МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и конструкции»
«_18_» _января_ 2022 г., протокол №_5_

Заведующий кафедрой
_________________________ А.А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Информационные системы проектирования изделий, конструкций и технологий строительных материалов»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Производство и применение строительных материалов,
изделий и конструкций

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-04-22

Тула 2022 год

Разработчики методических указаний

Трещев А.А., профессор, д.т.н., профессор
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. ПЕРВИЧНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТА

***Цель работы**: познакомится с основными понятиями теории планирования эксперимента.*

***Оборудование**: ПЭВМ расположенные в аудитории 8-301.*

Работа выполняется строго индивидуально каждым студентом.

Задание на лабораторное занятие

1) Используя программу генерации случайных чисел провести трехфакторный эксперимент в восьми точках (три столбца и восемь строк в матрице планирования – заполнить ее случайным образом). Желательно взять ограничение до 20 при генерации случайных чисел, но учесть возможность его изменения по требованию преподавателя.

2) Определить значения функции отклика в каждой точке плана в соответствии с вариантом:

$$Y = a_1 * X_{k1} + a_2 * X_{k2} + a_3 * X_{k3} + \Delta Y$$

где a_1, a_2, a_3 ,a_4 произвольно выбираемые коэффициенты, постоянные на протяжении всего времени экспериментирования, а ΔУ выбирается для k-го опыта следующим образом:

$$\Delta Y = a_4 * X_{ki} * X_{kj}$$

$$i = \mathrm{mod}_3(N_{бригады}) + 1$$

$$j = \mathrm{mod}_3(N_{зачетки}) + 1$$

3) Определить значения нулевых уровней факторов, выполнить нормировку факторов. Найти значения откликов для нулевых уровней факторов, и принять их за эталонные $У_{эт}$.

4) Найти точку плана, удовлетворяющую критерию

$$\min((Y - Y_{эт})^k)$$

$$k = \mathrm{mod}_3 N_{ьригады} + 1$$

5) Составить выражение для функции отклика, подставив в качестве X_{ki} значения факторов в точке, удовлетворяющей критерию.

Порядок выполнения

1. Используя генератор случайных чисел, найдем значения факторов в точках, а также функцию отклика;

№	*X1*	*X2*	*X3*	*У*		*X1*	*X2*	*X3*
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
X0								
Dx								

2. Определим нулевой уровень фактора, проведем нормировку и найдем функцию отклика для нулевого уровня факторов;

3. Найти точку плана, удовлетворяющую заданному критерию;

Содержание отчета

1. Титульный лист, содержащий информацию о студенте (группа, фамилия, номер варианта);
2. Результаты подготовки (выбранные по варианту значения параметров);
3. Основные теоретические положения (используемые формулы);
4. Листинг программы (язык программирования не имеет значения);
5. Ответы на контрольные вопросы;
6. Результат выполнения работы;
7. Выводы по лабораторной работе.

Контрольные вопросы

1. Что образует план эксперимента?
2. Что называется спектром плана?
3. Чем отличаются пассивные и активные эксперименты?
4. Чем характеризуется объект исследования? Дайте определение факторному пространству.

Вступление в теорию планирования эксперимента

Эксперимент – метод научного исследования, когда исследователь активно и целенаправленно воздействует на объект исследования путем создания искусственных условий или использования естественных условий, необходимых для выявления конкретных свойств объекта.

Эксперименты делятся на пассивные и активные (управляемые). В пассивном имеются только контролируемые, но неуправляемые входные параметры – мы не имеем возможности вмешиваться в ход эксперимента, и выступаем в роли пассивного пользователя. В активном – существуют управляемые и контролируемые входные параметры – мы сами являемся администратором нашей системы.

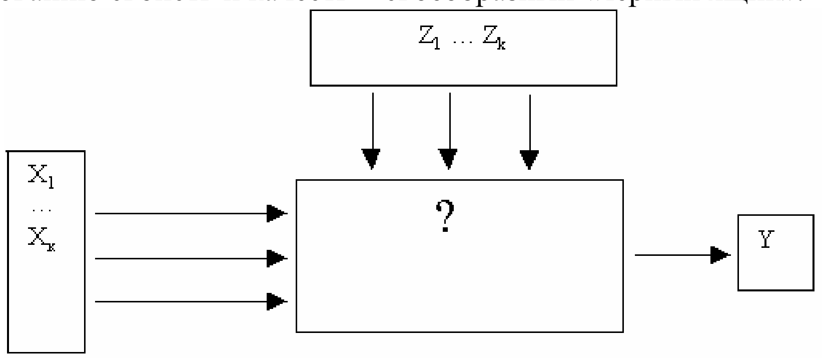
Планирование эксперимента – научная область, применяемая в данный период для решения широкого круга задач, в числе которых такие важные для нашей области, как оптимизация процессов и построение интерполяционных моделей.

Основу ТПЭ составляет математическая статистика (пассивные эксперименты полностью базируются на ней), которая, в свою очередь, базируется на теории вероятностей, с которой вы должны быть хорошо знакомы. Теория вероятностей связана с ТПЭ через значения выходных параметров экспериментальных установок.

Экспериментальные исследования постоянно сопровождают любой исследовательский процесс, в том числе и в компьютерной области. Наибольшее практическое значение имеет оптимизация процессов (планирование экстремальных ситуаций). При этом всегда задается набор входных и управляющих характеристик, которые контролируются определенным набором статистических значений, получаемых при эксперименте.

Объект исследования

Объект исследования (ОИ) рассматривается как носитель некоторых неизвестных или подлежащих исследованию свойств и качеств – своеобразный «черный ящик».



В данной конфигурации вектор $X_1 \ldots X_к$ представляет собой группу контролируемых и управляемых величин, которые могут изменяться должным образом в ходе эксперимента, а $Z_1 \ldots Z_k$ только контролируемые характеристики. Первую группу характеристик ($X_1 \ldots X_к$) также называют факторами или управляемыми воздействиями. Y – функция отклика или поверхность отклика или проще – реакция системы на воздействие факторов. Также можно выделить и третью, не обозначенную на идеальной модели систему входных сигналов – это шумы или помехи, которые в реальной жизни являются не чем иным как ошибками обслуживающего персонала, влияния внешней среды, погрешности приборов и т.д. К этой же группе можно отнести влияние тех характеристик, которые не могут контролироваться извне – либо из-за их сложности, либо из-за незнания их природы и невозможности их контроля.

Факторное пространство

Различные характеристики объектов имеют различную физическую природу, а, следовательно и размерность, что затрудняет построения экспериментальной модели. Поэтому на практике значения факторов, которые имеют реальный физический смысл, нормируют определенным образом (приводят к определенному ранее заданному набору значений). Для любого фактора (набора значений) X существует нижний X_{min} и верхний X_{max} уровни изменения значений. Приведем алгоритм нормировки фактора. Практическое его применение можно увидеть в приведенном ниже примере выполнения лабораторной работы.

- Выбираем масштаб и положение осей координат таким образом, чтобы X_{min} соответствовало –1, а X_{max} соответствовало +1.
- Вычисляем значение X_0 для данного фактора следующим образом $X_0 = \dfrac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$.
- Вычисляем интервал изменения фактора $dx = X_0 - X_{min} = X_{max} - X_0$.
- Находим нормированное значение $X_н$ для каждого фактора $X_н = \dfrac{X - X_0}{dx}$.

Зависимостью реакции объекта от точки факторного пространства называется функцией отклика Y, а ее геометрическое представление $Y(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ поверхностью отклика. Векторов значений функции отклика может быть столько, сколько опытов мы провели.

Проведение эксперимента

Эксперимент состоит из опытов (воспроизведение исследуемого явления). Под планированием эксперимента понимают выбор плана эксперимента – совокупности данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

$$X_q = \left(X_{1q}, X_{2q}, X_{3q} ... X_{nq} \right)$$

Каждый опыт эксперимента характеризуется определенным набором значений факторов. Вектор, содержащий некоторый набор конкретных значений факторов X_I , определяет q-ю точку плана эксперимента. Совокупность векторов X_q (q = 1,n) образует план эксперимента (матрица, содержащая k строк и n столбцов - каждая строка образует точку плана эксперимента, а столбец фактор эксперимента).

X_{11}	X_{21}	X_{31}	…	X_{N1}
X_{12}	X_{22}	X_{32}	…	X_{N2}
…	…	…	…	…
X_{1K}	X_{2K}	X_{3K}	…	X_{NK}

Совокупность всех точек плана, отличающихся уровнем хотя бы одного фактора (различных строк матрицы планирования), называется спектром плана. Матрица, получаемая из всех различных строк плана - матрица спектра плана. Она отличается от приведенной выше матрицы только числом строк, из-за отсутствия повторяющихся точек плана (количество точек спектра плана примем за G), т.е. ее размерность будет: G строк на N столбцов. Для полной характеристики также применяют матрицу дублирования, размерность которой совпадает с размерностью матрицы спектра плана. Она составляется следующим образом:

K1	0	0	…	0
0	K2	0	…	0
…	…	…	…	…
0	0	0	…	Kg

Где Kj - число параллельных опытов в точке спектра плана с номером j (j = 1,N). Т.е. это число характеризует дублирование соответствующей строки в матрице спектра плана.

