МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)

«Дополнительные главы вычислительной математики»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Искусственный интеллект в кибербезопасности

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-02-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Толоконников Л.А., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1
Метод сплайн-коллокации

Лабораторная работа № 2
Решение плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений

Лабораторная работа № 3
Решение линейных интегральных уравнений первого рода

Лабораторная работа № 4
Метод конечных элементов решения краевых задач для двумерного однородно-эллиптического уравнения в прямоугольной области

Лабораторная работа № 1

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Идея метода коллокации заключается в требовании, чтобы в некоторых точках области, где ищется решение задачи, приближенное решение задачи совпадало с точным. Точки, в которых невязка уравнений равна нулю, называются точками коллокации.

Традиционно метод коллокации строился на основе аппарата приближения многочленами. Однако в силу сложности реализации, а также не вполне удовлетворительных аппроксимационных свойств многочленов этот метод не нашел широкого практического применения.

Метод сплайн-коллокации, в отличие от классического метода, основывается на аппроксимации решения сплайнами. При этом приближенное решение находится в виде сплайна во всей области определения решения задачи, а не в некоторой системе узлов, что позволяет получить гораздо более полную информацию о точном решении.

Метод сплайн-коллокации оказывается наиболее эффективным при использовании аппарата кубических сплайнов дефекта 1. Причем с вычислительной точки зрения удобнее всего использовать представление кубических сплайнов в виде B-сплайнов.

Согласно методу сплайн-коллокации в области определения решения вводится сетка с N+1 узлами, а приближенное решение задачи ищется в виде кубического сплайна с узлами на этой сетке. Требуется, чтобы сплайн, аппроксимирующий решение, удовлетворял дифференциальным уравнениям и краевым условиям в выбранных точках коллокации, которые не обязательно совпадают с узлами сетки. Количество точек коллокации определяется размерностью пространства сплайнов класса C^2, которая равна N+3. Если в краевых условиях имеем две граничные точки, то количество узлов коллокации должно быть равно N+1. В результате для определения коэффициентов сплайна получаем систему уравнений. В случае линейной краевой задачи приходим к системе линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим метод сплайн-коллокации на примере решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$L[u] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x);$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1;$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

Для решения краевой задачи методом сплайн-коллокации введем на отрезке $[a,b]$ сетку Δ: $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b.$

Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде кубического сплайна дефекта 1 $S(x)$ класса C^2 с узлами на сетке Δ.

Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял дифференциальному уравнению и краевым условиям в точках коллокации $\xi_k \in [a,b]$, $k = 0,1,...,N$. В качестве точек коллокации выберем точки, совпадающие с узлами сетки x_k.

Получаем

$$L[S(x_k)] = S''(x_k) + p(x_k)S'(x_k) + q(x_k)S(x_k) = r(x_k),$$

$$k = 0,1,...N;$$

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1;$$

$$\alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2.$$

Подставляя в последние уравнения выражение для сплайна, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров сплайна.

2. ЗАДАНИЕ

Методом сплайн-коллокации решить следующую краевую задачу:

$$ku'' - (2+N)xu' - ku = \frac{N}{k}x^2,$$

$$u(0) - u'(0) = 0; \;\; u(1) = 1.$$

Здесь k - шестой индекс группы; N - номер фамилии студента в журнале.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. 352 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.

Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений.

$$Ax = b, \qquad (1)$$

где A—квадратная матрица размерностью $n \times n$; b—вектор свободных членов; x—искомый вектор $(b \in R^n; x \in R^n)$.

Если $\det A \approx 0$, то система (1) называется плохо обусловленной. В этом случае погрешности коэффициентов матрицы и правых частей или погрешности округления при расчетах могут сильно исказить решение.

При решении многих задач правая часть системы (1) и коэффициенты матрицы A известны приближенно. При этом вместо точной системы (1) имеем некоторую другую систему

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \qquad (2)$$

такую, что

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| \le h; \quad \left\|\tilde{b} - b\right\| \le \delta \qquad (3)$$

Полагаем, что величины h и δ известны.

