МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Естественнонаучный институт
Кафедра «Физики»

Утверждено на заседании кафедры
«Физики»
« 16 » января 2023 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

________________________Р.Н.Ростовцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«ФИЗИКА»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлениям подготовки
12.03.01 Приборостроение
15.03.06 Мехатроника и робототехника
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
12.03.04 Биотехнические системы и технологии
24.03.02 Системы управления движением и навигация
12.03.02 Оптотехника
24.03.03 Баллистика и гидроаэродинамика
11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы
15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов
24.05.06 Системы управления летательными аппаратами
17.05.02 Стрелково-пушечное, артиллерийское и ракетное оружие
24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей
24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов
17.05.01, Боеприпасы и взрыватели

Формы обучения: очная, очно-заочная, заочная

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Колмаков Ю.Н., к.ф.-м.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с рабочей программой в течение каждого семестра обучения студент должен выполнить две контрольные работы, включающие 5-6 задач в каждой работе по общим для разных направлений подготовки темам. Образцы решения таких задач, рекомендуемые для проведения практических занятий по физике, приводятся ниже. Выбор тем практических занятий и разделов задач контрольных работ соответствует конкретной рабочей программе направления (специальности) подготовки.

Для самостоятельной подготовки к контрольным работам примеры практических задач приведены в пособиях:

Колмаков, Ю.Н. Механика. Молекулярная физика : руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебное пособие / Ю.Н.Колмаков, С.Е.Кажарская, Е.В.Якунова.— Тула : Изд-во ТулГУ, 2021.— 236 с. — ISBN 978-5-7679-4779-9. URL https://tsutula.bookonlime.ru/viewer/28874 (дата обращения 23.04.2023).– Режим доступа: Электронно-библиотечная система BookOnLime. Текст : электронный.

Колмаков, Ю.Н. Физика. Электромагнетизм: руководство к проведению самостоятельной работы студентов: учебное пособие / Ю.Н.Колмаков, С.Е.Кажарская.— Тула : Изд-во ТулГУ, 2017.— 164 с. — ISBN 978–5–7679–33915–2. URL https://tsutula.bookonlime.ru/viewer/12340 (дата обращения 23.04.2023).– Режим доступа: Электронно-библиотечная система BookOnLime. Текст : электронный.

Примерное содержание тем практических занятий в соответствии с рабочими программами приведено в следующей таблице:

Семестр 2	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Кинематика поступательного движения. Кинематика криволинейного поступательного движения. Кинематика вращательного движения. Связь кинематических характеристик поступательного и вращательного движения
2	Законы динамики. Динамика поступательного и вращательного движений. Применение законов сохранения импульса и момента импульса.
3	Применение законов сохранения момента импульса и полной механической энергии.
4	Гармонические колебания и их сложение. Физический маятник. Собственные затухающие колебания и вынужденные колебания в механике.
5	Методы решения термодинамических задач. Использование уравнения состояния системы, уравнений термодинамических процессов и первого начала термодинамики в применении к расчету процессов в идеальном газе. Вычисление работы газа.
6	Вычисление теплоемкости термодинамических процессов. Вычисление изменения энтропии термодинамической системы. Второе начало термодинамики.
7	Циклические процессы и вычисление к.п.д. тепловых машин. Цикл Карно. Функция распределения Максвелла молекул газа по величинам скоростей и её применение к расчету средних величин. Функция распределения Больцмана и барометрическая формула.
8	Частота столкновения молекул газа со стенкой. Средняя длина свободного пробега молекул газа. Явления переноса (теплопроводность).

Семестр 3	
№ занятия	Тема практического занятия
1	Принцип суперпозиции и расчет электростатического поля для системы точечных зарядов и для заряда, распределенного непрерывно. Вычисление напряженности и потенциала электростатического поля.
2	Применение теоремы Гаусса для расчета электростатических полей. Связь напряженности и потенциала. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Энергия системы заряженных частиц и электрического поля. Емкость и энергия заряженных конденсаторов.
3	Законы постоянного тока. Вычисление электрического заряда, протекающего по цепи и выделяющегося в электрической цепи джоулевого тепла. Закон Джоуля-Ленца. Квазистационарные токи (задачи с электрическими цепями, содержащими конденсатор).
4	Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Использование закона Ома в локальной форме.
5	Расчет магнитных полей с помощью закона Био-Савара и с помощью теоремы о циркуляции.
6	Силы Лоренца и Ампера. Движение заряженной частицы в стационарных электрическом и магнитном полях. Силы, действующие на электрический и магнитный диполь (контур с током).
7	Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Вычисление индуктивности. Энергия магнитного поля.
8	Собственные электрические колебания в цепях. Электрический колебательный контур и его параметры. Вынужденные электрические колебания.

Семестр 2

1. Кинематика поступательного движения

При поступательном движении все точки физического тела движутся одинаково. Описать такое движение можно задавая зависимость от времени радиус-вектора любой из точек, например – центра масс $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Конец такого вектора, проведенного из начала координат, описывает траекторию данной точки или частицы, совершающей поступательное движение (рис.1.1).

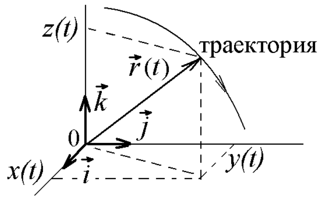


Рис.1.1

Положение точки (частицы) в любой момент времени можно задать ее координатами $x = x(t),\ \ y = y(t),\ z = z(t)$, зависящими от времени. Они являются проекциями радиус-вектора на оси координат: $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)}$, где $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ - единичные векторы, или орты декартовой системы координат.

При этом скорость и ускорение точки также являются векторными величинами: $\boxed{\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}}$.

Совет: *Движение точки в пространстве удобно рассматривать как сумму независимых движений вдоль координатных осей. Тогда проекции скорости и ускорения вычисляются как производные от скалярных функций:*

$$\boxed{\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt},\ \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt},\ \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt}}\ ;\ \boxed{a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt},\ a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt},\ a_z = \frac{d\mathrm{v}_z}{dt}}\ .$$

Величинами (модулями) скорости и ускорения будут $\boxed{\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}$, $\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$.

Наоборот, зная временную зависимость проекций скорости и ускорения, можно с помощью интегралов вычислить координаты точки:

$$\boxed{\mathrm{v}_x(t) = \mathrm{v}_{0x} + \int_0^t a_x dt,\ \ \mathrm{v}_y(t) = \mathrm{v}_{0y} + \int_0^t a_y dt,\ \ \mathrm{v}_z(t) = \mathrm{v}_{0z} + \int_0^t a_z dt}\ ,$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_x(t)dt,\ \ y(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{v}_y(t)dt,\ \ z(t) = z_0 + \int_0^t \mathrm{v}_z(t)dt}\ .$$

Совет: *При решении всех задач контрольных работ необходимо знать выражения производных и интегралов от самых простых функций времени, которые приведены в следующей таблице, где A, B, n – постоянные величины:*

Производная	Интеграл
$\frac{d}{dt}\left(At^n\right) = Ant^{n-1}$	$\int_0^\tau At^n dt = A\frac{\tau^{n+1}}{n+1}$, $\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{A}{t}dt = A\ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)$
$\frac{d}{dt}\left(A\sin(Bt)\right) = AB\cos(Bt)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A\sin(Bt)dt = -A\frac{\cos(B\tau_2) - \cos(B\tau_1)}{B}$
$\frac{d}{dt}\left(A\cos(Bt)\right) = -AB\sin(Bt)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A\cos(Bt)dt = A\frac{\sin(B\tau_2) - \sin(B\tau_1)}{B}$
$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$	$\int_{\tau_1}^{\tau_2} A\exp(Bt)dt = A\frac{\exp(B\tau_2) - \exp(B\tau_1)}{B}$

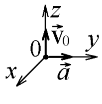
Примеры решения задач:

1.1. Материальная точка движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = At^3\vec{i} + \left(Bt^2 - Ct^3\right)\vec{j}$, где $A = 1\,\text{м/с}^3,\ \ B = 3\,\text{м/с}^2,\ \ C = 2\,\text{м/с}^3$. Определить ускорение точки в момент t = 0,5 с.

Решение.

В данной задаче $x(t) = At^3$, $y(t) = Bt^2 - Ct^3$, $z(t) = 0$. Ненулевые проекции скорости точки определены производными $\mathrm{v}_x = dx/dt = 3At^2$, $\mathrm{v}_y = dy/dt = 2Bt - 3Ct^2$, а проекции её ускорения находим, вычисляя производные по t ещё раз: $a_x = d\mathrm{v}_x/dt = 6At$, $a_y = d\mathrm{v}_y/dt = 2B - 6Ct$. Величина ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6At)^2 + (2B - 6Ct)^2} = 3$ м/с^2.

1.2. В начальный момент $t_0 = 0$ материальная точка находилась в точке начала координат и двигалась со скоростью v_0 = 4 м/с вдоль оси z. Ускорение точки все время направлено вдоль оси y и возрастает со временем t по закону $a = kt^4$, где k = 1 м/с^6. Найти величину скорости данной точки в момент времени t = 2 с.



Решение.

В этой задаче заданы проекции ускорения и начальной скорости точки: $a_x = a_z = 0$, $a_y = kt^4$; $\mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_{0y} = 0$, $\mathrm{v}_{0z} = \mathrm{v}_0$. Проекции скорости в любой момент времени t находим с помощью интегралов:

$$\mathrm{v}_x(t)=0,\quad \mathrm{v}_y(t)=\mathrm{v}_{0y}+\int_0^t a_y dt = k\int_0^t t^4 dt=\frac{kt^5}{5},\quad \mathrm{v}_z(t)=\mathrm{v}_{0z}+\int_0^t a_z dt=\mathrm{v}_0\,.$$

Величина (модуль) скорости $\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2}=\sqrt{\left(kt^5/5\right)^2+\mathrm{v}_0^2}=7{,}547$ м/с.

1.3. Начальная скорость точки $\vec{\mathrm{v}}_0=A\vec{i}-B\vec{j}$, где $A=4$ м/с, $B=2$ м/с. Ускорение точки зависит от времени по закону $\vec{a}=Ct\vec{i}+Dt^2\vec{j}$, где $C=2$ м/с^3, $D=6$ м/с^4. На каком расстоянии от начала координат O окажется точка в момент времени t = 3 с, если в начальный момент $t_0=0$ она находилась в точке O? Определить также тангенс угла наклона вектора скорости точки к оси y в момент времени t = 3 с.

Решение.

Заданы проекции начальной скорости $\mathrm{v}_{0x}=A$, $\mathrm{v}_{0y}=-B$, $\mathrm{v}_{0z}=0$ и ускорения точки $a_x=Ct$, $a_y=Dt^2$, $a_z=0$. Движение происходит на плоскости *xy*. Необходимо сначала найти зависимость проекций скорости точки от времени:

$$\mathrm{v}_x(t)=\mathrm{v}_{0x}+\int_0^t a_x dt=A+C\int_0^t t dt=A+\frac{Ct^2}{2},\quad \mathrm{v}_y(t)=\mathrm{v}_{0y}+\int_0^t a_y dt=-B+D\int_0^t t^2 dt=-B+\frac{Dt^3}{3}.$$

Внимательно следите за знаками подставляемых в интегралы проекций векторов. Ошибка в знаке приводит к неправильному направлению движения частицы.

Затем с помощью полученных функций вычисляем проекции координат движущейся точки, имевшей по условию нулевые начальные координаты $x_0=y_0=0$. После подстановки числовых данных находим:

$$x(t)=\int_0^t \mathrm{v}_x(t)dt=\int_0^t\left(A+\frac{Ct^2}{2}\right)dt=At+\frac{Ct^3}{6}=21\text{ м},\quad y(t)=\int_0^t \mathrm{v}_y(t)dt=\int_0^t\left(-B+\frac{Dt^3}{3}\right)dt=-Bt+\frac{Dt^4}{12}=34{,}5\text{ м}.$$

Расстоянием точки от начала координат O будет величина радиус-вектора (см. рис.1.2):

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{21^2+34{,}5^2}=40{,}4\text{ м}.$$

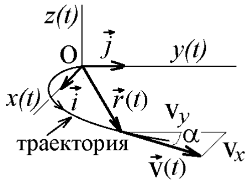


Рис.1.2

При t = 3 с найденные ранее проекции скорости частицы равны $\mathrm{v}_x(t)=A+Ct^2/2=$ 13 м/с и $\mathrm{v}_y(t)=-B+Dt^3/3=52$ м/с.

Как видно из рис.1.2, тангенс угла наклона вектора скорости к оси y в этот момент времени равен $\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{v}_x/\mathrm{v}_y=0{,}25$.

1.4. Материальная точка движется так, что её радиус-вектор меняется по закону $\vec{r}=A\sin(bt)\vec{i}+A\cos(bt)\vec{j}$, где $A=2$ м, $b=3$ рад/с. Определить путь, пройденный точкой за время t = 2 с.

Решение.

Путь $s(t)=\int_0^t \mathrm{v}(t)dt$ будет длиной траектории, вдоль которой точка движется со скоростью $\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2}$. Согласно условию задачи, $\mathrm{v}_x=\dfrac{dx}{dt}=A\dfrac{d\sin(bt)}{dt}=Ab\cos(bt)$, $\mathrm{v}_y=\dfrac{dy}{dt}=A\dfrac{d\cos(bt)}{dt}=-Ab\sin(bt)$. При этом величина скорости точки оказывается постоянной, не зависящей от времени: $\mathrm{v}=\sqrt{\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2}=Ab\sqrt{\cos^2(bt)+\sin^2(bt)}=Ab$.

Пройденный за время t = 2 с путь равен $s(t)=Ab\int_0^t dt=Abt=12$ м.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

1.5. Точка движется по оси *x* так, что её координата меняется со временем по закону $x=A\sin(2\pi t/T)$, где $T=6$ с, $A=0{,}3$ м. Определить минимальное время, через которое ускорение точки достигнет максимального значения.

Ответ: 1,5 с

1.6. Материальная точка движется так, что её координата зависит от времени по закону $x=At^4-Bt^5$, где $A=5$ м/с^4, $B=2$ м/с^5. Определить координату точки, в которой изменится направление движения. *Ответ*: 16 м

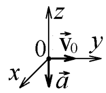
1.7. Материальная точка движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r}=At^2\vec{i}+Bt^3\vec{j}$, где $A=4$ м/с^2, $B=2$ м/с^3. В какой момент времени t скорость точки будет направлена под углом $\alpha=45^\circ$ к оси *x*?

Ответ: 1,33 с

1.8. Начальная скорость точки $\vec{\mathrm{v}}_0=A\vec{i}-B\vec{j}$, где $A=4$ м/с, $B=2$ м/с. Ускорение точки зависит от времени по закону $\vec{a}=Ct\vec{i}+Dt^2\vec{j}$, где $C=2$ м/с^3, $D=6$ м/с^4. Определить величину скорости точки в момент t = 2 с.

Ответ: 16,1 м/с

1.9. В начальный момент $t_0 = 0$ материальная точка находилась в точке 0 начала координат и двигалась со скоростью $v_0 = 3$ м/с вдоль оси y. Ускорение точки все время направлено против оси z и возрастает со временем t по закону $a = kt^2$, где $k = 3$ м/с^4. Найти расстояние от данной точки до начала координат 0 в момент $t = 2$ с.



Ответ: $r = 7{,}21$ м

1.10. Начальная скорость точки $\vec{v}_0 = A\vec{i} - B\vec{j}$, где $A = 4$ м/с, $B = 2$ м/с. Ускорение точки зависит от времени по закону $\vec{a} = Ct\vec{i} + Dt^2\vec{j}$, где $C = 2$ м/с^3, $D = 6$ м/с^4. В какой момент времени t скорость будет направлена перпендикулярно оси y?