Пример выполнения

1) Найдем случайным образом значения факторов в точках (используя генератор случайных чисел) а также функцию отклика (по нижеследующей формуле)

$Y = 2 * X_{k1} + 4 * X_{k2} + 3 * X_{k3} + \Delta Y$, где по варианту выберем

$$\Delta Y = 5 * X_{k2} * X_{k1}$$

$$i = \mathrm{mod}_3(7) + 1 = 2$$

$$j = \mathrm{mod}_3(24) + 1 = 1$$

№	***X1***	***X2***	***X3***	***У***		***X1***	***X2***	***X3***
1	17	10	1	927		1	0.333	-1
2	2	12	4	184		-0.875	0.667	-0.571
3	16	2	15	242		0.875	-1	1
4	3	13	14	290		-0.75	0.833	0.857
5	4	3	3	79		-0.625	-0.833	-0.714
6	6	4	11	171		-0.375	-0.667	0.428
7	1	10	10	122		-1	0.333	0.286
8	2	14	6	228		-0.875	1	-0.286
X0	9	8	8	434				
dx	8	6	7					

2) Определим нулевые уровни факторов X_0 и произведем нормировку (найдя диапазон изменения), а также найдем функцию отклика для нулевого уровня факторов

$$X_0 = \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2}$$

$dx = X_0 – X_{min} = X_{max} - X_0$

$X_н = \frac{X - X_0}{dx}$, нормировка производится по данной формуле

3) Найдем опыт, удовлетворяющий критерию отбора

$\min((Y - Y_{эт})^2)$, где $У_{эт}$ значение функции отклика для нулевого уровня факторов

$k = \mathrm{mod}_3\, 7 + 1 = 2$

Таким опытом является четвертый: $Y = 2*3 + 4*13 + 3*14 + \Delta Y = 290$

2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Цель работы*: научится пользоваться интервальными оценками числовых характеристик распределенных по некоторому случайному закону.*

Оборудование*: ПЭВМ расположенные в аудитории 8-301.*

Работа выполняется строго индивидуально каждым студентом.

В предыдущей работе были рассмотрены методы, дающие оценку параметра в виде некоторого числа или точки на числовой оси. Такие оценки называют точечными. Точечная оценка без указания степени точности и надежности не имеет практического значения, так как представляет собой только возможное значение случайной величины, т.е. сама точечная оценка является величиной случайной. Можно доказать, что в выборке объема n из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону $N(a,\sigma)$ среднее выборочное Mx распределено также по нормальному закону $N\left(a,\sigma/\sqrt{n}\right)$. Величина nS_*^2/σ^2 распределена по закону χ^2 с n степенями свободы, а $t_n = (Mx-a)\sqrt{n-1}/S$ – по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\tilde{\theta}$ для параметра θ, возьмем достаточно большую вероятность β и найдем такое $\delta > 0$, для которого $P\left(\left|\tilde{\theta}-\theta\right| < \delta\right) = \beta$

$$\text{или } P\left(-\delta < \theta - \tilde{\theta} < \delta\right) = P\left(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \delta + \tilde{\theta}\right) = \beta \qquad (1.1)$$

Равенство (1.1) означает, что точное, но неизвестное значение параметра θ с вероятностью β накрывается интервалом $l = \left(\tilde{\theta}-\delta, \tilde{\theta}+\delta\right)$. Этот интервал называют доверительным, а вероятность β – доверительной вероятностью или надежностью оценки. Очевидно, чем меньше δ для заданного β, тем точнее оценка.

В общем случае интервал, образованный статистиками $U(x)$ и $V(x)$, называется доверительным для оцениваемого параметра θ, если выполняется равенство

$$P\big(U(x) < \theta < V(x)\big) = \beta \qquad (1.2)$$

Здесь x – выборочный вектор, надежность β выбирается близкой к единице. Концы интервала называются доверительными границами.

Порядок нахождения доверительного интервала следующий. Подыскивают подходящую статистику $t_n(x,\theta)$, зависящую от параметра θ, но распределение которой от этого параметра не зависит. Задают надежность β, и по закону распределения статистики $t_n(x,\theta)$ находят доверительные границы из условия (1.2). Затем полученное неравенство решают относительно θ.

Рассмотрим нахождение доверительного интервала на примерах.

Пример 1. Найдем доверительный интервал для математического ожидания $m_\xi = a$ по заданной выборке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону $N(a,\sigma)$, считая, что Mx и S^2 – точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

Рассмотрим статистику $t_n(x,a) = (Mx-a)\sqrt{n-1}/S$. Как отмечалось выше, она распределена по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Тогда

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx = 2\int_{0}^{\delta} f(x)dx = \beta \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) плотность $f(x)$ определяется выражением (2.6), в которое вместо n следует поставить $n-1$. Неизвестное δ определяется из (1.3), а доверительный интервал – из неравенства $\left|(Mx-a)\sqrt{n-1}/S\right| < \delta$.

Таким образом, $l = \left(Mx - \frac{\delta S}{\sqrt{n-1}}, Mx + \frac{\delta S}{\sqrt{n-1}} \right)$ (1.4)

Пример 2. В условии примера 1 найдем доверительный интервал для дисперсии $D_{\xi} = \sigma^2$.

Для этого выберем статистику $t_n\left(x,\sigma^2\right) = \frac{nS^2}{\sigma^2}$. Согласно сказанному выше она распределена по закону χ^2 с $n-1$ степенью свободы. Определение доверительного интервала аналогично, но осложняется несимметричностью закона распределения χ^2. Действительно, уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = \beta \tag{1.5}$$

имеет неоднозначное решение относительно t_1 и t_2. Здесь плотность $f(x)$ определяется формулой (2.5), только n следует заменить на $n-1$. Ради однозначности наложим дополнительные условия, а именно будем считать, что

$$\int_{-\infty}^{t_1} f(x)dx = \int_{t_2}^{\infty} f(x)dx \tag{1.6}$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx + \int_{t_2}^{\infty} f(x)dx = 1$, то получим

$$2\int_{-\infty}^{t_1} f(x)dx = 1-\beta,\ \ 2\int_{t_2}^{\infty} f(x)dx = 1-\beta \tag{1.7}$$

Из (1.7) найдем t_1 и t_2, а решая неравенство $t_1 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < t_2$, найдем доверительный интервал $l = \left(\frac{nS^2}{t_2}, \frac{nS^2}{t_1} \right)$.

Применение методов получения доверительных интервалов для оценок параметров иллюстрируют примеры 2.1-2.2. В начале примера создается выборка нормально распределенных чисел с заданными параметрами (математическим ожиданием и дисперсией). Далее в документе вычисляются оценки для этих параметров по методу моментов. Для дальнейших вычислений вводятся плотности распределений Стьюдента, χ^2 и нормального. Далее находятся доверительные интервалы для математического ожидания при известной и неизвестной дисперсии. В следующем разделе примеров решается задача определения доверительного интервала для дисперсии при известном и неизвестном математических ожиданиях.

Пример 2.1 (Matlab)

```
n=50; muX=3; sigmaX=2; x=normrnd(muX,sigmaX,1,n);
Mx=1/n*sum(x)
Dx=1/(n-1)*sum((x-Mx).^2), sigma=sqrt(Dx)
fn=inline(...
'exp(-x.^2/2/sigma^2)/sqrt(2*pi*sigma^2)',...
'x','sigma');
ft=inline(strcat('gamma((n+1)/2)/gamma(n/2)/',...
'sqrt(pi*n)*(1+t.^2/n).^(-(n+1)/2)'),'t','n');
fx=inline(...
'x.^(n/2-1).*exp(-x/2)/2^(n/2)/gamma(n/2)',...
'x','n');
df1=inline('2*quad(f,0,y,[],[],theta)-lambda',...
'y','f','theta','lambda');
df2=inline('2*quad(f,y,n,[],[],theta)-lambda',...
'y','f','theta','lambda','n');
zf1=inline('fzero(df,z,[],f,theta,beta)',...
'f','df','z','theta','beta');
zf2=inline('fzero(df,z,[],f,theta,beta,n)',...
'f','df','z','theta','beta','n');
beta=0.95; S=sigmaX^2; sigma1=sqrt(S/n)
delta=zf1(fn,df1,0,sigma1,beta), dz=delta*sigma1;
Mx, m=[Mx-dz,Mx+dz]
S=Dx; delta=zf1(ft,df1,0,n-1,beta)
dz=delta*sqrt(S/n); Mx, m=[Mx-dz,Mx+dz]
alpha=1-beta, delta1=zf1(fx,df1,n,n,alpha)
delta2=zf2(fx,df2,n,n,alpha,5*n), dz=n*S;
Dx, m=[dz/delta2,dz/delta1]
delta1=zf1(fx,df1,n,n-1,alpha)
delta2=zf2(fx,df2,n,n-1,alpha,5*n), dz=(n-1)*S;
Dx, m=[dz/delta2,dz/delta1]
```

Пример 4.4 (Maple)

```
> restart: with(stats): with(describe):
  randomize():
> n:=50: muX:=3: sigmaX:=2:
> x:=[random[normald[muX,sigmaX]](n)]:
> Mx:=moment[1](x);
> Dx:=moment[2,mean,0](x); sigma:=sqrt(Dx);
> fn:=(x,sigma)->exp(-x^2/2/sigma^2)/
  sqrt(2*Pi*sigma^2):
> ft:=(t,n)->GAMMA((n+1)/2)/GAMMA(n/2)/
  sqrt(Pi*n)*(1+t^2/n)^(-(n+1)/2);
> fx:=(x,n)->x^((n-2)/2)*exp(-x/2)/2^(n/2)/
  GAMMA(n/2);
> beta:=0.95:
> S:=sigmaX^2: sigma1:=evalf(sqrt(S/n));
> delta:=fsolve(2*int(fn(y,sigma1),y=0..z)-beta,z);
> dz:=delta*sigma1: m:=[Mx-dz, Mx+dz]: 'Mx'=Mx, m;
> S:=Dx:
> delta:=fsolve(2*int(ft(y,n-1),y=0..z)-beta,z);
> dz:=delta*sqrt(S/n): m:=[Mx-dz, Mx+dz]:
> 'Mx'=Mx, m;
```

```
> alpha:=1-beta;
> delta1:=fsolve(int(fx(y,n),y=0..z)-alpha/2,z);
> delta2:=fsolve(int(fx(y,n),y=z..20*n)-alpha/2,z);
> dz:=n*S: s:=[dz/delta2, dz/delta1]: 'Dx'=Dx, s;
> delta1:=fsolve(int(fx(y,n-1),y=0..z)-alpha/2,
  z,0..n);
> delta2:=fsolve(int(fx(y,n-1),y=z..20*n)-alpha/2,
  z,n..20*n);
> dz:=(n-1)*S: s:=[dz/delta2, dz/delta1]:
> 'Dx'=Dx, s;
```

Задание

1. В условиях примера 1 записать формулы доверительного интервала математического ожидания $m_\xi = a$, считая дисперсию σ^2 известной.

