

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой


_____ М.В. Грязев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)**

«Методы решения некорректно поставленных задач»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры**

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Искусственный интеллект в кибербезопасности

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-02-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Толоконников Л.А., профессор каф. ПМИИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1

Решение плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений

Лабораторная работа № 2

Решение линейных интегральных уравнений первого рода

Лабораторная работа № 3

Решение интегральных уравнений с использованием уравнения Эйлера для стабилизирующего функционала

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений.

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A —квадратная матрица размерностью $n \times n$; b —вектор свободных членов; x —искомый вектор ($b \in \mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$).

Если $\det A \approx 0$, то система (1) называется плохо обусловленной. В этом случае погрешности коэффициентов матрицы и правых частей или погрешности округления при расчетах могут сильно исказить решение.

При решении многих задач правая часть системы (1) и коэффициенты матрицы A известны приближенно. При этом вместо точной системы (1) имеем некоторую другую систему

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \quad (2)$$

такую, что

$$\|\tilde{A} - A\| \leq h; \quad \|\tilde{b} - b\| \leq \delta \quad (3)$$

Полагаем, что величины h и δ известны.

Так как вместо системы (1) имеем систему (2), то можем найти лишь приближенное решение системы (1). Метод построения приближенного решения системы (1) должен быть устойчивым к малым изменениям исходных данных.

Псевдорешением системы (1) называется вектор \bar{x} , минимизирующий невязку $\|Ax - b\|$ на всем пространстве \mathbb{R}^n .

Пусть x^1 —некоторый фиксированный вектор из \mathbb{R}^n , определяемый обычно постановкой задачи.

Нормальным относительно вектора x^1 решением системы (1) называется псевдорешение x^0 с минимальной нормой $\|x - x^1\|$, то есть

$$\|x^0 - x^1\| = \inf_{x \in F} \|x - x^1\|,$$

где F —совокупность всех псевдорешений системы (1).

Причем $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, где x_1, x_2, \dots, x_n —компоненты вектора x .

Для любой системы вида (1) нормальное решение существует и единственно. Задача нахождения нормального решения плохо обусловленной системы (1) является некорректно поставленной.

Для нахождения приближенного нормального решения системы (1) воспользуемся методом регуляризации.

Согласно указанному методу построим сглаживающий функционал вида

$$M^\alpha [x, \tilde{b}, \tilde{A}] = \|\tilde{A}x - \tilde{b}\|^2 + \alpha \|x - x^1\| \quad (4)$$

и найдем вектор x^α , минимизирующий на R^n этот функционал. Причем параметр регуляризации α однозначно определен из условия

$$\|\tilde{A}x^\alpha - \tilde{b}\| = 2(h\|x^\alpha\| + \delta) + \tilde{\mu}, \quad (5)$$

$$\text{где } \tilde{\mu} = \inf_{x \in R^n} \|\tilde{A}x - \tilde{b}\|.$$

Вырожденные и плохо обусловленные системы могут быть неразличимы в рамках заданной точности. Но если имеется информация о разрешимости системы (1), то вместо условия (5) следует использовать следующее условие:

$$\|\tilde{A}x^\alpha - \tilde{b}\| = h\|x^\alpha\| + \delta \quad (6)$$

Компоненты x_j^α ($j=1,2,\dots,n$) вектора x^α являются решениями системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из условия минимума функционала (4)

$$\frac{\partial M^\alpha}{\partial x_j^\alpha} = 0, \quad j=0,1,2,\dots,n$$

и имеет вид

$$(\tilde{A}^H \tilde{A} + \alpha E)x^\alpha = \tilde{A}^H \tilde{b} + \alpha x^1, \quad (7)$$

где E —единичная матрица,

\tilde{A}^H —эрмитово сопряженная матрица.

На практике для выбора вектора x^1 нужны дополнительные соображения. Если их нет, то полагают $x^1=0$.