Ответ: 1 с

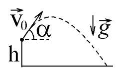
1.11. Точка движется по оси x так, что её координата меняется со временем по закону $x = A\exp(bt)$, где $A = 2$ м, $b = 0{,}5\,\text{с}^{-1}$. Через некоторое время координата точки становится равной $x = 14{,}8$ м. Определить величину ускорения точки в этот момент.

Ответ: 3,7 м/с^2

1.12. Точка движется так, что её радиус-вектор меняется по закону $\vec{r} = A\sin(bt)\vec{i} + A\cos(bt)\vec{j}$, где $A = 2$ м, $b = 3{,}14$ рад/с. Найти длину радиус-вектора точки в момент, когда направление её скорости будет перпендикулярно оси x.

Ответ: 2 м

1.13. Тело малых размеров брошено с башни высотой $h = 25$ м под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к горизонту со скоростью $v_0 = 40$ м/с. На каком расстоянии от основания башни тело упадёт на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. $g = 10$ м/с^2.



Ответ: 173,2м

2. Кинематика криволинейного поступательного и вращательного движения

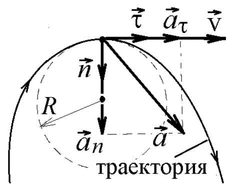


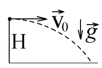
Рис.1.3

При движении точки (физического тела) по кривой траектории удобнее использовать не декартову систему координат x, y, z, а вводить единичные векторы $\vec{\tau}$ (по касательной к траектории) и $\vec{n}$ (перпендикулярно траектории, рис.1.3).

Вектор скорости $\vec{v}$ всегда направлен по касательной к траектории: $\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}}$, а вектор полного ускорения точки $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ будет суммой вух перпендикулярных составляющих: тангенциального ускорения $\boxed{\vec{a}_\tau = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}}$ и нормального ускорения $\boxed{\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}.}$ Здесь $R -$ радиус кривизны траектории (радиус окружности, которую можно вписать в кривую линию траектории, рис.1.3). Величина полного ускорения точки $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Примеры решения задач:

2.1. Маленькое тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с с высоты $H = 100$ м. Определить отношение величин тангенциального и нормального ускорений тела через $t = 3$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.



Решение.

Если тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис.1.4), то его полное ускорение постоянно и равно ускорению свободного падения g. Угол φ между вектором скорости $\vec{v}$ и горизонтальной осью x во время полёта уменьшается и, как видно из рис.1.4, определяется соотношением $\cos\varphi = v_x/v$ или $\sin\varphi = v_y/v$. При этом $a_\tau = g\sin\varphi = gv_y/v$, $\alpha_n = g\cos\varphi = gv_x/v$.

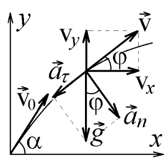


Рис.1.4

Эти формулы справедливы как при подъёме, так и при падении тела, когда проекция v_y меняет знак. Искомое отношение $\dfrac{a_\tau}{a_n} = \operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{v_y}{v_x}\right| = \left|\dfrac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}\right| = \dfrac{gt}{v_0} = 2$, так как по условию $\alpha = 0$.

2.2. Под каким углом α к горизонту надо бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы центр кривизны в верхней точке траектории находился на этой поверхности?

Выражение для радиуса кривизны траектории R всегда можно определить с помощью формулы для нормального ускорения $a_n = v^2/R$.

Решение.

Как показано в решении задачи 2.1, $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{gv_x}{v}$, откуда $R = \dfrac{v^3}{gv_x}$. В верхней точке траектории вертикальная проекция скорости становится равной нулю, $v_y = v_0\sin\alpha - gt = 0$. В этот момент $t = v_0\sin\alpha/g$ в верхней точке траектории $v = v_x = v_0\cos\alpha$, и радиус кривизны траектории становится равным $R = (v_0\cos\alpha)^2/g$.

По условию он равен максимальной высоте подъёма $h = v_0\sin\alpha t - gt^2/2 = (v_0\sin\alpha)^2/2g$. Из равенства $R = h$ находим $\sin^2\alpha/\cos^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7^{\circ}$.

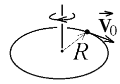
****

Рис.1.5

При вращении точки по окружности радиуса R, или при повороте тела радиуса R на угол φ, вращательное движение задается вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, направленном вдоль оси вращения по правилу винта (рис.1.5). Ускоренное вращение характеризуется вектором углового ускорения $\vec{\varepsilon}$. При этом $\boxed{\omega = \dfrac{d\varphi}{dt},\ \varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}}$. Интегрируя эти величины по времени, можно найти зависимость от времени угла поворота: $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t \omega(t)dt, \text{ где } \omega(t) = \omega_0 + \int\limits_0^t \varepsilon(t)dt}$.

С помощью угловой скорости и углового ускорения можно определить величины линейной скорости точки и её тангенциального и нормального ускорений: $\boxed{\mathrm{v} = \omega R}$, $\boxed{\alpha_\tau = \varepsilon R}$, $\boxed{a_n = \omega^2 R = \mathrm{v}^2/R}$.

Примеры решения задач:



2.3. Точка равнозамедленно вращается по окружности радиуса R = 2 м с постоянным угловым ускорением ε = 3 рад/с^2. В начальный момент t_0 = 0 величина её скорости v_0 = 2 м/с. Во сколько раз полное ускорение этой точки будет больше её нормального ускорения в момент времени t = 1 с? Чему будет равен в этот момент угол между вектором скорости и вектором полного ускорения точки?

Решение.

В случае равнозамедленного вращения с постоянным угловым ускорением $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, где $\omega_0 = \mathrm{v}_0/R$. Величина тангенциального ускорения точки $a_\tau = \varepsilon R$, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Отсюда $\dfrac{a}{a_n} = \sqrt{1 + \dfrac{a_\tau^2}{a_n^2}} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \Big/ \left(\dfrac{\mathrm{v}_0}{R} - \varepsilon t\right)^4}$ =1,25.

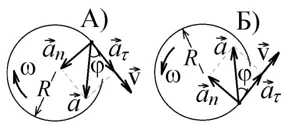
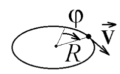


Рис.1.6

Из рис.1.6,А видно, что при равноускоренном вращении угол φ между векторами $\vec{\mathrm{v}}$ и $\vec{a}$ будет расти с ростом ω. При равнозамедленном вращении (рис.1.6,Б) в момент времени t = 1 с вращение поменяет направление, но угол φ по-прежнему будет определяться соотношением $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a_n}{a_\tau} = \dfrac{\omega^2 R}{\varepsilon R} = \dfrac{(\mathrm{v}_0/R - \varepsilon t)^2}{\varepsilon} = \dfrac{4}{3}$. Поэтому $\varphi = \operatorname{arctg}(4/3) = 53{,}1^{\mathrm{o}}$.



2.4. Частица вращается по окружности радиуса R = 2 м так, что угол поворота изменяется со временем t по закону $\varphi(t) = \alpha t^4 + \beta t^2 + \gamma t$, где α = 0,02 рад/с^4, β = 0,02 рад/с^2, γ = 0,02 рад/с. Во сколько раз величина полного ускорения частицы превышает величину её нормального (центростремительного) ускорения в момент времени t = 2 с?

Решение.

Угловая скорость и угловое ускорение вращения частицы определяются производными $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\alpha t^4 + \beta t^2 + \gamma t\right) = 4\alpha t^3 + 2\beta t + \gamma$ и $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(4\alpha t^3 + 2\beta t + \gamma\right) = 12\alpha t^2 + 2\beta$. Подставляя числовые данные из условий задачи, находим их значения в момент времени t = 2 с: ω = 0,74 рад/с, ε = 1 рад/с^2.

Используя формулы для нормальной и тангенциальной проекции ускорения частицы $a_n = \omega^2 R$ и $\alpha_\tau = \varepsilon R$, находим искомое отношение $\dfrac{a}{a_n} = \dfrac{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}{a_n} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\omega^2}$ =2,082.

2.5. В момент времени t_0 = 0 диск радиуса R = 1 м начинает так вращаться вокруг оси симметрии, что путь пройденный точкой на ободе диска, меняется со временем по закону $s = A\left(1 - \exp\left(-bt^2\right)\right)$, где A = 2 м, b = 0,5 с$^{-2}$. Найти максимальную величину угловой скорости этой точки в последующий момент времени.

Решение.

Пройденный точкой путь будет длиной дуги на ободе диска, которая равна $s = R\varphi$, где φ – угол поворота диска в радианах. Тогда угловая скорость диска $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{A}{R}\dfrac{d}{dt}\left(1 - \exp\left(-bt^2\right)\right) = 2\dfrac{A}{R}bt\exp\left(-bt^2\right)$. Максимум функции определяется условием равенства нулю её первой производной: $\dfrac{d\omega}{dt} = 2\dfrac{A}{R}b\dfrac{d}{dt}\left(t\exp\left(-bt^2\right)\right) = 2\dfrac{Ab}{R}\underbrace{(1 - t\cdot 2bt)}_{=0}\exp\left(-bt^2\right) = 0$.

Максимум величины ω достигается в момент времени $t = 1/\sqrt{2b}$ = 1 с. Подставляя это значение в найденную формулу для угловой скорости, получаем $\omega_{\max} = \dfrac{A}{R}\sqrt{2b}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ = 1,21 рад/с.

При $t \to 0$ или $t \to \infty$ эта формула приводит к результату $\omega \to 0$, т.е. найденное значение будет максимальным.

2.6. Первоначально покоившийся диск начал вращаться вокруг оси симметрии OO' так, что величина центростремительного ускорения точки на его ободе изменяется со временем t по закону $a_n = kt^8$, где k = 8 м/с^{10}. Найти радиус R диска, если в момент τ = 1 с тангенциальное ускорение этой точки a_τ = 16 м/с^2. Найти также угол поворота диска к этому моменту времени.

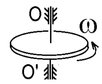
Решение.

Так как $a_n = \omega^2 R = kt^8$, то угловая скорость вращения диска меняется со временем по закону $\omega = \sqrt{kt^8/R}$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R = R\,d\omega/dt = \sqrt{kR}\cdot dt^4/dt = 4\sqrt{kR}\cdot t^3$. Отсюда $R = a_\tau^2/\left(16k\tau^6\right)$ = 2 м.

Угол поворота диска определяется интегрированием его угловой скорости по времени:

$$\varphi = \int_0^\tau \omega(t)dt = \sqrt{\frac{k}{R}}\int_0^\tau t^4 dt = \sqrt{\frac{k}{R}}\frac{\tau^5}{5} = 0,4 \text{ рад}.$$

2.7. В начальный момент времени $t_0 = 0$ диск вращался вокруг оси симметрии ОО' с угловой скоростью $\omega_0 = 3$ рад/с. Затем его вращение замедляется, причем величина углового ускорения изменяется со временем t по закону $\varepsilon = kt^3$, где k=0,5 рад/с^5. На какой угол $\Delta\varphi$ повернется диск к моменту времени $\tau = 2$ с?



Решение.

Сначала определим зависимость от времени угловой скорости диска: $\omega(t) = \omega_0 - \int_0^t \varepsilon(t)dt = \omega_0 - k\int_0^t t^3 dt = \omega_0 - kt^4/4$ (с учетом замедления вращения). Интегрируя это выражение по времени, находим угол поворота:

$$\Delta\varphi = \int_0^\tau \omega(t)dt = \int_0^\tau \omega_0 dt - (k/4)\int_0^\tau t^4 dt = \omega_0\tau - k\tau^5/20 = 5,2 \text{ рад}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

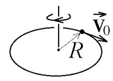
2.8. Под каким углом к горизонту надо бросить камень с ровной горизонтальной поверхности, чтобы радиус кривизны траектории в начальной точке траектории был в 8 раз больше, чем радиус кривизны в верхней точке траектории?

Ответ: 60°

2.9. Колесо радиуса R = 0,4 м вращалось с угловой скоростью ω_0 = 10 рад/с. В момент $t = 0$ на него начинает действовать тормозящий момент сил, и через некоторое время угловая скорость вращения уменьшается в 5 раз. Сколько оборотов сделает колесо за это время, если его угловое ускорение ε = 4 рад/с^2?

Ответ: 1,91

2.10. Частица вращается по окружности радиуса R= 2 м равноускоренно с угловым ускорением ε = = 3 рад/с^2. Найти величину начальной скорости v_0 частицы в момент времени $t_0 = 0$, если момент t = 0,4 с величина полного ускорения частицы больше величины её тангенциального ускорения в k = 1,25 раз.



Ответ: 0,6 м/с

2.11. Колесо радиуса R = 20 см начинает вращаться так, что угол его поворота зависит от времени по закону $\varphi = At^3$, где A = 18 рад/с^3. В какой момент времени угол между векторами скорости и полного ускорения точки на ободе колеса станет равным 45°?

Ответ: 0,333 с

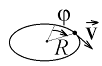
2.12. Точка вращается по окружности радиуса R = 2 м так, что угол поворота изменяется со временем t по закону $\varphi(t) = \alpha t^4 - \beta t^3 + \gamma t^2$, где α = 0,1 рад/с^4, β = 0,1 рад/с^3, γ = 0,1 рад/с^2. Во сколько раз величина полного ускорения точки превышает величину её тангенциального ускорения в момент времени t = 2 с?

Ответ: в 1,82 раз

2.13. Колесо радиуса R = 20 см начинает вращаться так, что угол его поворота меняется со временем по закону $\varphi = At^3 - Bt^2$, где A = 0,5 рад/с^3, B = 2 рад/с^2. Найти величину полного ускорения точки на ободе колеса в тот момент, когда оно вернётся в исходное положение.

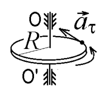
Ответ: 12,9 м/с^2

2.14. Точка вращается по окружности так, что угол поворота изменяется со временем t по закону $\varphi(t) = A\cos\alpha t$, где $\alpha = \pi/4$ с$^{-1}$, A = 2 рад. Найти величину радиуса R окружности, если в момент времени t = 2 с ускорение точки равно a = 3 м/с^2.



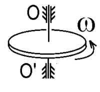
Ответ: R = 1,216 м

2.15. Первоначально покоившийся диск радиуса R = 1 м начал вращаться вокруг оси симметрии ОО' так, что величина тангенциального ускорения точки на его ободе изменяется со временем t по закону $a_\tau = \beta t^4$, где β = = 5 м/с^6. Найти величину полного ускорения a этой точки в момент времени t = 1 с.



Ответ: a = 5,10 м/с^2

2.16. В начальный момент $t_0 = 0$ диск вращался вокруг оси симметрии ОО' с угловой скоростью ω_0 = = 2 рад/с. Затем его вращение ускоряется, причем величина углового ускорения растет со временем t по закону $\varepsilon = \gamma t^2$, где γ = 0,6 рад/с^4. Найти величину отношения a_n/a_τ нормального и тангенциального ускорения точки на ободе диска в момент времени t = 2 с.



Ответ: a_n/a_τ = 5,4

3. Динамика поступательного и вращательного движения

В задачах, в которых физическое тело вращается с угловым ускорением ε вокруг **закрепленной** оси C, можно записать только уравнение динамики вращательного движения $\boxed{I_c\varepsilon = \sum M_{\text{внеш}}}$, где I_c – момент инерции тела относительно этой оси, $M_{\text{внеш}}$ - проекция момента внешней силы на эту ось. Для используемых в задачах симметричных тел, вращающихся вокруг оси, проходящей через их центр масс, моменты инерции приведены на следующем рисунке 1.7.