2. В условиях примера 1 записать формулы для доверительного интервала дисперсии $D_\xi = \sigma^2$, считая математическое ожидание известной величиной.

3. Используя выборку из примера 2.1 (первая часть) и полагая, что доверительная вероятность $\beta = 0{,}8; 0{,}9; 0{,}95$, вычислить доверительные интервалы:

1) для математического ожидания, считая дисперсию: а) известной величиной $\sigma^2 = S^2$, б) неизвестной величиной (использовать оценку);

2) для дисперсии, считая математическое ожидание а) известной величиной $m_\xi = Mx$, в) неизвестной величиной. Результаты сравнить.

Указание к заданию 1. Учесть, что статистика $t_n\left(x,a\right) = Mx - a$ распределена по нормальному закону $N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Указание к заданию 2. Рассмотреть статистику $t_n\left(x,\sigma^2\right) = nS_*^2 / \sigma^2$.

Замечание к заданию 3. Считать, что генеральная совокупность, из которой взята выборка, распределена по нормальному закону. При этом в случае больших n распределения χ^2 и Стьюдента сходятся к нормальному закону, поэтому при $n > 30$ можно считать, что статистики $t_n = \frac{Mx - a}{S}\sqrt{n-1}$, $t_n = \frac{S_*}{\sigma}\sqrt{2n} - \sqrt{2n-1}$, $t_n = \frac{S}{\sigma}\sqrt{2n} - \sqrt{2n-3}$ распределены по нормальному закону $N\left(0,1\right)$.

4. Провести расчеты доверительных интервалов для μ и σ, заданных преподавателем (смотри примеры 2.1-2.2), при объеме выборок 10, 50 и 100.

Контрольные вопросы

1. Что называется доверительным интервалом и доверительной вероятностью?
2. Дайте общую схему построения доверительного интервала.
3. Как изменяется доверительный интервал с увеличением надежности? С увеличением объема выборки?
4. Как изменяется доверительный интервал в зависимости от того, известны ли другие параметры точно или нет?

3. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Цель работы: *научится пользоваться критериями согласия.*

Оборудование: *ПЭВМ расположенные в аудитории 8-301.*

Работа выполняется строго индивидуально каждым студентом.

Допустим, что построенную по выборке статистическую функцию распределения $F_n(x)$ мы сгладили с помощью некоторой гипотетической функции распределения $F(x)$. Возникает вопрос: а верна ли гипотеза о том, что функция распределения именно $F(x)$, а не какая-либо другая? Точнее, не противоречит ли гипотеза о законе распределения $F(x)$ результатам эксперимента? Чтобы ответить на этот вопрос, пользуются критериями согласия.

Под критерием согласия понимают некоторую величину $\Delta(F_n, F)$, которая отражает количественную меру расхождения гипотетического $F(x)$ и эмпирического $F_n(x)$ распределений. Эту величину можно выбрать многими способами, в соответствии с которыми получаются и различные критерии проверки интересующей нас гипотезы. Например, можно положить

$$\Delta(F_n, F) = D_n = \sup\left|F_n(x) - F(x)\right| \tag{2.1}$$

или

$$\Delta(F_n, F) = \omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_n(x) - F(x)\right]^2 dF(x)$$

В первом случае получаем критерий Колмогорова, во втором – критерий Мизеса.

Схема применения критерия согласия следующая. Возьмём $\alpha > 0$ настолько малым, чтобы осуществление события с вероятностью α можно было считать практически невозможным в единичном опыте. Зная закон распределения случайной величины $\Delta = \Delta(F_n, F)$, найдем ее возможное значение Δ_0 из уравнения $P(\Delta > \Delta_0) = \alpha$. По данной выборке вычислим значение критерия согласия $\Delta_1 = \Delta(F_n, F)$. Если окажется, что $\Delta_1 > \Delta_0$, то это значит, что произошло практически невероятное событие. Следовательно, эксперимент опровергает нашу гипотезу, и она отбрасывается. При этом вероятность того, что мы отбросили верную гипотезу, равна α. Если $\Delta_1 < \Delta_0$, то гипотеза не противоречит эксперименту и должна быть принята. Число α называется уровнем значимости критерия.

Колмогоров нашел предельную функцию распределения величины $\lambda = \sqrt{n}D_n$. Эту функцию обычно обозначают $K(x)$:

$$K(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}D_n < x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2},\ x > 0 \tag{2.2}$$

Формулой (2.2) можно пользоваться для больших n.

Чтобы воспользоваться критерием согласия Колмогорова, нужно построить графики гипотетической и выборочной функций распределения, по графикам найти статистику D_n и вычислить величину $\lambda_1 = \sqrt{n}D_n$. Найти вероятность события $\sqrt{n}D_n > \lambda_1$ по формуле

$$P\left(\sqrt{n}D_n > \lambda_1\right) = 1 - K(\lambda_1) = -2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda_1^2} \tag{2.3}$$

Если эта вероятность меньше α, то гипотеза отвергается, если больше, то признается непротиворечащей эксперименту.

Предположим теперь, что, например, из физических соображений мы можем высказать гипотезу только о виде закона распределения, а параметры, входящие в него, неизвестны. Тогда критерий согласия Колмогорова не применим. В таких случаях часто используют критерий согласия Пирсона.

Всю числовую ось разобьем на r непересекающихся разрядов точками $-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r = \infty$. Примем гипотезу о функции распределения. Неизвестные параметры, входящие в нее, заменим их оценками. Таким образом, гипотетическая функция распределения $F(x)$ будет известна, и можно будет найти вероятности $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ попадания случайной величины в i-й разряд. Возьмем статистику

$$t_n = \chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (2.4)$$

здесь n – объем выборки, r – число разрядов, m_i – число значений в i-м разряде.

За меру расхождения между гипотетической $F(x)$ и эмпирической $F_n(x)$ функциями распределения примем статистику $t_n = \Delta(F_n, F)$, определенную формулой (2.4). Фишером доказано, что предельным законом распределения статистики t_n является распределение χ^2 с $r-m-1$ степенями свободы, если параметры оценены по методу максимального правдоподобия. Здесь m – число параметров, входящих в гипотетическую функцию распределения. Доказано также, что при объеме выборки $n > 30$ с достаточной точностью можно пользоваться предельным законом распределения, если $np_i > 5$.

Схема применения критерия Пирсона следующая. По формуле (2.4) вычисляют значение статистики $t_n = \Delta_0$. Вычисляют вероятность

$$p(\Delta > \Delta_0) = \int_{\Delta_0}^{\infty} f(x)dx \qquad (2.5)$$

Здесь $f(x)$ определяется формулой $f(x) = \left(2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$, а n следует заменить на $r-m-1$. Если эта вероятность меньше уровня значимости α, то гипотезу следует отбросить.

Применение критериев согласия иллюстрируют примеры 3.1-3.2. В начале генерируется (по методу обратных функций) выборка значений случайной величины, распределенной по показательному закону с заданным параметром a. Далее выборка группируется и находится группированная функция распределения, что необходимо для критерия Колмогорова. В соответствии со схемой применения критерия Колмогорова, задается теоретическая функция распределения $F(x)$, и по этим значениям вычисляется статистика D_n. Вычисляется вероятность по формуле и сравнивается с уровнем значимости α.

В следующем разделе примеров применяется критерий Пирсона, Отметим, что, поскольку критерий Пирсона работает с плотностью распределения, для него может понадобиться другая группировка той же исходной выборки. Теоретическая плотность распределения может быть получена дифференцированием ранее введенной функции распределения. Теперь можно вычислить значение статистики и оценить вероятность (2.5), сравнивая ее с уровнем значимости α.