Так как вместо системы (1) имеем систему (2), то можем найти лишь приближенное решение системы (1). Метод построения приближенного решения системы (1) должен быть устойчивым к малым изменениям исходных данных.

Псевдорешением системы (1) называется вектор $\overline{x}$, минимизирующий невязку $\|Ax - b\|$ на всем пространстве R^n.

Пусть x^1 –некоторый фиксированный вектор из R^n, определяемый обычно постановкой задачи.

Нормальным относительно вектора x^1 решением системы (1) называется псевдорешение x^0 с минимальной нормой $\left\|x - x^1\right\|$, то есть

$$\left\|x^0 - x^1\right\| = \inf_{x \in F} \left\|x - x^1\right\|,$$

где F—совокупность всех псевдорешений системы (1).

Причем $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$—компоненты вектора x.

Для любой системы вида (1) нормальное решение существует и единственно. Задача нахождения нормального решения плохо обусловленной системы (1) является некорректно поставленной.

Для нахождения приближенного нормального решения системы (1) воспользуемся методом регуляризации.

Согласно указанному методу построим сглаживающий функционал вида

$$M^{\alpha}\left[x,\tilde{b},\tilde{A}\right]=\left\|\tilde{A}x-\tilde{b}\right\|^{2}+\alpha\left\|x-x^{1}\right\| \qquad (4)$$

и найдем вектор x^{α}, минимизирующий на R^{n} этот функционал. Причем параметр регуляризации α однозначно определен из условия

$$\left\|\tilde{A}x^{\alpha}-\tilde{b}\right\|=2\left(h\left\|x^{\alpha}\right\|+\delta\right)+\tilde{\mu}, \qquad (5)$$

где $\tilde{\mu}=\inf\limits_{x\in R^{n}}\left\|\tilde{A}x-\tilde{b}\right\|$.

Вырожденные и плохо обусловленные системы могут быть неразличимы в рамках заданной точности. Но если имеется информация о разрешимости системы (1), то вместо условия (5) следует использовать следующее условие:

$$\left\|\tilde{A}x^{\alpha}-\tilde{b}\right\|=h\left\|x^{\alpha}\right\|+\delta \qquad (6)$$

Компоненты $x_{j}^{\alpha}\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ вектора x^{α} являются решениями системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из условия минимума функционала (4)

$$\frac{\partial M^{\alpha}}{\partial x_{j}^{\alpha}}=0,\ \ j=0,1,2,\ldots,n$$

и имеет вид

$$\left(\tilde{A}^{H}\tilde{A}+\alpha E\right)x^{\alpha}=\tilde{A}^{H}\tilde{b}+\alpha x^{1}, \qquad (7)$$

где E—единичная матрица,

$\tilde{A}^{H}$—эрмитово сопряженная матрица.

На практики для выбора вектора x^{1} нужны дополнительные соображения. Если их нет, то полагают $x^{1}=0$.

Для $x^{1}=0$ систему (7) запишем в виде

$$\alpha x_{i}^{\alpha}+\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_{j}^{1}=\bar{b}_{i},\ \ i=1,2,\ldots,n, \qquad (8)$$

где $\bar{a}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$; $\bar{b}_{i}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{k}$.

Найденный вектор x^{α} будет являться приближенным нормальным решением системы (1).

Остановимся на выборе параметра α. Если α=0, то система (7) переходит в плохо обусловленную систему. Если α велико, то система (7) будет хорошо

обусловлена, но регуляризованное решение не будет близким к искомому решению системы (1). Поэтому слишком большое или слишком малое α не пригодны.

Обычно на практике проводят расчеты с рядом значений параметра α. Например, $\alpha = 10^{-1};\ 0{,}5\cdot 10^{-1};\ 0{,}5\cdot 10^{-2};\ 10^{-3}\ldots$

Для каждого значения α находят элемент x^{α}, минимизирующий функционал (4). В качестве искомого значения параметра регуляризации берется такое число α, для которого с требуемой точностью выполняется равенство (5) или (6).