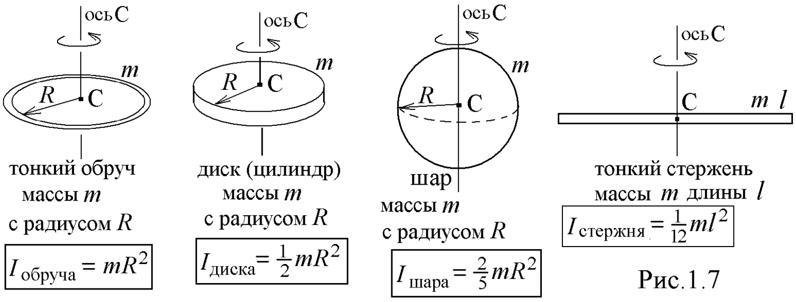


Рис.1.7

Если ось вращения не закреплена и перемещается вместе с вращающимся телом, надо совместно решать систему уравнений динамики поступательного и вращательного движений: $\boxed{\begin{cases} m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}; \\ I_c\varepsilon = \sum M_{\text{внеш}}. \end{cases}}$

Здесь $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс тела.

Например, на рис.1.8 показан цилиндр массы m и радиуса R, катящийся вверх по наклонной плоскости под действием силы $\vec{F}$, с которой тянут намотанную на обод нить. Внешними силами кроме силы $\vec{F}$, будут сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$.

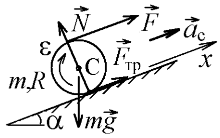


Рис.1.8

Совет: *Если центр масс катящегося тела движется вдоль прямой оси x, то записывайте уравнение динамики поступательного движения в проекции на эту ось. Для цилиндра на рис.1.8 оно примет вид*
$ma_c = \sum F_{\text{внеш}\,x} = F + F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha$.

Величина момента силы, вращающей тело, определяется как произведение силы на плечо – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения. Так как линии сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ на рис.1.8 проходят через ось C, их моменты равны нулю, и вращать цилиндр они не могут.

Для сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ плечом будет радиус R, но они стремятся вращать цилиндр в противоположных направлениях.

Совет: *Следите за тем, чтобы знак момента силы соответствовал направлению вращения (качения)! Оно должно соответствовать направлению поступательного движения.*

Так цилиндр на рис.1.8 вращается по часовой стрелке. Момент силы $\vec{F}$ будет ускорять это вращение, а момент силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ - тормозить его. Уравнение динамики вращательного движения примет вид

$I_c\varepsilon = \sum M_{\text{внеш}} = FR - F_{\text{тр}}R$.

В случае качения **без проскальзывания** скорость точки A касания тела и плоскости равна нулю. А так как качение тела является суммой поступательного движения со скоростью v и вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг центра масс C, то, как видно из рис.1.9, будет выполнена кинематическая связь $\boxed{v_c = \omega R \text{ и } a_c = \varepsilon R}$.

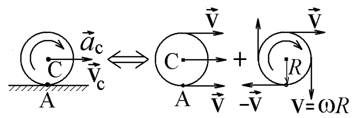
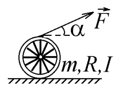


Рис.1.9

Примеры решения задач:

3.1. Тонкую нить, намотанную на обод колеса массы m = 1,5 кг и радиуса R = 10 см, имеющего момент инерции I = 0,01 кг·м^2 относительно оси симметрии, тянут с силой F = 9 Н под углом α = 30° к горизонту. Колесо катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Найти ускорение a колеса и величину постоянной силы трения в точке опоры.



Решение.

Совет: *Если Вы не знаете, как направлена сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в точке опоры, направьте её в любую сторону и запишите уравнения динамики с учетом выбранного направления. Если направление $F_{\text{тр}}$ выбрано неверно, то при решении получится правильная величина этой силы, но со знаком “минус”.*

Направим силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в точке опоры A в сторону движения колеса (рис.1.10), чтобы её момент относительно оси колеса тормозил вращение. Решаем систему из уравнения динамики поступательного движения вдоль оси x $ma_c = F\cos\alpha + F_{\text{тр}}$ и уравнения динамики вращательного движения вокруг оси колеса $I\varepsilon = FR - F_{\text{тр}}R$. Выразим из первого уравнения неизвестную силу $F_{\text{тр}}$ и подставим вместе со связью $\varepsilon = a_c/R$ во второе уравнение. Получим $I\dfrac{a_c}{R} = FR - (ma_c - F\cos\alpha)R$, откуда $a_c = \dfrac{F(1+\cos\alpha)}{m + I/R^2}$ = 6,72 м/с^2.

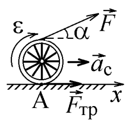
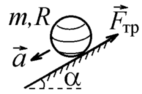


Рис.1.10

Наоборот, устраняя из системы ускорение a_c, находим величину силы трения $F_{\text{тр}} = \dfrac{mR^2 - I\cos\alpha}{mR^2 + I}F$ = 2,28 Н.

Если изменить направление силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ на рис.1.10, то уравнения динамики примут вид $ma_c = F\cos\alpha - F_{\text{тр}}$ и $I\varepsilon = I\,a_c/R = FR + F_{\text{тр}}R$. Это не изменит полученной выше формулы для a_c. Но формула для $F_{\text{тр}}$ поменяет знак, т.е. направление силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ на рис.1.10 было выбрано верно.

3.2. Сплошной шар с радиусом R катится без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом. В точке опоры на шар действует сила трения $F_{\text{тр}}$ = 3 Н, направленная вдоль плоскости. Принимая g = 9,8 м/с^2, определите массу шара m.



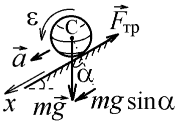
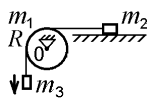


Рис.1.11

Решение.

Единственная сила, создающая относительно оси С шара ненулевой момент, заставляющий шар вращаться с ускорением ε, это сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Как видно из рис.1.11, она должна быть направлена против оси x, вдоль которой шар движется под действием проекции силы тяжести $mg\sin\alpha$. Уравнения динамики поступательного и вращательного движения имеют вид $ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}$; $I_{\text{C}}\varepsilon = F_{\text{тр}} \cdot R$. Подставляя сюда момент инерции шара $I_c = 2mR^2/5$ и связь $\varepsilon = a/R$, исключаем неизвестное ускорение a. Получим $m = 7F_{\text{тр}}/g$ = 2,143 кг.

3.3. Сплошной диск массы m_1 = 1 кг и радиуса R вращается без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая по ободу нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением a = 2 м/с^2 грузы. Правый груз с массой m_2 = 3 кг скользит по горизонтальной поверхности и на него действует сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ = 4,7 Н. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти массу m_3 левого груза, опускающегося вниз под действием силы тяжести.



Решение.

Укажем направление и точки приложения всех сил (рис.1.12). Уравнения динамики надо записать для каждого из движущихся тел.

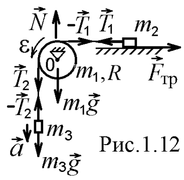


Рис.1.12

Грузы m_2 и m_3 движутся поступательно, а диск с моментом инерции $I = m_1R^2/2$ совершает вращательное движение под действием моментов сил натяжения нитей $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$, направленных в разные стороны. Сила реакции $\vec{N}$ и сила тяжести $m_1\vec{g}$ приложены к оси диска О и не создают вращающих моментов.

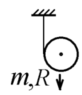
Выражаем неизвестные величины сил натяжения T_1 и T_2 из двух первых уравнений поступательного движения

$$\begin{cases} m_2a = T_1 - F_{\text{тр}}, \\ m_3a = m_3g - T_2, \\ I\varepsilon = Ia/R = T_2R - T_1R \end{cases}$$

и подставляем в третье уравнение динамики вращательного движения диска. Получим

$$m_3 = \frac{(m_2 + m_1/2)a + F_{\text{тр}}}{g - a} = 1{,}5 \text{ кг.}$$

3.4. Сплошной диск массы m = 1 кг прикреплен за намотанную на его обод нить к потолку и падает вниз под действием силы тяжести. При разматывании нити диск вращается с угловым ускорением ε = 40 рад/с^2. Принимая g = = 9,8 м/с^2, найти радиус диска R.



Решение.

Диск движется поступательно вниз и одновременно вращается вокруг оси С по часовой стрелке под действием момента силы натяжения нити $\vec{T}$, плечо которой равно радиусу диска R (рис.1.13). Выражая силу T из уравнения динамики поступательного движения $ma = mg - T$, подставляем её в уравнение динамики вращательного движения диска $I\varepsilon = T \cdot R$.

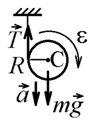
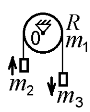


Рис.1.13

С учетом связи $a = \varepsilon R$ и формулы для момента инерции диска $I = mR^2/2$, находим $\frac{mR^2}{2}\varepsilon = m(g - \varepsilon R)R$,

откуда $R = \frac{2g}{3\varepsilon}$ = 0,163 м.

3.5. Диск массы m_1 = 2 кг и радиуса R = 1 м вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О, причем из-за трения в оси диска возникает тормозящий вращение момент сил $M_{\text{тр}}$ = 4 Н·м. Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая по ободу нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением грузы с массами m_2 = 1,5 кг и m_3 = 2 кг. Во сколько раз ускорение свободного падения, равное g = 9,8 м/с^2, больше ускорения грузов m_2 и m_3?



Решение.

Действующие на тела силы показаны на рис.1.14. Уравнения динамики поступательного движения грузов m_2 и m_3 с учетом направления их движения имеют вид $m_2a = T_1 - m_2g$; $m_3a = m_3g - T_2$. Суммарный момент сил натяжения нитей $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$ будет вращать диск по часовой стрелке в сторону движения грузов. Уравнение динамики вращательного движения диска $I\varepsilon = T_2 \cdot R - T_1 \cdot R - M_{\text{тр}}$, где $I = m_1R^2/2$ (момент сил трения в оси всегда тормозит вращение).

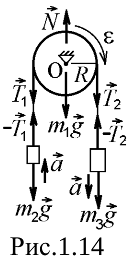
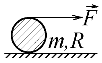


Рис.1.14

Подставим в это уравнение выражения сил T_2 и T_1, выраженные из двух уравнений поступательного движения, а также учтем связь $\varepsilon = \frac{a}{R}$. Отсюда ускорение $a = \frac{(m_3 - m_2)g - M_{\text{тр}}/R}{m_3 + m_2 + m_1/2}$ = 0,2 м/с^2. Поэтому $g/a = 49$.

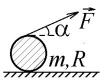
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

3.6. Тонкую нить, намотанную на обод цилиндра массы m = 2 кг и радиуса R, тянут в горизонтальном направлении. Цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания с ускорением a = 8 м/с^2. Сила трения в точке опоры постоянна. Найти силу F, с которой тянут нить.



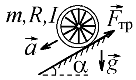
Ответ: 12 Н

3.7. Тонкую нить, намотанную на обод цилиндра радиуса R, тянут с силой F под углом α = 30^o к горизонту. Цилиндр катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с ускорением a = 4 м/с^2. Величина горизонтально направленной силы трения в точке опоры равна $F_{тр}$ = 3 Н. Найти массу m цилиндра.



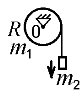
Ответ: 2,47 кг

3.8. Колесо с массой m = 2 кг и радиусом R = 10 см, имеющее момент инерции I = 0,015 кг·м^2 относительно оси симметрии, катится без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол α =30^o с горизонтом. Принимая
g = 9,8 м/с^2, определите величину действующей на него силы трения $F_{тр}$, направленной вдоль плоскости.



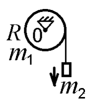
Ответ: 4,2 Н

3.9. Диск массы m_1 с радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. К намотанной на обод диска нити прикреплен груз массы m_2, падающий вниз с ускорением 4,8 м/с^2. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти отношение m_2/m_1 массы груза к массе диска.



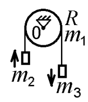
Ответ: 0,48

3.10. Диск радиуса R = 8 см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. К намотанной на его обод нити прикреплен падающий вниз груз с массой m_2= 1 кг. При этом диск вращается с угловым ускорением 30 рад/с^2, а из-за трения в его оси возникает постоянный тормозящий вращение момент сил $M_{тр}$ = 0,2 Н·м. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти массу диска m_1.



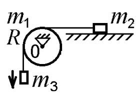
Ответ: 4,08 кг

3.11. Сплошной диск массы m_1 = 3 кг и радиуса R = 10 см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. Из-за трения в оси диска возникает постоянный тормозящий вращение момент сил $M_{тр}$ = 0,28 Н·м. Через обод диска перекинута невесомая, не проскальзывающая нить, к концам которой прикреплены движущиеся с ускорением 3,6 м/с^2 грузы с массами m_2 и m_3 = 3 кг. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти массу m_2 левого груза.



Ответ: 0,776 кг

3.12. Цилиндр массы m_1 = 2 кг и радиуса R = 10 см вращается вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О. В его оси возникает постоянный тормозящий момент сил $M_{тр}$ = 1,3 Н·м. Через обод диска перекинута невесомая нить с прикрепленными к её концам грузами. Груз с массой m_2 = 3 кг скользит без трения по горизонтальной поверхности, а с массой m_3 = 2 кг движется вертикально вниз под действием силы тяжести. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти величину силы натяжения правого конца нити, к которой привязан груз m_2.



Ответ: 3,3 Н

4. Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса всегда выполняется для быстрых взаимодействий тел (столкновение, взрыв). При этом импульсы тел $\vec{p} = m\vec{v}$ надо складывать векторно.

Совет: *Сложение векторов проще выполнить, не записывая их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a, b треугольника и угол θ между ними, то квадрат противоположной стороны* $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$ *(рис.1.15)*

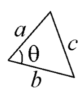
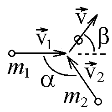


Рис.1.15

Примеры решения задач:

4.1. Два тела с массами m_1 = 3 кг и m_2, летевшие со скоростями v$_1$ = 6 м/с и v$_2$ под углом α = 120^o друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти массу m_2, если после столкновения слипшиеся тела летят со скоростью v = = 2 м/с под углом β = 60^o к направлению движения первого тела.



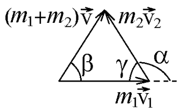


Рис.1.16

Решение.

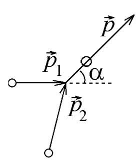
На рис.1.16 изображен векторный закон сохранения импульса $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$ в данной задаче. Так как в условии не заданы две величины m_2 и v$_2$, то согласно теореме косинусов можно записать два уравнения для нахождения сторон, лежащих против углов β и γ:

$$(m_2 v_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 v^2 + (m_1 v_1)^2 - 2(m_1 + m_2) v \cdot m_1 v_1 \cdot \cos\beta,$$

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2 m_1 v_1 \cdot m_2 v_2 \cdot \cos\gamma.$$

В данном случае решение сильно упрощается: так как $\beta = \gamma = 60^o$, то треугольник на рис.1.16 равносторонний, и $m_1 v_1 = m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$. Тогда $m_2 = \dfrac{m_1 v_1}{v} - m_1 = 6$ кг.

4.2. Два тела с импульсами p_1 = 6 кг·м/с и p_2, летевшие под углом друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти величину импульса p_2 второго тела до столкновения, если после столкновения величина импульса



слипшихся тел $p = 2p_1 = 12$ кг·м/с, а летят они под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к направлению движения первого тела (см. рисунок).

Решение.

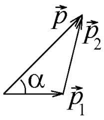
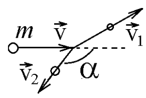


Рис.1.17

Закон сохранения импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ представлен на рис.1.17, из которого, согласно теореме косинусов, следует $p_2^2 = p_1^2 + p^2 - 2p_1 p\cos\alpha$. Подставляя $p = 2p_1$ и $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, находим $p_2 = p_1\sqrt{5 - 4\cos 45^{\circ}} = 8{,}84$ кг·м/с.



