МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Методы расчета рисков в страховании»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Перспективные методы искусственного интеллекта
в сетях передачи и обработки данных

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Ларин Н.В., доцент каф. ПМиИ, к.ф.-м.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

СОДЕРЖАНИЕ

№ ЛР	Наименование лабораторных работ	Кол-во часов
1	Расчет страховых тарифов по методике Росстрахнадзора	2
2	Моделирование риска разорения страховой компании в рамках модели Лундберга-Крамера. Аналитическое решение.	2
3	Моделирование риска разорения страховой компании в рамках модели Лундберга-Крамера. Численное решение	2
4	Моделирование оптимального портфеля страховщика методом VaR.	2
5	Оценка стоимости договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели индивидуального риска.	2
6	Оценка стоимости договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели коллективного риска.	2
7	Оценка влияния механизма перестрахования на вероятность разорения страховщика	2

Лабораторная работа № 1.

Расчет страховых тарифов по методике Росстрахнадзора

Цель и задачи работы: познакомится с Методикой I расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования и научиться применять ее к конкретному виду страхования.

Общие положения (теоретические сведения).

Методика (I) применяется в рисковых (краткосрочных) видах страхования, например, в добровольном медицинском страховании. В рисковом страховании, по сравнению с долгосрочными видами страхования, большее значение приобретают случайные отклонения от планируемых результатов, поэтому здесь необходимо использовать вероятностный подход.

Пусть страховой тариф взимается с 1 руб. страховой суммы. Методика (I) Росстрахнадзора содержит формулу для вычисления ставки нетто – тарифа $T_н$. Если страховую сумму по риску обозначить через C, то нетто – премия составит $T_н C$. Пусть n рисков в группе однородны, т.е. распределение ущерба страхователей одно и то же. Суммы C_i $(i = 1,2,...,n)$, на которые эти риски застрахованы в общем случае разные. Будем считать, что случайные величины C_i независимы и одинаково распределены, риски также независимы между собой и по каждому риску возможно не более одного страхового случая. Пусть X_i - страховое возмещение, выплачиваемое по

i - му риску при условии, что был страховой случай. Рассмотрим случайную величину $I_i = \{0,1\}$ $(i = 1,2,...,n)$. Значение 0 величина принимает с вероятностью $1-q$, если по риску не было страхового случая и значение 1 с вероятностью q – в противном случае.

Условие достаточности собранных нетто – премий для покрытия суммарного убытка запишем в виде

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i I_i < \sum_{i=1}^{n} T_н C_i\right) = \varepsilon$$

или

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i < 0\right) = \varepsilon$$

Здесь $P(A)$ - вероятность события A, $Z_i = X_i I_i - T_н C_i$, ε - заданный уровень надежности.

Так как случайные величины Z_i независимы и одинаково распределены, то при достаточно большом значении n распределение их суммы можно считать приближенно нормальным. Применим прием стандартизации и нормальной аппроксимации

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - nm_z}{\sqrt{n}\sigma_z} < -\sqrt{n}\frac{m_z}{\sigma_z}\right) = \varepsilon$$

откуда получаем

$$-\sqrt{n}\frac{m_z}{\sigma_z} = \alpha_\varepsilon$$

Здесь $m_z = S_b q - T_н S$ и $\sigma_z^2 = M[Z_i^2] - m_z^2$ - математическое ожидание и дисперсия величины Z_i, α_ε - квантиль стандартного нормального распределения, $S_b = M[X_i]$ и $S = M[C_i]$ - математические ожидания величин страхового возмещения и страховой суммы.

$$M[Z_i^2] = M[X_i^2 I_i^2 - 2T_н X_i I_i C_i + T_н^2 C_i^2] =$$

$$= q(\sigma_x^2 + S_b^2) - 2T_н q M[X_i C_i] + T_н^2(\sigma_c^2 + S^2)$$

где $\sigma_x^2 = D[X_i]$, $\sigma_c^2 = D[C_i]$ - дисперсии страхового возмещения и страховой суммы.

Очевидно, что величины X_i и C_i являются зависимыми. Для вычисления $M[X_i C_i]$ введем в рассмотрение величину относительного страхового возмещения $V_i = X_i / C_i$. Логично предположить, что величины V_i и C_i независимы. Первая из них описывает ущерб, причиненный застрахованному объекту. Вторая определяется свойствами страхователя (его предпочтениями, финансовыми возможностями). Поэтому

$$M[X_i C_i] = M[V_i]M[C_i^2] = \frac{1}{M[C_i]} M[X_i]M[C_i^2] = \frac{S_b}{S}(\sigma_c^2 + S^2)$$

Подставляя выражения для m_z, σ_z и формулы в равенство приходим к квадратному уравнению относительно величины $T_н$

$$(n - \alpha_\varepsilon^2 r^2)T_н^2 - 2q\frac{S_b}{S}(n - \alpha_\varepsilon^2 r^2)T_н + \frac{S_b^2}{S^2}(nq^2 - \alpha_\varepsilon^2 q r_b^2 - \alpha_\varepsilon^2 q + \alpha_\varepsilon^2 q^2) = 0$$

Решая данное уравнение, находим

$$T_н = q\frac{S_b}{S} + \alpha_\varepsilon q \frac{S_b}{S}\sqrt{\frac{1 - q + r_b^2 - qr^2}{nq(1 - \alpha_\varepsilon^2 r^2 / n)}}$$

Здесь $r_b = \dfrac{\sigma_x}{S_b}$ и $r = \dfrac{\sigma_c}{S}$ - коэффициенты вариации соответственно убытков и страховых сумм по одному страховому полису.

Первое слагаемое представляет собой чистую рисковую (основную) часть тарифной ставки, а второе – рисковую надбавку.

Формула Методики (I) является упрощенным вариантом, если положить $r = 0$

$$T_н = q\frac{S_b}{S} + \alpha_\varepsilon q \frac{S_b}{S}\sqrt{\frac{1-q+r_b^2}{nq}}$$

Такое упрощение допустимо во многих практических случаях. Когда q мало, а n велико, члены qr^2 и $\alpha_\varepsilon^2 r^2/n$ малы по сравнению с другими членами, входящими в выражение под корнем. Однако, в практике могут встретится случаи, когда разница будет достаточно ощутимой.

Величины математических ожиданий и дисперсий, входящих в выражения должны оцениваться по статистическим данным с помощью стандартных статистических оценок.

Для распределения страховой суммы, согласно таблице 1, среднее равно

$$S = 1500\frac{1141+10j}{6111+40j} + 3000\frac{1647+10j}{6111+40j} + 4500\frac{1081+10j}{6111+40j} + 6000\frac{2242+10j}{6111+40j}$$

$$q = \frac{6111+40j}{74546+10j}$$

$$\sigma_c^2 =$$

$$= (1500-S)^2\frac{1141+10j}{6111+40j} + (3000-S)^2\frac{1647+10j}{6111+40j} + (4500-S)^2\frac{1081+10j}{6111+40j} +$$

$$+ (6000-S)^2\frac{2242+10j}{6111+40j}$$

В качестве примера примем j = 0. В этом случае математическое ожидание S_b величины страховых возмещений при условии, что страховые случаи были заявлены равно 1439.7; стандартное отклонение σ_x страховых возмещений равно 1230.8. Величины S, q, σ_c^2 соответственно равны 4.085.9, 0.0820, 1715.0.

Откуда получаем $T_н = 0.0502$.

Задание на работу: Страховая компания намерена застраховать от ущерба 100 + 10j однотипных автомобилей, полная стоимость каждого из которых оценивается в 6000 долларов. Имеются статистические данные о страховании 74546 + 10j автомобилей такого типа; всего произошло 6111 + 40j страховое событие. Здесь j - номер фамилии студента в списке группы.

Данные об относительных выплатах и страховых суммах представлены в таблице.

Используя Методику I расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования, определить тариф, соответствующий уровню ε неразорения страховой компании равному 0.95.

Таблица 1

Относит. возмещение	Страховая сумма, долл.				Всего
	1500	3000	4500	6000	
0.1	312+j	443+j	298+j	616+j	
0.2	176+j	280+j	188+j	354+j	
0.3	153+j	221+j	142+j	321+j	
0.4	129+j	202+j	124+j	266+j	
0.5	93+j	148+j	103+j	197+j	
0.6	94+j	128+j	87+j	181+j	
0.7	86+j	88+j	54+j	115+j	
0.8	43+j	64+j	36+j	78+j	
0.9	34+j	44+j	32+j	76+j	
1.0	21+j	29+j	17+j	38+j	
Всего	1141 + 10j	1647 + 10j	1081 + 10j	2242 + 10j	6111 + 40j

Лабораторная работа № 2.

Моделирование риска разорения страховой компании в рамках модели Лундберга-Крамера. Аналитическое решение.

Цель и задачи работы: познакомиться с классической динамической моделью оценки вероятности разорения страховой компании и рамках модели научиться аналитически оценивать влияние величины собственного капитала на вероятность разорения страховщика.

