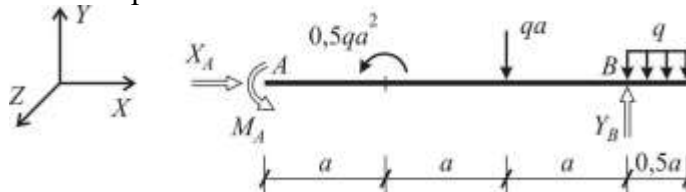


Рис. 8

Назначим уравнения равновесия для определения опорных реакций, причем для исключения взаимовлияния получаемых результатов выберем такие уравнения, из которых однозначно определялась бы каждая из исследуемых реакций и, не учитывалось влияние двух других, а именно:

$$X_A \Leftarrow \sum X = 0;$$

$$Y_B \Leftarrow \sum Y = 0;$$

$$M_A \Leftarrow \sum \text{mom}_B = 0.$$

Найдем опорные реакции, решив приведенные выше уравнения:

$$\sum X = X_A = 0;$$

$$\sum Y = -qa + Y_B - q \cdot 0,5a = 0 \Rightarrow Y_B = 1,5qa;$$

$$\sum \text{mom}_B = M_A + 0,5qa^2 + qa \cdot a - q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0 \Rightarrow M_A = -1,375qa^2.$$

Знак “-” рядом с найденным числовым значением опорной реакции указывает на то, что направление данной реакции надо изменить на противоположное.

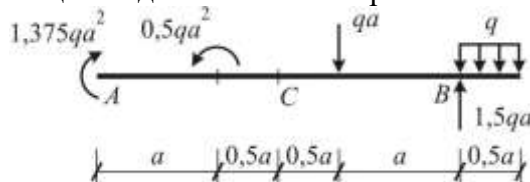


Рис. 9

Таким образом, реакции опорных связей определены, что позволяет указать на расчетной схеме все нагрузки в явном виде («в значениях»), см. рис. 9. Данные этого рисунка используются для проведения контроля правильности определения реакций опорных связей по ранее незадействованному уравнению

Контроль: $\sum \text{mom}_C = -1,375qa^2 + 0,5qa^2 - qa \cdot 0,5a + 1,5qa \cdot 1,5a - q \cdot 0,5a \cdot 1,75a \equiv 0.$

3. Построение эпюр усилий

При плоском изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора (усилия): изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Для того чтобы произвести расчет балки на изгиб, необходимо знать величину наибольшего изгибающего момента M_{\max} и положение сечения, в котором он возникает. Точно также надо знать наибольшую поперечную силу Q_{\max} . В связи с этим возникает необходимость выяснить закон изменения M и Q по длине балки. Для этой цели обычно строят так называемые *эпюры усилий*.

Эпюры усилий – графики распределения внутренних сил (усилий), построенные на осях расчетной схемы. Построение эпюр позволяет повысить наглядность картины распределения усилий по сечениям расчетной схемы от воздействия заданной нагрузки и определить сечения с максимальными значениями усилий.

Для построения эпюр, используя *метод сечений*, определяют численные значения моментов и поперечных сил для ряда точек (*контролируемые сечения*) и по ним строят соответствующие графики.

3.1. Назначение контролируемых сечений.

Использование понятия *контролируемого сечения* позволяет разбить расчетную схему на участки, в пределах которых характер изменения усилия предопределен (см. Приложение 1).

В балочных системах определяющим усилием является изгибающий момент, поскольку, имея эпюру моментов и расчетную схему, можно без сложных построений получить эпюру поперечных сил (см. Приложения 1, 2). Поэтому при назначении контролируемых сечений выделяем и нумеруем те сечения, в которых возникают характерные значения изгибающего момента M . К ним относятся:

- ✓ сечение по концам расчетной схемы;
- ✓ сечение, в точке приложения *сосредоточенной силы* (внешняя сила или опорная реакция);
- ✓ два сечения до и после точки приложения *внешнего изгибающего момента*;
- ✓ три сечения по концам и по середине участка действия *распределенной нагрузки*, свободной от сосредоточенной силы или изгибающего момента.

В данном примере необходимо назначить семь контролируемых сечений (см. рис. 10). При этом согласно *Приложению 1* будем иметь три участка с линейным изменением изгибающего момента (1–2, 3–4, 4–5) и один участок с параболическим законом (5–6–7).

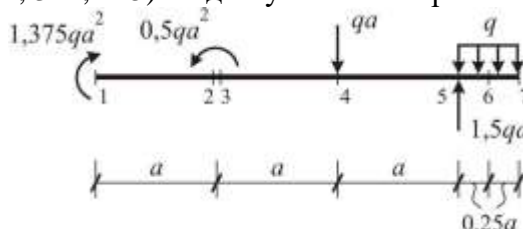


Рис. 10

3.2. Вычисление ординат эпюры изгибающих моментов.

Для определения численных значений усилия M в каждом контролируемом сечении применяется *метод сечений*, основанный на расчленении расчетной схемы до или после контролируемого сечения на две части. При этом формулируются условия равновесия только одной из частей с заменой отброшенной части на систему неизвестных усилий, передаваемых через плоскости разреза. Неизвестные усилия M и Q в контролируемых сечениях изображаются положительно направленными:

- *положительная поперечная сила Q* стремится *повернуть* рассматриваемую часть балки *по часовой стрелке* (см. рис. 11);

Правило знаков для поперечной силы Q

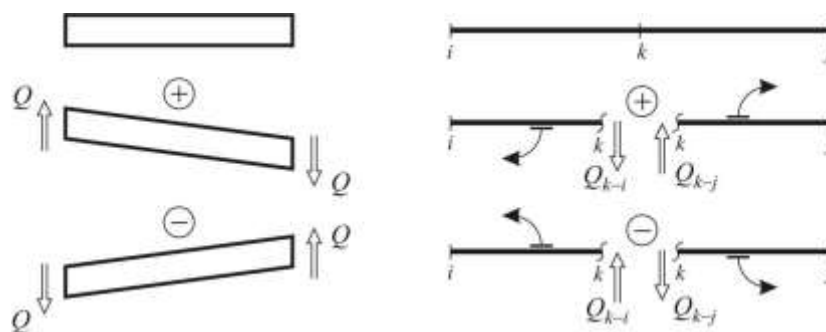


Рис. 11

- *положительный изгибающий момент* направлен *против часовой стрелки*.