Для $x^1=0$ систему (7) запишем в виде

$$\alpha x_i^\alpha + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j^1 = \bar{b}_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (8)$$

$$\text{где } \bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}; \quad \bar{b}_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_k.$$

Найденный вектор x^α будет являться приближенным нормальным решением системы (1).

Остановимся на выборе параметра α . Если $\alpha=0$, то система (7) переходит в плохо обусловленную систему. Если α велико, то система (7) будет хорошо

обусловлена, но регуляризованное решение не будет близким к искомому решению системы (1). Поэтому слишком большое или слишком малое α не пригодны.

Обычно на практике проводят расчеты с рядом значений параметра α . Например, $\alpha = 10^{-1}; 0,5 \cdot 10^{-1}; 0,5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3} \dots$

Для каждого значения α находят элемент x^α , минимизирующий функционал (4). В качестве искомого значения параметра регуляризации берется такое число α , для которого с требуемой точностью выполняется равенство (5) или (6).

2. ЗАДАНИЕ

1. Построить систему линейных алгебраических уравнений, состоящую из трех уравнений с тремя неизвестными, с определителем, величина которого имеет порядок 10^{-6} .
2. Построить вторую систему, аналогичную первой, но имеющую другие свободные члены, отличающиеся от свободных членов первой системы на величину 0,00006.
3. Решить построенные системы методом регуляризации (полагая $h=0$ и $\delta=10^{-4}$) и каким-либо другим методом (например методом Гаусса).
4. Сравнить полученные результаты и сделать выводы о применимости использованных методов.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. 286 с.
2. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В., Степанов В.В. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983. 200 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.

Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задачи для интегральных уравнений первого рода являются некорректно поставленными.

Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, s)z(s)ds = u(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (1)$$

где ядро $K(x, s)$ является непрерывной функцией по переменным x, s ; $u(x)$ - известная функция; $z(s)$ - искомая функция.

Будем полагать, что уравнение (1) с точной правой частью $u(x)$ имеет единственное решение.

Если вместо $u(x)$ известно лишь ее приближение $u_\delta(x)$, мало отличающееся (в метрике L_2) от $u(x)$, то можем искать лишь приближенное решение уравнения (1). В качестве приближенного решения уравнения (1) нельзя брать точное решение уравнения

$$\int_a^b K(x, s)z(s)ds = u_\delta(x). \quad (2)$$

так как такого решения может не существовать. Кроме того, такое решение не обладает свойством устойчивости к малым изменениям правой части уравнения.

Будем искать решение уравнения (2) методом регуляризации. Согласно методу построим сглаживающий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, выбрав стабилизатор первого порядка $\Omega[z]$:

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho_{L_2}^2(Az, u_\delta) = \alpha\Omega[z], \quad (3)$$

где α - параметр регуляризации;

$$\Omega[z] = \int_a^b [q(s)z^2(s) + p(s)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2] ds;$$

$$Az = \int_a^b K(x, s)z(s)ds;$$

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) = \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x, s)z(s)ds - u_\delta(x) \right]^2 dx \right\}^{1/2};$$

$q(s), p(s)$ - заданные неотрицательные непрерывные функции (если нет специальных соображений по выбору функций $q(s), p(s)$, то обычно полагают

$q(s) = p(s) \equiv 1$). Затем найдем функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3), причем параметр α определим по невязке, т.е. из условия

$$\rho_{L_2}(Az, u_\delta) = \delta, \quad (4)$$

где δ - уклонение правой части интегрального уравнения в метрике пространства L_2 , которое считаем известным:

$$\left\{ \int_c^d [u_\delta(x) - u(x)] dx \right\}^{1/2} \leq \delta$$

Решение $z_\alpha(s)$ будет устойчиво к малым изменениям в метрике L_2 правой части уравнения $u_\delta(x)$.

Функция $z_\alpha(s)$ будет являться приближенным решением уравнения (1).