4.3. Снаряд с массой m, летевший со скоростью v = 30 м/с, разорвался на два неравных осколка. Масса второго осколка, который летит под углом $\alpha = 150^{\circ}$ к первоначальному направлению движения снаряда со скоростью $v_2 = 20$ м/с, в 2 раза больше массы первого осколка. Найти величину скорости v_1 первого осколка.

Решение.

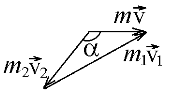


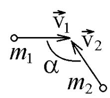
Рис.1.18

Сложение векторов импульса, соответствующее закону его сохранения $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ при разрыве снаряда, показано на рис.1.18. Согласно теореме косинусов $(m_1 v_1)^2 = (mv)^2 + (m_2 v_2)^2 - 2mv \cdot m_2 v_2 \cdot \cos\alpha$.

Учитывая, что $m_1 = m/3$ и $m_2 = 2m/3$ по условию задачи, находим из этого уравнения

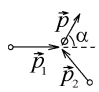
$$v_1 = \sqrt{9v^2 + 4v_2^2 - 12vv_2\cos\alpha} = 126{,}2 \text{ м/с.}$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



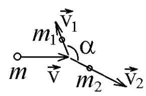
4.4. Два тела с одинаковыми массами $m_1 = m_2$, летевшие со скоростями $v_1 = 2$ м/с и v_2 под углом $\alpha = 120^{\circ}$ друг к другу, столкнулись и слиплись. Найти величину скорости v_2 второго тела до удара, если после столкновения слипшиеся тела летят со скоростью v = 2 м/с.

Ответ: 4,606 м/с



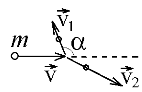
4.5. Два тела с импульсами p_1 и $p_2 = 6$ кг·м/с, летевшие под углом друг к другу, столкнулись и слиплись. Слипшиеся тела летят под углом $\alpha = 60^{\circ}$ к направлению движения первого тела. Найти величину импульса p слипшихся тел, если она в два раза меньше величины импульса p_1 первого тела до столкновения.

Ответ: 3,46 кг·м/с



4.6. Снаряд с массой m разорвался на два осколка. Масса второго осколка в 2 раза больше массы первого осколка ($m_2 = 2m_1$). Сразу после разрыва осколки разлетаются под углом $\alpha = 150^{\circ}$ друг к другу с одинаковыми по величине скоростями $v_1 = v_2 = 60$ м/с. Найти величину скорости v снаряда до разрыва.

Ответ: 24,8 м/с



4.7. Летевший со скоростью v = 40 м/с снаряд разорвался на два равных осколка, один из которых летит под углом $\alpha = 150^{\circ}$ к первоначальному направлению движения снаряда со скоростью $v_1 = 20$ м/с. Найти величину скорости v_2 второго осколка. *Ответ*: 97,8 м/с

5. Закон сохранения момента импульса

При вращении тел вокруг оси симметрии или параллельной ей оси z закон сохранения момента импульса можно использовать не в векторной форме, а в проекции на ось вращения $\sum L_{z\,\text{начальн}} = \sum L_{z\,\text{конечн}}$. При этом важно учитывать знаки проекций (вращение “по” или “против” часовой стрелки).

Момент импульса физического тела, вращающегося относительно закрепленной оси z, равен произведению его момента инерции на угловую скорость вращения: $\boxed{L_z = I\omega}$. Момент импульса тела с пренебрежимо малыми размерами (материальной точки), равен произведению его импульса на плечо $\boxed{L_z = p \cdot r = mv \cdot r}$ (рис.1.19), а его момент инерции $\boxed{I_{\text{мат точки}} = mr^2}$.

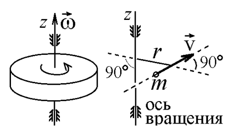


Рис.1.19

Моменты инерции симметричных тел, используемых в задачах, приведены на рис.1.7. Если ось вращения z не совпадает с осью симметрии вращающегося тела, то момент инерции вычисляется с помощью теоремы Штейнера $\boxed{I_z = I_c + md^2}$, где I_c –момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс (рис.1.7), d – расстояние между осями. Например, момент инерции тонкого стержня длины l относительно оси, проходящей через его край, равен $I_z = ml^2/12 + ml^2/4 = ml^2/3$ (рис.1.20).

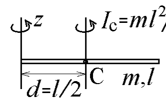
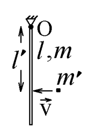


Рис.1.20

Примеры решения задач:

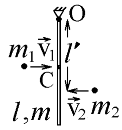


5.1. Предмет, размерами которого можно пренебречь, летел горизонтально со скоростью v = 3 м/с и прилип к неподвижно висевшему тонкому стержню массы $m = 5$ кг и длины $l = 2$ м на расстоянии $l' = 1$ м от оси подвеса О. Сразу после удара стержень с прилипшим предметом начал вращаться с угловой скоростью $\omega = 0{,}5$ рад/с. Найти массу m' предмета.

Решение.

Моменты инерции складываются, и стержень вместе с прилипшим к нему предметом имеет относительно оси вращения О общий момент инерции $I = I_{\text{стерж}} + I_{\text{предм}} = ml^2/3 + m'l'^2$. Приравнивая величины момента импульса $L_{\text{после}} = I\omega$ после удара и момента импульса $L_{\text{до}} = m'v \cdot l'$ летевшего предмета до удара (при столкновении момент импульса сохраняется), находим $m' = \dfrac{ml^2\omega}{3l'(\text{v} - l'\omega)} = 1{,}33$ кг.

5.2. Два шарика, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в противоположных направлениях перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса O висевшего неподвижно тонкого стержня массы m = 6 кг и длины l = 3 м, и одновременно прилипли к стержню (см. рисунок). Шарик с массой m_1 = 0,4 кг и скоростью v_1 = 6 м/с прилип в центре стержня, а шарик с массой m_2 = 0,3 кг и скоростью v_2 = 12 м/с – на расстоянии l' = 2 м от оси подвеса. Найти величину угловой скорости, с которой начал вращаться по часовой стрелке стержень с прилипшими шариками сразу после удара.



Решение.

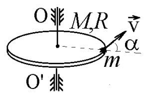
Совет:

Внимательно следите за направлениями движения и вращения тел, чтобы учесть проекции их моментов импульса на ось вращения с правильными знаками.

Следите за тем, чтобы используемые моменты инерции соответствовали заданной оси вращения.

Так как стержень начнет вращаться по часовой стрелке, то момент импульса нижнего шарика до удара больше, чем момент импульса верхнего шарика. Его надо записать в уравнении закона сохранения импульса со знаком "+": $L_{\text{до}} = m_2\text{v}_2 \cdot l' - m_1\text{v}_1 \cdot l/2 = L_{\text{после}} = I\omega$. Здесь I – сумма моментов инерции стержня и прилипших к нему шариков (материальных точек): $I = ml^2/3 + m_1(l/2)^2 + m_2 l'^2$. Из этого равенства находим $\omega = \dfrac{m_2\text{v}_2 \cdot l' - m_1\text{v}_1 \cdot l/2}{ml^2/3 + m_1(l/2)^2 + m_2 l'^2} = 0{,}179$ рад/с.

5.3. Тонкий сплошной диск с массой M = 50 г и с радиусом R = 16 см может вращаться без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии OO', проходящей через центр диска. Вначале диск покоился, а затем жук, сидевший на ободе диска, улетает со скоростью v = 15 м/с в горизонтальном направлении под углом $\alpha = 60^\circ$ к радиальной линии (см. рисунок). После этого диск начинает вращаться с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Найти величину массы m жука.



Решение.

Жук летит в одну сторону приобретая момент импульса $L_{\text{ж}} = m\text{v} \cdot l$, где плечо $l = R\sin\alpha$ (это кратчайшее расстояние от оси O до линии скорости, см. рис.1.21). Диск начинает вращаться в противоположную сторону с моментом импульса $L_{\text{д}} = I_{\text{диска}}\omega = MR^2\omega/2$. Момент импульса системы, равный нулю до начала движения, не изменится: $L_{\text{ж}} - L_{\text{д}} = m\text{v} \cdot l - MR^2\omega/2 = 0$. Отсюда $m = \dfrac{MR\omega}{2\text{v}\sin\alpha} = 3{,}08$ г.

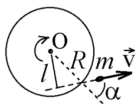
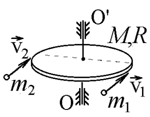


Рис.1.21

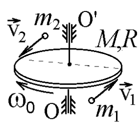
5.4. Диск массы M = 160 г и радиуса R = 20 см может вращаться без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии OO', и вначале покоится. К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами m_1 и m_2 = 20 г, размерами которых можно пренебречь, летевшие в одном направлении с горизонтально направленными скоростями v_1 = 5 м/с и v_2 = 17 м/с соответственно. Шарики одновременно прилипают к ободу диска, который начинает вращаться с угловой скоростью ω = 10 рад/с по часовой стрелке. Найти величину массы m_1 первого шарика.



Решение.

Так как диск начинает вращаться по часовой стрелке, то момент импульса второго шарика $L_2 = m_2\text{v}_2 \cdot R$ относительно оси OO' больше, чем момент импульса первого шарика $L_1 = m_1\text{v}_1 \cdot R$, направленный противоположно вращению диска. Подставляя в закон сохранения момента импульса $L_2 - L_1 = I\omega$ общий момент инерции диска с прилипшими шариками (материальными точками) $I = MR^2/2 + m_1R^2 + m_2R^2$, находим из этого уравнения $m_1 = \dfrac{m_2\text{v}_2 - (m_2 + M/2)\omega R}{\text{v}_1 + \omega R} = 20$ г.

5.5. Диск с массой M = 100 г вращался с угловой скоростью ω_0 = 10 рад/с по часовой стрелке без трения вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии OO'. К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами m_1 = 20 г и m_2 = 30 г, с пренебрежимо малыми размерами, летевшие в противоположных направлениях с горизонтально направленными скоростями v_1 = 10 м/с и v_2 = 5 м/с соответственно. Шарики одновременно прилипли к ободу диска, после чего он начал вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω = 15 рад/с . Найти величину радиуса R диска.



Решение.

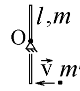
В отличие от предыдущей задачи, оба шарика стремятся повернуть диск против часовой стрелки, и направления их моментов импульса $L_1 = m_1\text{v}_1 \cdot R$ и $L_2 = m_2\text{v}_2 \cdot R$ совпадают. Но первоначально диск вращался в другую сторону, и с учётом этого вращения с угловой скоростью ω_0 закон сохранения момента импульса запишется в виде $L_1 + L_2 - I_{\text{диска}}\omega_0 = I\omega$.

Подставляя сюда момент инерции диска $I_{\text{диска}} = MR^2/2$ до столкновения и суммарный момент инерции диска с прилипшими шариками $I = I_{\text{диска}} + m_1R^2 + m_2R^2$ после столкновения, находим из записанного уравнения

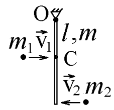
$$R = \frac{m_1\text{v}_1 + m_2\text{v}_2}{(m_1 + m_2)\omega + M(\omega + \omega_0)/2} = 0{,}175 \text{ м.}$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

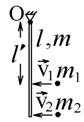
5.6. Тонкий стержень с массой m = 6 кг может вращаться вокруг горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его центр, и первоначально неподвижен в вертикальном положении. В его нижний конец врезается и застревает тяжёлая пуля с массой m'= 500 г, размерами которой можно пренебречь, летевшая горизонтально со скоростью v = 15 м/с. Найти длину стержня l, если сразу после удара стержень с застрявшей в нём пулей начинает вращаться с угловой скоростью ω = 4 рад/с. *Ответ*: 1,5 м



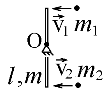
5.7. Два шарика, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в противоположных направлениях перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса O висевшего неподвижно тонкого стержня массы m = 3 кг и длины l = 2 м (см. рисунок). Шарик с массой m_1 = 0,8 кг и скоростью v_1 = 6 м/с прилип к центру C стержня, а шарик с массой m_2 = 0,2 кг одновременно прилип к его нижней точке. Найти скорость v_2 нижнего шарика до удара, если сразу после удара стержень начал вращаться против часовой стрелки с угловой скоростью ω = 0,6 рад/с.
Ответ: 3,6 м/с



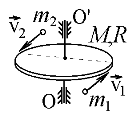
5.8. Две пули, размерами которых можно пренебречь, летели горизонтально в одном направлении перпендикулярно к горизонтальной оси подвеса O неподвижно висевшего тонкого стержня массы m = 3 кг и длины l = 2 м, и одновременно врезались и застряли в стержне (см. рисунок). Пуля с массой m_1 = 0,4 кг и скоростью v_1 = 2 м/с застряла на расстоянии l' = 1,5 м от оси подвеса, а пуля с массой m_2 и скоростью v_2 = 4 м/с – в нижней точке стержня. Найти массу m_2 нижней пули, если после удара стержень начал вращаться с угловой скоростью ω = 0,5 рад/с.
Ответ: 0,208 кг



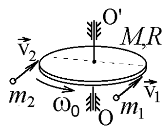
5.9. Тонкий стержень массы m = 3 кг и длины l = 2 м может вращаться вокруг горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его центр, и первоначально неподвижен в вертикальном положении. К его нижнему и верхнему краю одновременно прилипают два шарика с массами m_1 = 0,8 кг и m_2 = 0,3 кг, размерами которых можно пренебречь. Шарики летели горизонтально в одном направлении перпендикулярно к оси O со скоростями v_1 = 3 м/с и v_2 (см. рисунок). Найти скорость v_2 нижнего шарика до удара, если сразу после удара стержень с прилипшими к нему шариками начал вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью ω = 0,6 рад/с.
Ответ: 12,2 м/с



5.10. Первоначально покоящийся диск с радиусом R = 16 см может вращаться без трения вокруг своей вертикальной закрепленной оси симметрии OO'. К ободу диска по касательным подлетают два пластилиновых шарика с массами m_1 = 8 г и m_2 = 12 г, размерами которых можно пренебречь, летевшие в противоположных направлениях с горизонтально направленными скоростями v_1 = 15 м/с и v_2 = 10 м/с. Шарики одновременно прилипают к ободу диска, после чего он начинает вращаться с угловой скоростью ω = 15 рад/с. Найти величину массы M диска. *Ответ*: 160 г



5.11. Диск с массой M = 90 г и радиусом R= 20 см, вращался с угловой скоростью ω_0 против часовой стрелки вокруг вертикальной закрепленной оси симметрии OO'. К ободу диска по касательным подлетели два маленьких шарика с массами m_1 = 6 г и m_2 = 9 г с горизонтально направленными скоростями v_1 = 3 м/с и v_2 = 4 м/с (см. рисунок). Шарики одновременно прилипли к ободу диска, после чего он продолжил вращаться в прежнем направлении с угловой скоростью ω = 3 рад/с. Найти начальную угловую скорость диска ω_0. *Ответ*: 6 рад/с



6. Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия физического тела складывается из его кинетической энергии поступательного и вращательного движений и потенциальной энергии в поле внешних сил: $\boxed{E_{\text{мех}} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2} + E_{\text{пот}}}$.

Совет: *В задачах проще и удобнее представить движение вращающегося тела как сумму поступательного движения со скоростью* v_c *центра масс и вращения с угловой скоростью* ω *вокруг оси, проходящей через центр масс (рис.1.22). Тогда* $E_{\text{кинетич}} = \dfrac{mv_c^2}{2} + \dfrac{I_c\omega^2}{2}$, *где* I_c *– момент инерции тела относительно этой оси.*

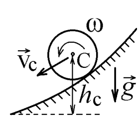


Рис.1.22

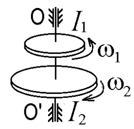
Потенциальную энергию тела в поле силы тяжести определяют по высоте подъёма h_c *его центра масс:* $E_{\text{пот}} = mgh_c$.