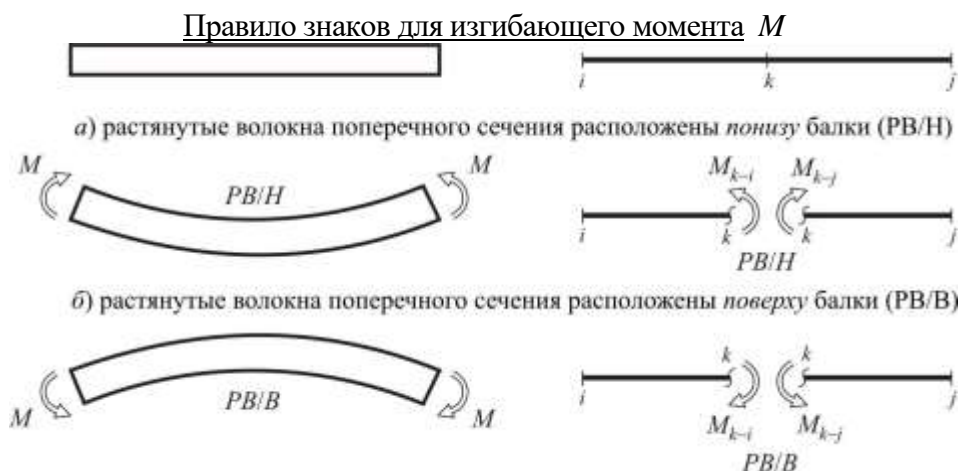


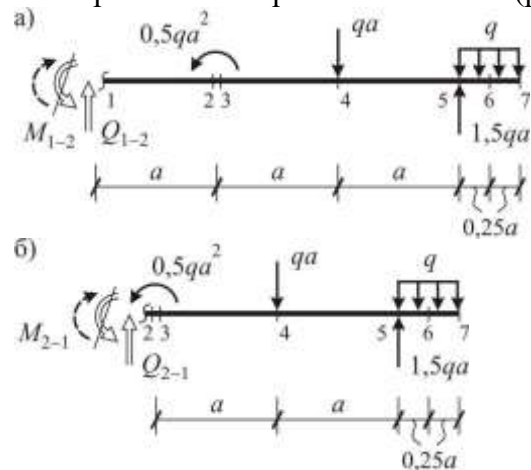
Рис. 12

При использовании обозначения для искомого усилия вводится нумерация усилия двумя цифрами:

- *первая цифра* – номер контролируемого сечения, в котором усилие определяется;
- *вторая цифра* – номер сечения на противоположном конце рассматриваемого участка.

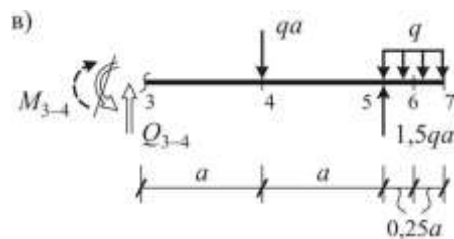
Если в результате решения уравнения равновесия усилие M имеет отрицательный знак (рис. 13 а-г), то значит, изгибающий момент действует в противоположном направлении. Однако знак изгибающего момента не играет никакой роли, а вместо него вводится понятие «растянутое волокно поперечного сечения» (см. рис. 12).

Вычислим значения изгибающих моментов в каждом из 7-ми назначенных контролируемых сечений, используя уравнения равновесия в моментах относительно точек расчленения расчетной схемы (рис. 13).

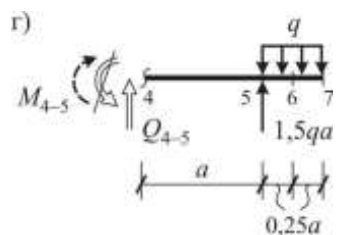


$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_1 &= M_{1-2} + 0,5qa^2 - qa \cdot 2a + \\ &+ 1,5qa \cdot 3a - q \cdot 0,5a \cdot 3,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{1-2} &= -1,375qa^2 \text{ (РВ/Н)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}_2 &= M_{2-1} + 0,5qa^2 - qa \cdot a + \\ &+ 1,5qa \cdot 2a - q \cdot 0,5a \cdot 2,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{2-1} &= -1,375qa^2 \text{ (РВ/Н)}. \end{aligned}$$

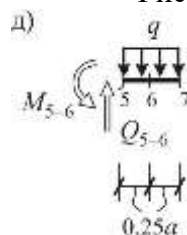


$$\begin{aligned}\sum \text{mom}_3 &= M_{3-4} - qa \cdot a + 1,5qa \cdot 2a - \\ &\quad - q \cdot 0,5a \cdot 2,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{3-4} &= -0,875qa^2 \text{ (PB/H)}.\end{aligned}$$

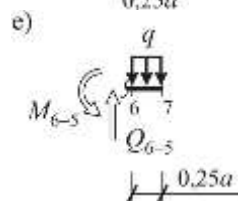


$$\begin{aligned}\sum \text{mom}_4 &= M_{4-5} + 1,5qa \cdot a - q \cdot 0,5a \cdot 1,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{4-5} &= -0,875qa^2 \text{ (PB/H)}.\end{aligned}$$