2. ЗАДАНИЕ

1. Построить систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными, с определителем, величина которого имеет порядок 10^{-6}.
2. Построить вторую систему, аналогичную первой, но имеющую другие свободные члены, отличающиеся от свободных членов первой системы на величину 0,00006.
3. Решить построенные системы методом регуляризации (полагая h=0 и $\delta=10^{-4}$) и каким-либо другим методом (например методом Гаусса).
4. Сравнить полученные результаты и сделать выводы о применимости использованных методов.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. 286 с.

2. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В., Степанов В.В. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983. 200 с.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задачи для интегральных уравнений первого рода являются некорректно поставленными.

Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \qquad c \le x \le d, \tag{1}$$

где ядро $K(x,s)$ является непрерывной функцией по переменным x,s; $u(x)$ - известная функция; $z(s)$ - искомая функция.

Будем полагать, что уравнение (1) с точной правой частью $u(x)$ имеет единственное решение.

Если вместо $u(x)$ известно лишь ее приближение $u_\delta(x)$, мало отличающееся (в метрике L_2) от $u(x)$, то можем искать лишь приближенное решение уравнения (1). В качестве приближенного решения уравнения (1) нельзя брать точное решение уравнения

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u_\delta(x). \tag{2}$$

так как такого решения может не существовать. Кроме того, такое решение не обладает свойством устойчивости к малым изменениям правой части уравнения.

Будем искать решение уравнения (2) методом регуляризации. Согласно методу построим сглаживающий функционал $M^\alpha[z,u_\delta]$, выбрав стабилизатор первого порядка $\Omega[z]$:

$$M^\alpha[z,u_\delta] = \rho^2_{L_2}(Az,u_\delta) = \alpha\Omega[z], \tag{3}$$

где α - параметр регуляризации;

$$\Omega[z] = \int_a^b [q(s)z^2(s) + p(s)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2]ds;$$

$$Az = \int_a^b K(x,s)z(s)ds;$$

$$\rho_{L_2}(Az,u_\delta) = \left\{\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)z(s)ds - u_\delta(x)\right]^2 dx\right\}^{1/2};$$

$q(s), p(s)$ - заданные неотрицательные непрерывные функции (если нет специальных соображений по выбору функций $q(s), p(s)$, то обычно полагают

$q(s) = p(s) \equiv 1$). Затем найдем функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3), причем параметр α определим по невязке, т.е. из условия

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) = \delta, \tag{4}$$

где δ - уклонение правой части интегрального уравнения в метрике пространства L_2, которое считаем известным:

$$\left\{ \int_c^d [u_\delta(x) - u(x)] dx \right\}^{1/2} \le \delta$$

Решение $z_\alpha(s)$ будет устойчиво к малым изменениям в метрике L_2 правой части уравнения $u_\delta(x)$.

Функция $z_\alpha(s)$ будет являться приближенным решением уравнения (1).

Для нахождения параметра регуляризации будем проводить расчеты с несколькими значениями параметра α

(например, $\alpha = 10^{-1}; 0{,}5 \cdot 10^{-1}; 10^{-2}; 0{,}5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}, ...$).

Для каждого значения α находим функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3).

В качестве искомого значения параметра регуляризации возьмем такое число α, для которого с требуемой точностью выполняется условие (4), т.е. невязка, полученная при подстановке найденной функции $z_\alpha(s)$ в уравнение (2), должна быть сравнима с погрешностью правой части интегрального уравнения.

Обратимся теперь к вариационной задаче

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \min .$$

Полагая $q(s) = p(s) \equiv 1$, получим

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b [z^2(s) + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2] ds = \min . \tag{5}$$

Проведем дискретизацию сглаживающего функционала, воспользовавшись разностным методом.

Аппроксимируем входящие в функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$ интегралы квадратурными формулами. Введем на прямоугольнике $\{a \le s \le b, c \le x \le d\}$ сетку $\{x_n, s_m\}$ $(n = 0,1,..., N; m = 0,1,..., M)$, так, что $x_0 = c, x_N = d, s_0 = a, s_M = b$.