Механическая энергия сохраняется в том случае, когда все действующие в системе силы консервативны, и их работа равна изменению (убыли) потенциальной энергии. Например, $E_{\text{мех}} = \text{const}$ при абсолютно упругом соударении тел.

Если соударение неупругое или в системе действует неконсервативная сила (в задачах механики это сила трения скольжения), то часть механической энергии превращается в тепло:
$\Delta E_{\text{мех}} = E_{\text{мех начальн}} - E_{\text{мех конечн}} = Q$.

Примеры решения задач:

6.1. Два тонких диска могут вращаться без трения вокруг общей вертикальной оси симметрии ОО'. Верхний диск с моментом инерции I_1 = 3 кг·м^2, вращавшийся с угловой скоростью ω_1 = 2 рад/с, упал на нижний диск с моментом инерции I_2 = 2 кг·м^2, вращавшийся в противоположном направлении с угловой скоростью ω_2 = = 4 рад/с. Диски слиплись и стали вращаться вместе. Во сколько раз уменьшилась после этого кинетическая энергия вращательного движения системы?



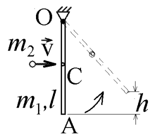
Решение.

Совет: *В задачах, в которых происходит столкновение или разлетание тел недостаточно использовать только уравнение закона сохранения или изменения механической энергии. В таких задачах его надо решать вместе с уравнением закона сохранения импульса или момента импульса.*

Начальная кинетическая энергия складывалась из кинетической энергии вращательного движения дисков: $E_{нач} = I_1\omega_1^2/2 + I_2\omega_2^2/2$. После слипания диски имеют общий момент инерции $I = I_1 + I_2$ и вращаются с общей угловой скоростью ω, которую можно найти из закона сохранения момента импульса $I_2\omega_2 - I_1\omega_1 = I\omega$ (знак "-" указывает на то, что диски вращались в разные стороны). Конечная кинетическая энергия слипшихся дисков будет равна $E_{кон} = (I_1 + I_2)\omega^2/2$.

Подставляя записанные соотношения, видим, что она уменьшается в $\dfrac{E_{нач}}{E_{кон}} = \dfrac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}{(I_1+I_2)\omega^2} = \dfrac{(I_1+I_2)(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)}{(I_2\omega_2 - I_1\omega_1)^2} = 55$ раз.

6.2. Тонкий стержень массы m_1 и длины l = 1 м висит неподвижно и способен вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси О подвеса на его краю. В центр стержня С врезается и прилипает летящий со скоростью v = 2,1 м/с горизонтально и перпендикулярно к оси О маленький пластилиновый шарик той же массы $m_2 = m_1$. На какую максимальную высоту h поднимется нижний край стержня А после удара?



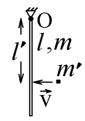
Решение.

Так как массы тел одинаковы, $m_1 = m_2 = m$, то после столкновения стержень с прилипшим шариком имеет суммарный момент инерции $I = m_1l^2/3 + m_2(l/2)^2 = 7ml^2/12$ и начинает вращаться вокруг оси О с угловой скоростью ω, которую определяют из закона сохранения момента импульса $L_{до} = m_2\text{v}\cdot l/2 = L_{после} = I\omega$. Отсюда $\omega = \dfrac{m\text{v}l}{2I} = \dfrac{6\text{v}}{7l}$.

Кинетическая энергия такого вращательного движения перейдёт в потенциальную энергию подъёма центра масс С системы на максимальную высоту: $\dfrac{I\omega^2}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7ml^2}{12}\cdot\left(\dfrac{6\text{v}}{7l}\right)^2 = \dfrac{3m\text{v}^2}{14} = 2mgh_C$ (масса системы равна $m_1 + m_2 = 2m$).

Точка А находится на вдвое большем расстоянии от оси О, чем точка С. Поэтому максимальная высота её подъёма будет в 2 раза больше. Если принять g = 10 м/с^2, то $h_A = 2h_C = 3\text{v}^2/14g$ = 9,45 см.

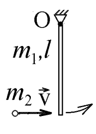
6.3. Маленькое тело с массой m'= 0,5 кг, размерами которого можно пренебречь, летело горизонтально со скоростью v = 14 м/с и застряло в неподвижно висевшем тонком стержне массы m = 1 кг на расстоянии l' = 4 м от оси подвеса О. Найти длину стержня l, если при ударе выделяется теплота Q = 25 Дж.



Решение.

Начальная энергия системы была равна кинетической энергии летящего шарика: $E_{нач} = m'\text{v}^2/2$, а после удара стержень начинает вращаться с угловой скоростью ω, имея кинетическую энергию $E_{кон} = I\omega^2/2$. Выделившееся при ударе тепло равно разности этих энергий $Q = E_{кон} - E_{нач} = I\omega^2/2 - m'\text{v}^2/2$. Угловую скорость ω выражаем из закона сохранения момента импульса, выполняющегося в момент удара: $m'\text{v}\cdot l' = I\omega$. После подстановки получим величину момента инерции стержня с застрявшим телом $I = \dfrac{(m'\text{v}l')^2}{m'\text{v}^2 - 2Q}$ = 16,333 кг·м^2, который должен быть суммой моментов инерции стержня и маленького тела относительно оси О: $I = \dfrac{ml^2}{3} + m'l'^2$. Отсюда $l = \sqrt{\dfrac{3(I - m'l'^2)}{m}}$ = 5 м.

6.4. Тонкий стержень массы m_1= 60 г и длины l, висит неподвижно и может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси О, проходящей через точку подвеса на его краю. В противоположный конец стержня врезается летящий со скоростью v = 28 м/с горизонтально и перпендикулярно к оси О маленький стальной шарик с массой $m_2 = m_1/4$ = 15 г, который испытывает абсолютно упругий удар со стержнем. Найти величину и направление скорости шарика после удара.



Решение.

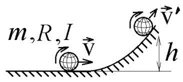
Стержень сразу после удара начнёт вращаться с угловой скоростью ω, а шарик продолжит движение с новой скоростью u. При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения механической энергии $\dfrac{m_2\text{v}^2}{2} = \dfrac{I\omega^2}{2} + \dfrac{m_2u^2}{2}$, где

$I = \frac{1}{3} m_1 l^2$ – момент инерции стержня относительно оси О. Это уравнение надо решать совместно с уравнением закона сохранения момента импульса $m_2 \text{v} \cdot l = I\omega + m_2 u \cdot l$ (предположили, что шарик продолжает двигаться в прежнем направлении).

Выражая переменную ω из второго уравнения и подставляя её в первое уравнение, находим $\frac{m_2\left(\text{v}^2 - u^2\right)}{2} = \frac{3m_2^2\left(\text{v} - u\right)^2}{2m_1}$. Т.к. $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$, то $\text{v}^2 - u^2 = (\text{v} - u)(\text{v} + u) = 3(\text{v} - u)^2 / 4$, что даёт $\text{v} + u = 3(\text{v} - u)/4$.

Отсюда $u = -\frac{\text{v}}{7} = -4$ м/с. Знак “-” указывает на то, что шарик изменит направление движения и полетит налево.

6.5. Тонкостенная сфера массы m и радиуса R, момент инерции которой относительно горизонтальной оси симметрии равен $I = 2mR^2/3$, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v = 4 м/с. На какую высоту h вверх по склону она должна закатиться, чтобы её скорость уменьшилась в 4 раза? Принять $g = 10$ м/с^2.



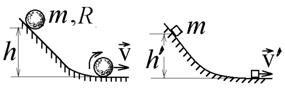
Решение.

Соприкасающаяся с поверхностью точка сферы не смещается, и работа действующей на неё силы трения равна нулю. Поэтому при качении без проскальзывания механическая энергия тела сохраняется. С учетом связи линейной и угловой скорости катящегося тела $\text{v} = \omega R$ его кинетическая энергия $E_{\text{кин}} = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\frac{\text{v}^2}{2}$ будет равна $E_{\text{кин}} = 5m\text{v}^2/6$ для катящейся сферы.

Совет: *Следите за тем, какое катящееся тело (шар, диск, …) задано в условии задачи. Учитывайте его момент инерции.*

При подъёме на высоту h эта энергия уменьшается на величину $mgh = \Delta E_{\text{кин}} = 5m\left(\text{v}^2 - \text{v}'^2\right)/6$, где по условию $\text{v}' = \text{v}/4$. Отсюда $h = 5\left(\text{v}^2 - \text{v}^2/16\right)/6g = 25\text{v}^2/32g = 1{,}25$ м.

6.6. Шар массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания и без начальной скорости по наклонной поверхности с высоты $h = 14$ м и имеет внизу скорость v. С какой высоты h’ должно соскользнуть вниз **без трения** и без начальной скорости маленькое тело с той же массой m, чтобы его скорость внизу была равна v’ = v/5?



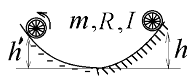
Решение.

Закон сохранения механической энергии при скатывании без начальной скорости шара

$$\underset{\text{вверху}}{mgh} = \underset{\text{внизу}}{E_{\text{кин}}} = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I_{\text{шара}}\omega^2}{2} = \frac{7m\text{v}^2}{10},$$

так как $I_{\text{шара}} = 2mR^2/5$ (рис.1.7) и $\omega = \text{v}/R$. Для скользящего тела этот закон имеет вид $mgh' = m\text{v}'^2/2$. Поделив левые и правые части этих уравнений, получим $\frac{h'}{h} = \frac{5}{7}\frac{\text{v}'^2}{\text{v}^2} = \frac{1}{35}$, откуда h’ = 0,4 м.

6.7. Колесо массы $m = 2$ кг и радиуса R, момент инерции которого относительно горизонтальной оси симметрии равен $I = mR^2/3$, скатывается без проскальзывания и без начальной скорости с высоты $h = 3$ м по правому шершавому склону ямы и продолжает скользить без трения по левому идеально гладкому склону ямы, вращаясь вокруг своей оси (см. рисунок). Чему равна величина кинетической энергии колеса в верхней точке подъёма h’? Принять $g = 10$ м/с^2.



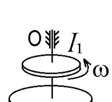
Решение.

При качении без проскальзывания $\text{v} = \omega R$. Кинетическая энергия вращательного движения колеса с учетом заданного в условии момента инерции равна $E_{\text{кин вр}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mR^2\cdot\left(\frac{\text{v}}{R}\right)^2 = \frac{m\text{v}^2}{6}$. Скатываясь по правому склону, колесо приобретает кинетическую энергию $E_{\text{кин}} = mgh = m\text{v}^2/2 + I\omega^2/2 = 2m\text{v}^2/3$. Отсюда в нижней точке ямы скорость движения колеса $\text{v} = \sqrt{\frac{3gh}{2}}$, а $E_{\text{кин вр}} = \frac{mgh}{4} = 15$ Дж.

При подъёме по левому склону кинетическая энергия поступательного движения переходит в потенциальную энергию $m\text{v}^2/2 = mgh'$, и на высоте h’ центр масс колеса останавливается. Но сила трения отсутствует. Нет момента сил, который затормозил бы вращение колеса вокруг оси симметрии, проходящей через его центр. В верхней точке подъёма колесо продолжает вращаться и имеет ту же, что и внизу, кинетическую энергию вращательного движения $E_{\text{кин вр}} =$ 15 Дж.

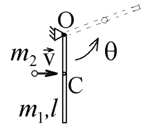
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

6.8. Два диска могут вращаться без трения вокруг общей вертикальной оси симметрии ОО’. Верхний диск с моментом инерции $I_1 = 3$ кг·м^2 относительно этой оси, вращавшийся с угловой скоростью ω, упал на нижний покоившийся диск. Диски слиплись и вращаются вместе, а кинетическая энергия вращательного движения данной системы уменьшилась при этом в $k = 4$ раза. Найти величину момента инерции I_2 нижнего диска.



Ответ: 9 кг·м^2

6.9. Тонкий стержень массы m_1 и длины l = 40 см, висит неподвижно и может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси O подвеса проходящей через его край. К центру стержня C прилипает летевший горизонтально и перпендикулярно к оси O маленький пластилиновый шарик той же массы $m_2 = m_1$. При какой величине скорости шарика v стержень с прилипшим к нему шариком отклонится от первоначального положения на максимальный угол $\theta = 180^o$? Принять g = 10 м/с^2. *Ответ*: 6,11 м/с

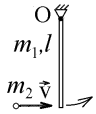


6.10. Тонкий стержень массы m_1=160 г и длины l может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси O, проходящей через его середину. Первоначально стержень расположен вертикально и неподвижен. В его нижний край врезается и прилипает летящий перпендикулярно к оси O горизонтально со скоростью v = 7 м/с маленький пластилиновый шарик массы m_2 = 40 г. Сколько тепла выделится при неупругом ударе?

Ответ: 0,56 Дж

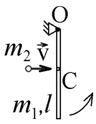
6.11. Тонкий стержень массы m_1= 45 г и длины l, висит неподвижно и может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его край. В противоположный конец стержня врезается летящий горизонтально и перпендикулярно к оси O со скоростью v = 8 м/с маленький стальной шарик той же массы $m_2 = m_1$. Удар абсолютно упругий. Какая часть кинетической энергии налетающего шарика (в %) превращается сразу после удара в кинетическую энергию стержня?

Ответ: 75 %



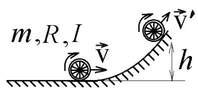
6.12. Тонкий стержень массы m_1= 30 г и длины l висит неподвижно и может вращаться вокруг закрепленной горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его край. В центр стержня C врезается летящий со скоростью v = 10 м/с горизонтально и перпендикулярно к оси O маленький стальной шарик с массой m_2. Удар абсолютно упругий. При какой величине массы m_2 скорость шарика после удара будет равна нулю?

Ответ: 40 г

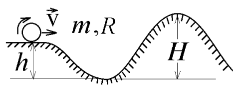


6.13. Колесо радиуса R = 10 см, момент инерции которого относительно горизонтальной оси симметрии равен I = 1 кг·м^2, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с первоначальной скоростью v = 2 м/с. Закатившись на высоту h = 1 м вверх по склону, оно имеет скорость v' = 1 м/с. Чему равна масса m колеса? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: 17,6 кг

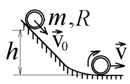


6.14. Цилиндр массы m и радиуса R катится без проскальзывания со скоростью v, скатывается в яму глубиной h = 2 м и закатывается на её противоположный склон высоты H = 3 м (см. рисунок). При какой наименьшей величине скорости v диск поднимется на вершину горба высоты H? Принять g = 10 м/с^2. *Ответ*: 3,65 м/с

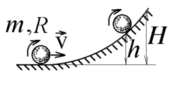


6.15. Тонкий обруч массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с начальной скоростью v_0 = 3 м/с по наклонной поверхности с высоты h = 2 м и имеет внизу скорость v. Во сколько раз возросла бы эта скорость, если бы обруч соскальзывал с той же высоты h и с той же начальной скоростью v_0 без трения, не вращаясь? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: в 1,30 раз



6.16. Шар массы m = 3 кг и радиуса R катится без проскальзывания со скоростью v по горизонтальной поверхности, а затем закатывается вверх по склону. Поднявшись на высоту h = 2 м, он имеет кинетическую энергию поступательного движения, равную $E_{кин}$ = 15 Дж. На какую максимальную высоту H может подняться шар по склону? Принять g = 10 м/с^2. *Ответ*: H = 2,7 м



7. Незатухающие механические колебания. Сложение колебаний

Обычно в простых задачах незатухающие механические колебания рассматриваются на примере пружинного маятника – грузика массы m на пружинке с коэффициентом жёсткости k, который совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и с периодом $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ (рис.1.23,а).