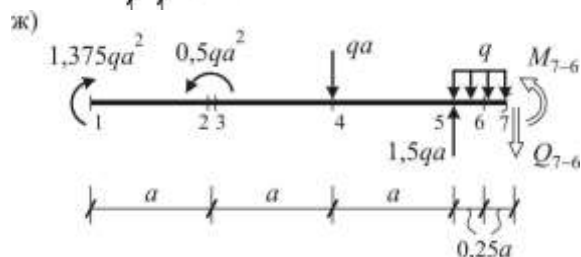
Рис. 13 (начало)



$$\begin{aligned}\sum \text{mom}_5 &= M_{5-6} - q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{5-6} &= 0,125qa^2 \text{ (PB/B)}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum \text{mom}_6 &= M_{6-5} - q \cdot 0,25a \cdot 0,125a = 0 \Rightarrow \\ M_{6-5} &= 0,031qa^2 \text{ (PB/B)}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum \text{mom}_7 &= M_{7-6} - 1,375qa^2 + \\ &\quad + 0,5qa^2 + qa \cdot 1,5a - 1,5qa \cdot 0,5a + \\ &\quad + q \cdot 0,5a \cdot 0,25a = 0 \Rightarrow \\ M_{7-6} &= 0.\end{aligned}$$

Рис. 13 (окончание)

3.3. Построение эпюры изгибающих моментов.

При построении эпюры изгибающих моментов необходимо:

- отложить на осях расчетной схемы в контролируемых сечениях ординаты, равные найденным значениям моментов, со стороны растянутых волокон;
- соединить ординаты, учитывая характер изменения усилия (линейный или параболический), см. Приложение 1.

По данным рис. 13 построим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 14).

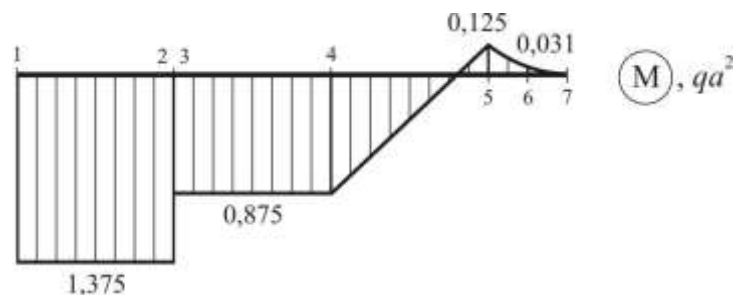


Рис. 14

Общие указания к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

1. Если поперечная сила, изменяясь непрерывно по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий момент имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение.

2. В сечении, где приложен изгибающий момент (сосредоточенная пара сил):

- ✓ на эпюре M получается скачкообразное изменение ординат – скачок, равный приложенному внешнему моменту;
- ✓ на эпюре Q никаких изменений не происходит.

3. В сечении под сосредоточенной силой:

- ✓ на эпюре M происходит резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры;
- ✓ на эпюре Q получается скачкообразное изменение ординат – скачок, равный приложенной внешней силе.

4. В точках, соответствующих началу и концу участка, в пределах которого к балке приложена распределенная нагрузка, параболическая и прямоугольная части эпюры M сопрягаются плавно, если на границах указанного участка не приложено сосредоточенных сил.

5. В сечении на свободном или шарнирно опертom конце балки:

- ✓ изгибающий момент M равен нулю, если там не приложен внешний изгибающий момент (сосредоточенная пара сил), а если он приложен – равен этому моменту;
- ✓ поперечная сила Q равна сосредоточенной силе (внешняя сила или опорная реакция), а если сила не приложена – поперечная сила равна нулю.

6. В сечении, совпадающем с заделкой изгибающий момент M и поперечная сила Q численно равны опорным реакциям.

7. Если на некотором участке:

- ✓ $Q > 0$, то изгибающий момент убывает (слева направо);
- ✓ $Q < 0$, то изгибающий момент возрастает (слева направо);
- ✓ $Q = 0$, то изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).

Соответствие построенных эпюр усилий изложенным выше общим указаниям также свидетельствует о правильности проведенных построений.

3.4. Вычисление ординат эпюры поперечных сил.

Поперечная сила имеет геометрический смысл тангенса угла наклона касательной к эпюре изгибающего момента в рассматриваемом сечении и осью X балки.

Поэтому вычисление ординат эпюры поперечных сил включает в себя:

- расчленение эпюры изгибающих моментов на участки, в пределах которых момент изменяется по единому закону (линейному или параболическому);
- вычисление для линейного участка эпюры изгибающих моментов модуля тангенса соответствующего угла (см. Приложение 2);
- разложение криволинейного (параболического) участка эпюры изгибающих моментов на линейную и параболическую части и вычисление модулей тангенсов соответствующих углов (см. Приложение 2);
- присвоение «инженерного» знака этим значениям: *поперечная сила в сечении положительна*, если участок с этим сечением на эпюре моментов нужно вращать *по часовой стрелке* для совмещения его оси с касательной на эпюре моментов (в этом же сечении), используя минимальный из углов поворота.

Итак, в нашем случае необходимо рассмотреть четыре участка эпюры изгибающих моментов и вычислить по ним ординаты эпюры поперечных сил (рис. 15).