Общие положения (теоретические сведения).

1. Экономическая постановка задачи

Нахождение вероятности разорения страховой компании является одной из важнейших задач страховой математики, так как финансовый риск и связанная с ним опасность разорения объективно присутствуют в деятельности любой страховой компании. Оценка этого риска представляет фундаментальный интерес для компании и служит основой для принятия важнейших решений. В частности знание вероятности разорения позволяет найти оптимальную величину страховой премии.

Проблема обеспечения финансовой устойчивости страховой компании является комплексной; ее изучение и решение предполагают усилия специалистов в разных областях, прежде всего руководства компании, юристов, экономистов. Однако многие важные задачи носят чисто математический характер. В рамках специальной математической теории — теории риска, разработана система понятий, моделей и методов, которые позволяют количественно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании. Имея в виду присутствие факторов случайности, общематематической базой для теории риска служат теория вероятностей и математическая статистика.

2. Математическая постановка задачи. (Модель Крамера-Лундберга)

Пусть заданы следующие независимые объекты:

- число выплат за временный промежуток [0,t) - пуассоновский процесс *N(t)* с интенсивностью $\lambda\left(EN(t)=\lambda t, N(0)=0\right)$;

- размер выплат страховой компании клиентам - последовательность $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием μ и функцией распределения *F(x), F(0)=0.*

О величинах $N(t)$, считающих количество требований, предположим, что

1) $N(0)=0$;

2) $N(t) \in \{0,1,2...\}$;

3) $N(t) \le N(t+h)$.

Таким образом, величина $N(t+h)-N(t)$ показывает число исков, поступивших в промежутке времени $(t,t+h)$.

Кроме того, компания получает страховые взносы от клиентов с интенсивностью c (c – некоторая положительная постоянная).

Начальный капитал равен x.

При таком описании капитал компании имеет вид

$$\mathrm{Y}_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i .$$

Процесс риска в данном случае $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, и в силу независимости N_t и X_i имеем, что $EX(t) = \lambda t \mu$. Премии, собранные к моменту t $\Pi(t)=ct$ – линейная функция времени. Выбирая коэффициент нагрузки $\theta = \frac{\Pi(t)}{EX(t)} - 1 = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu}$, получаем скорость поступления премий $c = (1+\theta)\lambda\mu$.

Найдем вероятность неразорения страховой компании

$$\Phi(x) = P\{Y_t \ge 0, Y_0 = x, t \ge 0\}.$$

Сначала найдем условия дифференцируемости функции $\Phi(x)$, предполагая, что $F(x)$ имеет плотность. Поскольку разорение не может произойти до первого скачка пуассоновского процесса T_1, то можно записать

$$\Phi(x)=E\Phi(x+cT_1-x_1)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda\cdot s}\int_0^{x+cs}\Phi(x+cs-y)\,f(y)dyds\,,$$

где $f(x)$ – плотность распределения $F(x)$.

Заменой переменных $q=x-y$ последнее выражение приводится к виду:

$$\Phi(x)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda s}\int_{-cs}^{x}\Phi(q+cs)\,f(x-q)dqds\,.$$

Следовательно, если $F(y)\in C^n[0,\infty)$, то $\Phi(x)\in C^{n-1}[0,\infty)$.

Далее предполагается, что $F(y)\in C^3[0,\infty)$.

По формуле полной вероятности и свойству ординарности пуассоновского процесса

$$\Phi(x)=\Phi(x+c\Delta t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))+\lambda\Delta t\int_0^{x+c\Delta t}\Phi(x+c\Delta t-y)dF(y)+o(\Delta t)\,.$$

Член $\Phi(x+c\Delta t)$ в первом слагаемом правой части разложим по формуле Тейлора:

$$\Phi(x)=\left(\Phi(x)+c\Phi'(x)\Delta t\right)\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+\lambda\Delta t\int_0^{x+c\Delta t}\Phi(x+c\Delta t-y)dF(y)+o(\Delta t)\,,$$

$$\Phi(x)\left(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)=c\Phi'(x)\Delta t\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)+\lambda\Delta t\int_0^{x+c\Delta t}\Phi(x+c\Delta t-y)dF(y)+o(\Delta t)\,.$$

Разделим обе части последнего равенства на Δt, устремим Δt к нулю и получим интегродифференциальное уравнение:

$$\lambda\Phi(x)=c\Phi'(x)+\lambda\int_0^{x}\Phi(x-y)dF(y)\,.$$

Зная среднее число исков в некоторый промежуток времени, закон распределения размера выплат клиентам, величину относительной защитной надбавки и начальный капитал, решив уравнение, можно получить значение вероятности неразорения страховой компании.

3. Аналитическое решение задачи

Для случая экспоненциально распределенных выплат решение интегро-дифференциального уравнения выписывается в явном виде. Действительно, подстановкой $F(y)=1-e^{-\frac{1}{\mu}x}$ сводим уравнение (1) к следующему

$$\lambda\Phi(x)=c\Phi'(x)+\lambda\int_0^x \Phi(x-y)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}y}dy\,.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения, затем выполним интегрирование по частям и получим

$$\begin{aligned}
\lambda\Phi'(x)&=c\Phi''(x)+\lambda\Phi(0)\frac{1}{\mu}+\lambda\int_0^x \Phi'_x(x-y)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}y}dy=\\
&=c\Phi''(x)+\lambda\Phi(0)\frac{1}{\mu}-\lambda\int_0^x \frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}y}d\Phi(x-y)=\\
&=c\Phi''(x)+\lambda\frac{1}{\mu}\Phi(x)+\lambda\cdot\int_0^x \Phi(x-y)\frac{1}{\mu}de^{-\frac{1}{\mu}y}=\\
&=c\Phi''(x)+\lambda\frac{1}{\mu}\Phi(x)-\frac{1}{\mu}\left[\lambda\int_0^x \Phi(x-y)\frac{1}{\mu}de^{-\frac{1}{\mu}y}dy\right]=\\
&=c\Phi''(x)+\lambda\frac{1}{\mu}\Phi(x)+\frac{c}{\mu}\Phi'(x)-\frac{\lambda}{\mu}\Phi(x)=c\Phi''(x)+\frac{c}{\mu}\Phi'(x),
\end{aligned}$$

где вместо интеграла в квадратных скобках поставлено его выражение через исходное интегродифференциальное уравнение.

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению

$$\Phi''(x)+\Phi'(x)\left(\frac{1}{\mu}-\frac{\lambda}{c}\right)=0\,,$$

точное решение которого ищется в виде

$$\Phi(x) = B + Ae^{x\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)},$$

где A и B – константы.

Неравенство $\frac{\lambda}{c} < \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \lambda\mu - c < 0$ отражает положительность коэффициента нагрузки θ ($\mu = \frac{c}{\lambda(1+\theta)}$, $\frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{c}(1+\theta)$, $(1+\theta) > 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{c} < \frac{1}{\mu}$), и, следовательно, $\Phi(\infty) = B$.

Неизвестные константы A и B можно найти из следующих равенств:

$\Phi(\infty) = 1$ и $\lambda\Phi(0) = c\Phi'(0)$.

Таким образом, приходим к следующему явному выражению для вероятности неразорения:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{x\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)} = 1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta x}{(1+\theta)\mu}} .$$

В случае произвольного распределения выплат *F(x)* получение аналитического выражения для *Φ(x)* затруднительно, и при решении уравнения необходимо использовать численные методы.

Задание на работу (рабочее задание): для заданных значений величины коэффициента нагрузки θ построить кривую для аналитического вида вероятности неразорения как функцию начального капитала компании. Параметры λ и μ задать самостоятельно

№	Величина коэффициента нагрузки θ		
1	0.10	0.15	0.20
2	0.15	0.20	0.25
3	0.20	0.25	0.30
4	0.25	0.30	0.35
5	0.30	0.35	0.40

6	0.35	0.40	0.45
7	0.40	0.45	0.50
8	0.45	0.50	0.55
9	0.50	0.55	0.60
10	0.55	0.60	0.65
11	0.60	0.65	0.70
12	0.65	0.70	0.75
13	0.70	0.75	0.80
14	0.75	0.80	0.85
15	0.80	0.85	0.90
16	0.85	0.90	0.95
17	0.10	0.20	0.30
18	0.20	0.40	0.60
19	0.30	0.60	0.90
20	0.15	0.45	0.60
21	0.55	0.80	0.95
22	0.70	0.75	0.80
23	0.75	0.80	0.85
24	0.80	0.85	0.90
25	0.85	0.90	0.95
26	0.10	0.20	0.30
27	0.20	0.40	0.60
28	0.30	0.60	0.90
29	0.15	0.45	0.60
30	0.55	0.80	0.95

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке группы

Лабораторная работа № 3.

Моделирование риска разорения страховой компании в рамках модели Лундберга-Крамера. Численное решение.