Для простоты рассмотрим равномерную сетку $x_n = c + nh_x; s_m = a + mh_s$

где

$$h_x = \frac{d-c}{N}; h_s = \frac{b-a}{M}.$$

Вычислим $\int_a^b \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds$ по формуле средних, заменяя производную разностным отношением

$$\int_{s_m}^{s_{m+1}} \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \approx h_s \left(\frac{dz}{ds}\right)_{m+1/2} \approx h_s \left(\frac{z_{m+1} - z_m}{h_s}\right)^2,$$

где $z_m = z(s_m)$.

Таким образом,

$$\int_a^b \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 ds \approx \frac{1}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (z_{m+1} - z_m)^2 . \qquad (6)$$

Остальные интегралы вычислим по формуле трапеций

$$\int_a^b z^2(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m z_m^2, \qquad (7)$$

где

$$c_0 = c_M = \frac{1}{2}; c_1 = c_2 = ... = c_{M-1} = 1.$$

$$\int_a^b K(x_n, s) z(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} z_m,$$

где

$$K_{nm} = K(x_n, s_m).$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s) z(s) ds - u_\delta(x)\right]^2 dx \approx h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} z_m - u_\delta(x_n)\right]^2, \qquad (8)$$

где

$$b_0 = b_N = \frac{1}{2}; b_1 = b_2 = ... = b_{N-1} = 1.$$

Подставляя выражения (6) - (8) в (5), получим

$$h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} z_m - u_\delta(x_n)\right]^2 + \alpha h_s \sum_{m=0}^{M} c_m z_m^2 + \frac{\alpha}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (z_{m+1} - z_m)^2 = \min . \qquad (9)$$

Для решения задачи (9) приравняем к нулю производные от левой части (9) по z_m $(m = 0,1,...,M)$. Получим систему уравнений, линейных относительно z_m:

$$\alpha z_m - \frac{\alpha}{c_m} T(z_m^\alpha) + h_s \sum_{k=1}^{M} c_k Q_{mk} z_k^\alpha = \Phi_m, m = 0,1,...,M, \qquad (10)$$

где

$$T(z_m^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(z_{m-1}^\alpha - 2z_m^\alpha + z_{m+1}^\alpha), m = 1,2,...,M-1;$$

$$T(z_0^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(z_1^\alpha - z_0^\alpha);$$

$$T(z_M^\alpha) = \frac{1}{h_s^2}(z_{M-1}^\alpha - z_M^\alpha);$$

$$Q_{mk} = h_x \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} K_{nk};$$

$$\Phi_m = h_x \sum_{n=0}^{N} b_n K_{nm} u_\delta(x_n).$$

Систему (10) решим каким-либо методом, например, методом Гаусса.

Параметр α следует подобрать способом, указанным выше. Заметим, что условие (4) в результате дискретизации запишем в виде:

$$\left\{ h_x \sum_{n=0}^{N} b_n \left[h_s \sum_{m=0}^{M} c_m K_{nm} z_m^\alpha - u_\delta(x_n) \right]^2 \right\}^{1/2} = \delta.$$

2. ЗАДАНИЕ

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 (k+s)(e^{\frac{xs}{N}} + N) z(s) ds = x^2, 0 \le x \le 1,$$

полагая $\delta = 0{,}001$.

Здесь N – номер студента в списке группы, K – шестой индекс группы.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. 286 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.

3. Самарский А. А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. - М.: УРСС, 2004. 480 с.

Лабораторная работа №4

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОДНОРОДНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков решения краевых задач для однородно-эллиптического дифференциального уравнения в частных производных второго порядка в прямоугольной области с помощью метода конечных элементов.

II. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Получить приближенное решение однородно-эллиптического уравнения:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{22}(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)+c(x,y)u(x,y)=f(x,y)$$

на прямоугольной области $\Omega=(0,a)\times(0,b)$ при смешанных однородных граничных условиях с помощью метода конечных элементов.

При этом на разных отрезках границы $\Gamma=\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4\}$ заданы свои граничные условия.

III. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№	$a_{11}(x,y)$	$a_{22}(x,y)$	$c(x,y)$	$f(x,y)$	a	b	Вид граничных условий
1	$1+x$	$1+y$	1	$2x$	1	2	$u\big\|_{\Gamma}=0$
2	$1+y$	$1+x$	1	$2y$	1	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big\|_{\Gamma_1}=0,\quad u\big\|_{\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4}=0$
3	1	1	$x+y$	$1+x$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big\|_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0,\quad u\big\|_{\Gamma_3,\Gamma_4}=0$
4	$1+x+y$	1	0	x^2+1	1	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big\|_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3}=0,\quad u\big\|_{\Gamma_4}=0$

5	1	$1+x+y$	0	$xy+1$	1	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_3}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_4}=0$
6	$1+xy$	1	x	$y-1$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_3}=0$
7	$2-\frac{x}{a}$	1	y	$x+y$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_3}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_4}=0$
№	$a_{11}(x,y)$	$a_{22}(x,y)$	$c(x,y)$	$f(x,y)$	a	b	Вид граничных условий
8	$2-\frac{y}{b}$	1	$x+y$	$2x-1$	1	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_3}=0$
9	1	$1+xy$	0	$x+2y$	2	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_3,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0$
10	$1+x+y$	$1+x$	1	$2x+x^2$	2	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_3}=0$
11	1	$2-\frac{y}{b}$	$2x$	$y-x$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1}=0$
12	$1+x$	$1+x+y$	$x+1$	$x-2y$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_3}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_4}=0$
13	1	$2-\frac{x}{a}$	xy	y^2+1	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_3,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0$
14	$2-\frac{x}{a}$	$1+y$	$y+1$	x^2-y	1	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3}=0$
15	$1+y$	$1+x+y$	$2y$	$xy+1$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_3,\Gamma_4}=0$
16	$1+y$	$2-\frac{y}{b}$	x	$x-y$	1	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1}=0$
17	$1+x+y$	$1+y$	0	$x+y^2$	2	1	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_1}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4}=0$
18	$1+xy$	$1+x$	1	$xy+1$	2	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_4}=0$
19	1	$1+x$	1	$x+2y$	2	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_2,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_3}=0$
20	$1+x+y$	$1+xy$	0	$2x+x^2$	2	2	$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\vert_{\Gamma_3,\Gamma_4}=0,\quad u\Big\vert_{\Gamma_1,\Gamma_2}=0$

IV. ВЫПОЛНЕНИЕ

1. Представить решение полученной краевой задачи в виде линейной комбинации кусочно-линейным базисных функций.
2. Составить квадратичный функционал, соответствующий данной задаче.
3. Составить систему линейных алгебраических уравнений.
4. Решить полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда.
5. Подставить полученные коэффициенты в ряд и получить приближенное решение задачи.
6. Результаты расчетов представить в виде графиков и таблиц.

V. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановку задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы на заданном варианте и на контрольном примере.

VI. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Найдем решение уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=f, \qquad (1)$$

на прямоугольнике Ω со сторонами a,b параллельными осям x_1,x_2, и с нулевым граничным условием

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \qquad (2)$$

Здесь $f(x) \in L_2(\Omega)$, коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$, кроме того $a_{ij}(x_1, x_2) = a_{ji}(x_1, x_2)$, функция $c(x_1, x_2)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и $c(x_1, x_2) \geq 0$.

Как известно, однородная эллиптичность уравнения (1) в $\overline{\Omega}$ означает, что существует постоянная $p > 0$, такая что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\alpha_i\alpha_j \geq p\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)$$

справедливо для любого вещественного вектора (α_1, α_1) и любой точки $(x_1 + x_2) \in \overline{\Omega}$.