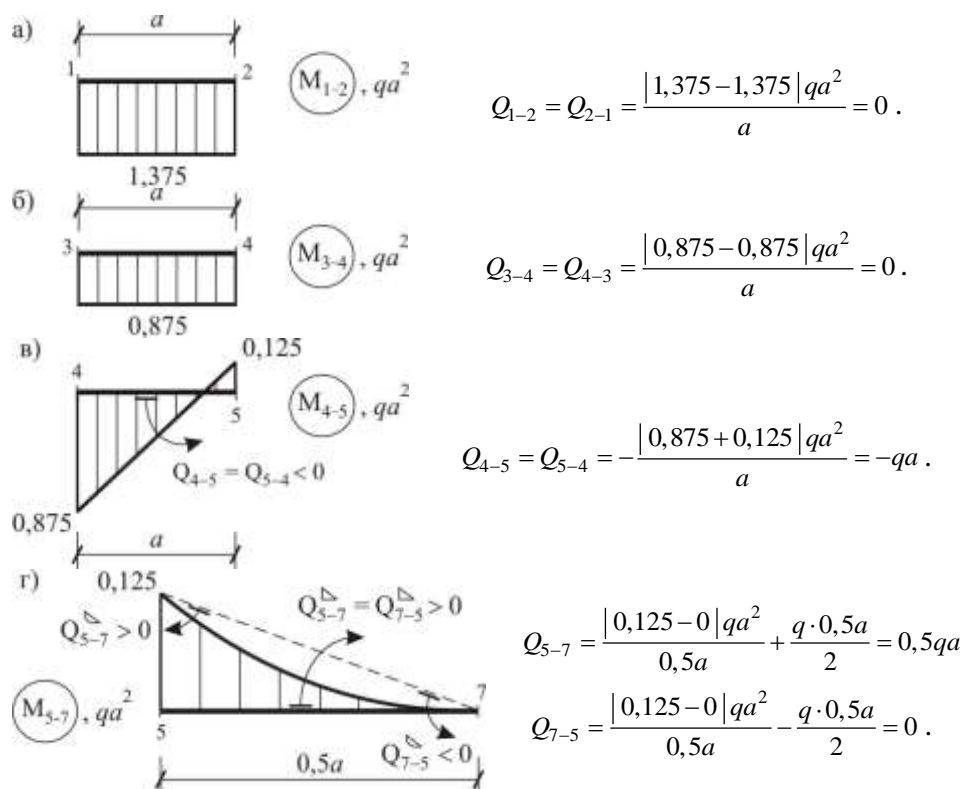


Рис. 15

3.5. Построение эпюры поперечных сил.

При построении эпюры поперечных сил необходимо:

- отложить на осях расчетной схемы в контролируемых сечениях ординаты, найденные по эпюре изгибающих моментов, причем *положительные* ординаты откладываются *вверх* от оси расчетной схемы, а *отрицательные* – *вниз*;
- соединить ординаты, учитывая характер изменения усилия, см Приложение 1.

По данным рис. 15 построим эпюру поперечных сил (см. рис. 16).

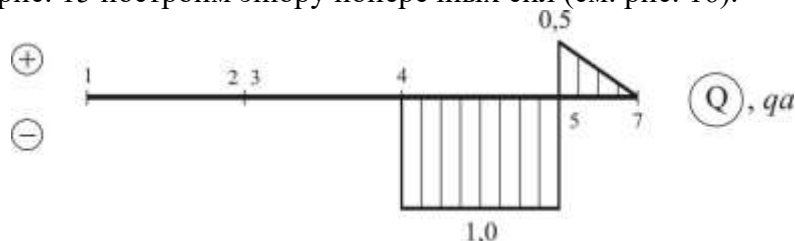


Рис. 16

3.6. Контроль правильности определения ординат эпюр усилий.

Контроль правильности определения ординат эпюр усилий для ЗРС производится для произвольной части балки (рис. 17), для которой составляются уравнения равновесия ($\sum Y$ и $\sum \text{mom}_D$).

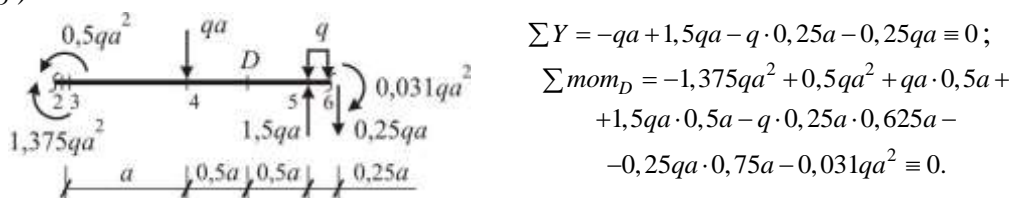


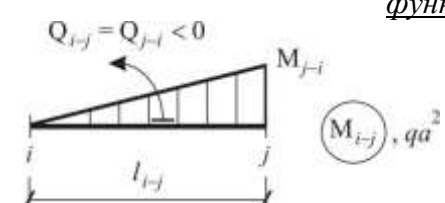
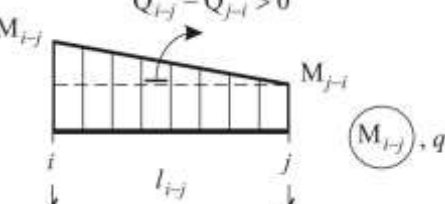
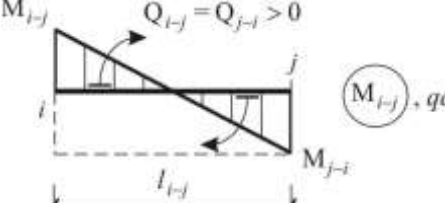
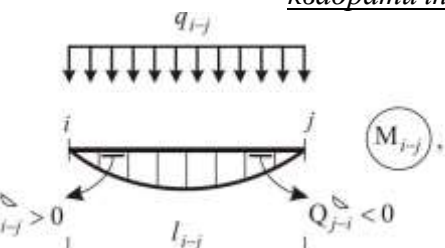
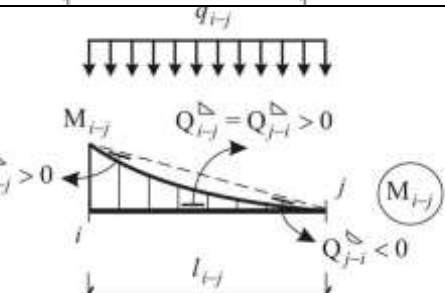
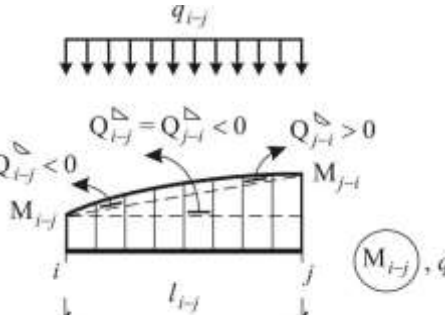
Рис. 17