Для нахождения параметра регуляризации будем проводить расчеты с несколькими значениями параметра α

$$(\text{например, } \alpha = 10^{-1}; 0,5 \cdot 10^{-1}; 10^{-2}; 0,5 \cdot 10^{-2}; 10^{-3}, \dots).$$

Для каждого значения α находим функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую функционал (3).

В качестве искомого значения параметра регуляризации возьмем такое число α , для которого с требуемой точностью выполняется условие (4), т.е. невязка, полученная при подстановке найденной функции $z_\alpha(s)$ в уравнение (2), должна быть сравнима с погрешностью правой части интегрального уравнения.

Обратимся теперь к вариационной задаче

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \min.$$

Полагая $q(s) = p(s) \equiv 1$, получим

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b \left[z^2(s) + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] ds = \min. \quad (5)$$

Проведем дискретизацию сглаживающего функционала, воспользовавшись разностным методом.

Аппроксимируем входящие в функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$ интегралы квадратурными формулами. Введем на прямоугольнике $\{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$ сетку $\{x_n, s_m\}$ ($n = 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M$), так, что $x_0 = c, x_N = d, s_0 = a, s_M = b$.

Для простоты рассмотрим равномерную сетку $x_n = c + nh_x; s_m = a + mh_s$

где

$$h_x = \frac{d-c}{N}; h_s = \frac{b-a}{M}.$$

Вычислим $\int_a^b \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds$ по формуле средних, заменяя производную разностным

отношением

$$\int_{s_m}^{s_{m+1}} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds \approx h_s \left(\frac{dz}{ds} \right)_{m+1/2} \approx h_s \left(\frac{z_{m+1} - z_m}{h_s} \right)^2,$$

где $z_m = z(s_m)$.

Таким образом,

$$\int_a^b \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds \approx \frac{1}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (z_{m+1} - z_m)^2. \quad (6)$$

Остальные интегралы вычислим по формуле трапеций

$$\int_a^b z^2(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^M c_m z_m^2, \quad (7)$$

где

$$c_0 = c_M = \frac{1}{2}; c_1 = c_2 = \dots = c_{M-1} = 1.$$

$$\int_a^b K(x_n, s) z(s) ds \approx h_s \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} z_m,$$

где

$$K_{nm} = K(x_n, s_m).$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right]^2 dx \approx h_x \sum_{n=0}^N b_n \left[h_s \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} z_m - u_\delta(x_n) \right]^2, \quad (8)$$

где

$$b_0 = b_N = \frac{1}{2}; b_1 = b_2 = \dots = b_{N-1} = 1.$$

Подставляя выражения (6) - (8) в (5), получим

$$h_x \sum_{n=0}^N b_n \left[h_s \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} z_m - u_\delta(x_n) \right]^2 + \alpha h_s \sum_{m=0}^M c_m z_m^2 + \frac{\alpha}{h_s} \sum_{m=0}^{M-1} (z_{m+1} - z_m)^2 = \min. \quad (9)$$

Для решения задачи (9) приравняем к нулю производные от левой части (9) по z_m ($m = 0, 1, \dots, M$). Получим систему уравнений, линейных относительно z_m :

$$\alpha z_m - \frac{\alpha}{c_m} T(z_m^\alpha) + h_s \sum_{k=1}^M c_k Q_{mk} z_k^\alpha = \Phi_m, m = 0, 1, \dots, M, \quad (10)$$

где

$$T(z_m^\alpha) = \frac{1}{h_s^2} (z_{m-1}^\alpha - 2z_m^\alpha + z_{m+1}^\alpha), m = 1, 2, \dots, M-1;$$

$$T(z_0^\alpha) = \frac{1}{h_s^2} (z_1^\alpha - z_0^\alpha);$$

$$T(z_M^\alpha) = \frac{1}{h_s^2} (z_{M-1}^\alpha - z_M^\alpha);$$

$$Q_{mk} = h_x \sum_{n=0}^N b_n K_{nm} K_{nk};$$

$$\Phi_m = h_x \sum_{n=0}^N b_n K_{nm} u_\delta(x_n).$$

Систему (10) решим каким-либо методом, например, методом Гаусса.