Пример 3.1 (Matlab)

% Часть 1. Критерий Колмогорова

% Получение выборки заданного объема n

n=100;

% Теоретическая функция распределения

f=inline('1-exp(-a*x)','x','a');

% Теоретическая плотность распределения

df=inline('a*exp(-a*x)','x','a');

% Обратная функция распределения

g=inline('-log(1-x)/a','x','a');

% Параметр закона распределения

a=2;

% Равномерно распределённые случайные числа

eps=1*1e-2; Y=unifrnd(0,1-eps,1,n);

% Числа, распределённые по показательному закону

X=g(Y,a);

% Группировка для критерия Колмогорова

% Вариационный ряд

Y=sort(X);

% Число разрядов для группировки

k=10;

% Размах выборки

R=Y(n)-Y(1)

R=2.0231

% Длина разряда

h=R/k

h=0.2023

% Определение абсолютных частот и середин разрядов

[m,xs]=hist(Y,k);

% Относительные частоты

p=m/n;

% Накопленные частоты

Fg=cumsum(p);

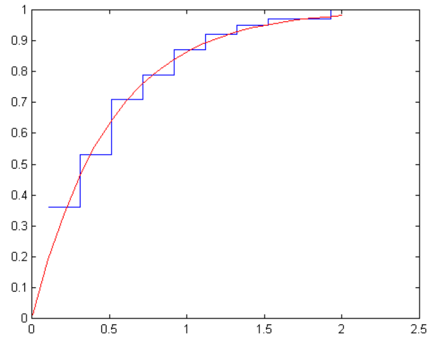
% График эмпирической функций распределения

stairs(xs,Fg), hold on

% График теоретической функций распределения

x1=Y(1):0.1:Y(n); y1=f(x1,a);

plot(x1,y1,'r'), hold off, pause



% Уровень значимости

alpha=0.05;

Ft=f(xs,a);

epsilon=abs(Ft-Fg);

Dn=max(epsilon)

Dn=0.1466

```
lambda1=sqrt(k)*Dn
lambda1=0.4637
j=1:n; PL=-2*sum((-1).^j.*exp(-2*j.^2*lambda1^2))
PL=0.9826
if PL>alpha
  sprintf('Гипотеза не противоречит эксперименту')
else
  sprintf('Гипотеза противоречит эксперименту')
end
Гипотеза не противоречит эксперименту
% Часть 2. Критерий Пирсона
% Теоретические вероятности
pr=df(xs,a)*h;
chi2=n*sum((p-pr).^2/pr)
chi2=0.1360
% Плотность распределения хи-квадрат
fx=inline(...
't.^(n/2-1).*exp(-t/2)/2^(n/2)/gamma(n/2)',...
't','n');
dfx=inline('quad(f,0,y,[],[],n)-(1-alpha)',...
'y','f','n','alpha');
zx=inline('fzero(df,z0,[],f,n,alpha)',...
'f','df','n','alpha','z0');
r=k-1;
w=zx(fx,dfx,r,alpha,r)
w=16.9190
if chi2<w
  sprintf('Гипотеза не противоречит эксперименту')
else
  sprintf('Гипотеза противоречит эксперименту')
end
Гипотеза не противоречит эксперименту
```

Пример 3.2 (Maple)

```
> restart: with(stats): with(transform):
  randomize():
> n:=100:
> f:=x->1-exp(-a*x);
> df0:=diff(f(x),x): df:=unapply(df0,x);
> g0:=solve(f(x)=y,x): g:=unapply(g0,y);
> a:=2:
> eps:=1e-2: Y:=[random[uniform[0,1-eps]](n)]:
> X:=map(g,Y): Y:=sort(X):
> k:=10: R:=Y[n]-Y[1]; h:=R/k;
> xr:=[Y[1]+i*h $i=0..k]: xr[k+1]:=xr[k+1]+1e-4:
> xrr:=[(xr[i]..xr[i+1]) $i=1..k]:
> xs:=evalf([xr[i]+0.5*h $i=1..k],3):
> xp:=scaleweight[1/n](statsort(tallyinto(Y,xrr))):
> p:=evalf(frequency(xp),3):
> F:=x->sum(p[i]*Heaviside(x-xs[i]),i=1..k):
> plot([F,f],Y[1]..Y[n],0..1,labels=['Y','F']);
> alpha:=0.05:
> Fg:=cumulativefrequency(xp): Ft:=map(f,xs):
```

```
> epsilon:=map(abs,Ft-Fg):
> Dn:=max(op(epsilon));
> lambda1:=evalf(sqrt(k)*Dn);
> PL:=-2*sum((-1)^j*exp(-2*j^2*lambda1^2),j=1..n);
> `if`(PL<alpha,'false','true');
> pr:=map(df,xs)*h:
> chi2:=n*sum((p[i]-pr[i])^2/pr[i],i=1..k)/n;
> fx:=(x,n)->x^((n-2)/2)*exp(-x/2)/2^(n/2)/
  GAMMA(n/2);
> r:=k-1:
> w:=fsolve(int(fx(t,r),t=0..y)-(1-alpha),y);
> `if`(chi2<w,'true','false');
```

Задание

1. Получить выборку значений случайной величины, распределенной по показательному закону с заданным параметром a.
2. Используя критерий согласия Колмогорова, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность, выборка которой получена ранее, распределена по закону $F(x)=1-e^{-ax}$. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.
3. Используя критерий согласия Пирсона, проверить гипотезу о заданном распределении той же генеральной совокупности. Критерий значимости $\alpha = 0{,}05$.
4. Провести расчеты по документу для объемов выборок 20, 50 и 100.

Контрольные вопросы

1. Что такое критерий согласия?
2. Какие критерии согласия Вы знаете?
3. Опишите схему применения критериев согласия Колмогорова и Пирсона.
4. Запишите плотность распределения закона χ^2 с $n-m-1$ степенью свободы.
5. Могут ли опытные данные одновременно согласовываться с несколькими гипотезами о законе распределения?

4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: *научится получать функции отклика с помощью МНК (метода наименьших квадратов)* .

Оборудование: *ПЭВМ расположенные в аудитории 8-301.*

Работа выполняется строго индивидуально каждым студентом.

Пусть на вход некоторого устройства подается сигнал x, а на выходе измеряется сигнал y. Известно, что величины x и y связаны функциональной зависимостью, но какой именно – неизвестно. Требуется приближенно определить эту функциональную зависимость $y=\varphi(x)$ по опытным данными. Пусть в результате n измерений получен ряд экспериментальных точек (x_i, y_i). Известно, что через n точек можно всегда провести кривую, аналитически выражаемую многочленом $(n-1)$-й степени. Этот многочлен называют *интерполяционным*. И вообще, замену функции $\varphi(x)$ на функцию $\psi(x)$ так, что их значения совпадают в заданных точках

$$\varphi(x_i)=\psi(x_i),\ i=1,2,...,n, \tag{2.6}$$

называют *интерполяцией*.

Однако такое решение проблемы не является удовлетворительным, поскольку $y_i \neq \varphi(x_i)$ из-за случайных ошибок измерения и влияния на измерения значений y_i помех и шумов в устройстве. Так что

$$y_i=\varphi(x_i)+\delta_i, \tag{2.7}$$

где δ_i – некоторая случайная ошибка. Поэтому требуется провести кривую так, чтобы она в наименьшей степени зависела от случайных ошибок. Эта задача называется *сглаживанием (аппроксимацией*) экспериментальной зависимости и часто решается методом *наименьших квадратов*. Сглаживающую кривую называют *аппроксимирующей*.

Задача аппроксимации решается следующим образом. В декартовой прямоугольной системе координат наносят точки (x_i, y_i). По расположению этих точек высказывается предположение о принадлежности искомой функции к определенному классу функций. Например, линейная функция $\varphi(x)=a_0+a_1x$, квадратичная $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ и т.д. В общем случае $\varphi(x)=\varphi(x,a_0,a_1,...,a_r)$. Неизвестные параметры функции $a_0,a_1,...,a_r$ определяются из требования минимума суммы квадратов случайных ошибок, т.е. минимума величины

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_r)\right)^2. \tag{2.8}$$

Величина δ называется также суммарной *невязкой*. Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных невязки:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\varphi(x_i,a_0,a_1,...,a_r)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial a_j}=0,\ j=0,1,...,r. \tag{2.9}$$

Решая систему уравнений (2.9), находим неизвестные параметры a_j и тем самым полностью определяем функцию, которая наилучшим образом (в смысле наименьших квадратов отклонений от исходных точек или наименьшей суммарной невязки) аппроксимирует (приближает) искомую функцию $\varphi(x)$.

Остановимся подробнее на линейной зависимости $\varphi(x)=a_0+a_1x$.

Дифференцируя (2.8), получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i\right) x_i = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Из первого уравнения находим $a_0 = My - a_1 Mx$, где

$$Mx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\ My = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,. \tag{2.11}$$

Подставляя выражение для a_0 во второе уравнение, найдем

$$a_1 = \frac{Kxy}{S^2}, \tag{2.12}$$

где

$$Kxy = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - Mx\right)\left(y_i - My\right),\ S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - Mx\right)^2. \tag{2.13}$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \left(My - \frac{Kxy}{S^2}Mx\right) + \frac{Kxy}{S^2}x \tag{2.14}$$

есть искомая линейная функция.

Ввиду простоты расчетов аппроксимация линейной зависимости используется довольно часто. Кроме того, многие функции, зависящие от двух параметров, можно *линеаризовать* путем *замены переменных*.

Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $y(x) = \varphi(x, a_0, a_1)$, в результате которого она приобретает линейный вид $v = b_0 + b_1 \cdot u$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости и вычисленные коэффициенты b_0 и b_1 пересчитываются в коэффициенты a_0 и a_1.