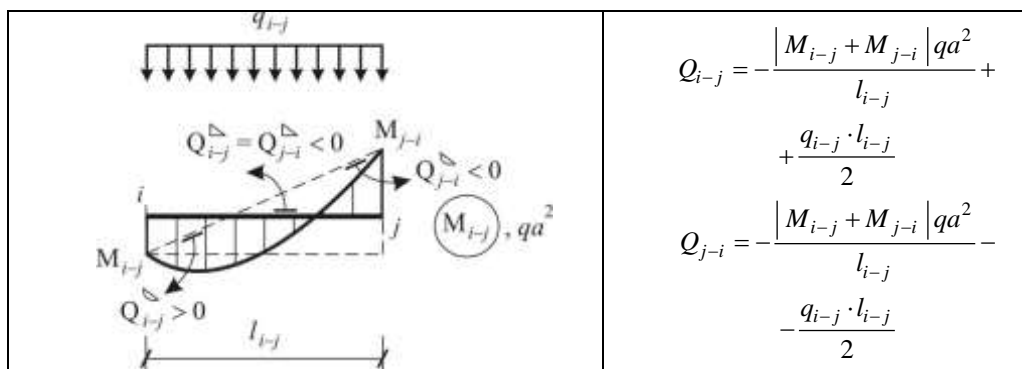
Уравнения равновесия отрезанной части ЗРС удовлетворяются тождественно, что свидетельствует о значительной достоверности проведенных построений.

Кроме этого правильность построения эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q по характерным сечениям можно проверить, используя ряд общих правил. Одни из

них являются следствиями из дифференциальных зависимостей между q , Q и M , другие вытекают непосредственно из метода сечений.

Вычисление ординат эпюры поперечных сил по эпюре изгибающих моментов

1. На участке $i-j$ балки эпюра изгибающих моментов – линейная функция:	
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = -\frac{ M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}}$
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = \frac{ M_{i-j} - M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}}$
	$Q_{i-j} = Q_{j-i} = \frac{ M_{i-j} + M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}}$
2. На участке $i-j$ балки эпюра изгибающих моментов – квадратичная функция:	
	$Q_{i-j} = \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = -\frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$
	$Q_{i-j} = \frac{ M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}} + \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = \frac{ M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}} - \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$
	$Q_{i-j} = -\frac{ M_{i-j} - M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}} - \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$ $Q_{j-i} = -\frac{ M_{i-j} - M_{j-i} qa^2}{l_{i-j}} + \frac{q_{i-j} \cdot l_{i-j}}{2}$



Пример 2.

Дано: статически определимая многопролетная балка (рис. 6.13,а). Построить эпюры внутренних усилий M и Q .

Решение.

Определение опорных реакций можем производить всеми тремя приемами, но, как правило, для таких балок используется прием построения «этажной» схемы. Расчленим балку по шарнирам 3, 5, 6. Кинематический анализ каждого ее элемента дает, что балка 6-7 является геометрически неизменяемой и неподвижной и считается основной. Балка 5-6 имеет три степени свободы. Придадим ей три опорных стержня и концом 6 опоем на балку 6-7, а концом 5 - на балку 3-4-5, которая, в свою очередь, имеет две степени свободы, и концом 3 будет опираться на балку 1-2-3. Балка 1-2-3 имеет одну степень свободы и для ее неподвижности добавим один горизонтальный опорный стержень. Это позволит считать балку 1-2-3 также основной. Этажная схема представлена на рисунке 6.13,б.