Параметр α следует подобрать способом, указанным выше. Заметим, что условие (4) в результате дискретизации запишем в виде:

$$\left\{ h_x \sum_{n=0}^N b_n \left[h_s \sum_{m=0}^M c_m K_{nm} z_m^\alpha - u_\delta(x_n) \right]^2 \right\}^{1/2} = \delta.$$

2. ЗАДАНИЕ

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 (k+s)(e^{\frac{xs}{N}} + N)z(s)ds = x^2, 0 \leq x \leq 1,$$

полагая $\delta = 0,001$.

Здесь N – номер студента в списке группы, K – шестой индекс группы.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. 286 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.
3. Самарский А. А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. - М.: УРСС, 2004. 480 с.

Лабораторная работа № 3

Решение интегральных уравнений с использованием уравнения Эйлера для стабилизирующего функционала

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1)$$

Часто вместо точной правой части $u(x)$ имеем лишь ее приближение $u_\delta(x)$, мало отличающееся в метрике пространства L_2 от $u(x)$. Причем известно, что

$$\left\{ \int_c^d [u_\delta(x) - u(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \delta.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u_\delta(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (2)$$

Для нахождения приближенного регуляризованного решения уравнения (2) достаточно найти функцию $z_\alpha(s)$, минимизирующую стабилизирующий функционал

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)z(s)ds - u_\delta(x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b [q(s)z^2(s) + p(s) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2] ds. \quad (3)$$

При этом соответствующее значение параметра регуляризации определяется из условия

$$\left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)z(s)ds - u_\delta(x) \right]^2 dx \right\}^{1/2} = \delta. \quad (4)$$

Часто удобнее находить функцию $z_\alpha(s)$, решая уравнение Эйлера, соответствующее функционалу $M^\alpha[z, u_\delta]$. Уравнение Эйлера для функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ называется интегродифференциальным и имеет вид:

$$\int_a^b \overline{K}(s,t)z(t)dt + \alpha \left\{ q(s)z(s) - \frac{d}{ds} \left[p(s) \frac{dz}{ds} \right] \right\} = g(s) \quad (5)$$

где

$$\overline{K}(s,t) = \int_c^d K(x,s)K(x,t)dx;$$

$$g(s) = \int_c^d K(x,s)u_\delta(x)dx.$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условиям одного из следующих типов:

$$z(a) = 0, z(b) = 0 \quad (6)$$

$$z(a) = 0, z'(b) = 0 \quad (7)$$

$$z'(a) = 0, z(b) = 0 \quad (8)$$

$$z'(a) = 0, z'(b) = 0 \quad (9)$$

Отметим, что необходимо иметь согласованные краевые условия точного и приближенного решений. В ряде случаев этого можно достичь путем замены в исходном уравнении неизвестной функции $z(s)$ на новую неизвестную функцию $\bar{z}(s)$.

Например, если известны на концах $[a, b]$ значения точного решения $z_T(s)$, т.е.

$$z_T(a) = f_1, z_T(b) = f_2,$$

где f_1 и f_2 - известные числа, то переходя к функции $\bar{z}(s)$ по формуле

$$z(s) = \bar{z}(s) + \frac{f_1}{b-a}(b-s) + \frac{f_2}{b-a}(s-a),$$

получим уравнение для $\bar{z}(s)$ с тем же ядром, но с другой правой частью. При этом будем иметь $\bar{z}(a) = 0, \bar{z}(b) = 0$.

Если $z_T(a) = f_1, z_T'(b) = m_2$, то замену функции можно провести по формуле

$$z(s) = \bar{z}(s) + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2 + f_1.$$

Если $z_T'(a) = m_1, z_T(b) = f_2$, то

$$z(s) = \bar{z}(s) + \frac{m_1}{2(b-a)}(b-s)^2 + f_2.$$

Если $z_T'(a) = m_1, z_T'(b) = m_2$, то

$$z(s) = \bar{z}(s) - \frac{m_1}{2(b-a)}(b-s)^2 + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2.$$

Для нахождения $z_\alpha(s)$ перейдем к дискретному аналогу краевой задачи для уравнения Эйлера.