Амплитуду A и начальную фазу α колебаний можно найти из начальных условий для смещения $x_0 = x|_{t=0} = A\cos\alpha$ и для начальной скорости $v_0 = dx/dt|_{t=0} = -A\omega_0 \sin\alpha$ маятника.

Аналогично будут решаться задачи в случае колебаний физического или математического маятника, в которых по гармоническому закону будет изменяться не смещение x, а угол отклонения от положения равновесия $\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ (рис.1.23,б).

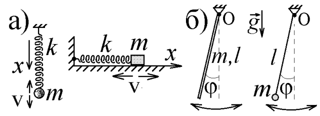
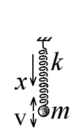


Рис.1.23

Если в условии задачи сказано, что в начальный момент t = 0 маятник покоится, то он находится в точке максимального смещения $x|_{t=0} = A$, и его координата в дальнейшем меняется по закону $x = A\cos(\omega_0 t)$. Если же сказано, что при t = 0 скорость маятника максимальна, то удобнее выразить изменение его координаты формулой $x = A\sin(\omega_0 t)$. Тогда $v|_{t=0} = A\omega_0 \cos 0 = \max$.

Примеры решения задач:

7.1. Грузик на пружинке с жёсткостью k = 0,8 Н/м совершает вертикальные незатухающие колебания. В начальный момент t = 0 смещение грузика относительно положения равновесия равно x_0 = 2 см, а величина его скорости в этот момент времени v_0 = 0,1 м/с. Найти массу грузика m, если максимальное смещение грузика относительно



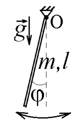
положения равновесия равно x_{max} = 3 см.

Решение.

Запишем уравнение гармонических колебаний грузика в виде $x = x_{max}\sin(\omega_0 t + \alpha)$. Тогда начальное смещение и скорость грузика в момент t = 0 равны $x_0 = x_{max}\sin\alpha$ и $v_0 = dx/dt|_{t=0} = x_{max}\omega_0\cos\alpha$.

Исключаем из этих равенств начальную фазу α с помощью соотношения $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, т.е. $\frac{v_0^2}{x_{max}^2\omega_0^2} = 1 - \frac{x_0^2}{x_{max}^2}$.

Отсюда $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{v_0^2}{x_{max}^2 - x_0^2}$ и $m = k\left(x_{max}^2 - x_0^2\right)\Big/ v_0^2 = 40$ г.

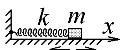


7.2. Тонкий стержень совершает незатухающие гармонические колебания вокруг горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его край. В начальный момент времени t_0 = 0 угловая скорость вращения стержня относительно оси O равна нулю. В момент времени t = 0,4 с величина угла отклонения стержня φ от положения равновесия в первый раз уменьшилась в три раза. Найти длину стержня l. Принять g = 9,8 м/с^2.

Решение.

Циклическая частота колебания такого физического маятника равна $\omega_0 = \sqrt{mgd/I_o}$, где $d = l/2$, $I_o = ml^2/3$ - момент инерции стержня относительно оси O. Т.е. $\omega_0 = \sqrt{mgd/I_o} = \sqrt{3g/2l}$. По условию при t = 0 стержень покоится и угол отклонения φ максимален. Поэтому зависимость угла φ от t можно записать в виде $\varphi = \varphi_{max}\cos(\omega_0 t)$. А так как при t = 0,4 с $\varphi/\varphi_{max} = \cos(\omega_0 t) = 1/3$, то $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} = \frac{\arccos(1/3)}{t}$. Отсюда $l = \frac{3gt^2}{2\arccos^2(1/3)} = 1{,}55$ м.

Не забывайте, что угол $\omega_0 t$ надо вычислять в радианах.



7.3. Грузик на пружинке с жёсткостью k = 0,8 Н/м совершает незатухающие колебания, скользя по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент t_0 = 0 скорость грузика была максимальной и равной v_0 = 9 см/с. За последующий интервал времени t =T/3, где T – период колебаний, грузик проделал путь s = 1,8 см. Найти массу m грузика (в г).

Решение.

Согласно условию, координату грузика можно записать в виде $x = A\sin(\omega_0 t)$. Тогда в начальный момент он находится в точке $x_0 = 0$ и имеет максимальную скорость $v_0 = dx/dt|_{t=0} = A\omega_0 = \max$. В момент $t = T/3 = 2\pi/3\omega_0$ координата грузика равна $x' = A\sin(2\pi/3) = A\sqrt{3}/2$.

Но из рис.1.24 видно, что за время T/4 грузик дойдёт до точки максимального смещения, а потом, совершая колебания, вернётся в точку с координатой x'. Проделанный за время T/3 путь будет равен $s = A + (A - x') = A\left(2 - \sqrt{3}/2\right)$, откуда амплитуда колебаний $A = s\Big/\left(2 - \sqrt{3}/2\right) = 1{,}587$ см.

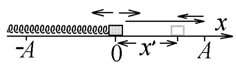
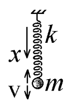


Рис.1.24

Подставляя её в формулу начальной скорости $v_0 = A\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, находим $m = A^2k\big/v_0^2 = 24{,}9$ г.

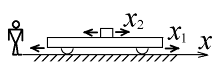


7.4. Грузик массы m = 15 г, подвешенный на пружинке с жёсткостью k = 0,96 Н/м, совершает незатухающие колебания. В начальный момент t_0 = 0 скорость грузика была равна нулю. За последующий интервал времени t =3T/8, где T – период колебаний, грузик проделал путь s = 3 см. Найти величину максимальной скорости, которую грузик может иметь в процессе движения.

Решение.

В отличие от предыдущей задачи, в момент t = 0 смещение грузика от положения равновесия было максимальным и равным амплитуде колебаний, $x|_{t=0} = A$. Затем грузик начнет двигаться к точке x = 0, и его координата будет меняться по закону $x = A\cos(\omega_0 t)$.

В момент $t = \frac{3T}{8} = \frac{3}{8}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}$ грузик окажется в точке $x = A\cos\frac{3\pi}{4} = -A\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. проделает путь $s = A + A\cdot\sqrt{2}/2$ (см.рис.1.24). Полученное отсюда выражение для амплитуды подставляем в формулу для максимальной величины скорости, которую грузик будет иметь в точке x = 0 в момент времени t = T/4: $v_0 = A\omega_0 = \frac{s}{1 + \sqrt{2}/2}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}141$ м/с.



7.5. Тележка совершает колебания в горизонтальном направлении относительно неподвижного наблюдателя по закону $x_1 = A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$. Лежащий на тележке груз одновременно совершает колебания с той же частотой относительно горизонтальной поверхности тележки по закону $x_2 = A_2\cos(\omega t + \alpha_2)$. Относительно наблюдателя груз движется по закону $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, где $\alpha = \pi/4$. Найдите величину амплитуды A результирующего колебания, если A_1 = 10 см, $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi/3$.

Решение.

Сумму однонаправленных колебаний, имеющих одну частоту ω, удобно сложить методом векторной диаграммы. На рис.1.25,а векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ направлены под углами α_1 и α_2 к оси x в момент $t = 0$. Эти векторы вращаются вокруг точки O с угловой скоростью ω, и указанные углы возрастают со временем на величину ωt. Сумма проекции таких векторов на ось x будет искомой суммой колебаний $A\cos(\omega t+\alpha) = A_1\cos(\omega t+\alpha_1) + A_2\cos(\omega t+\alpha_2)$.

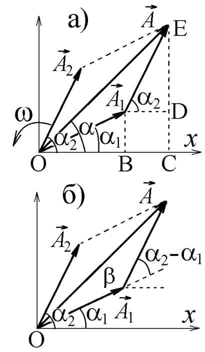
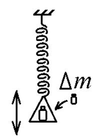


Рис.1.25

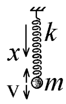
Из треугольников на рис.1.25, а видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{CE}}{\text{OC}} = \dfrac{\text{CD+DE}}{\text{OB+BC}} = \dfrac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = 1$ при $\alpha = \pi/4$. Подставляя сюда заданные в условии величины α_1 и α_2, находим $A_2 = \dfrac{\cos(\pi/6) - \sin(\pi/6)}{\sin(\pi/3) - \cos(\pi/3)} A_1 = A_1$.

Углы между векторами не меняются, и, как видно из рис.1.25,б, амплитуду A результирующего колебания можно найти с помощью теоремы косинусов, зная две стороны треугольника A_1 и A_2 и угол $\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1) = 5\pi/6$ между ними: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\beta} = A_1\sqrt{2 - 2\cos(5\pi/6)} = 19{,}3$ см.

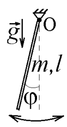
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



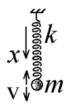
7.6. Чашка весов с гирей, подвешенная на пружине с коэффициентом жёсткости k = 20 Н/м, совершала вертикальные незатухающие колебания с периодом T_0 = 2 с. После того как на чашку добавили ещё одну гирю, период колебаний возрос на величину ΔT = 0,5 с. Найти массу Δm добавленной гири. Принять g = 9,8 м/с^2.
Ответ: 1,14 кг



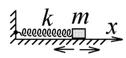
7.7. Грузик массы m = 40 г на пружинке совершает вертикальные незатухающие колебания. В начальный момент времени $t = 0$ смещение грузика относительно положения равновесия равно x_0 = 1,5 см, а величина его скорости в этот момент времени равна v_0 = 0,2 м/с. Найти коэффициент жёсткости пружинки, если максимальная величина скорости, которую будет иметь грузик, окажется равной v_{max} = 0,25 м/с. *Ответ*: 4 Н/м



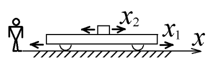
7.8. Тонкий стержень массы m совершает незатухающие гармонические колебания вокруг горизонтальной оси подвеса O, проходящей через его край. В начальный момент времени $t = 0$ величина угловой скорости вращения стержня вокруг оси O равна ω_0 = 0,3 рад/с, а угол отклонения стержня от положения равновесия равен φ_0 = 0,05 рад. В дальнейшем максимальная величина угла отклонения окажется равной φ_{max} = 0,1 рад. Найти длину стержня l. Принять g = 10 м/с^2. *Ответ*: 1,25 м



7.9. Грузик массы m = 20 г совершает вертикальные незатухающие колебания на пружинке с жёсткостью k = 1,6 Н/м. В начальный момент времени $t_0 = 0$ грузик имеет максимальную величину скорости. Найти величину скорости грузика в момент времени t = 0,1 с, если максимальное смещение грузика относительно положения равновесия равно x_{max} = 2 см. *Ответ*: 0,112 м/с



7.10. Грузик массы m = 80 г на пружинке совершает незатухающие колебания, скользя по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени $t_0 = 0$ скорость грузика была равна нулю. За последующий интервал времени $t = 5T/12$, где T – период колебаний, грузик проделал путь s = 1,2 см. Найти величину коэффициента жёсткости k пружинки, если максимальная величина скорости грузика равна v_{max} = 2,4 см/с.
Ответ: 1,11 Н/м



7.11. Тележка совершает колебания в горизонтальном направлении относительно неподвижного наблюдателя по закону $x_1 = A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$. Лежащий на тележке груз одновременно колеблется относительно горизонтальной поверхности тележки с той же частотой по закону $x_2 = A_2\cos(\omega t + \alpha_2)$. Относительно наблюдателя груз движется по закону $x = A\cos(\omega t + \alpha)$. Найти амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания, если A_1 = = 20 см, A_2 = 10 см, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/4$.
Ответ: 28,0 см; 0,255 рад

8. Физический маятник

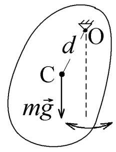


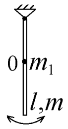
Рис.1.26

Любое массивное тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса O, не проходящей через центр масс C, будет физическим маятником (рис.1.26). Циклическая частота незатухающих колебаний и период такого маятника определяются, как $\boxed{\omega = \sqrt{mgd/I_0}}$, $\boxed{T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I_0/mgd}}$, где I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса O, который вычисляется по теореме Штейнера $I_0 = I_c + md^2$, d = CO – расстояние от центра масс до оси подвеса.

Совет: *Если физический маятник сделан из нескольких прикрепленных друг к другу тел, то расстояние d отсчитывается от их <u>общего</u> центра масс, а в формулы надо подставлять сумму масс и сумму моментов инерций таких тел:* $T = 2\pi\sqrt{\sum I_0 / \sum m\cdot gd}$.

Примеры решения задач:

8.1. Тонкий стержень длины l = 1 м с массой m = 1 кг подвешен за край и совершает незатухающие гармонические колебания вокруг оси подвеса с периодом T = 1,6 с, причем в центре О стержня закреплен груз с массой m_1, размером которого можно пренебречь. Определить массу m_1. Принять g = 10 м/с^2.



Решение.

Центр масс маятника совпадает с центром стержня О, в котором находится масса m_1. Расстояние до оси подвеса $d = l/2$. Момент инерции относительно оси подвеса складывается из момента инерции стержня, вычисляемого по теореме Штейнера, и момента инерции точечной массы m_1: $I = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 + m_1d^2 = \left(\frac{1}{3}m + \frac{1}{4}m_1\right)l^2$.

Из формулы для периода $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m+m_1)\,gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m/3+m_1/4)\,l^2}{(m+m_1)\,g\,l/2}}$ находим $m_1 = \frac{8\pi^2 l/3 - T^2 g}{T^2 g - 2\pi^2 l} = 0{,}123$ кг.

8.2. Горизонтальная ось подвеса О проходит на расстоянии $a = l/4$ от центра С тонкого стержня длины l, имеющего массу m, который совершает незатухающие гармонические колебания с циклической частотой ω = 4 с$^{-1}$ относительно этой оси. С другой стороны от центра С на том же расстоянии a на стержне закреплен груз той же массы m, размером которого можно пренебречь. Найти длину стержня l, принимая g = 9,8 м/с^2.

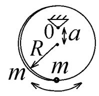
Решение.

Рис.1.27

Так как массы стержня и прикрепленного точечного груза одинаковы, то общий центра масс маятника находится точно посередине отрезка между грузом и центром стержня на расстоянии $d = 3a/2$ от оси подвеса (рис.1.27). Момент инерции относительно этой оси складывается из момента инерции стержня, вычисляемого по теореме Штейнера, и момента инерции точечной массы m: $I = \frac{1}{12}ml^2 + ma^2 + m(2a)^2 = \frac{19}{48}ml^2$, так как $a = l/4$.

Из формулы для частоты колебаний физического маятника $\omega = \sqrt{(m+m)\,gd/I} = \sqrt{36g/19l}$ находим $l = 36g/19\omega^2$ = 1,16 м.

8.3. Тонкий диск с массой m и с радиусом R = 30 см совершает незатухающие колебания относительно оси подвеса О, проходящей перпендикулярно плоскости диска на расстоянии a = 15 см от его центра. В нижней точке диска закреплен груз той же массы m, размером которого можно пренебречь. Определить циклическую частоту колебаний, принимая g = 9,8 м/с^2.

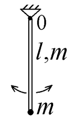


Решение.

Так как массы диска и груза одинаковы и $a = R/2$, то общий центр масс маятника находится посередине между центром диска и точечной массой m на расстоянии $d = a + R/2 = R$ от оси подвеса. Общий момент инерции маятника относительно оси О складывается из момента инерции диска $I_{\text{диска}} = mR^2/2 + ma^2 = 3mR^2/4$ (по теореме Штейнера) и момента инерции груза $I_{\text{груза}} = m(R+a)^2 = 9mR^2/4$. Подставляя эти соотношения в формулу для циклической частоты колебаний маятника, находим $\omega = \sqrt{\frac{(m+m)\,gd}{I_{\text{диска}} + I_{\text{груза}}}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ = 4,67 с$^{-1}$.