Например, уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f,\ f \in L_2(\Omega)$$

обладает этими свойствами. Для этого уравнения

$$a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) = 1,$$
$$a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) = 0, \quad c(x_1, x_2)$$

и, следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\alpha_i\alpha_j \geq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 .$$

Как мы знаем, эта задача при заданных предположениях сводится к задаче нахождения функции $u(x_1, x_2)$, минимизирующей функционал

$$Fu = \iint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega} cu^2 dx_1 dx_2 - 2\iint_{\Omega} fu dx_1 dx_2 . \qquad (3)$$

в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций, равных нулю на Г.

Выберем в этом пространстве некоторый базис

$$\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \ldots,$$

Далее выберем фиксированное n и решим соответствующую задачу методом Ритца, т.е. минимизируем функционал (3) на подпространстве конечной размерности n функций вида

$$v_n(x_1, x_2) = b_1^{(n)}\varphi_1(x_1, x_2) + \ldots + b_n^{(n)}\varphi_n(x_1, x_2)$$

Обозначая минимизирующую функцию через

$$u_n(x_1,x_2)=a_1^{(n)}\varphi_1(x_1,x_2)+\ldots+a_n^{(n)}\varphi_n(x_1,x_2)$$

мы получим для неизвестных постоянных $a_1^{(n)},\ldots,a_n^{(n)}$ систему Ритца

$$(\varphi_1,\varphi_1)a_1^{(n)}+(\varphi_1,\varphi_2)a_2^{(n)}+\ldots+(\varphi_1,\varphi_n)a_n^{(n)}=(f,\varphi_1)$$
$$(\varphi_2,\varphi_1)a_1^{(n)}+(\varphi_2,\varphi_2)a_2^{(n)}+\ldots+(\varphi_2,\varphi_n)a_n^{(n)}=(f,\varphi_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\varphi_n,\varphi_1)a_1^{(n)}+(\varphi_n,\varphi_2)a_2^{(n)}+\ldots+(\varphi_n,\varphi_n)a_n^{(n)}=(f,\varphi_n)$$

где

$$(f,\varphi_r)=\iint_\Omega f\varphi_r dx_1dx_2,\quad r=1,\ldots,n$$

$$(\varphi_s,\varphi_t)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_j}dx_1dx_2+\iint_\Omega c\varphi_s\varphi_t dx_1dx_2$$
$$s=1,\ldots,n\quad t=1,\ldots,n.$$

В частности, в случае уравнения Пуассона справедливо равенство

$$(\varphi_s,\varphi_t)=\iint_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2,$$

Теперь выберем функции

$$\varphi_1(x_1,x_2),\ \varphi_2(x_1,x_2),\ldots,\varphi_n(x_1,x_2). \tag{4}$$

составляющие базис, следующим специальным образом.

Покроем прямоугольник Ω прямоугольной сеткой с шагами h_1, и h_2, вдоль осей x_1 и x_2 соответственно.

Разделим каждый из полученных прямоугольников диагональю на два треугольника и получим, таким образом, сетку из треугольников. Теперь пронумеруем внутренние узловые точки (внутренние узлы) этой сетки; пусть их число равно n (эти точки обозначены числами от 1 до 12 на рис. 1). Далее, пронумеруем узловые точки, лежащие на границе прямоугольника Ω (так называемые граничные узлы сетки); пусть их число равно m (эти точки обозначены числами от 13 до 30 на рис. 1).

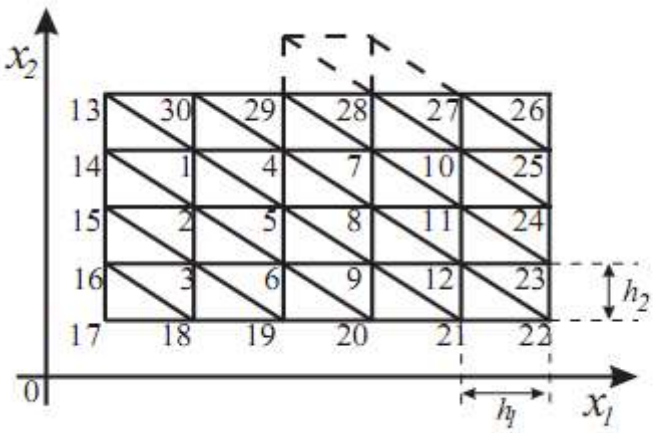

Рис. 1. Сетка

Рассмотрим произвольный внутренний узел сетки, пусть это будет узел с номером r, в примере на рис. 1 это узел 5. Построим пирамиду J_r с высотой, равной единице, и основанием (обозначенным через Q_r) в виде шестиугольника, составленного из шести треугольников, имеющих общую вершину в узле r. На рис. 1 отмечено основание Q_5 пирамиды J_5. Вершины этого основания- узлы 1, 2, 6, 9, 8, 4.