Положим $q(s) = p(s) \equiv 1$. Тогда уравнение Эйлера (5) примет вид

$$\int_a^b \bar{K}(s, t) z(t) dt + \alpha \{z(s) - z''(s)\} = g(s). \quad (10)$$

Для простоты дискретизацию будем проводить на равномерной сетке. Разобьем $[a, b]$ на n равных частей и возьмем в качестве узловых точек сетки середины полученных отрезков, т.е. полагаем

$$s_i = a + \frac{h}{2} + (i-1)h, i = 1, 2, \dots, n; h = \frac{b-a}{n}.$$

Заменим интеграл в уравнении (10) интегральной суммой по формуле средних, а $z''(s)$ - соответствующим разностным отношением. Получим

$$h \sum_{j=1}^n \bar{K}(s_i, t_j) z_j(t) dt + \alpha \left\{ z_i - \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} \right\} = g_i, \quad (11)$$

где

$$z_i = z(s_i);$$

$$g_i = \int_c^d K(x, s_i) u_\delta(x) dx; \quad (12)$$

$$\bar{K}(s_i, t_j) = \int_c^d K(x, s_i) K(x, t_j) dx. \quad (13)$$

Значения $\bar{K}(s_i, t_j)$ и g_i вычисляются аналитически или с помощью квадратурных формул.

Разобьем $[c, d]$ на m равных частей и возьмем в качестве узловых точек середины полученных отрезков, т.е. полагаем

$$x_k = c + \frac{h_x}{2} + (k-1)h_x, k = 1, 2, \dots, m; h_x = \frac{d-c}{m}.$$

Интегралы (12) и (13) вычислим по формуле средних. Получим

$$g_i = h_x \sum_{k=1}^m K(x_k, s_i) u_\delta(x_k);$$

$$\bar{K}(s_i, t_j) = h_x \sum_{k=1}^m K(x_k, s_i) K(x_k, t_j).$$

Вернемся к уравнению (11). При $i=1$ и $i=m$ в уравнение (11) входят величины z_0, z_{m+1} , значения которых еще не определены. Они выбираются такими, чтобы удовлетворялись однородные краевые условия одного из видов (6) – (9). При этом полагаем, что согласование краевых условий точного и приближенного решений уже проведено.

Например, если уравнение Эйлера будем решать с краевыми условиями $z'(a) = 0, z'(b) = 0$, то считаем $z_0 = z_1$ и $z_{m+1} = z_m$.

Систему линейных алгебраических уравнений (11) решаем каким-либо методом. В результате находим $z_1^\alpha, z_2^\alpha, \dots, z_m^\alpha$ - значения искомой функции $z(s)$ в узлах сетки.

Параметр регуляризации α определяется способом, указанным в теоретических сведениях для лабораторной работы № 2.

Отметим, что дискретный аналог условия (4) имеет вид:

$$\left\{ h_x \sum_{k=1}^m b_n \left[h \sum_{i=1}^m K(x_k, s) z_i - u_\delta(x_k) \right] \right\}^{1/2} = \delta.$$

2. ЗАДАНИЕ

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$\int_0^1 (x+N)e^{xs} \sqrt{Kx+N} z(s) ds = x^2, 0 \leq x \leq 1$$

путем решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Эйлера, полагая $\delta = 0,001, z'_T(0) = 0; z'_T(1) = 0$.

Здесь N – номер студента в списке группы,
 K – шестой индекс группы.

3. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

В отчете должны быть представлены:

1. Название работы.
2. Постановка задачи.
3. Описание алгоритма (метода) решения.
4. Текст программы с описанием.
5. Результаты работы программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. 286 с.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. 200 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ, 2008. 636 с.