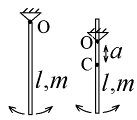
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

8.4. Тонкий стержень с массой m подвешен за край и совершает незатухающие гармонические колебания с периодом T = 2 с, причем на его противоположном конце закреплен груз той же массы m, размером которого можно пренебречь. Найти длину l стержня. Принять g = 9,8 м/с^2.



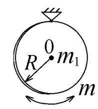
Ответ: 1,12 м

8.5. Два одинаковых тонких стержня длины l = 90 см совершают незатухающие гармонические колебания. У одного из них горизонтальная ось подвеса О проходит через край, а у другого находится на расстоянии a от центра С стержня (см. рисунок). Определить расстояние a, если периоды колебаний обоих стержней одинаковы.



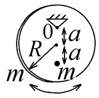
Ответ: 15 см

8.6. Тонкий диск с массой m = 100 г подвешен за край и совершает незатухающие гармонические колебания с циклической частотой ω = 4 с$^{-1}$ в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. В центре диска закреплен груз массы m_1=300 г, размером которого можно пренебречь. Принимая g = 9,8 м/с^2, найти радиус диска R.



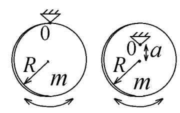
Ответ: 0,544 м

8.7. Горизонтальная ось подвеса О проходит на расстоянии $a = R/2$ от центра тонкого диска, имеющего массу m, который совершает незатухающие гармонические колебания с периодом T = 1 с в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. С другой стороны от центра диска на расстоянии a закреплен груз той же массы m, размером которого можно пренебречь. Найти радиус диска R, принимая g = 9,8 м/с^2.



Ответ: 0,213 м

8.8. Два одинаковых тонких диска с радиусом R = 1 м совершают незатухающие гармонические колебания в плоскости, совпадающей с плоскостью диска. У одного из них горизонтальная ось подвеса О проходит через край, а у другого находится на расстоянии a от центра диска (см. рисунок). Определить расстояние a, если период колебания левого диска в 2 раза меньше периода колебаний правого диска.



Ответ: 8,45 см

9. Собственные механические затухающие колебания

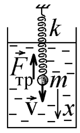


Рис.1.28

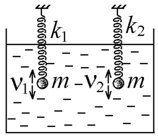
На колеблющийся в вязкой среде пружинный маятник действует тормозящая сила вязкого трения. Если на пружинке подвешен шарик радиуса r, движущийся со скоростью v (рис.1.28), то эта сила имеет вид $\vec{F}_{\text{тр}} = -6\pi\eta r\vec{v}$, где η – коэффициент вязкости среды. В результате колебания затухают по закону $\boxed{x(t) = A_0\, e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)}$, где $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда колебаний, убывающая по экспоненциальному закону, β – коэффициент затухания колебаний, пропорциональный вязкости η.

Такие колебания происходят с циклической частотой $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и с периодом $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

С ростом коэффициента затухания β период растёт, и колебания прекращаются, когда $\beta \ge \omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Затухание колебаний характеризуют также величиной логарифмического декремента затухания, который в задачах можно вычислить по формуле $\boxed{\theta = \beta T = \dfrac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$.

Примеры решения задач:



9.1. Два одинаковых шарика подвешены на пружинках с разной жёсткостью k_1 = 0,02 Н/м и k_2 = 0,04 Н/м и совершают колебания в вязкой жидкости, причем отношение частот колебаний правого и левого шариков равно $\nu_2/\nu_1 = 2$, а коэффициент затухания колебаний этих маятников β = 0,8 с[-1]. Найти массу шарика m (в г).

Решение.

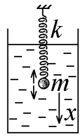
Отношение ν_2/ν_1 равно отношению циклических частот данных пружинных маятников $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{k_2/m - \beta^2}\Big/\sqrt{k_1/m - \beta^2} = 2$, откуда легко получить формулу $m = (4k_1 - k_2)\big/3\beta^2 = 20{,}8$ г.

9.2. Период собственных незатухающих колебаний шарика с массой m, висящего на пружинке с жёсткостью k, был равен T_0 = 2 с. Этот маятник погрузили в вязкую жидкость, где период его колебаний стал равным T = 2,5 с. Во сколько раз надо увеличить коэффициент вязкости этой жидкости, чтобы колебания маятника в ней прекратились?

Решение.

Заданные в условии периоды колебаний определяются формулами

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$, $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k/m - \beta^2}}$, откуда $\dfrac{k}{m} = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}$, $\beta^2 = \dfrac{k}{m} - \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2} - \dfrac{4\pi^2}{T^2}$. Колебания прекратятся, если $\beta'^2 = k/m = 4\pi^2\big/T_0^2$, т.е. вязкость жидкости надо увеличить в $\dfrac{\beta'}{\beta} = \sqrt{\dfrac{1}{T_0^2}\Big/\left(\dfrac{1}{T_0^2} - \dfrac{1}{T^2}\right)} = \sqrt{\dfrac{T^2}{T^2 - T_0^2}} = 1{,}67$ раз.



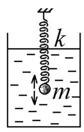
9.3. Шарик на пружинке с жёсткостью k =0,08 Н/м совершает колебания в вязкой жидкости, причем его координата меняется со временем по закону $x = A\exp(-at)\cos(bt + \alpha)$, где A, a и α – постоянные, b = 2 с[-1], а логарифмический декремент затухания этих колебаний равен θ = 4. Чему равна масса m шарика?

Решение.

Постоянные a и b в уравнении затухающих колебаний должны быть равны коэффициенту затухания и циклической частоте колебаний: $a = \beta$, $b = \omega$. При этом не заданную в условии постоянную a можно определить через известный логарифмический декремент затухания $\theta = \beta T = 2\pi\beta/\omega = 2\pi a/b$ или $a = b\theta/2\pi$.

Подставляя это выражение в формулу для циклической частоты $b = \omega = \sqrt{k/m - a^2}$, находим

$$m = k\Big/\left(\frac{\theta^2}{4\pi^2} + 1\right)b^2 = 14{,}2 \text{ г}$$



9.4. Шарик массы m = 50 г на пружинке совершал вертикальные колебания в жидкости, причем за время Δt = 0,5 с амплитуда его колебаний уменьшалася в exp(1) = 2,72 раз. Затем жидкость заменили, увеличив коэффициент её вязкости в два раза. При этом период колебаний грузика увеличился в два раза. Найти величину жёсткости k пружинки.

Решение.

Так как амплитуда $A_0 e^{-\beta t}$ убывает со временем экспоненциально, то по условию $\beta\Delta t = 1$ и $\beta = (\Delta t)^{-1} = 2$ с[-1].

Подставляя эту величину в заданное по условию отношение периодов $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{\omega}{\omega'} = \sqrt{\dfrac{k/m - \beta^2}{k/m - \beta'^2}} = 2$, где $\beta' = 2\beta$, находим $\dfrac{k}{m} = 5\beta^2$, откуда $k = 5\beta^2 m$ = 1 Н/м.

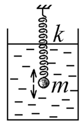
9.5. Шарик с массой m на пружинке с жёсткостью k совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости. Жидкость заменили, увеличив коэффициент её вязкости в два раза. Чему стал равен после этого логарифмический декремент затухания колебаний такого пружинного маятника, если первоначально он был равен $\theta = 1$?

Решение.

При увеличении вязкости жидкости во столько же раз увеличивается коэффициент затухания β, пропорциональный вязкости η: $\beta' = 2\beta$.

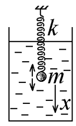
Выражая неизвестное отношение k/m из формулы для начальной величины логарифмического декремента затухания $\theta = \beta T = \dfrac{2\pi\beta}{\sqrt{k/m - \beta^2}}$, $\dfrac{k}{m} = \beta^2\left(1 + \dfrac{4\pi^2}{\theta^2}\right)$, подставляем его в формулу для $\theta' = \dfrac{2\pi\beta'}{\sqrt{k/m - \beta'^2}}$, что даёт $\theta' = 4\pi\Big/\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\theta^2} - 3} = 2{,}081$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

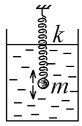


9.6. Шарик массы m на пружинке с жёсткостью k совершал вертикальные колебания с периодом T_1 = 1 с в вязкой жидкости. Если жидкость заменить, уменьшив коэффициент её вязкости в 2 раза, то период колебаний также уменьшится в 2 раза. Чему равен период T_0 незатухающих колебаний такого пружинного маятника в воздухе?

Ответ: 0,447 с

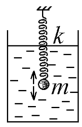


9.7. Шарик на пружинке с жёсткостью k =0,04 Н/м совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости, причем за время Δt = 1 с амплитуда колебаний уменьшалась в exp(1) = 2,72 раз, а координата шарика менялась со временем по закону $x = A\exp(-at)\cos(bt + \alpha)$, где A, a, b и α – постоянные. Жидкость разбавили водой, уменьшив при этом коэффициент её вязкости в два раза. После этого величина b увеличилась в полтора раза. Чему равна масса m шарика? *Ответ*: 25 г



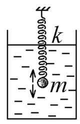
9.8. Шарик массы m = 5 г на пружинке с жёсткостью k = 0,02 Н/м совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости, причем за время Δt = 2 с амплитуда его колебаний уменьшалась в exp(1) = 2,72 раз. Грузик заменили, подвесив на пружинку шарик того же размера, но с массой m' = 10 г. Во сколько раз изменился при этом логарифмический декремент затухания колебаний такого пружинного маятника?

Ответ: увеличился в 1,464 раза



9.9. Шарик с массой m = 10 г на пружинке совершает вертикальные колебания в вязкой жидкости. Колебания на пружинке с жёсткостью k = 0,2 Н/м происходят с циклической частотой ω= 2 с$^{-1}$. Во сколько раз надо уменьшить жёсткость пружинки, чтобы колебания прекратились?

Ответ: уменьшить в 1,25 раз



9.10. Шарик с массой m на пружинке с жёсткостью k совершал в воздухе незатухающие вертикальные колебания. Когда такой маятник поместили в вязкую жидкость, он стал колебаться с периодом T = 1 с, причем логарифмический декремент затухания таких колебаний оказался равным θ = 4. С каким периодом маятник колебался в воздухе? *Ответ*: 0,844 с

10. Вынужденные механические колебания. Резонанс

Вынужденные колебания возникают при действии на маятник внешней периодической силы, изменяющейся, например, по гармоническому закону с амплитудой F_0 и частотой $\omega_{вн}$: $F_{вн} = F_0 \cos\omega_{вн} t$.

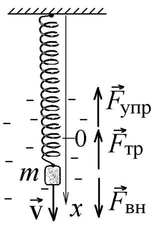


Рис.1.29

В случае пружинного маятника массы m, подвешенного на пружинке с жесткостью k и движущегося в вязкой среде с коэффициентом вязкости η, эта сила добавляется к силам упругости и вязкого трения (рис.1.29).

Вынужденные колебания происходят по закону $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_{вн} t - \varphi)}$ с постоянной амплитудой A=const и с частотой $\omega_{вн}$ внешней силы. Чтобы найти амплитуду A и начальную фазу φ, надо подставить это решение в уравнение динамики $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\dfrac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_{вн}t$.

При этом амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты внешней силы (рис.1.30): $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{вн}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{вн}^2}}$, где $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, β – коэффициент затухания. Максимум этого выражения (резонанс амплитуды смещения) получается при частоте внешней силы $\boxed{\omega_{вн} = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$.

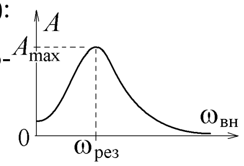


Рис.1.30

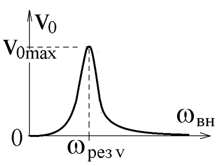
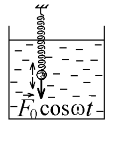


Рис.1.31

Из определения $v = dx/dt$ можно найти амплитуду скорости $v_0 = A\omega_{вн}$ маятника при вынужденных колебаниях. Она также зависит от частоты $\omega_{вн}$ (рис.1.31) и достигает максимума (резонанс амплитуды скорости) при другом значении частоты внешней силы $\boxed{\omega_{рез\,v} = \omega_0 = k/m}$.

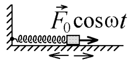
Примеры решения задач:



10.1. Грузик на пружинке совершает вертикальные колебания с постоянной амплитудой в вязкой жидкости под действием внешней силы $F_0\cos\omega t$. При частоте внешней силы, равной $\omega = \omega_1$, максимальна амплитуда смещения грузика, а при частоте $\omega = \omega_2$ максимальна амплитуда его скорости. Если действие внешней силы убрать, то грузик начнет совершать затухающие колебания с циклической частотой ω_3 Найти величину отношения частот ω_1/ω_3, если $\omega_2/\omega_1 = 3$.

Решение.

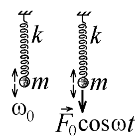
Так как $\omega_1 = \omega_{\text{рез}\,A} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, $\omega_2 = \omega_{\text{рез v}} = \omega_0$ (резонансные частоты амплитуд смещения и скорости) и $\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (собственная частота затухающих колебаний), то из заданного отношения $\omega_2/\omega_1 = \omega_0 \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 3$ находим $\beta^2 = 4\omega_0^2/9$. Подставляя это выражение, находим отношение $\dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \sqrt{\dfrac{1-8/9}{1-4/9}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = 0{,}447.$



10.2. Маленький грузик прикреплен за пружинку с жёсткостью k = 5 Н/м к вертикальной стенке и совершает колебания по горизонтальной поверхности под действием внешней силы $F = F_0\cos\omega t$, меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой ω = 5 с$^{-1}$ и амплитудой F_0 = 0,08 Н. Трение отсутствует. Найти массу m грузика, если амплитуда его колебаний равна A = 2 см.

Решение.

Подставим решение, соответствующее вынужденным колебаниям с постоянной амплитудой $x = A\cos\omega t$ в уравнение динамики (2-й закон Ньютона) $m \cdot d^2x/dt^2 = -k\,x + F_0\cos\omega t$ (в случае отсутствия вязких сил трения смещение $x = A\cos\omega t$ происходит в одной фазе с изменением внешней силы $F_0\cos\omega t$). После подстановки получим $-m\omega^2 A\cos\omega t = -kA\cos\omega t + F_0\cos\omega t$. Сокращая на $\cos\omega t$, имеем $m\omega^2 A = kA - F_0$, откуда $m = \dfrac{kA - F_0}{\omega^2 A} = 40$ г.



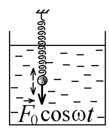
10.3. Грузик массы m = 30 г на пружинке совершал вертикальные незатухающие колебания с циклической частотой ω_0 = 6 с$^{-1}$. Когда на грузик начала действовать вертикально направленная внешняя сила $F = F_0\cos\omega t$ с амплитудой F_0 = 0,012 Н, он стал колебаться относительно положения равновесия с амплитудой A = 2 см. Вязкое трение отсутствует. Найти максимальную величину скорости вынужденных колебаний грузика.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, подставляем решение $x = A\cos\omega t$ в уравнение динамики $m \cdot d^2x/dt^2 = -k\,x + F_0\cos\omega t$ (сила тяжести уравновешена силой упругости пружинки в положении равновесия). Вычисляя производную и сокращая на $\cos\omega t$, получим $m\omega^2 A = kA - F_0$. Из этого соотношения можно найти неизвестную частоту внешней силы, если выразить коэффициент жёсткости пружинки k через частоту собственных незатухающих колебаний $k = m\omega_0^2$. Тогда

$\omega = \sqrt{\dfrac{kA - F_0}{mA}} = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{F_0}{mA}} = 4$ с$^{-1}$.