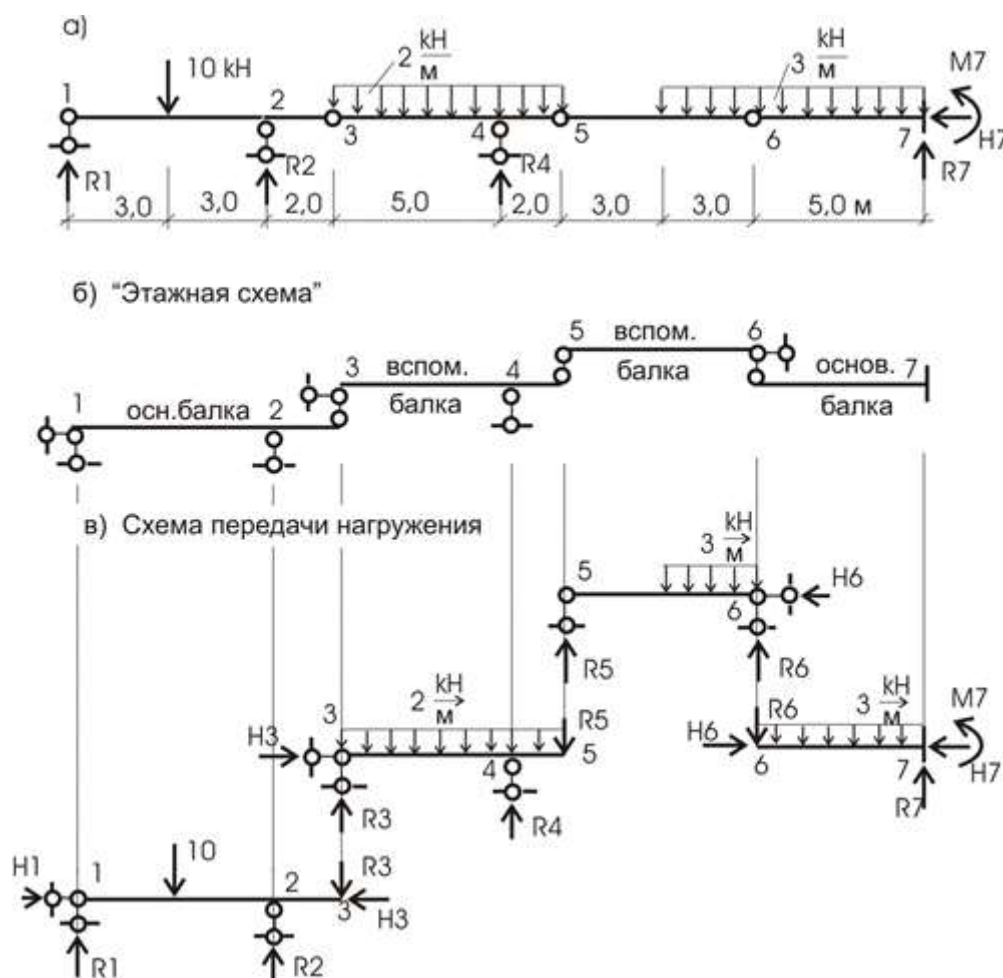


Рис.6.13

Этажная схема позволяет выявить очередность расчета, помня о том, что нагрузка верхних «этажей» передается на нижние, но не наоборот. Схема передачи нагрузки от балки к балке показана на рис.6.13,в.

Следовательно, первой будет рассчитываться верхняя балка 5 – 6. Затем рассчитываются балки второго уровня: балка 3 – 4 – 5 и балка 6 – 7. И последней в нашем примере – балка 1 – 2 – 3. Итак, для каждой балки с учетом очередности составляются уравнения статики и определяются реактивные усилия.

Балка 5-6

$$1) \sum x = 0; \quad H_6 = 0,$$

$$2) \sum y = 0; \quad R_5 \cdot 6 + R_6 - 3 \cdot 3 = 0,$$

$$3) \sum M_6 = 0; \quad R_5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0.$$

Из данных уравнений находим

$$R_5 = 2,25 \text{ кН}, \quad R_6 = 6,75 \text{ кН}.$$

Балка 3-4-5

$$1) \sum x = 0; \quad H_3 = 0,$$

$$2) \sum y = 0; \quad R_3 + R_4 - 2 \cdot 7 - R_5 = 0,$$

$$3) \sum M_4 = 0; \quad R_3 \cdot 5 + R_5 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 1,5 = 0.$$

Из данных уравнений находим

$$R_3 = 3,3 \text{ кН}, \quad R_4 = 12,95 \text{ кН}.$$

Балка 6-7

$$1) \sum x = 0; \quad H_7 = 0,$$

$$2) \sum y = 0; \quad R_6 + 3 \cdot 5 - R_7 = 0,$$

$$3) \sum M_7 = 0; \quad R_6 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + M_7 = 0.$$

Из данных уравнений находим

$$R_7 = 21,75 \text{ кН}, \quad M_7 = -71,25 \text{ кНм}.$$

Балка 1-2-3

$$1) \sum x = 0; \quad H_1 = 0,$$

$$2) \sum y = 0; \quad R_1 + R_2 - 10 - R_3 = 0,$$

$$3) \sum M_1 = 0; \quad R_2 \cdot 6 - 10 \cdot 3 - R_3 \cdot 8 = 0.$$

Из данных уравнений находим

$$R_1 = 3,9 \text{ кН}, \quad R_2 = 9,4 \text{ кН}.$$

Построение эпюр внутренних усилий можем вести для балки в целом, а можем вычислить внутренние усилия для каждой балки отдельно и затем построить их на единой оси заданной балки (рис. 6.14).

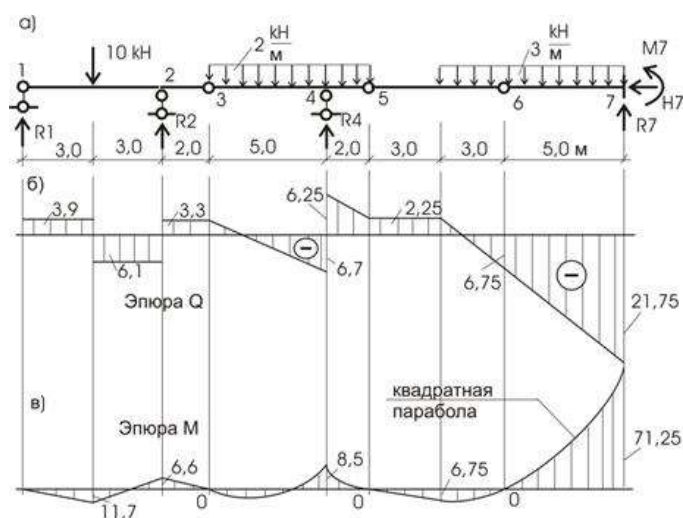


Рис.6.14

Построение линий влияния многопролетных балок кинематическим способом

Построение линий влияния кинематическим методом основано на использовании принципа возможных перемещений. Возможные перемещения - бесконечно малые перемещения, допускаемые связями. Возможные перемещения направлены по касательной к действительной траектории (рис.3.25).