Если мы обозначим через z третью координату декартовой системы $(0; x_1, x_2, z)$ и если x_1^0, x_2^0 – координаты рассматриваемого узла r, то легко получим уравнения граней соответствующей пирамиды:

$$
\begin{aligned}
z &= 1 + \frac{x_1 - x_1^0}{h_1}, \\
z &= 1 + \frac{x_1 - x_1^0}{h_1} + \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
Z &= 1 \qquad\qquad + \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
z &= 1 - \frac{x_1 - x_1^0}{h_1}, \\
z &= 1 - \frac{x_1 - x_1^0}{h_1} - \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
Z &= 1 \qquad\qquad - \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Эти уравнения выписаны соответственно для треугольников $T_{r,1},...,T_{r,6}$ (составляющих основание Q_r), с которыми смежны грани пирамиды. Это видно из рис. 2, где отмечены треугольники $T_{r,1},...,T_{r,6}$ с вершинами $1,2,5,...,4,1,5$.

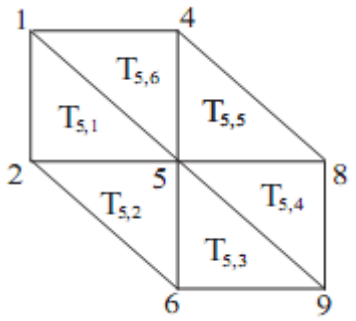

Рис. 2. Основание Q_5

Определим функцию $\varphi_r(x_1,x_2)$ (т. е. в нашем случае функцию $\varphi_5(x_1,x_2)$) в $\overline{\Omega}$ таким образом, что для точек, принадлежащих Q_r, она определяется соотношениями (5), в то время как во всех остальных точках прямоугольника $\overline{\Omega}$ она полагается равной нулю.

Следовательно, поверхность $z=\varphi_r(x_1,x_2)$ лежит на плоскости x_1,x_2, исключая шестиугольник Q_r, над которым она имеет вид шестигранной пирамиды единичной высоты.

Каждая из функций $\varphi_r(x_1,x_2), r=l,...,n$ (в нашем случае $r=l,...,12$), непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет в $\overline{\Omega}$ кусочно-непрерывные (даже кусочно-постоянные) частные производные первого порядка.

Из построения базисных функций следует, что базисные функции линейно независимы.

Далее, из определения функций следует, что на внутреннем узле r функция $v_n(x_1,x_2)$ принимает значения $b_r^{(n)}$.

В частности, для функции $u_n(x_1,x_2)$, коэффициенты которой заданы системой Ритца, справедливо равенств для любого внутреннего узла r.

Функции $v_n(x_1,x_2)$ и $u_n(x_1,x_2)$ принадлежат к так называемым *сплайн-функциям*. В литературе это название обычно используется для функций, непрерывных и кусочно-полиномиальных в $\overline{\Omega}$(например, кусочно-линейных, как в нашем примере). Функции $\varphi_r(x_1,x_2)$ построенные выше, будут называться *элементарными сплайн-функциями*.

Эти функции не равны нулю только на шести элементах выбранной сетки из треугольников, т.е. только на малой части прямоугольника $\overline{\Omega}$ (при условии, что эта сеть достаточно мелкая).

Рассмотрим подробнее обсуждавшийся выше случай (см. рис. 2) и исследуем для него более тщательно систему Ритца. В качестве иллюстрации составим пятое уравнение (из двенадцати уравнений) этой системы для случая уравнения Пуассона при $h_1 = h_2 = h$.