Цель и задачи работы: закрепить навыки работы с программными средствами, применяемыми для решения задач экономико-математического характера в сфере страхования на примере численной оценки влияния величины собственного капитала на вероятность разорения страховщика в рамках модели Крамера-Лундберга.

Общие положения (теоретические сведения).

Численное решение задачи

Пусть L достаточное большое значение капитала компании. В этом случае для интегродифференциального уравнения получим следующую краевую задачу.

$$\lambda \Phi(x) = c\Phi'(x) + \lambda \int_0^x \Phi(x-y) f(y)dy\,; \quad x \in [0; L],$$

$$\lambda \Phi(0) = c\Phi'(0),$$

$$\Phi(L) = 1.$$

Решение задачи найдем численно.

Введем на отрезке $[0; L]$ равномерную сетку $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = L$,

где $x_i = i \cdot h$, $i = 0,1,2,..., N$, $h = \dfrac{L}{N}$.

Производную в узле x_i аппроксимируем односторонней правой производной:

$$\Phi'(x_i) = \frac{\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)}{h} + O(h),$$

или $\Phi'(x_i) = \dfrac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + O(h),$

где $\varphi_i = \Phi(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots, N-1$.

Интеграл $\int\limits_0^{x_i} \Phi(x_i - y) f(y) dy$ представим в виде суммы интегралов

$$\int\limits_0^{x_i} \Phi(x_i - y) f(y) dy = \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y) f(y) dy; \quad i = 1,2,\ldots, N-1.$$

Интеграл под знаком суммы вычислим с помощью формулы трапеции .

Легко видеть, что отрезок интегрирования имеет длину шага h сетки Δ. $(x_j - x_{j-1} = jh - (j-1)h = h)$. Если h выбрать достаточно мелким, то

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y) f(y) dy = \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})[\Phi(x_i - x_{j-1}) f(x_{j-1}) + \Phi(x_i - x_j) f(x_j)] + O(h^3),$$

или

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \Phi(x_i - y) f(y) dy = \frac{h}{2}\{\Phi[(i-j)h + h] f_{j-1} + \Phi[(i-j)h] f_j\} + O(h^3); \quad i = 1,2,\ldots, N-1,$$

где $f_j = f(x_j)$.

Уравнение с учетом выражений примет вид:

$$\lambda\varphi_i = \frac{c}{h}\varphi_{i+1} - \frac{c}{h}\varphi_i + \lambda\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{i}\left\{\Phi[(i-j)h+h]f_{j-1} + \Phi[(i-j)h]f_j\right\} + O(h);$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1.$$

Учитывая, что $\Phi(kh) = \varphi_k$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\lambda\frac{h}{2}f_i\varphi_0 + \lambda h\sum_{j=1}^{i-1}f_{i-j}\varphi_j + \left(\lambda\frac{h}{2}f_0 - \frac{c}{h} - \lambda\right)\varphi_i + \frac{c}{h}\varphi_{i+1} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,N-1.$$

Данная система состоит из *N-1* уравнений относительно *N+1* неизвестных. Недостающие два уравнения получим из граничных условий.

$$\left(-\frac{c}{h} - \lambda\right)\varphi_0 + \frac{c}{h}\varphi_1 = 0,$$

$$\boldsymbol{\varphi_N = 1}.$$

Таким образом, получили следующую систему *N* линейных алгебраических уравнений относительно *N* неизвестных:

$$\left(-\frac{c}{h} - \lambda\right)\varphi_0 + \frac{c}{h}\varphi_1 = 0,$$

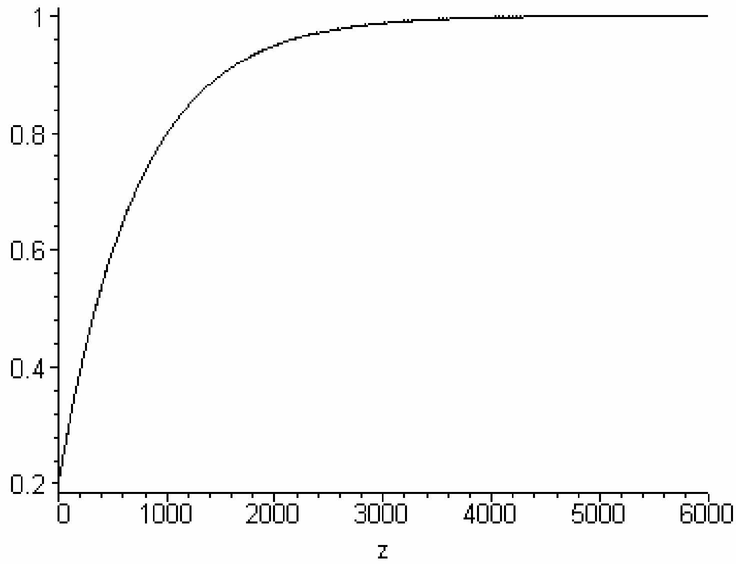
$$\lambda\frac{h}{2}f_i\varphi_0 + \lambda h\sum_{j=1}^{i-1}f_{i-j}\varphi_j + \left(\lambda\frac{h}{2}f_0 - \frac{c}{h} - \lambda\right)\varphi_i + \frac{c}{h}\varphi_{i+1} = 0; \qquad i = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\boldsymbol{\varphi_N = 1}.$$

Решив данную систему линейный алгебраических уравнений, найдем значения функции *Ф(x)* в узлах сетки Δ.

На рисунке 1 построены зависимости вероятности неразорения *Ф(x)* страховой компании от величины начального капитала *x,* принадлежащего интервалу [0;6000] при величине коэффициента нагрузки θ=0,25. Сплошная кривая соответствует численному решению задачи, штриховая – аналитическому решению задачи. Из рисунка видно, что уже при значениях *x*=3500 тыс. руб. вероятность неразорения близка к единице. Кроме того, построенные зависимости показывают, что предложенный численный метод решения краевой задачи дает хорошее совпадение с известным точным решением.

Φ(x)

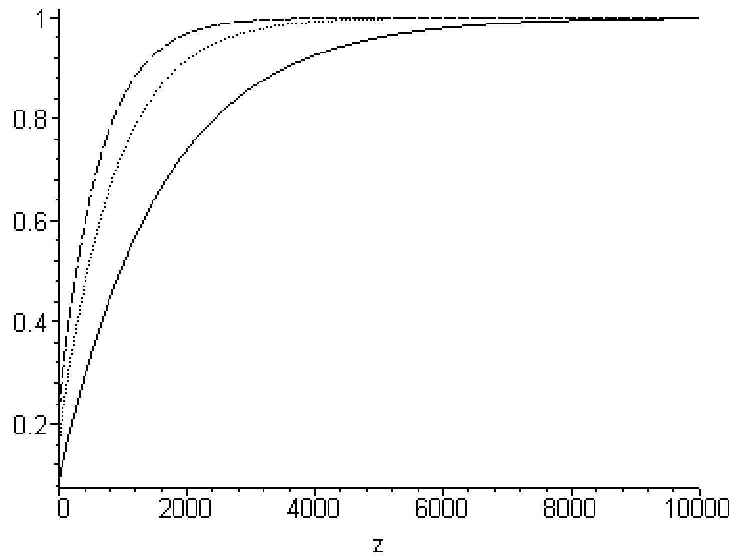


x, тыс. руб.

Рис. 1. Зависимость вероятности неразорения страховой компании от величины начального капитала при θ=0,25

На рисунке 2 построены зависимости вероятности неразорения *Ф(x)* страховой компании от величины начального капитала *x,* принадлежащего интервалу [0;10000] при различных значениях коэффициента нагрузки.

Ф(x)



x, тыс. руб.

Рис. 2. Зависимость вероятности неразорения страховой компании от величины начального капитала при различных значениях θ

Сплошная линия соответствует вероятности неразорения при величине θ=0.1, пунктирная линия - θ=0.2, штриховая - θ=0.3. При $0<x\leq 8000$ вероятность неразорения зависит от величины θ. Причем с увеличением θ вероятность неразорения увеличивается. При $x>8000$ вероятность неразорения близка к единице и не зависит от величины коэффициента нагрузки.

Задание на работу: используя числовые данные задания лабораторной работы № 2 найти численное решение краевой задачи о вероятности неразорения страховой компании и сравнить полученные решения с аналитическим. Точность расчетов контролировать методом сгущения сеток.

Лабораторная работа №4.

Моделирование оптимального портфеля страховщика методом VaR.

Цель и задачи работы: научиться решать задачу моделирования оптимального портфеля ценных бумаг методом VaR, где в качестве инвестора выступает страховая компания.

Общие положения (теоретические сведения).

Сумма (стоимость) под риском – *Value at Risk* (VaR) – простейшая по своему построению мера риска, применяемая преимущественно в финансах, банковской и инвестиционной сфере, а также в страховании, где используют также термин «капитал под риском» (*capital at risk*).

Идея метода VaR – построить верхнюю оценку капитала, который может быть потерян в результате неблагоприятного стечения обстоятельств.