Для ряда часто встречающихся двухпараметрических зависимостей возможные замены переменных (а также, обратные замены для пересчета b_0 и b_1 в a_0 и a_1) приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

Вид зависимости	Замена переменных		Ограни-чения	Обратная замена	
Гиперболическая $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$v = y$	$u = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$
Логарифмическая $y = a_0 + a_1 \ln x$	$v = y$	$u = \ln x$	$x > 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$
Показательная $y = a_0 e^{a_1 x}$	$v = \ln y$	$u = x$	$y > 0$, $a_0 > 0$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$
Степенная $y = a_0 x^{a_1}$	$v = \ln y$	$u = \ln x$	$x > 0$, $y > 0$	$a_0 = e^{b_0}$	$a_1 = b_1$

			$a_0 > 0$		
Комбинированная $y = \dfrac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$	$v = \dfrac{1}{y}$	$u = e^{-x}$	$y \neq 0$	$a_0 = b_0$	$a_1 = b_1$

Следующие примеры реализуют аппроксимацию нелинейной зависимости методом наименьших квадратов с помощью универсальных математическх пакетов.

Пример 4.1 (Maple)

Подготовка к работе, подключение статистических библиотек

> restart: with(stats): randomize():

Размерность списков с экспериментальными точками

> n:=10:

Список с точками прообраза экспериментальной зависимости

> X:=evalf([i $i=1..n]);

$X := [1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.]$

Вид исходной зависимости $y(x)$

> y:=x->a[0]+a[1]/x;

$y := x \to a_0 + \dfrac{a_1}{x}$

Параметры зависимости $y(x)$ *и шума*

> a[0]:=2: a[1]:=-1: mu:=0: sigma:=0.1:

Список с точками исходной зависимости

> Z:=map(y,X):

Список с точками нормального шума

> W:=[random[normald[mu,sigma]](n)]:

Список с точками образа экспериментальной зависимости $Y(X)$

> Y:=Z+W:

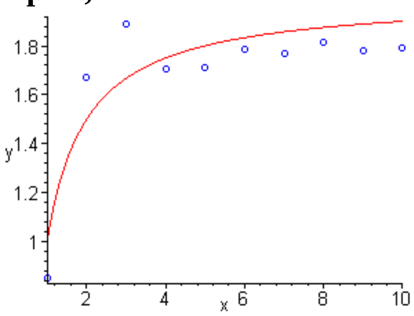
Графики исходной $y(x)$ *и экспериментальной зависимости* $Y(X)$

> pXY:=[[X[i],Y[i]] $i=1..n]: XRange:=x=X[1]..X[n]:

> arg2:=color=[blue,red],style=[point,line],
symbol=circle:

> pic1:=plot([pXY,y(x)],XRange,arg2,labels=[x,y]):

> pic1;



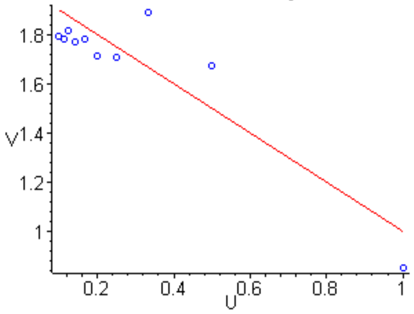
Линеаризация экспериментальной зависимости $Y(X)$

> f1u:=x->1/x: f1v:=y->y:

> U:=map(f1u,X): V:=map(f1v,Y):

График линеаризованной зависимости $U(V)$

```
> pUV:=[[U[i],V[i]] $i=1..n]:
> pUZ:=[[U[i],Z[i]] $i=1..n]:
> plot([pUV,pUZ],arg2,labels=['U','V']);
```



Применяем метод линейной аппроксимации к зависимости U(V)

Вычисление вспомогательных величин

```
> Mu:=1/n*sum(U[i],i=1..n);
```

$M := .2928968254$

```
> Mv:=1/n*sum(V[i],i=1..n);
```

$Mv := 1.676928568$

```
> Kuv:=1/n*sum((U[i]-Mu)*(V[i]-Mv),i=1..n);
```

$Kuv := -.0673323192$

```
> S2:=1/n*sum((U[i]-Mu)^2,i=1..n);
```

$S2 := .0691882227$

Вычисление параметров линеаризованной зависимости $U(V)$

```
> b[1]:=Kuv/S2: b[0]:=Mv-b[1]*Mu:
```

Вычисление невязки для линеаризованной зависимости $U(V)$

```
> delta:=sum((V[i]-(b[0]+b[1]*U[i]))^2,i=1..n);
```

$\delta := .1395645549$

Обратный переход к экспериментальной зависимости $Y(X)$

```
> ae[0]:=b[0]: ae[1]:=b[1]:
```

Оценка исходной зависимости $\varphi(x)$

```
> phi:=x->ae[0]+ae[1]/x: y=phi(x);
```

$$y = 1.961968735 - \frac{.9731760202}{x}$$

Вычисление невязки для оценки исходной зависимости $\varphi(x)$

```
> delta1:=sum((Y[i]-phi(X[i]))^2,i=1..n);
```

$\delta 1 := .1395645549$

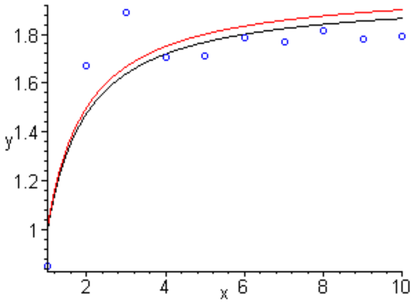
Проверка решения

```
> fit[leastsquare[[x,y],y=a0+a1*1/x]]([X,Y]);
```

$$y = 1.961968735 - \frac{.9731760203}{x}$$

Графики зависимостей $Y(X)$, $y(x)$ *и* $\varphi(x)$

```
> pic2:=plot(phi(x),XRange,color=black):
> plots[display](pic1,pic2);
```



Решение для другой предполагаемой нелинейности

> phi2:=x->1/(c[1]+c[2]*exp(-x));

$$\phi 2 := x \to \frac{1}{c_1 + c_2\, \mathbf{e}^{(-x)}}$$

> f2u:=x->exp(-x): f2v:=y->1/y:

Оценка исходной зависимости

> psi:=rhs(fit[leastsquare[[x,y],y=b0+b1*x]]([map(f2u,X),map(f2v,Y)]));

$\psi := .5359537861 + 1.566474743\, x$

Параметры оценки исходной зависимости $\varphi_2(x)$

> c:=[coeffs(psi)];

$c := [.5359537861, 1.566474743]$

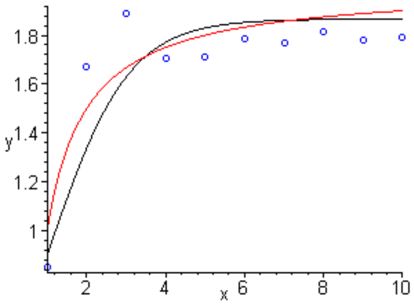
Вычисление невязки для оценки исходной зависимости $\varphi_2(x)$

> delta2:=sum((Y[i]-phi2(X[i]))^2,i=1..n);

$\delta 2 := .229625250$

Графики зависимостей $Y(X)$, $y(x)$ *и* $\varphi_2(x)$

> pic3:=plot(phi2(x),XRange,color=black):
> plots[display](pic1,pic3);



Пример 4.2 (Matlab)

```
n=10;
X=1:10
a0=2; a1=-1; mu=0; sigma=0.1;
y=inline('a0+a1*1./x','x','a0','a1');
Z=y(X,a0,a1);
W=normrnd(mu,sigma,1,n);
Y=Z+W;
x1=X(1):0.1:X(n); y1=y(x1,a0,a1);
plot(X,Y,'bo',x1,y1,'r'), pause
U=1./X; V=Y;
plot(U,V,'bo',U,Z,'r'), pause
Mu=1/n*sum(U)
Mv=1/n*sum(V)
Kuv=1/n*sum((U-Mu).*(V-Mv))
S2=1/n*sum((U-Mu).^2)
```

```
b1=Kuv/S2, b0=Mv-b1*Mu
delta=sum((V-(b0+b1*U)).^2)
ae0=b0, ae1=b1
delta1=sum((Y-y(X,ae0,ae1)).^2)
y2=y(x1,ae0,ae1);
plot(X,Y,'bo',x1,y1,'r',x1,y2,'k'), pause
phi2=inline('1./(c1+c2*exp(-x))','x','c2','c1');
U=exp(-X); V=1./Y;
c=polyfit(U,V,1)
delta2=sum((Y-phi2(X,c(1),c(2))).^2)
y3=phi2(x1,c(1),c(2));
plot(X,Y,'bo',x1,y1,'r',x1,y3,'k')
```

Задание

В табл. 4.2 (см. ниже) приведены экспериментально полученные точки, определяющие зависимость между переменными x и y по одной из пяти функций, приведенных в табл. 4.1.

Необходимо на одном из математических пакетов реализовать линеаризацию зависимости, подобрать параметры a_0 и a_1 по методу наименьших квадратов и *проверить правильность вычислений* с помощью известной зависимости (см. примеры 4.1-4.2). Правильно составленный документ будет давать пренебрежимо малую невязку в том случае, когда значения Y вычисляются точно по заданной зависимости (ошибки будут возникать только за счет округлений при вычислении).

Поскольку *вид зависимости первоначально неизвестен*, следует проделать вычисления *для всех пяти зависимостей* и выбрать ту из них, которая обеспечивает наименьшую из всех вычисленных суммарную невязку δ.

Эти данные заносятся в протокол выполнения работы и служат основанием для составления отчета с выводами по работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое интерполяция и аппроксимация? Чем они отличаются?
2. В чем заключается метод наименьших квадратов?
3. Являются ли необходимые условия минимизации (2.10) также и достаточными?
4. В каком случае можно линеаризовать аппроксимирующую кривую?
5. С какой целью и каким образом проводится линеаризация?