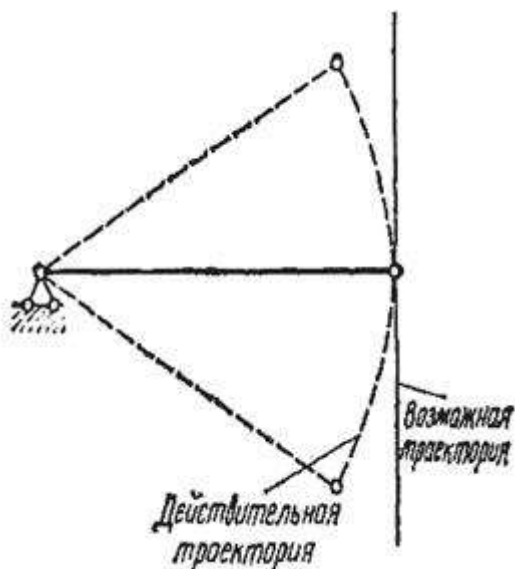


Рис. 3.25. Схема, показывающая принцип возможных перемещений

Для построения линии влияния опорной реакции надо отбросить связь, линию влияния усилия в которой необходимо построить, заменив ее действие силой X . Задать полученному механизму возможное перемещение таким образом, чтобы эпюра перемещений совпала с положительным направлением линии влияния у рассматриваемой опоры.

Для построения линии влияния *изгибающего момента* в каком-либо сечении необходимо врезать в это сечение шарнир и моментную связь заменить моментом X и дать возможность перемещения получившемуся кинематическому механизму.

Для построения линии влияния *поперечной силы* в каком-либо сечении балки надо врезать в это сечение вертикальный ползун, приложить условные силы X и дать перемещение кинематическому механизму. Полученная таким образом эпюра перемещений совпадает с линией влияния поперечной силы.

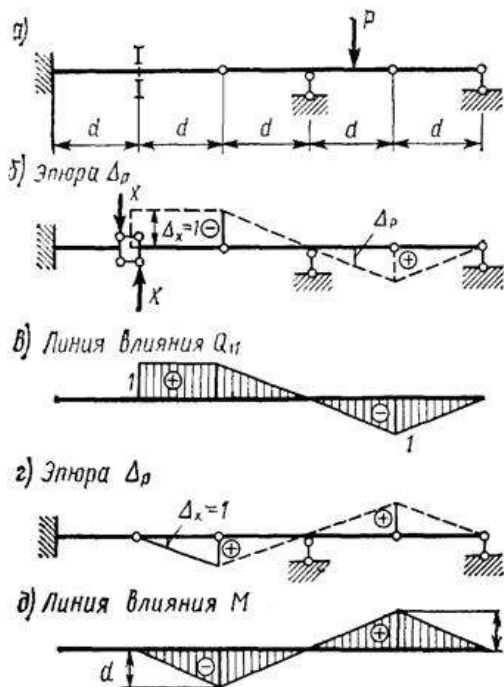
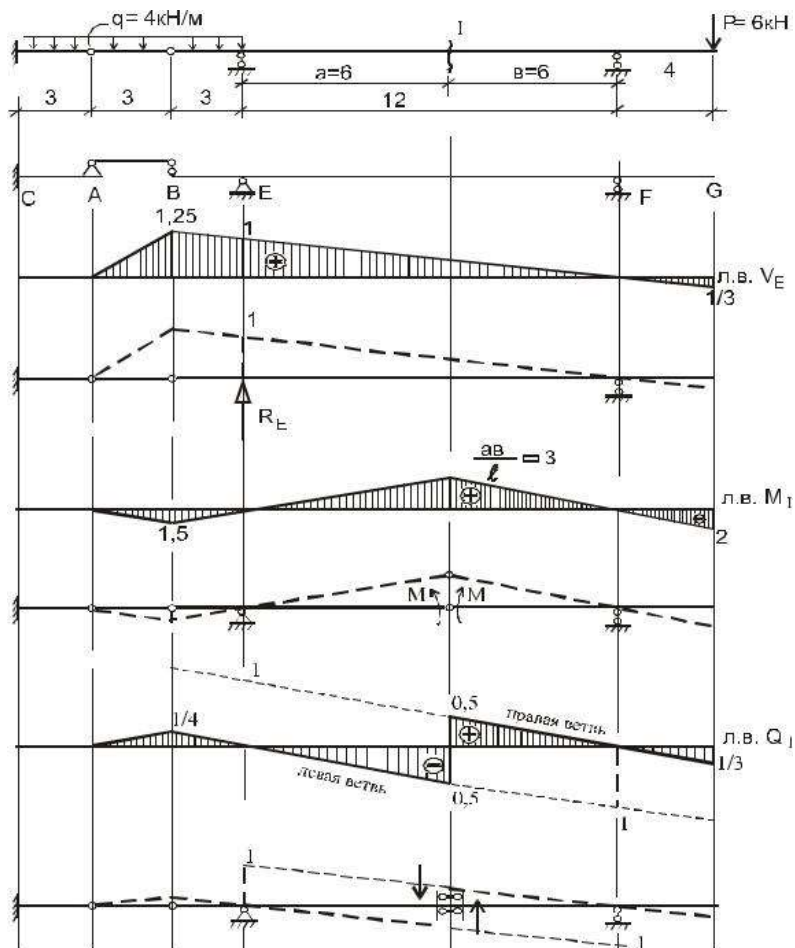
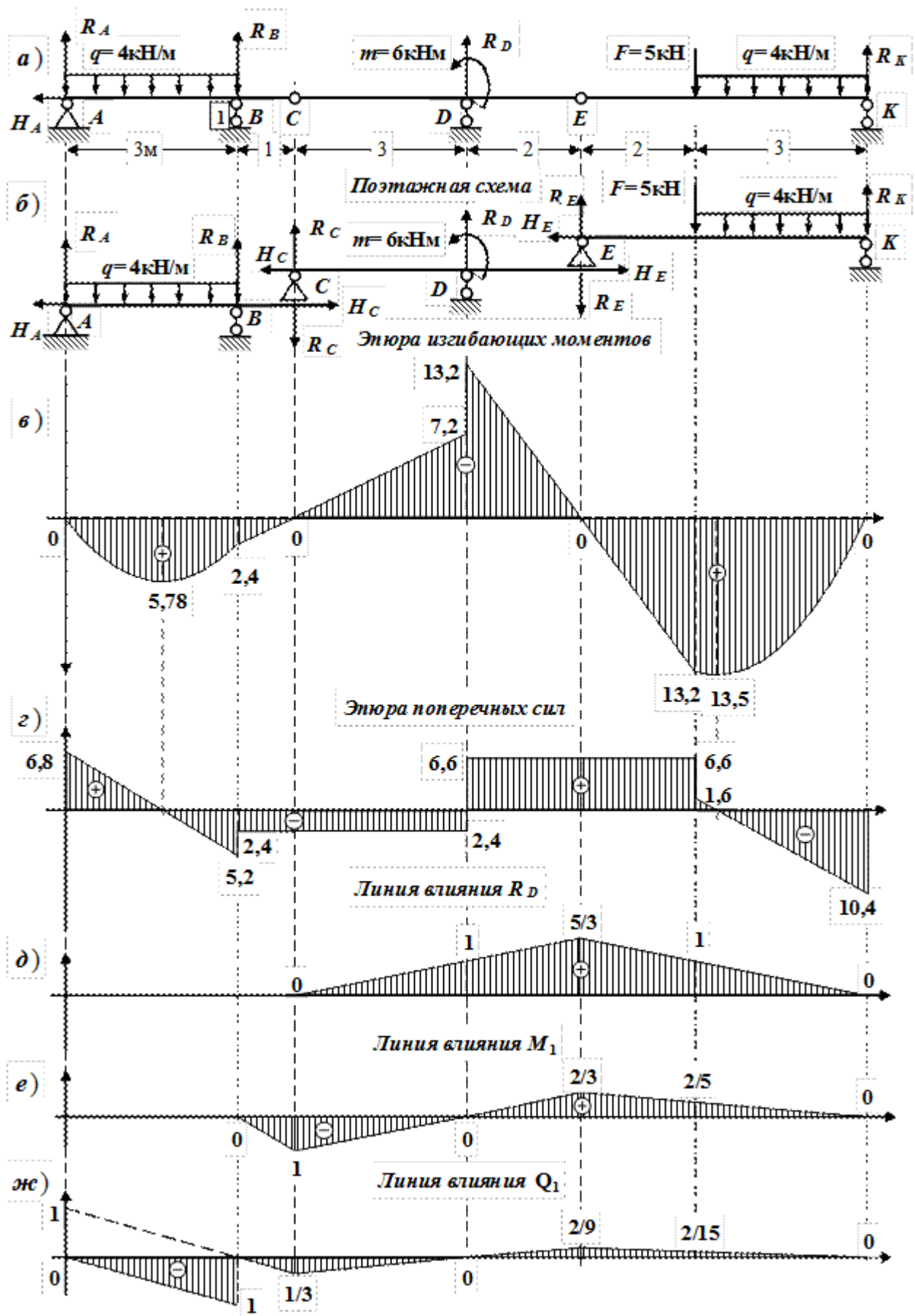