Другими словами, это капитал, который теряется в «наихудшем» случае. Речь может идти, например, о потере вложенного в ценные бумаги капитала или об оценке возможного ущерба, подлежащего покрытию компанией страхования имущества.

В большинстве случаев, однако, нет смысла оценивать риск действительно максимально возможным значением потерь, так как вероятность потерпеть такие потери ничтожно мала.

Так, для страховой компании это означало бы одновременную потерю всех застрахованных объектов, что было бы возможно лишь в результате «сверхкатастрофических» обстоятельств.

Для инвестора, действующего на рынке ценных бумаг, риск потери всех инвестиций также можно считать маловероятным.

Поэтому, оценивая «наихудший» возможный вариант, поступают следующим образом: выбрав некоторый уровень вероятности γ, оценивают капитал, который может быть потерян с вероятностью γ.

При этом γ мыслиться малым числом; типичное его значение может лежать в диапазоне от 0,01 до 0,1 («наиболее типичное» – 0,05, или 5%).

Подход VaR приводит к квантильным оценкам: в качестве меры риска выступает квантиль соответствующего распределения.

Наиболее употребительный в приложениях случай, когда распределение потенциального убытка предполагается нормальным.

Формальное определение VaR таково.

Если X – случайный убыток, то,

$$\mathrm{VaR}_{\gamma}(X) = \inf\{w : F_x(w) \geq 1-\gamma\},$$

где $F_X(w) = P(X < w)$ – функция распределения убытка.

Можно рассуждать не в терминах убытков, а в терминах доходов.

Тогда нужно взять соответствующий квантиль распределения величины дохода – X, то есть величину дохода «в наихудшем случае».

Часто VaR определяют именно таким образом.

Если убыток X распределен нормально со средним m_X и среднеквадратическим отклонением σ_X, то, формальное определение превращается в соотношение

$$\mathrm{VaR}_{\gamma}(X) = m_X + \alpha_{1-\gamma}\sigma_X,$$

где $\alpha_{1-\gamma}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\gamma$.

Рассмотрим пример использования правила «наихудшего случая» для оптимизации инвестиционного портфеля страховщика.

Пусть инвестор (страховая компания) имеет обязательства в размере U, подлежащие погашению в конце некоторого периода.

Компания инвестирует собственный капитал S в начале периода в ценные бумаги (активы), доходности которых нормальны, предназначая его для покрытия указанных обязательств.

Инвестор, естественно, заинтересован в том, чтобы требуемый капитал S был минимален.

Предположим, что он определяет S по правилу «наихудшего случая», а именно, задав некоторое значение γ, накладывает условие

$$P\left\{(1+r^*)S < U\right\} \le \gamma ,$$

$$r^* = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i ,$$

где r^* – доходность портфеля ценных бумаг,

x_i – доля i – го актива входящего в портфель,

r_i – доходность i – го актива входящего в портфель,

n – количество видов ценных бумаг.

Так как $S(1+r^*)$ есть капитал на конец периода, смысл этого неравенства состоит в том, что вероятность нехватки средств для покрытия обязательств должна быть не больше γ.

Так как r^* имеет нормальную, а следовательно, непрерывную функцию распределения, минимальное S, удовлетворяющее неравенству, определяется из равенства

$$P\left\{(1+r^*)S < U\right\} = \gamma ,$$

или

$$P\left\{1+r^* < \frac{U}{S}\right\} = \gamma .$$

Величина $1+r^*$ распределена нормально.

Вычитая её математическое ожидание $(1+m_r)$ и деля на среднее квадратическое отклонение σ_r, получаем

$$P\left(\frac{r^* - m_r}{\sigma_r} < \frac{V - (1 + m_r)}{\sigma_r}\right) = \gamma .$$

Здесь

$$V = \frac{U}{S},$$

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i ,$$

$$\sigma_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j v_{ij}} ,$$

где m_i – ожидаемая доходность i – го актива входящего в портфель,

v_{ij} – коэффициент ковариации доходностей активов i–го и j–го видов.

Поскольку величина $\left(r^* - m_r\right)/\sigma_r$ стандартно нормальна, отсюда получаем

$$V = 1 + m_r + \alpha_\gamma \sigma_r .$$

Задача минимизации S при фиксированном U сводится к задаче максимизации V .

Таким образом, математическая постановка задачи оптимизации инвестиционного портфеля страховщика имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i + \alpha_\gamma \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j v_{ij}} \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n .$$

Метод VaR, описанный выше, называют параметрическим, так как оцениваются среднее и дисперсия убытка, затем рассчитывается VaR по формуле, подразумевающей нормальность распределения.

Конечно, тот же подход может быть применен и с другими распределениями.

При этом параметрическая оценка может быть сделана более точной по сравнению с оценкой, соответствующей обычной нормальной аппроксимации.

Для этого необходимо использовать высшие моментные характеристики, например коэффициент асимметрии.

Основным достоинством метода VaR можно назвать его простоту.

Этот критерий удобен для вычислений, особенно когда нужно быстро производить расчеты с большим числом параметров.

Однако той же простотой определяются и недостатки этого критерия.

VaR, будучи квантильной оценкой, фактически оперирует лишь с одной точкой функции распределения – той, где функция распределения пересекает уровень $1-\gamma$.

При этом игнорируется вся остальная информация, которая может содержаться в распределении анализируемой величины. Поэтому, например, VaR может быть очень чувствителен к выбору γ.

VaR не реагирует на распределение величин убытков, происходящих с вероятностями, меньшими γ. Они считаются маловероятными и игнорируются, то есть «хвост» распределения отсекается.

При применении VaR нужно проанализировать, можно ли пренебречь хвостами в контексте решаемых задач.

Задание на работу: Пусть инвестор – страховая компания имеет обязательства в размере U, подлежащие погашению в конце года.

Компания инвестирует собственный капитал S в начале года в акции (см. табл.), предназначая его для покрытия указанных обязательств.

Варианты задания

№ варианта	№ акций	№ варианта	№ акций
1	A1, A2, A6, A9	14	A1, A4, A6, A9
2	A3, A6, A9, A10	15	A2, A5, A6, A10
3	A1, A2, A7, A9	16	A1, A2, A6, A9
4	A2, A3, A5, A9	17	A3, A6, A8, A10
5	A2, A5, A8, A10	18	A4, A6, A9, A10
6	A2, A5, A7, A9	19	A3, A7, A8, A9
7	A3, A6, A8, A9	20	A3, A5, A7, A8
8	A2, A5, A7, A9	21	A2, A4, A8, A9
9	A2, A3, A8, A9	22	A4, A6, A9, A10
10	A1, A6, A7, A10	23	A2, A4, A8, A9
11	A3, A6, A8, A10	24	A4, A5, A7, A8
12	A3, A5, A7, A9	25	A1, A2, A5, A9
13	A2, A6, A8, A10	26	A1, A3, A5, A9

Цены и дивиденды по акциям (в долларах США)

Год	Условные обозначения акций									
	А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10
1998	116,4	77,5	47,6	86,3	116,2	20,5	81,7	64,5	153,4	63,0
	11,2	8,2	5,1	5,7	28,6	3,0	5,8	4,6	14,9	6,1
1999	129,4	73,0	49,6	86,9	136,2	25,5	84,2	57,2	173,2	68,0
	12,2	7,2	5,3	9,7	12,6	3,1	9,8	4,3	15,9	7,1
2000	135,2	65,0	53,6	90,0	147,0	28,2	87,4	49,0	181,5	96,0
	12,0	8,4	5,0	9,8	13,0	3,0	9,5	6,6	19,9	6,4
2001	133,4	69,0	55,6	96,9	104,2	30,5	88,2	50,2	193,2	70,0
	10,8	6,2	5,4	9,7	15,6	3,7	9,8	5,3	15,9	7,6
2002	136,2	67,0	58,6	97,0	123,0	28,0	87,4	41,0	159,5	75,0
	14,0	7,4	6,0	10,8	15,0	3,6	9,9	6,4	20,0	6,2
2003	149,4	61,0	59,6	96,9	183,2	29,5	91,2	46,2	202,2	78,0
	12,2	7,2	5,3	9,7	12,6	3,1	9,8	4,3	15,9	7,1
2004	154,2	60,0	63,6	100,0	127,0	30,2	97,4	49,5	182,5	79,0
	16,4	8,8	6,0	9,6	23,0	3,0	9,5	6,6	19,9	7,4
2005	159,4	57,0	64,6	106,9	188,2	39,5	99,2	48,2	207,2	84,0
	12,2	7,2	5,3	9,7	32,6	3,1	9,8	4,3	15,9	7,1
2006	154,2	50,5	56,6	90,0	100,0	20,2	80,4	33,0	110,0	70,0
	6,4	1,8	3,0	5,6	3,0	1,2	6,5	1,6	9,9	3,4
2007	159,4	51,0	60,6	100,9	123,0	29,5	88,2	25,2	137,3	74,0
	13,2	6,2	6,3	10,7	42,6	4,1	9,8	4,3	18,9	9,1

2008	172,0	55,0	76,3	115,0	115,0	43,3	111,5	39,0	225,5	97,0
	20,4	5,4	7,0	11,6	23,0	4,2	10,5	5,6	19,9	9,4
2009	176,6	54,0	86,6	125,0	169,0	47,3	120,1	38,0	230,5	99,0
	18,4	6,1	8,0	12,6	22,0	5,2	15,5	10,6	22,0	10,0
2010	182,0	52,0	96,3	130,0	190,0	48,3	134,0	35,0	235,5	105,0
	22,0	6,4	10,0	14,6	31,6	5,2	16,5	4,8	23,6	11,4
2011	164,2	60,5	66,6	110,0	110,0	40,2	100,4	43,0	210,0	90,0
	16,4	8,8	6,0	9,6	23,0	3,0	9,5	3,6	19,9	7,4

Требуется: в предположении о нормальном распределении доходностей акций найти оптимальную структуру инвестиционного портфеля страховщика используя метод VaR.