Считая, что зависимость между переменными x и y имеет вид $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, в задачах 6 и 7 найти оценки параметров по следующим выборкам.

6.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	-1	-0,5	1,5	4,5	8,5

7.

x	-2	-1	0	1	2
y	4,8	0,4	-3,4	0,8	3,2

В задачах 8 и 9 найти оценки параметров β_0 и β_1, считая, что зависимость между переменными x и y имеет вид $y = \beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x}$

8.

x	2	4	6	12

y	8	5,25	3,50	3,25

9.

x	5,67	4,45	3,84	3,74	3,73	2,18
y	6,8	8,5	10,5	10,2	6,8	11,8

Таблица 4.2

1	x	-1	-0,55	-0,1	-,35	0,8	1,25	1,7	2,15	2,6	3,05
	y	-6,78	-6,56	-6,14	-5,31	-3,68	-0,85	5,81	18,15	42,4	90,03
2	x	0,01	0,56	1,11	1,66	2,21	2,28	3,3	3,85	4,4	4,95
	y	34,23	5,97	1,28	-1,54	-3,54	-5,09	-6,36	-7,44	-8,37	-9,2
3	x	-2	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1,2	1,6
	y	16	10,24	5,76	2,56	0,53	0	0,64	2,56	5,76	10,24
4	x	0,3	1,57	2,84	4,11	5,38	6,65	7,92	9,19	10,46	11,73
	y	15,33	4,55	3,41	2,97	2,74	2,6	2,59	2,44	2,38	2,34
5	x	-3,5	-2,65	-1,8	-0,95	-0,1	0,75	1,6	2,45	3,3	4,15
	y	0,01	0,03	0,07	0,12	0,19	0,2	0,29	0,31	0,325	0,33
6	x	0,15	0,94	1,72	2,51	3,29	4,08	4,86	5,65	6,43	7,22
	y	-9,69	-4,2	-2,37	-1,25	-0,43	0,21	0,74	1,3	1,58	1,93
7	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,675	3,14	3,605	4,07	4,535
	y	6,86	5,23	4,78	4,57	4,45	4,37	4,35	4,28	4,25	4,22
8	x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
	y	4,14	4,2	4,3	4,45	4,67	5	5,49	6,85	7,32	8,95
9	x	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7
	y	2,67	4,06	6,16	8,13	10,92	14,29	18,29	22,97	28,39	34,6
10	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	0,01	0,02	0,05	0,11	0,21	0,38	0,42	0,47	0,49	0,5
11	x	0,95	1,21	1,47	1,74	2,0	2,26	2,52	2,78	3,05	3,31
	y	8,16	3,39	2,19	1,34	0,88	0,61	0,54	0,33	0,28	0,19
12	x	0,35	0,82	1,28	1,75	2,21	2,68	3,14	3,61	4,07	4,535
	y	16,99	8,83	6,61	5,56	4,96	4,62	4,29	4,09	3,93	3,8
13	x	-1,7	-1,43	-1,16	-0,89	-0,62	-0,35	-0,08	0,19	0,46	0,73
	y	26,96	14,46	7,17	2,92	0,45	-0,98	-1,35	-2,31	-2,6	-2,77
14	x	-5	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4	5,5	7	8,5
	y	0	0,01	0,06	0,28	0,87	2,05	2,92	3,23	3,31	3,33
15	x	-2	-1,4	-0,8	-0,2	0,4	1,0	1,6	2,2	2,8	3,4
	y	6,8	3,33	1,09	0,02	0,27	1,7	4,35	8,23	13,33	19,65

Табл. 4.2 (продолжение)

16	x	0,4	0,86	1,32	1,78	2,24	2,7	3,16	3,62	4,08	4,54
	y	-20,5	-11,2	-8,3	-6,93	-6,5	-5,59	-5,3	-4,93	-4,83	-4,54
17	x	0,01	0,51	1,01	1,52	2,01	2,51	3,0	3,05	4,0	4,5
	y	-1,14	2,39	3,01	3,37	3,63	3,83	3,99	4,13	4,25	4,35
18	x	-5	-3,91	-2,82	-1,73	-0,64	0,45	1,54	2,63	3,72	4,81
	y	0	-0,01	-0,01	-0,03	-0,07	-0,18	-0,2	-0,23	-0,24	-0,25
19	x	-2,1	-1,79	-1,48	-1,17	-0,86	-0,55	-0,24	0,07	0,38	0,69
	y	0,28	0,29	0,3	0,32	0,36	0,48	0,78	1,52	3,41	8,21
20	x	0,01	0,53	1,05	1,57	2,09	2,61	3,12	3,64	4,16	4,68
	y	15,22	3,31	1,26	0,05	-0,81	-1,74	-2,17	-2,48	-2,88	-3,23
21	x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
	y	0,3	7,5	11,37	14,5	17,24	19,9	21,98	24,11	26,12	28,04
22	x	-4	-3,01	-2,02	-1,03	-0,04	0,95	1,94	2,93	3,92	4,91
	y	-0,02	-0,05	-0,12	-0,26	-0,49	-0,72	-0,87	-0,94	-0,98	-0,99
23	x	0,4	0,81	1,22	1,5	2,04	2,45	2,86	3,27	3,68	4,09
	y	1,8	0,53	0,12	-0,09	-0,21	-0,31	-0,35	-0,39	-0,43	-0,46
24	x	-1	-0,72	-0,44	-0,17	0,12	0,39	0,67	0,95	1,22	1,5
	y	-4,95	-4,89	-4,74	-4,39	-3,6	-1,93	2,42	12,08	34,33	85,55
25	x	0,01	0,51	1,01	1,51	2,01	2,51	3,01	3,51	4,01	4,51
	y	-4,76	2,29	3,52	4,24	4,76	5,06	5,48	5,76	6,0	6,21
26	x	-5	-3,95	-2,9	-1,85	-0,8	0,25	1,3	2,35	3,4	4,45
	y	-0,01	-0,03	-0,8	-0,2	-0,49	-0,96	-1,45	-1,76	-1,91	-1,97
27	x	0,5	1,4	2,3	3,2	4,1	5,0	5,9	6,8	7,7	8,6
	y	2,41	3,32	4,1	4,3	4,64	4,94	5,0	5,43	5,64	5,84
28	x	0,11	0,499	0,89	1,28	1,67	2,055	2,44	2,83	3,22	3,61
	y	6,27	0,6	-0,1	-0,37	-0,52	-0,61	-0,67	-0,69	-0,75	-0,78
29	x	0,01	0,59	1,17	1,75	2,33	2,91	3,48	4,06	4,64	5,22
	y	8,82	-3,41	-5,93	-6,67	-7,53	-8,2	-8,74	-9,15	-9,61	-9,96
30	x	-2	-1,62	-1,24	-0,87	-0,49	-0,11	0,27	0,65	1,02	1,4
	y	37,63	19,33	10,19	5,55	3,21	2,02	1,64	1,11	0,96	0,88

5. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы*: освоить основные методы обработки результатов эксперимента.*

Оборудование*: ПЭВМ расположенные в аудитории 8-301.*

Работа выполняется строго индивидуально каждым студентом.

1) Ознакомиться с теоретическими сведениями
2) Составить матрицу планирования для полного трехфакторного эксперимента с использованием дополнительного нулевого фактора (X_0=1).
3) Используя программу генерации случайных чисел mc.exe провести серию из трех опытов (найти три столбца значений функции отклика).
4) Проверить адекватность модели оригиналу по критериям Кохрэна, Стьюдента, Фишера.

№	X_0	X_1	X_2	X_3	y_1	y_2	y_3	Y	Y'
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Порядок выполнения

1) Найти построчную дисперсию по формуле $S^2\left\{y_i\right\} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m}\left(y'_i - y_{ij}\right)^2}{m-1}$:
2) Проверить однородность дисперсии по критерию Кохрена
3) Найдем расчетное значение коэффициента Кохрена:

$$Gp = \frac{S^2\{yi\}max}{\sum_{i=1}^{N} S^2\{yi\}}$$

4) Найдем коэффициенты уравнения регрессии, решив матричное уравнение.
5) Получим уравнение регрессии (в кодированной системе):
   Y' = A0 + A1x1 + A2x2 + A3x3
6) Проверка нуль-гипотезы и дисперсии воспроизводимости.
7) Оценить дисперсию коэффициента β_k.
8) Получить коэффициенты Стьюдента.
9) Проверить адекватность по критерию Фишера

Содержание отчета

1. Основные теоретические положения (см. ниже);
2. Ответы на контрольные вопросы;
3. Результаты подготовки (композиционный план);
4. Результат выполнения работы (по пункту Порядок выполнения);
5. Выводы по лабораторной работе.

Контрольные вопросы

1. Опишите план нахождения построчной дисперсии выходной величины;
2. Для чего нужно расчетное значение коэффициента Кохрэна и как он находится;
3. Что такое критерий Стьюдента и где он используется;
4. Для чего оценивают , насколько отличаются средние значения y_i выходной величины , полученной в точках факторного пространства , и значения $\underline{y}_i$,полученного из уравнения регрессии в тех же точках факторного пространства. Чем определяется **F-критерий Фишера** и как его применяют.