Вычислим прежде всего произведения

$$(\varphi_s,\varphi_t) = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2,$$

Вследствие (5) для функций $\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}$ мы получим постоянные значения в рассматриваемых треугольниках $T_{r,1},...,T_{r,6}$ а именно, по порядку

$$\begin{matrix} \frac{1}{h}, & \frac{1}{h}, & 0, & -\frac{1}{h}, & -\frac{1}{h}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{h}, & \frac{1}{h}, & 0, & -\frac{1}{h}, & -\frac{1}{h}. \end{matrix} \qquad (6)$$

Поскольку все функции $\varphi_r(x_1,x_2)$ тождественно равны нулю в Q_5, за исключение функции $\varphi_5(x_1,x_2)$ и «соседних» с ней функций $\varphi_1(x_1,x_2),\varphi_2(x_1,x_2),\varphi_6(x_1,x_2),\varphi_9(x_1,x_2),\varphi_8(x_1,x_2),\varphi_4(x_1,x_2)$, производные которых по x_1 и x_2 также принимают значения (6) соответственно (конечно, в соответствующих треугольниках) то все произведения (φ_r,φ_5) равны нулю, за исключением тех, для которых r принимает одно из значений 5, 1, 2, 6, 9, 8, 4. Площади рассматриваемых треугольников равны $\frac{h^2}{2}$. Вследствие равенства

$$(\varphi_5,\varphi_5)=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2=$$

$$=\iint\limits_{T_{5,1}}\left[\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_1dx_2+\ldots+$$

$$+\iint\limits_{T_{5,6}}\left[\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)^2\right]dx_1dx_2.$$

и соотношений (6) следует, что

$$(\varphi_5,\varphi_5)=\frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{1}{h^2}+0^2\right)+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}\right)+\left(0^2+\frac{1}{h^2}\right)+\right]$$

$$+\left(\frac{1}{h^2}+0^2\right)+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}\right)+\left(0^2+\frac{1}{h^2}\right)=4.$$

Тем же способом вычислим

$$(\varphi_1,\varphi_5)=\iint\limits_{T_{5,6}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2=$$

$$=\iint\limits_{T_{5,1}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2=$$

$$=\frac{h^2}{2}\left[\left(-\frac{1}{h}\right)\cdot 0+0\cdot\left(-\frac{1}{h}\right)+0\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\cdot 0\right]=0.$$

Аналогично,

$$(\varphi_9,\varphi_5)=0,\quad (\varphi_2,\varphi_5)=(\varphi_6,\varphi_5)=(\varphi_8,\varphi_5)=(\varphi_4,\varphi_5)=-1,$$

Таким образом, пятое уравнение примет следующий вид:

$$-c_2^{(12)}+4c_5^{(12)}-c_6^{(12)}-c_8^{(12)}-c_4^{(12)}=\iint\limits_{Q_5}f\varphi_5dx_1dx_2.$$

Уравнение содержит только пять ненулевых коэффициентов для неизвестных $c_r^{(12)}$. Как видно из способа получения этого уравнения, другие уравнения этой системы также будут содержать не более пяти ненулевых коэффициентов для неизвестных $c_r^{(12)}$. В случае метода Ритца мы, вообще говоря, не встречаемся с таким явлением. Для метода конечных элементов это свойство матрицы системы является характерным.

Как уже отмечалось, функции $\varphi_1(x_1,x_2),\ldots,\varphi_1 2(x_1,x_2)$ линейно независимы в пространстве H_A. Таким образом, система линейных алгебраических

уравнений однозначно разрешима. Следовательно, мы получим приближение $u_{12}(x_1, x_2)$ искомого решения.

Можно показать, что при увеличении n мы приблизимся к обобщенному решению уравнения, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Трушин С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи.- М.: АСВ, 2008. 256 с.

2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.

4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы.- М.:Мир, 1984. 428с.

5. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. Основы метода конечных элементов.- Киев: Наук. думка, 1989. 272с.