При расчетах положить величину γ равной 0,95.

Лабораторная работа №5.

Оценка стоимости договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели индивидуального риска.

Цель и задачи работы: научиться оценивать стоимость договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели индивидуального риска.

Общие положения (теоретические сведения).

Рассмотрим группу договоров страхования, по поводу которых ставится задача определения размера возможных убытков, вероятностей их наступления, стоимости страхования и перестрахования.

Аналогичного рода задачи возникают для субъекта хозяйственной деятельности, например для предпринимателя, в отношении той или иной группы договоров (контрактов) с контрагентами.

На практике обычно есть не очень много информации по проведению масштабных исследований для оценки риска конкретного портфеля договоров (контрактов). Как правило, все, что можно сделать,— это разбить портфель на группы риска, начиная от самых надежных и кончая наиболее сомнительными.

Количество групп I определяется степенью неоднородности портфеля, его размерами, имеющейся информацией (например, по предыдущим периодам или иным источникам).

В зависимости от конкретного портфеля каждой группе можно присвоить вероятность наступления убытков по данной группе q_i, $i = 1,2.. J$.

Следующий этап выбор единицы измерения B — в целях дискретизации убытков (5 тыс. руб., 17 тыс. руб. или любая другая величина в зависимости от конкретного портфеля и группы). В дальнейшем считается, что убытки нормированы на эту величину.

Выбор B определяется требованиями необходимой точности расчетов и предполагает градацию убытков внутри каждой группы на дополнительные подгруппы — их максимальное количество равно J.

В результате, мы получаем следующую информационную таблицу 1 по данному портфелю договоров (рисков).

Таблица 1

Информационная таблица портфеля договоров

I/J	***j=1***	***j=2***	**…**	***j=J***	

q_1	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	…	$N_{1,J}$	$N_{1,+} = \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}$
q_2	$N_{2,1}$	$N_{2,1}$	…	$N_{2,J}$	$N_{2,+} = \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}$
…	…	…	…	…	
q_I	$N_{I,1}$	$N_{I,2}$	…	$N_{I,J}$	$N_{I,+} = \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}$
	$N_{+,1} = \sum_{i=1}^{I} N_{i,j}$	$N_{+,2} = \sum_{i=1}^{I} N_{i,j}$		$N_{+,J} = \sum_{i=1}^{I} N_{i,j}$	$N_{+,+} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}$

Здесь в ячейке под номером *(i,j)* указано количество контрактов N_{ij}, номер i характеризует вероятность наступления неисполнения контракта — $q_i = 1-p_i$ по данной группе, то есть вся i-я строка есть контракты с одинаковой вероятностью наступления неисполнения контракта. Столбцы j указывают размер убытка в случае возможного нарушения контракта, так что размер убытка, в случае его наступления, есть величина $Y_j = j$хB, где B есть единица измерения (например, 10.000руб, 100.000 тыс руб). Далее будем считать, что B=1. В данном подходе предпринимателю, имеющему опыт работы с сомнительными контрагентами (группой контрагентов или группой контрактов), относительно легко (или по крайней мере, небезнадежно) сделать оценки возможных значений указанных величин.

Другими словами, все убытки измерены в B (нормированы), и если сумма убытков окажется равной при расчете I, то, следовательно, общий убыток равен LхB.

Вероятность того, что не будет убытков по ячейке с номером (1,1) дается выражением:

$$\left(1-q_1\right)^{N_{1,1}}=p_1^{N_{1,1}}.$$

Вероятность того, что не будет убытков по первой строке контрактов, есть выражение вида:

$$\left(1-q_1\right)\sum_{j=1}^{J}N_{1,j},$$

и, вообще, вероятность отсутствия нарушения контрактов по всей группе контрактов (пусть это будет P_o) будет иметь вид:

$$P_0=\prod_{i=1}^{I}\ \left(1-q_i\right)^{\sum_{j=1}^{J}N_{i,j}}.$$

В каждой ячейке с номером *(i,j)* случайные величины $X_{i,j}$ *(к)*, где $к$ = 1,2...,$N_{i,j}$, есть возможные убытки по данной группе контрактов. Распределение их, согласно вышесказанному, имеет вид:

$$P\left(X_{i,j}(k)=0\right)=q_i=\left(1-p_i\right)\text{ и }P\left(X_{i,j}(k)=j\right)=q_i.$$

Суммарный убыток S есть сумма случайных величин:

$$S=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{N_{i,j}}X_{i,j}(k)$$

и, являясь, тем самым, также случайной величиной, принимает значения S=0,1,2…,j..$S_{\max}$ с вероятностями $P(s)=P(S=\mathrm{s})$.

Данные вероятности $P(s)$ подлежат определению. Максимальное значение величины S дается выражением:

$$S=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}jN_{i,j}$$

(Напомним, что выражения нормированы на B, так что фактические значения S и $S_{\max}$ должны быть умножены на B).

Помимо оценки суммарного размера убытков по портфелю договоров и вероятности их наступления, достаточно актуален вопрос о минимизации расходов в случае принятия рисков на страхование или о передаче рисков в перестрахование. Как известно, стоимость страхования зависит от размера собственного участия страхователя в убытках — наличия франшизы. Условная франшиза, когда страхователь обращается к страховщику за выплатой страхового возмещения только в случае превышения размера убытка над пороговым значением — условной франшизой, а иначе покрывает самостоятельно, в целом незначительно уменьшает стоимость страхования и предназначена, в основном, для сокращения экспертных и иных расходов страховщика по урегулированию мелких убытков. Безусловная франшиза (когда размер убытка всегда уменьшается на размер франшизы) может значительно уменьшить стоимость страхования, но, опять же, не всегда, а только в тех случаях, когда средний размер убытка и размер франшизы различаются не слишком сильно.

Достаточно удобным как для страхователя, так и для страховщика может быть передача рисков на условиях договоров stop-loss (останавливающих убытки).

В этом случае страхователь может самостоятельно покрывать все убытки по портфелю до тех пор, пока их суммарный размер не превысит величины d.

Аналогично страховщик может передать портфель рисков в перестрахование на условии покрытия убытков в целом по портфелю до величины d, а сумма убытков свыше этой величины будет покрываться перестраховщиком. То есть все убытки по портфелю рисков страхователя суммируются и начинают компенсироваться только начиная с определенного уровня. Этот вариант может оказаться наиболее выгоден как страхователю, так и страховщику, но предполагает проведение соответствующих обоснованных оценок.

Договоры stop-loss

Предположим, суммарный размер убытков по портфелю рисков составляет размер *S*. Вероятность $P(S \le x) = F_S(x)$ есть вероятность того, что размер убытков в целом по портфелю не превысит величины *x*. Страхователь или страховщик могут выбрать некоторый фиксированный максимальный размер суммарных убытков *d*, оставляемых на собственное удержание, а все что свыше этой величины передается страховщику (перестраховщику).

При заданном размере собственного удержания *d* возникает необходимость в оценке $E(S-d)_+ = W[d]$, где E( ) — оператор усреднения, а $(S-d)_+ = \max[0;(S-d)]$ — та часть убытков, которые страхователь передает страховщику или страховщик передает в перестрахование.

В дальнейшем, чтобы избежать повторений, будем говорить о передаче рисков в перестрахование.

Таким образом, пока суммарный размер убытков не превышает величины *d*, страховщик покрывает их самостоятельно, а в случае превышения ($S>d$) его покрытие в убытках составляет *d*, то есть участие страховщика в убытках дается выражением:

$$min(S;d) = S-(S-d)_+$$

Оценка величины $W[d] = E[(S-d)_+]$ представляет интерес с точки зрения оценки необходимой платы перестраховщику или как оценка размера резервного фонда на убытки свыше величины *d* для страховщика или для страхователя.