Теоретические сведения

Нахождение построчной дисперсии

Предположим, что в каждой точке факторного пространства , которой соответствует одна из строк матрицы планирования, проводится серия из **m** опытов. Для любой i-й точки вычисляется среднее значение выходной величины

$$y_i = \sum_{u=1}^{m} \frac{y_{iu}}{m} \tag{3.1}$$

и построчную дисперсию выходной величины:

$$S^2\{\, yi \,\} = \sum_{u=1}^{m} \frac{\left(y_{iu} - y_i\right)^2}{m-1} \tag{3.2}$$

Рассмотрим этапы обработки результатов эксперимента на примере:

N	***X₀***	***X₁***	***X₂***	***X₁X₂***	***Y₁ᵢ***	***Y₂ᵢ***	***Y₃ᵢ***	***Yᵢ***	***S²{yᵢ}***
1	+1	-1	-1	+1	43	35	48	42	43
2	+1	+1	-1	-1	90	86	94	90	16
3	+1	-1	+1	-1	10	16	16	14	12
4	+1	+1	+1	+1	56	54	58	56	4

Среднее значение выходной величины Y_i в каждой точке определим по формуле (m = 3)(1):

Y_1 = (43+35+48)/3 = 42
Y_2 = (90+86+94)/3 = 90
Y_3 = (10+16+16)/3 = 14
Y_4 = (56+54+58)/3 = 56

Определим по формуле (2) построчную дисперсию:

$S^2\{y_1\}= [(43-42)^2 +(35-42)^2 + (48-42)^2]/2 = 43$
$S^2\{y_2\}= [(90-90)^2 +(86-90)^2 + (94-90)^2]/2 = 16$
$S^2\{y_3\}= [(10-14)^2 +(16-14)^2 + (16-14)^2]/2 = 12$
$S^2\{y4\}= [(56-56)^2 +(54-56)^2 + (58-56)^2]/2 = 4$

Проверка однородности по критерию Кохрэна

Среди всей совокупности рассчитанных построчных дисперсий выбирается максимальная $S^2\{y_i\}_{мах}$ и берется отношение данной дисперсии к сумме всех построчных дисперсий $S^2\{y_i\}$, т.е. определяется расчетное значение **коэффициента Кохрэна**

$$G_p = \frac{S^2\{y_i\}max}{\sum_{i=1}^{N} S^2\{y_i\}}$$

который показывает , какую долю в общей сумме построчных дисперсий занимает максимальная из них. В случае идеальной однородности построчных дисперсий коэффициент G_p стремился бы к значению 1/N , где N – число опытов (количество строк в матрице планирования).

Расчетное значение коэффициента Кохрэна сравнивается с табличным значением G – критерия , которое выбирается из таблиц для принятого уровня значимости α и для чисел степени свободы соответственно числителя f_1 и знаменателя f_2:

$$f_1 = m - 1 \ ; \ f_2 = N.$$

Для этого значение f_1 находится в горизонтальном заголовке таблицы (выбирается столбец) , а f_2 выбирается слева в вертикальном заголовке таблицы (выбирается строка) и на пересечении получаем табличное значение $G_т$ коэффициента Кохрэна . Если выполняется условие

$$G_p < G_т \ ,$$

то с выбранным уровнем статистической значимости α (с достоверностью$1 - \alpha$) все построчные дисперсии признаются однородными. В противном случае гипотезу отвергают.

По данным из нашего примера определим расчетное значение коэффициента

$$G_p = 43/(43+16+12+4) = 0{,}57$$

В соответствии с таблицей коэффициентов для $\alpha = 0{,}05$; $f_1 = 3 - 1 = 2$; $f_2 = 4$, находим $G_т = 0{,}77$; $G_T > G_p$, т.е. условие выполняется.

Проверка нуль - гипотезы по критерию Стьюдента

После проверки однородности переходят к определению оценок коэффициентов по формуле:

$$a_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_{ik} x_{ik}}{N}$$

где k – номер вектор – столбца.
В нашем примере имеем:

$$a_0 = (42 + 90 + 14 + 56)/4 = 50{,}5$$
$$a_1 = (-42 + 90 - 14 + 56)/4 = 22{,}5$$
$$a_2 = (-42 - 90 + 14 + 56)/4 = -15{,}5$$
$$a_{12} = (42 - 90 - 14 + 56)/4 = -1{,}5$$

Найденные таким образом коэффициенты уравнения регрессии необходимо оценить на статистическую значимость. Оценка производится по **t-критерию Стьюдента.** Для каждого коэффициента a_k вычисляется коэффициент (a_k – коэффициент уравнения регрессии)

$$t_k = \frac{|a_k|}{S\{a_k\}}$$

т.е. проверяется отклонение от нуля найденной оценки. $S\{a_k\}$- оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента.

$$S\{a_k\} = \sqrt{S^2\{a_k\}}$$

Оценка дисперсии коэффициентов, найденных по экспериментальным данным:

$$S^2\{a_k\} = \frac{S^2_в}{N * m}$$

Оценка генеральной дисперсии воспроизводимости $\mathbf{S^2_в}$, характеризующая точность одного измерения, является средняя из всех построчных дисперсий:

$$S_в{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{S^2\{y_i\}}{N}$$

При выбранном уровне статистической значимости α по таблицам распределения Стьюдента при числе степеней свободы f = N (m - 1) находят табличное значение коэффициента $t_{табл}$. Найденное табличное значение сравнивается с расчетным значением коэффициента. Если выполняется неравенство

$$t_{табл} > t_k ,$$

то принимается нуль- гипотеза , т.е. считается, что найденный коэффициент $\underline{a}_k$ является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии.

Для рассматриваемого примера:

$$S^2_в = (43 + 16 + 12 + 4)/4 = 18,75$$

$$S^2\{a_k\} = 18,75/(4*3)= 1,56$$

$$S\{a_k\} = 1,25$$

Определим расчетные значения к-та Стьюдента:

$$t_0 = 50,5/1,25 = 40,4$$

$$t_1 = 22,5/1,25 = 18$$

$$t_2 = 15,5/1,25 = 12,4$$

$$t_{12} = 1,5/1,25 = 1,2$$

Из таблиц при уровне статистической значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $f = 4\ (3 - 1) = 8$, определим табличное значение коэффициента. Оно равно $t_т = 2,3$. Сопоставим расчетные значения t_k с табличным $t_т$. Неравенство выполняется для t_{12}. Следовательно, можно предположить, что a_{12} статистически незначим и его можно исключить из уравнения регрессии.

Уравнение регрессии , содержащее статистически значимые коэффициенты, будет (в кодированной системе)

$$Y' = 50,5 + 22,5x_1 – 15,5x_2.$$

Проверка адекватности по критерию Фишера

Полученное уравнение регрессии необходимо проверить на адекватность исследуемому объекту. Для этой цели необходимо оценить , насколько отличаются средние значения y_i выходной величины , полученной в точках факторного пространства , и значения $\underline{y}_i$,полученного из уравнения регрессии в тех же точках факторного пространства. Для этого используют **дисперсию адекватности**:

$$S^2_{ад} = \frac{m}{N - L}\sum_{i=1}^{N}(y_i - y'_i)^2$$

где l-число значимых коэффициентов.

Адекватность модели проверяют по **F- критерию Фишера**

$$F_р= S^2_{ад}/S^2_в$$

Найденное расчетным путем $F_р$ сравнивают с табличным значением $F_т$,которое определяется при уровне значимости α и числе степеней свободы $f_{ад} = N – l$ и $f_в = N(m - 1)$. Если

$$F_р< F_т,$$

то полученная математическая модель с принятым уровнем статистической значимости α адекватна экспериментальным данным.

Для рассматриваемого примера получаем:

$$Y'_1 =50,5 +22,5 (-1)- 15,5 (-1) = 43,5$$

$$Y'_2 =50,5 +22,5 (+1)- 15,5 (-1) = 88,5$$

$$Y'_3 =50,5 +22,5 (-1)- 15,5 (+1) = 12,5$$

$$Y'_4 =50,5 +22,5 (+1)- 15,5 (+1) = 57,5$$

Рассчитаем оценку дисперсии адекватности:

$$S^2_{ад} = 3[(42-43,5)^2 + (90 – 88,5)^2 + (14 – 12,5)^2 + (56 – 57,5)^2]/(4-3) = 27$$

$$F_р = S^2_{ад}/S^2_в = 27/18,75 = 1,44$$

Табличное значение коэффициента Фишера при уровне статистической значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $f_{ад} = (4\text{-}3) = 1$ и $f_в= 4\ (3\text{-}1)=8$ будет $F_т=5,32$. Следовательно, при выбранном уровне статистической значимости полученная в результате эксперимента $y' = 50,5 + 22,5x_1 – 15,5x_2$

адекватна исследуемому объекту.