Рис. 3.27. Схема для построения линий влияния изгибающего момента M и поперечной силы Q в сечении I-I кинематическим методом



Библиографический список

Основная литература

1. Теличко, Григорий Николаевич. Основы строительной механики плоских стержневых систем : учебник для вузов и сузов / Г. Н. Теличко .— 3-е изд., стер .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2010 .— 440 с.: ил. — Предм. указ.: с. 427-430 .— Библиогр.: с. 431-432 .— ISBN 978-5-7679-1533-0 : 204,00. 82 экз.
2. Кривошапко, С. Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы : учеб.пособие для вузов / С. Н. Кривошапко.— М.: Высш. шк., 2008.— 392 с.: ил. — (Для высших учебных заведений:Строительство и архитектура).— Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-06-005754-6 (в пер.). 10 экз.
3. Бабанов, В. В. Строительная механика: учебник для вузов: в 2 т. / В. В. Бабанов .— 2-е изд., стер. — Москва: Академия, 2012.— (Высшее профессиональное образование.Строительство) (Бакалавриат).—Т. 1 .— 2012 .— 304 с. : ил. — ISBN 978-5-7695-9298-0 (т. 1) . 5 экз.
4. Столяров. — Москва: Русайнс, 2017. — 191 с. — ISBN 978-5-4365-1584-7. — Режим работы: <https://www.book.ru/book/922551>, по паролю.

Дополнительная литература

1. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб.пособие для вузов. Ч.1. Статически определимые системы / Н.Н.Анохин .— 2-е изд.,доп.иперераб. — М.: АСВ, 2007.— 335с.: ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93093-024-4 /в пер./ : 300.00. 2 экз.
2. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб.пособие для вузов. Ч.2. Статически неопределимые системы / Н.Н.Анохин .— 2-е изд.,доп.иперераб. — М.: АСВ, 2007 .— 464с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93093-024-4 /в пер./ : 325.00. 2 экз.
3. Строительная механика. В 2 книгах. Книга 1. Статика упругих систем: Учебник для вузов / А. В. Александров, Потапов В. Д., Косицын С. Б., Долотказин Д.Б. – М.: Высшая школа, 2007. – 511 с.: ил. – ISBN: 5-06-004891-8 /в пер./.
4. [Дарков, А.В.](#) Строительная механика : учебник / А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников .— 10-е изд.,стер. — СПб.и др. : Лань, 2005 .— 656с. : ил. — (Учебники для вузов.Спец.лит.) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-81114-0576-6 /в пер./ : 275.55. 12 экз.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://smitu.cef.spbstu.ru/> Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет.Кафедра строительной механики и теории упругости
2. <http://www.strmech.susu.ac.ru/stroymech/> Южно-уральский государственный университет. Кафедра "Строительной механики"
3. <http://www.scadgroup.com/news.shtml> Официальный сайт группы компаний "СКАД Софт"
4. <http://djvu-inf.narod.ru/tslib.htm> DjVu БИБЛИОТЕКИ - Строительство и инженерные системы