В случае непрерывного распределения для *W[d]* имеем:

$$W[d] = \int_d^{\infty} (x-d) f_S(x) dx = \int_d^{\infty} (1-F_S(x)) dx \qquad (1)$$

Положим,

$$f_s(x) = -\frac{d}{dx}[1 - F_s(x)]$$

проинтегрируем по частям:

$$W[d] = (x-d)[1 - F_s(x)]\Big|_d^{\infty} + \int_d^{\infty}[1 - F_s(x)]dx$$

воспользуемся правилом Лапиталя:

$$\lim_{x\to\infty}(x-d)[-(1-F_s(x))] = -\lim_{x\to\infty}\frac{x-d}{\frac{1}{1-F_s(x)}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{-f_s(x)}{(1-F_s(x))^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1-F_s(x))^2}{f_s(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2(1-F_s(x))\,f_s(x)}{f_s'\,(x)} = 0$$

$$(x-d)[-(1-F_s(x))]\Big|_d = 0$$

тогда

$$W[d] = \int_d^{\infty}(1 - F_S(x))dx$$

В случае дискретного размера убытков для *W[d]* имеем аналогичные выражения:

$$W[d] = E[(S-d)_+] = \sum_{j=d+1}^{\infty}(j-d)f_S(j) = \sum_{j=d}^{\infty}[1 - F_S(j)] \qquad (2)$$

поскольку $F_s(x)$ - кусочно – постоянна, то интегралы в предыдущих формулах могут быть переписаны в виде сумм.

Таким образом, оценка стоимости договоров stop-loss сводится к нахождению функции распределения суммарного размера убытков: $F_s(x)$.

Рассмотрим применение моделей индивидуального и коллективного риска в системе обозначений данных таблицы 1.

Модель индивидуального риска

Рассмотрим модель индивидуального риска. Введем производящую функцию $H(z)=\sum_s P(x=s)z^s = E\left(z^s\right), s\geq 0$ величины суммарного убытка, здесь символ $E(\bullet)$ означает математическое ожидание от величины, стоящей в скобках[5].

Учитывая, что $E\left(z^{X_{i,j}}(k)\right)$, получим для *H(z)* выражение:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(p_i+q_i z^j\right)^{N_{i,j}} .$$

С другой стороны, выражение для *H(z)* может быть записано в виде:

$$H(z)=\sum_{s=0}^{S_{\max}} h(s)z^s .$$

Логарифм производящей функции имеет вид:

$$\ln(H(z))=\ln\left[\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(p_i+q_i z^j\right)^{N_{i,j}}\right]=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}N_{i,j}\ln\left(p_i+q_i z^j\right)$$

Дифференцируя, получим:

$$H'(z)=\frac{dH(z)}{dz}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\frac{(p_i+q_i z^j)^{N_{ij}}(p_i+q_i z^{j-1}N_{ij})}{(p_i+q_i z^j)}\right]=H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{jN_{i,j}q_i z^{j-1}}{\left(p_i+q_i z^j\right)}= .$$

$$=\sum_{s=1}^{S_{\max}} h(s)sz^{s-1}$$

Так как всегда $q_i z<1$, то справедливо разложение:

$$\frac{1}{\left(p_i+q_i z^j\right)}=\frac{1}{p_i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^k z^{j-k} .$$

Введем обозначение

$$A(j,k)= j(-1)^k\sum_{i=1}^{I}N_{i,j}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k+1} ,$$

с учетом которого выражение для $H'(z)$ примет вид:

$$H'(z) = H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} jN_{ij}q_i z^{j-1}\frac{1}{p_i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{j-k}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^k =$$

$$= H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} N_{ij}\sum_{k=0}^{\infty} j(-1)^k \frac{q_i}{p_i}\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^k z^{j-k}z^{j-1} = H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} N_{ij}\sum_{k=0}^{\infty} j(-1)^k\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k+1} z^{j(k+1)-1} =$$

$$= H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=0}^{\infty} N_{ij}\, j(-1)^k\left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{k+1} z^{j(k+1)-1} = H(z)\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=0}^{\infty} A(j,k)z^{j(k+1)-1} = \sum_{s=1}^{S_{\max}} h(s)sz^{s-1}$$

Учитывая представление рядом для *H(z)*, получим:

$$\sum_{s=1}^{S_{\max}} h(s)sz^{s-1} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{S_{\max}} A(j,k-1)h(m)z^{m+jk-1}$$

здесь мы изменили суммирование по *к,* начиная его с 1 вместо прежнего от нуля.

Введем новый индекс суммирования: *s=m+jk,* тогда *m=s-jk,* $m \le \left[\frac{s}{j}\right]$.

Приравнивая члены при одинаковых степенях *z,* получим:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{S_{\max}} A(j,k-1)h(m) = \sum_{s=1}^{S_{\max}} h(s)s$$

$$h(s) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\min(s,J)}\sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{j}\right]} A(j,k-1)h(s-kj),\ s = 1,2..S_{\max} \qquad (3)$$

где $\left[\frac{s}{j}\right]$ есть целая часть от деления S на *j*.

Рекурсия для *h(s)* вычисляется при начальном условии:

$$P_0 = h(0) = \prod_{i=1}^{I}(1-q_i)^{\sum_{j=1}^{J} N_{i,j}}\ .$$

Соответствующая кумулятивная функция распределения будет иметь вид:

$$R(s) = P(S \le s) = \sum_{k=0}^{s} h(k). \qquad (4)$$

Выражения (3), (4) есть основные выражения для расчета в этой модели рисков.

Модель коллективного риска

Рассмотрим модель коллективного риска для данной структуры портфеля контрактов, в которой количество поступающих убытков есть случайная величина распределенная по Пуассону.

Применение данной модели может быть последовательным. Например, можно ввести данную модель для каждой ячейки таблицы 1 и далее применять свертки по всем ячейкам.

Можно ввести модель коллективного риска для каждой строки и применять далее свертки и, конечно, можно применять сложное пуассоновское распределение для всей таблицы.

Введем параметр λ ля пуассоновского числа наступления событий (убытков) *К* по данному портфелю контрактов. Таким образом, *К* – есть случайная величина, принимающая значения 0,1,2 и так далее, с вероятностями $P(K = k) = \pi_k = [\lambda^k / k!]\exp(-\lambda)$.

Параметр λ может быть определен выражением:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{I} q_i N_{i,+} = \sum_{i=1}^{I} q_i \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}$$

При наступлении убытка У его значение равно 1,2,..*J* с вероятностями:

$$P(Y = j) = r_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{I} q_i N_{i,j} = \left[\sum_{i=1}^{I} q_i N_{i,j} \right] / \left[\sum_{i=1}^{I} q_i \sum_{j=1}^{J} N_{i,j} \right]$$

(здесь У есть величина убытка, нормированная на *В)*.

Таким образом, случайная величина S – суммарный размер убытков в целом по портфелю – будет иметь вид:

$$S = \sum_{\nu=1}^{K} Y_{\nu}$$

Как всегда, справедливо соглашение о сумме:

$$\sum_{\nu=1}^{K} Y_{\nu} = 0$$

Производящая функция распределения (моментов) случайной величины S будет даваться выражением:

$$G(t) = E\left[t^{s}\right] = E\left[t^{\sum_{\nu=1}^{K} Y\nu}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k) E\left[t^{\sum_{\nu=1}^{k} Y\nu}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \left[E\left(t^{Y_\nu}\right)\right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \left[g(t)\right]^k = \exp\left[\lambda\left(g(t)-1\right)\right],$$

здесь $g(t) = E(t^{Y\nu}) = \sum_{j=1}^{J} P(Y=j) t^{j} = \sum_{j=1}^{J} r_j t^{j}$ - производящая функция распределения случайной величины У. Дифференцируя *G(t)* по *t*, получим: $G'(t) = \lambda g'(t) G(t)$.

В данной модели S принимает значения 0,1,2.. и до бесконечности, хотя фактически справедливо ограничение до

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} j N_{i,j}$$

и, следовательно, справедливо представление:

$$G(t) = \sum_{s=0}^{\infty} P(S=s) t^{s} = \sum_{s=0}^{\infty} f(s) t^{s} \ .$$

Таким образом, имеем для определения $f(s) = P(S=s)$ следующее выражение:

$$G'(t) = \sum_{s=0}^{\infty} s f(s) t^{s-1} = \lambda \sum_{j=1}^{J} j r_j t^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) t^{k} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J} j r_j f(k) t^{k+j-1} = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min(J,s)} j r_j f(s-j) t^{s-1}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях *t*, получим рекурентное выражение:

$$\sum_{s=0}^{\infty} sf(s) = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\min(J,s)} jr_j f(s-j)$$

$$f(s) = \frac{\lambda}{s} \sum_{j=1}^{\min(J,s)} jr_j f(s-j) \qquad (5)$$

с начальным условием: $f(0) = P(S=0) = P(K=0) = \pi_0 = \exp(-\lambda)$.