Пример выполнения

Композиционный план

№	***X₀***	***X₁***	***X₂***	***X₃***	***y₁***	***y₂***	***y₃***	***Y***	***Y'***
1	+1	-1	-1	+1	-11.68474	-18.77939	-15.92513	-15.46309	-16.57795
2	+1	+1	-1	+1	-21.01723	-25.20986	-28.17288	-24.79999	-23.34992
3	+1	-1	+1	+1	-18.96679	-10.82260	-14.74846	-14.84595	-16.57795
4	+1	+1	+1	+1	-10.85747	-14.65414	-18.78262	-14.76474	-23.34992
5	+1	-1	-1	-1	-14.71337	-21.94772	-17.75596	-18.13902	-25.46855
6	+1	+1	-1	-1	-28.31858	-34.10976	-33.28514	-31.90449	-32.24051
7	+1	-1	+1	-1	-21.01723	-26.20986	-28.17288	-25.13332	-25.46855
8	+1	+1	+1	-1	-25.24063	-32.00297	-20.19847	-25.81402	-32.24051

Найдем построчную дисперсию по формуле $S^2\left\{y_i\right\} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(y'_i - y_{ij}\right)^2}{m-1}$:

$S^2\{y_1\} = 19.77484$

$S^2\{y_2\} = 14.39327$

$S^2\{y_3\} = 25.07499$

$S^2\{y_4\} = 15.2729$

$S^2\{y_5\} = 18.98817$

$S^2\{y_6\} = 15.29037$

$S^2\{y_7\} = 17.52169$

$S^2\{y_8\} = 19.48031$

Проверка однородности дисперсии по критерию Кохрена

Найдем расчетное значение коэффициента Кохрена:

$$Gp = \frac{S^2\{yi\}max}{\sum_{i=1}^{N} S^2\{yi\}} = 25.07499/145.79654 = 0.17199$$

Количество точек плана N = 8, количество опытов в каждой точке m = 3, тогда f_1 = m-1 = 2 и f_2 = N = 8. Выберем из таблицы теоретическое значение коэффициента Кохрена G_T = 0.6152 > G_p –дисперсии однородны.

Найдем коэффициенты уравнения регрессии, решив матричное уравнение:
Решив систему, найдем:

$A_0 = -24.40923$

$A_1 = -3.38598$

$A_2 = 1.39265$

$A_3 = -4.4453$

Получаем уравнение регрессии (в кодированной системе):

$$Y' = -24.40923 - 3.38598x_1 + 1.39265x_2 - 4.4453x_3$$

Проверка нуль-гипотезы

Дисперсия воспроизводимости:

$$S_в{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{S^2\{y_i\}}{N} = 20.82808$$

Оценка дисперсии коэффициента β_k:

$S^2\{a_k\} = S^2_в/N*m = 20.82808/(8*3) = 0.99181$

$S\{a_k\} = sqrt\ (S^2\{a_k\}) = 0.9959$

Получим коэффициенты Стьюдента:

$t_0 = 24.12352/0.88615 = 24.50977$

$t_1 = 3.19551/0.88615 = 3.39993$

$t_2 = 1.58313/0.88615 = 1.39839$

$t_3 = 4.4453/0.88615 = 4.46361$

$t_{табл} = 2.052$ –коэффициент t_2 не значим.

Проверка адекватности по критерию Фишера

$$S^2_{ад} = \frac{m}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - y'_i)^2$$

$Y'_1 = -16.57795$

$Y'_2 = -23.34992$

$Y'_3 = -16.57795$

$Y'_4 = -23.34992$

$Y'_5 = -25.46855$

$Y'_6 = -32.24051$

$Y'_7 = -25.46855$

$Y'_8 = -32.24051$

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - y'_i)^2 = 174.05482$$

$S^2_{ад} = 3*174.05482/(8-3) = 130.54112$

$F_p = S^2_{ад}/S^2_в = 3,472/22.592 = 6.26755$

$F_T = 6.46 > F_p$ –уравнение адекватно.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ.

G-Распределение Кохрена.

(значение G*1000 в зависимости от числа степени свободы K, ν)

вероятность α = 0.05

K ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8332	8159	8010	7880	7341	6602	5813	5000
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	9065	7679	6841	6287	5892	5598	5365	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	8412	6838	5981	5440	5063	4783	4564	4387	4241	4118	3645	3066	2513	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3185	3043	2926	2829	2462	2022	1616	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2299	2187	2098	2020	1737	1403	100	0833
15	4709	3346	2758	2419	2159	2034	1911	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1286	1216	1160	1113	0942	0743	0567	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	1737	1131	0895	0766	0682	0623	0583	0552	0520	0497	0411	0316	0234	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083

вероятность α = 0.01

K ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	9999	950	9794	9586	9373	9172	8988	8823	8674	7539	7949	7067	6062	5000
3	9933	9423	8831	8355	7933	7606	7335	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	9279	7885	6957	6329	5875	5531	5259	5037	4854	4697	4094	3351	2644	2000
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608	4401	4229	4048	3529	2858	2229	1667
7	8276	664	5685	5080	4659	4347	4105	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	7945	6162	5209	4627	4226	3932	3704	3522	3373	3248	2779	2214	1700	1250
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	6528	4751	3919	3428	3099	2861	2680	2535	2419	2320	1961	1535	1157	0833
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	4247	2871	2295	1970	1759	1608	1495	1406	1338	1283	1060	0810	0595	0417
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	2940	1951	1508	1281	1135	1033	0957	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250

60	2151	1371	1069	0902	0796	0722	0668	0625	0594	0567	0461	0344	0245	0167
120	1252	0759	0585	0489	0429	0387	0357	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083

Распределение Стьюдента.
Значения t–критерия Стьюдента при 5%-ном уровне значимости

Число степеней свободы	Значения t-критерия
1	12.71
2	4.303
3	3.182
4	2.776
5	2.571
6	2.447
7	2.365
8	2.306
9	2.262
10	2.228
11	2.201
12	2.179
13	2.160
14	2.145
15	2.131
16	2.120
17	2.110
18	2.101
19	2.093
20	2.086
21	2.080

22	2.074
23	2.069
24	2.064
25	2.060
26	2.056
27	2.052
28	2.048
29	2.045
30	2.042
∞	1.960

Распределение Фишера.

Значения F–критерия Фишера при 5%-ном уровне значимости

F1	F2=1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.9	249.0	254.3
2	18.5	19.2	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0

7. Библиографический список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Норенков, И.П. Основы автоматизированного проектирования : учебник для вузов / И.П.Норенков. - 2-е/3-е изд. перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002/2006. - 448с.: ил. - (Информатика в техническом университете). - Библиогр.в конце кн. - ISBN 5-7038-2892-9 /в пер./: 203.00.

2. Обин П.Ф., Aubin P.F. Autodesk Architectural Desktop / П.Ф.Обин. - М.: ЛОРИ, 2004. - 562с.: ил. - ISBN 5-85582-221-4: 298.00.

3. Антипова, Л.В. Дипломное проектирование: Правила оформления, инженерные и автоматизированные расчеты на ПЭВМ: Учеб.пособие для вузов / Л.В.Антипова, И.А.Глотова, Г.П.Казюлин; Воронеж. гос. техн. акад. - Воронеж, 2001 - 584с.: ил. - Библиогр.: с. 463-467. - ISBN 5-89448-175-9 /в пер./: 250.00.

4. Синенко, С.А. Автоматизация организационно-технологического проектирования в строительстве: Учеб. пособие для вузов / С.А.Синенко, В.М.Гинзбург, В.Н.Сапожников и др. - М.: АСВ, 2002.— 240с.: ил. – Библиогр .в конце кн. - ISBN 5-93093-148-8: 112.00.

5. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебник для вузов / Н.Ш.Кремер .— М. : ЮНИТИ, 2003 .— 543с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-238-00141-X

Дополнительная литература

1. Теличко, Г.Н. Тульский государственный университет. Основы строительной механики плоских стержневых систем: Учебник для высш.и сред.учеб.заведений / Г.Н.Теличко;ТулГУ .— 2-е изд.,испр.и доп. — Тула, 2004 .— 440с. : ил. — (Навстречу 75-летнему юбилею ТулГУ).— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-7679-0451-0 /в пер./ : 120.00.

2. Карпиловский, В.С. SCAD Office.Формирование сечений и расчет их геометрических характеристик : учеб.пособие для вузов / Карпиловский В.С. [и др.] .— М. : АСВ, 2006 .— 80с. : ил. + 1опт.диск (CD ROM) .— (Интегрированная система анализа конструкций Structure CAD) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93093-291-3 : 262.31.

3. Карпиловский, В.С. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD : учеб.пособие для вузов / Карпиловский В.С. [и др.] .— М. : АСВ, 2004 .— 592с. : ил. — (Интегрированная система анализа конструкций Structure CAD) .— Библиогр.в конце гл. — ISBN 5-93093-289-1 : 375.00.

4. Семенов, А.А. Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Ч.1, Статический расчет : учеб.пособие для вузов / А.А.Семенов, А.И.Габитов .— М. : АСВ, 2005 .— 152с.: ил. — (Интегрированная система анализа конструкций Structure CAD) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93093-347-2 : 150.00.

5. Алямовский, А.А. SolidWorks/COSMOSWorks:Инженерный анализ методом конечных элементов / А.А.Алямовский .— М. : ДМК Пресс, 2004 .— 432с. — (Проектирование) .— ISBN 5-94074-218-1 : 254.16.

6. Вербовой, Л.В. Работа в Autodesk Inventor / Л.В.Вербовой.— М.: Горячая линия-Телеком, 2004 .— 496с. : ил. — (Конструирование САПР) .— ISBN 5-93517-156-2 /в пер./: 315.00.

7. Карпиловский, В.С. SCAD Office. Реализация СНиП в проектирующих программах:[Интегрированная система анализа конструкций Structure CAD] : учеб.пособие для вузов / В.С.Карпиловский [и др.] .— М. : АСВ, 2004 .— 288с. : ил. + 1 CD .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93093-236-0 : 225.00.

8. Баженов, В.А. Строительная информатика. Автоматизированное проектирование несущих конструкций зданий и сооружений: учеб. пособие для строит. вузов / В.А.Баженов [и др.]; под ред. Лизунова П.П. - М.: АСВ, 2006. - 460с.: ил. - ISBN 5-93093-458-4 /в пер./: 367.20.