Кумулятивная функция распределения будет иметь вид:

$$F(s) = P(S \le s) = \sum_{k=0}^{s} f(k) \qquad (6)$$

Выражения (5), (6) есть основные выражения в модели коллективного риска применительно к данным таблицы 1.

Численное исследование моделей коллективного и индивидуального рисков

Рассмотрим портфель рисков предпринимателя, состоящий из N контрактов, таковым в частности может быть и кредитный отдел банка – таблица 2, Рис.5 (Таблица 2 построена на основе информации, предоставленной Сбербанком РФ).

Таблица 2

Пример рискового портфеля

I/J	***j=1***	***j=3***	***j=5***	***j=7***	***j=10***	
q_1=0.01	$N_{1,1}=10$	$N_{1,3}=15$	$N_{1,5}=20$	$N_{1,7}=10$	$N_{1,10}=5$	$\sum_{j=1}^{10} N_{1,j} = 60$
q_2=0.03	$N_{2,1}=15$	$N_{2,3}=10$	$N_{2,5}=5$	$N_{2,7}=10$	$N_{2,10}=15$	$\sum_{j=1}^{10} N_{2,j} = 55$
q_3=0.05	$N_{3,1}=10$	$N_{3,3}=10$	$N_{3,5}=5$	$N_{3,7}=10$	$N_{3,10}=15$	$\sum_{j=1}^{10} N_{3,j} = 50$

q_4=0.07	*$N_{4,1}$=5*	*$N_{4,3}$=5*	*$N_{4,5}$=10*	*$N_{4,7}$=5*	*$N_{4,10}$=10*	$\sum_{j=1}^{10} N_{4,j} = 35$
q_5=0.1	*$N_{5,1}$=5*	*$N_{5,3}$=10*	*$N_{5,5}$=5*	*$N_{5,7}$=10*	*$N_{5,10}$=5*	$\sum_{j=1}^{10} N_{5,j} = 35$
	$\sum_{i=1}^{3} N_{i,1} = 45$	$\sum_{i=1}^{3} N_{i,3} = 50$	$\sum_{i=1}^{3} N_{i,5} = 45$	$\sum_{i=1}^{3} N_{i,7} = 45$	$\sum_{i=1}^{3} N_{i,10} = 50$	$N_{+,+} = 235$

Обозначения:

$$N_{i,+} = \sum_{j=1}^{J} N_{i,j}, N_{+,j} = \sum_{i=1}^{I} N_{i,j}, N_{+,+} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} N_{i,j} .$$

Согласно введенным обозначениям:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{I} q_i N_{i,+} = 0.01*60 + 0.03*55 + 0.05*50 + 0.07*35 + 0.1*35 = 10.7 ,$$

Максимальное значение суммарного убытка:

$$S_{\max} = \sum_{j=1}^{J} jN_{+,j} = 1235 ,$$

$$r_1 = 0.178, r_3 = 0.215, r_5 = 0.168, r_7 = 0.21, r_{10} = 0.229 ,$$

прочие r_j равны нулю.

Проведем сравнение среднего значения и дисперсии величины S в исходной модели и модели коллективного риска.

Исходная модель индивидуального риска:

$$E(s) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} jq_i N_{i,j} = 58.05, D(s) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} j^2 q_i p_i N_{i,j} = 395.5,$$

где мы учли, что: $E(X_{i,j}) = jq_i ; D(X_{i,j}) = j^2 q_i p_i$.

Модель коллективного риска:

$$E(s)=\sum_{s=1}^{\infty} sf(s)=\sum_{s=0}^{\infty}(1-F(s))=\lambda E(Y)=58.05,\ \text{при этом}\ E(Y)=\sum_{s=1}^{\infty} jr_j=5.425,\ .$$

Дисперсия в модели коллективного риска больше, чем в модели индивидуального, и в данном случае равна:

$$D(s)=\sum_{s=0}^{\infty}(s-E(s))^2 f(s)=\lambda E(Y^2)=422.85,\ \text{при этом}\ E(Y^2)=\sum_{j=1}^{J} j^2 r_j=39.52.$$

Для данных таблицы 2 на основе выражений (3), (5) проведены расчеты плотностей распределения суммарного размера убытков по портфелю и соответствующих кумулятивных функций распределения (4), (6). Результаты расчета приведены на Рис. 5.

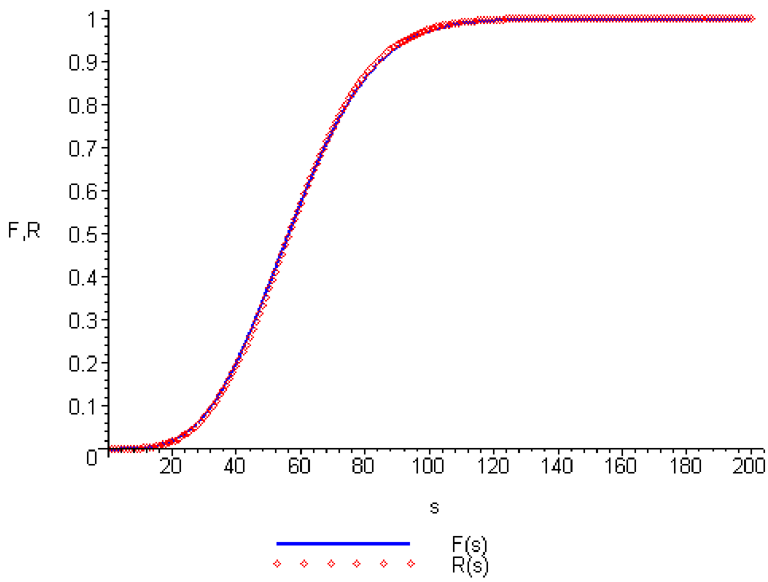


Рис. 5. Графики зависимости вероятности кумулятивной функции распределения убытков *F(s)* от суммарного размера убытков *S* и здесь же для сравнения график зависимости функции распределения *R(s)*

На основе найденных значений *F(s)* для суммарного размера убытков *S* и аналогичной функции *R(s)* можно вычислить по выражениям (1) и (2) стоимость портфеля рисков, передаваемого в перестрахование *W(d)* в зависимости от размера собственного удержания *d* (Рис.6).

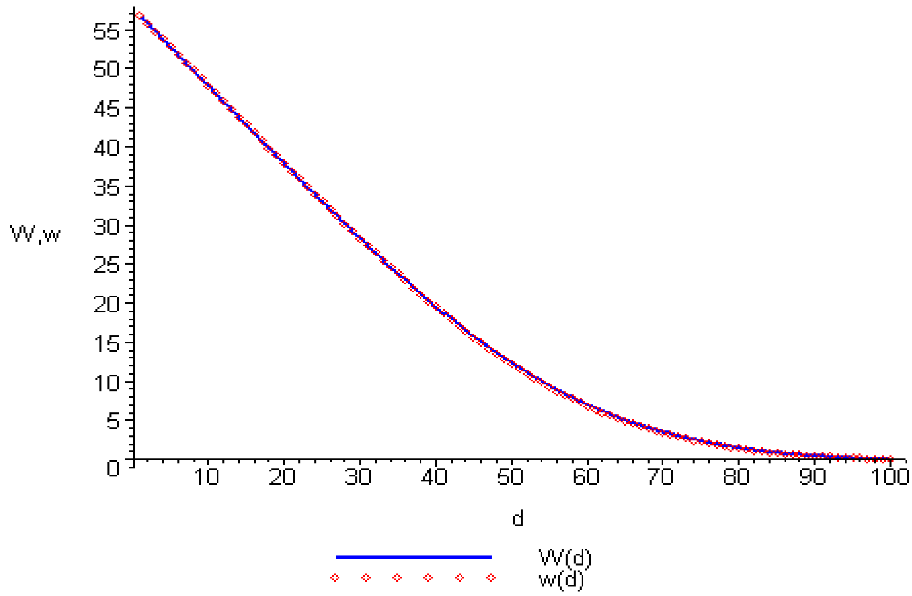


Рис. 6. График стоимости передаваемого портфеля рисков *W(d)* в зависимости от размера собственного удержания *d*.

Здесь:

$$W[d] = E[(S-d)_+] = \sum_{j=d}^{\infty}[1-F(j)] \text{ и } w[d] = E[(S-d)_+] = \sum_{j=d}^{\infty}[1-R(j)].$$

Можно отметить совпадение результатов полученных в моделях индивидуального и коллективного риска.

Задание на работу (рабочее задание):

1. На основе теоретического материала сформировать информационную таблицу портфеля договоров, передаваемого в перестрахование. Исходные данные придумать самим;

2. построить график зависимости вероятности кумулятивной функции распределения убытков от суммарного размера убытков S используя модель индивидуального риска;
3. построить график стоимости передаваемого портфеля рисков $W(d)$ в зависимости от размера собственного удержания d используя модель индивидуального риска.

Лабораторная работа №6.

Оценка стоимости договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели коллективного риска.

Цель и задачи работы: научиться оценивать стоимость договора перестрахования с оптимальной формой страхового покрытия с помощью модели коллективного риска.

Задание на работу: для задания лабораторной работы №5:

1. Построить график зависимости вероятности кумулятивной функции распределения убытков от суммарного размера убытков S используя модель коллективного риска;
2. график стоимости передаваемого портфеля рисков $W(d)$ в зависимости от размера собственного удержания d используя модель коллективного риска;
3. сравнить полученные в работах № 5,6 результаты. Сделать выводы.

Лабораторная работа № 7.

Оценка влияния механизма перестрахования

на вероятность разорения страховщика

Цель и задачи работы: познакомиться с сутью контрактов stop – loss и пропорционального перестрахования, и научиться рассчитывать рисковую характеристику (вероятность разорения) страховой компании для данных контракте.

Общие положения (теоретические сведения).

При появлении больших сумм к оплате исков (например, в результате масштабных бедствий), появлении большого числа исков (например, землетрясение, ураган или наводнение), внезапном изменении потока премий вследствие инфляции или оттока клиентов, желании привлечь новых клиентов и увеличить капитал возникает необходимость перестрахования рисков.

Пусть $N(t)$ - число исков на $[0,t]$, $\{U_1, U_2, ..., U_{N(t)}\}$, - последовательность предъявленных исков, $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$ - сумма выплат к моменту времени t. Страховая компания страхует риск, связанный с $X(t)$, заключая договор перестрахования с другой компанией. Характеристикой договора перестрахования служит величина $h(X)$, которую непосредственно выплачивает первичная компания своему страхователю, остаток $X - h(X)$ выплачивает вторичная компания. При этом, за договор перестрахования первичная компания платит вторичной премию. Величина $X - h(X)$, которую выплатит вторичная компания первичной в случае возникновения рисковой ситуации, естественно называть застрахованной частью. Таким образом, перестрахование – это процесс распределения риска между несколькими компаниями в целях уменьшения риска неплатежеспособности. Функция $h(X)$ называется функцией удержания и должна удовлетворять следующим условиям:

* $h(x)$ и $x - h(x)$ неубывающие функции;

* $0 \le h(x) \le x$, $h(0) = 0$.

Примерами функций удержания являются:

* $h(x) = ax$, $0 < a \le 1$ - соответствует контракту пропорционального перестрахования;

* $h(x)=\min\{a,x\},\ a>0$ - определяет stop – loss контракт (или контракт страхования превышения потерь).

Первичная страховая компания должна заплатить вторичной некоторую премию, поскольку передает ей часть своего риска. С точки зрения перестраховочной компании - это обычный контракт страхования риска, и поэтому она может назначить премию по правилу $\overset{\approx}{\Pi}=\Pi(X-h(X))$.

Рассмотрим контракт пропорционального перестрахования. Если индивидуальный иск составит X, то aX выплачивает первичная страховая компания, $(1-a)X$ - вторичная (перестраховочная). Если суммарный иск, предъявляемый к первичной компании, был $S=\sum_{i=1}^{N}X_i$, то теперь он уменьшился и стал $aS=a\sum_{i=1}^{N}X_i$. Пусть обе компании следуют принципу ожидаемого значения в сборе премий с коэффициентами нагрузки θ и θ^* соответственно. До заключения договора перестрахования капитал первичной компании был $u+(1+\theta)M\{S\}$, после заключения договора он уменьшился на величину премии $(1+\theta^*)(1-a)M\{S\}$ и стал равным $u+(\theta-\theta^*+a(1+\theta^*))M\{S\}$. Теперь сравним риск первичной страховой компании в случае заключения контракта перестрахования и в случае, если бы она его не заключила. Мерой риска считаем платежеспособность, т.е. вероятность неразорения.

В случае заключения контракта мера риска первичной компании есть

$$P\left(aS<u+(\theta-\theta^*+a(1+\theta^*))M\{S\}\right)=$$

$$=P\left(S<\frac{u+\left(\theta-\theta^*+a(1+\theta^*)\right)M\{S\}}{a}\right),$$

в случае отказа от перестрахования

$$P\left(S < u + (1+\theta)M\{S\}\right).$$

Компания стремится управлять своим риском так, чтобы вероятность неразорения (платежеспособность) была больше. В данном примере перестрахование позволяет уменьшить риск (уменьшить вероятность разорения), если $M\{S\}(\theta^* - \theta) < u$.

Теперь рассмотрим stop – loss контракт перестрахования, когда устанавливается некоторый предел удержания a. Если величина индивидуального иска X не превысит a, то он оплачивается в обычном порядке компанией, заключившей контракт. Если же величина иска превышает предел удержания, то первичная компания выплачивает только сумму a, а остаток $X - a$ выплачивает уже перестраховочная компания. Таким образом, при stop – loss контракте максимальные выплаты по единичному иску у первичной страховой компании не могут превышать заранее фиксированной уровень a.

Пусть первичная страховая компания перестраховала N однотипных договоров. Это значит, что иски $X_1, X_2, ..., X_N$ есть независимые одинаково распределенные случайные величины. Суммарный риск первичной компании изначально был $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, после перестрахования он стал $S^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} X_i^{(a)}$, где $X_i^{(a)} = \min\{X_i, a\}$, $i = 1,2,...,N$. Типичная последовательность размеров выплат для первичной компании

$$x_1, x_2, a, a, x_5, ...,$$

для вторичной, соответственно,

$$0,0, x_3 - a, x_4 - a, 0, ...,$$

т.е. процесс поступления исков отличается от N, поскольку вторичная компания информируется лишь о тех исках, размер выплат по которым превышает установленный барьер a. Тем не менее, для процесса риска вторичной компании можно записать $\sum_{i=1}^{N} Z_i$, где некоторые Z_i могу быть равными нулю.

При этом типе перестрахования уменьшился не только риск, но и капитал первичной компании, поскольку она заплатила премию перестраховщику. Пусть обе компании следуют принципу ожидаемого значения в сборе премий с коэффициентами нагрузки θ и θ^* соответственно. До заключения договора перестрахования капитал первичной компании был равен $Np = N(1+\theta)p_0 = N(1+\theta)M\{X\}$. Само заключение договора потребовало выплатить перестраховочной компании премию $N(1+\theta^*)(M\{X\} - M\{X^{(a)}\})$, поэтому после его заключения капитал превичной компании стал

$$N(1+\theta)M\{X\} - N(1+\theta^*)(M\{X\} - M\{X^{(a)}\}) =$$

$$= N(\theta-\theta^*)M\{X\} + N(1+\theta^*)M\{X^{(a)}\}.$$

Соответственно, вероятность разорения, которую считаем мерой риска, стала равной

$$P\left(S^{(a)} > N(\theta-\theta^*)M\{X\} + N(1+\theta^*)M\{X^{(a)}\}\right).$$

Вычислить ее явно довольно трудно, и поэтому для получения приближенного значения воспользуемся ЦПТ:

$$P\left(\frac{S^{(a)} - M\{S^{(a)}\}}{\sqrt{D\{S^{(a)}\}}} > \frac{N(\theta-\theta^*)M\{X\} + N\theta^* M\{X^{(a)}\}}{\sqrt{ND\{X^{(a)}\}}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\sqrt{N}\,\frac{(\theta-\theta^*)M\{X\} + \theta^* M\{X^{(a)}\}}{\sqrt{D\{X^{(a)}\}}}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция распределения стандартного нормального закона.

Задание на работу:

1.Страховая компания, имея начальный капитал u, подписывает N однотипных полисов со средним $M\{X\}$ по одному полису и стандартным отклонением $\sqrt{D\{X\}}$. При начислении премий используется принцип ожидаемого значения с коэффициентом нагрузки θ. У данной компании есть возможность заключить контракт пропорционального перестрахования с коэффициентом пропорциональности a. При этом перестраховочная компания начисляет премию из принципа ожидаемого значения с коэффициентом θ^*. Оценить ожидаемую прибыль и вероятность разорения первичной компании до и после заключения контракта перестрахования.

2. Портфель компании состоит из N тысяч договоров страхования жизни сроком на 1 год. В соответствии с условиями договора компания выплачивает определенную сумму в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года. Все застрахованные имеют одну и ту же вероятность смерти в течение года, равную q. Из N тысяч застрахованных N_1 тысяч человек заключили договор на сумму S_1 тысяч руб. каждый, N_2 тысяч человек – на сумму S_2 тысяч руб. каждый, N_3 тысяч человек – на сумму S_3 тыс. руб. каждый. Относительная страховая надбавка установлена компанией в размере θ%.

Компания заключила договор перестрахования чрезмерных потерь при пределе удержания a тыс. руб. Перестраховочная компания установила свой тариф на основе той же статистики смертности, что и передающая компания, но с относительной страховой надбавкой θ^*%.

Имея ввиду, что суммарные потери распределены приближенно нормально, определите, как изменится ожидаемый доход и вероятность разорения передающей компании.

Числовые значения для величин придумать самим.