Скорость грузика $\mathrm{v} = dx/dt = -A\omega\sin\omega t$ имеет максимальную величину $\mathrm{v}_{max} = A\omega = 0{,}08$ м/с.



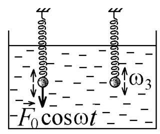
10.4. Шарик массы m = 60 г на пружинке совершал вертикальные колебания в вязкой жидкости под действием внешней силы $F_0\cos\omega t$, меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой ω, причем при частоте $\omega = \omega_1$ = 8 с$^{-1}$ наблюдалось максимальное увеличение амплитуды колебаний. Если вязкость жидкости увеличить в два раза, то амплитуда смещения шарика снова окажется максимальной при другом значении циклической частоты внешней силы $\omega = \omega_2$ = 6 с$^{-1}$. Найти величину коэффициента жёсткости k пружинки.

Решение.

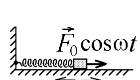
Резонанс амплитуды достигался при частоте $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_1^2}$. Изменив вязкость жидкости $\beta_1 \to \beta_2$, изменили резонансную частоту амплитуды смещения $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2}$. Из этих формул можно получить заданное в условии отношение коэффициентов затухания колебаний, пропорциональных вязкости жидкости: $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\dfrac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}} = 2$. Из этого отношения находим

$\omega_0^2 = \dfrac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{3}$ и $k = m\omega_0^2 = m\dfrac{4\omega_1^2 - \omega_2^2}{3} = 4{,}4$ Н/м.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

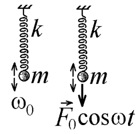


10.5. Два одинаковых грузика на одинаковых пружинках совершают вертикальные колебания в вязкой жидкости. Левый грузик колеблется с постоянной амплитудой под действием внешней силы $F_0\cos\omega t$, меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой ω. При частоте внешней силы, равной $\omega = \omega_1$ максимальна амплитуда смещения левого грузика, а при частоте $\omega = \omega_2$ максимальна амплитуда его скорости. Правый грузик совершает свободные затухающие колебания с циклической частотой ω_3. Найти величину отношения частот ω_1/ω_3, если $\omega_2/\omega_3 = 1{,}4$. *Ответ*: 0,2

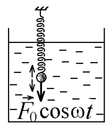


10.6. Один конец пружинки с жёсткостью k = 6 Н/м прикреплен к стене, а на другом конце закреплен маленький грузик, который совершает незатухающие колебания по горизонтальной абсолютно гладкой поверхности с циклической частотой ω_0 = 6 с$^{-1}$. Когда на грузик начала действовать внешняя сила $F = F_0\cos\omega t$, меняющаяся по гармоническому закону с циклической частотой $\omega = 4$ с$^{-1}$, он стал колебаться с амплитудой $A = 2{,}4$ см. Найти величину амплитуды F_0 этой силы.

Ответ: 0,08 Н



10.7. Грузик на пружинке с жёсткостью $k = 5$ Н/м совершал вертикальные незатухающие колебания с циклической частотой ω_0. Когда на грузик начала действовать вертикально направленная внешняя сила $F = F_0\cos\omega t$ с амплитудой $F_0 = 0{,}084$ Н, меняющаяся по гармоническому закону с циклической частотой ω, он стал колебаться относительно положения равновесия с амплитудой $A = 2$ см. Вязкое трение отсутствует. Найти величину отношения частот ω_0/ω. *Ответ*: 2,5



10.8. Шарик массы $m = 40$ г на пружинке с жёсткостью $k = 4{,}8$ Н/м совершает вертикальные колебания в вязкой жидкости под действием внешней силы $F_0\cos\omega t$, меняющейся по гармоническому закону с циклической частотой ω, причем при частоте $\omega = \omega_1 = 6$ с$^{-1}$ наблюдается максимальное увеличение амплитуды колебаний. Во сколько раз надо уменьшить коэффициент вязкости жидкости, чтобы максимум амплитуды смещения шарика наблюдался при новом значении частоты внешней силы $\omega = \omega_2 = 10$ с$^{-1}$?

Ответ: в 2,05 раз

11. Первое начало термодинамики. Работа идеального газа

Совет: *Чтобы решить любую термодинамическую задачу надо записать и решить систему из следующих уравнений: 1) Уравнения состояния; 2) Уравнения всех заданных по условию равновесных термодинамических процессов; 3) Уравнение первого начала термодинамики.*

Для используемого при решении задач контрольной работы идеального газа такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \boxed{pV = \dfrac{m}{\mu}RT} \text{ (уравнение состояния идеального газа);} \\ f\left(p, V, T\right) = 0 \text{ (уравнение процесса);} \qquad\qquad (\Sigma) \\ \boxed{Q = \Delta U + A_{\text{газа}}} \text{ (первое начало термодинамики).} \end{cases}$$

Здесь p – давление, V – объём, T – термодинамическая температура газа (в К), m – его масса, μ – молярная масса, Q – теплота, получаемая (при $Q>0$) или отдаваемая (при $Q<0$) газом.

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется изменением его температуры $\boxed{\Delta U = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{i}{2}R\Delta T}$,

где i – число степеней свободы молекул газа, $R = 8{,}31$ Дж/К$\cdot$моль - универсальная газовая постоянная. Работа идеального газа вычисляется по формуле $\boxed{A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} pdV}$. Она различна для разных газовых процессов, положительна, если газ расширяется, и отрицательна, если газ сжимается.

Совет: *Если работа совершается внешними телами над газом, то она меняет знак: $A_{\text{над газом}} = -A_{\text{газа}}$. Следите за этим условием. Следите за тем, принимает или отдаёт газ теплоту Q. От этого зависят знаки величин в уравнении* I-*го начала термодинамики.*

Примеры решения задач:

11.1. Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление растёт с изменением объёма по закону $p = \alpha V^6$, где $\alpha = 1400$ Н$\cdot$м$^{-20}$. Объём газа возрастает от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 2 м^3. При этом газу сообщается теплота Q = 292,1 кДж. Найти приращение внутренней энергии газа ΔU (в кДж).

Решение.

Вычисляем работу газа. Так как $V_2 = 2V_1$, то

$$A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \alpha\int_{V_1}^{2V_1} V^6 dV = \alpha\frac{(2V_1)^7 - V_1^7}{7} = \alpha\frac{2^7 - 1}{7}V_1^7 = \frac{127}{7}\alpha V_1^7 = 25{,}4 \text{ кДж.}$$

Из уравнения 1-го начала термодинамики: $\Delta U = Q - A_{\text{газа}} = 266{,}7$ кДж.

11.2. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением объёма по закону $T = \dfrac{\alpha}{R}V^{1/4}$, где $\alpha = 100$ Н$\cdot$м$^{1/4}$/моль, R – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 16 м^3. При этом газу сообщается теплота Q = 700 Дж. Найти приращение внутренней энергии газа ΔU (в Дж).

Решение.

Совет: *Чтобы вычислить работу газа по формуле $A_{\text{газа}} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$ надо выразить все переменные под знаком интеграла через одну переменную, пределы изменения которой заданы в условии задачи. Это можно сделать, используя уравнение состояния и уравнение процесса.*

Исключаем температуру T из уравнения состояния для $m/\mu = 1$ моля газа и заданного в условии уравнения процесса, $T = \dfrac{pV}{R} = \dfrac{\alpha}{R}V^{1/4}$. Отсюда находим связь $p = \alpha V^{-3/4}$. С учётом $V_2 = 2^4 V_1$ работа газа при его расширении $A_{\text{газа}} = \alpha\int_{V_1}^{V_2} V^{-3/4}dV = \alpha\dfrac{\left(2^4V_1\right)^{1/4} - V_1^{1/4}}{1/4} = 4\alpha V_1^{1/4}$. Из уравнения первого начала термодинамики находим

$\Delta U = Q - A_{\text{газа}} = Q - 4\alpha V_1^{1/4} = 300$ Дж.

11.3. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его давление изменяется с ростом температуры по закону $p = \alpha R^3 T^3$, где R – универсальная газовая постоянная, $\alpha = 10^{-6}$ $\text{Н}^{-2}\cdot\text{м}^{-5}$, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 16 м^3. При этом газ отдаёт теплоту Q = 500 Дж. На какую величину ΔU изменится внутренняя энергия газа?

Решение.

Находя температуру из уравнения состояния для 1 моля газа, $T = pV/R$, исключаем её из заданного в условии уравнения процесса: $p = \alpha R^3 T^3 = \alpha\cdot(pV)^3$, откуда $p = \alpha^{-1/2}V^{-3/2}$. Учтём, что газ не получает, а отдаёт теплоту. Тогда уравнение первого начала термодинамики следует записать, как

$$\Delta U = -|Q| - A_{\text{газа}} = -|Q| - \alpha^{-1/2}\int_{V_1}^{V_2} V^{-3/2}dV = -|Q| - \alpha^{-1/2}\frac{V_2^{-1/2} - V_1^{-1/2}}{-1/2} = -|Q| - \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{\sqrt{V_1}} - \frac{1}{\sqrt{V_2}}\right) = -|Q| - \frac{2}{\sqrt{\alpha V_1}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{16}}\right) = -2 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия будет уменьшаться, так как газ охлаждается.

11.4. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его объём уменьшается с ростом давления по закону $V = \alpha p^{-1}$, где $\alpha = 4$ кДж/моль. Начальное давление газа p_1= 25 кПа. Найти величину конечного давления после того, как газ отдаст теплоту Q = 6 кДж.

Решение.

Так как в условии задана начальная величина давления газа, а не его объёма, то при вычислении работы, совершаемой газом, проще под интегралом оставить переменную p. Подставляя $dV = d\left(\dfrac{\alpha}{p}\right) = -\alpha\dfrac{dp}{p^2}$, находим

$A_{\text{газа}} = \int pdV = -\alpha\int_{p_1}^{p_2}\dfrac{dp}{p} = -\alpha\ln\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right) < 0$ (работа отрицательна, поскольку газ сжимается).

Заданный в условии процесс $pV = \alpha = \text{const}$ является изотермическим, т.е. внутренняя энергия газа не меняется $(\Delta U = 0)$, а уравнение I-го начала термодинамики имеет вид $-|Q| = A_{\text{газа}} = -\alpha\ln(p_2/p_1)$. Взяв экспоненту от логарифма, получим $p_2 = p_1\exp(|Q|/\alpha) = 112$ кПа.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

11.5. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его давление уменьшается с увеличением объёма по закону $p = \alpha/V^5$, где $\alpha = 6400$ $\text{Н}\cdot\text{м}^{13}$, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 2 м^3. При этом газ отдаёт теплоту Q = 7,5 кДж. На какую величину ΔU (в кДж) изменится внутренняя энергия газа?

Ответ: уменьшится на 9 кДж

11.6. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его объём изменяется с изменением давления по закону $V = \alpha p^4$, где $\alpha = 6,25\cdot 10^{-10}$ $\text{Н}^{-4}\cdot\text{м}^{11}$, а давление газа увеличивается от начального значения p_1= 200 Па до p_2 = = 400 Па. При этом газу сообщается теплота Q = 14,26 кДж. Найти приращение внутренней энергии газа ΔU.

Ответ: 9,3 кДж

11.6. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением объёма по закону $T = \alpha V^4$, где $\alpha\cdot R = 4000$ $\text{Н}\cdot\text{м}^{-11}$, R – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 2 м^3. Какое тепло (в кДж) получает при этом газ, если его внутренняя энергия возрастает на величину ΔU = 90 кДж?

Ответ: 105 кДж

11.6. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) уменьшается с увеличением объёма по закону $T = \alpha V^{-5}$, где $\alpha\cdot R = 8000$ $\text{Н}\cdot\text{м}^{16}$, R – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 2 м^3. Какую теплоту (в кДж) отдает при этом газ, если его внутренняя энергия уменьшается на величину ΔU = 23,25 кДж?

Ответ: 21,7 кДж

11.7. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором его температура (в К) изменяется с изменением давления по закону $T = \dfrac{\alpha}{R} p^4$, где $\alpha = 10^{-6}$ м$^9 \big/ \left(\text{Н}^3 \cdot \text{моль}\right)$, R – универсальная газовая постоянная, а объём газа увеличивается от начального значения V_1= 1 м^3 до V_2= 8 м^3. При этом газу сообщается теплота Q = 5625 Дж. Найти приращение внутренней энергии газа ΔU.

Ответ: 4,5 кДж

12. Теплоёмкость термодинамических процессов

Молярная теплоёмкость C любого термодинамического процесса определяется формулой $\boxed{\dfrac{m}{\mu} C = \dfrac{\delta Q}{dT}}$. Для процессов идеального газа она примет вид $\boxed{\dfrac{m}{\mu} C_{\text{ид газа}} = \dfrac{\delta Q}{dT} = \dfrac{dU + \delta A}{dT} = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{i}{2} R + \dfrac{pdV}{dT}}$. С помощью этой формулы можно вычислить количество теплоты, принимаемой или отдаваемой при увеличении или уменьшении температуры от величины T_1 до T_2: $\boxed{Q = \dfrac{m}{\mu}\int_{T_1}^{T_2} C dT}$.

Процессы с постоянной теплоёмкостью называются <u>политропическими</u>. Частным случаем политропического процесса будет изохорический $\left(C_{V=\text{const}} = \dfrac{i}{2} R\right)$ или изобарический $\left(C_{p=\text{const}} = C_V + R = \dfrac{i+2}{2} R\right)$ процесс. Но политропический процесс может иметь любую постоянную теплоёмкость $C = \text{const}$.

Примеры решения задач:

12.1. Метан CH_4, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его давление возрастает с ростом температуры по закону $p = \alpha T^3$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости C этого процесса. R =8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Совет: *Чтобы вычислить С, надо последовательно исключать неизвестные термодинамические переменные из системы (Σ) на стр.26.*

Из уравнения состояния идеального газа и заданного в условии уравнения процесса можно исключить давление газа: $p = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V} = \alpha T^3$. Это позволит записать уравнение процесса с помощью других параметров: $V = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{R}{\alpha T^2}$. Вычислив производную от этой функции, $\dfrac{dV}{dT} = -2\dfrac{m}{\mu}\dfrac{R}{\alpha T^3} = -2\dfrac{m}{\mu}\dfrac{R}{p}$, подставим её в определение теплоёмкости:

$$\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R + \frac{pdV}{dT} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R - 2\frac{m}{\mu} R.$$

Совет: *Помните, что для температур, предполагаемых условиями данных задач, число степеней свободы одной молекулы газа равно i = 3 для одноатомного газа; i = 5 для двухатомного газа; i = 6 для газа с тремя и больше атомами в молекуле.*

Отсюда $C = \left(\dfrac{i}{2} - 2\right) R = R = 8{,}31$ Дж/К $\cdot$ моль, так как для многоатомной молекулы метана i = 6.

12.2. Водород H_2, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его температура возрастает с ростом давления по закону $T = \left(\alpha \cdot p\right)^4$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса.
R =8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Как и в задаче 12.1, для нахождения теплоёмкости C процесса надо найти производную dV/dT, т.е. с помощью уравнения состояния идеального газа выразить уравнение процесса через переменные V и T. Для $\dfrac{m}{\mu} = 1$ моля газа $p = \dfrac{RT}{V}$ (уравнение состояния) и $p = \left(T/\alpha\right)^{1/4}$ (уравнение процесса). Приравнивая, находим $V = \alpha^{1/4} R T^{3/4}$, откуда производная $\dfrac{dV}{dT} = \dfrac{3}{4} R \left(\dfrac{\alpha}{T}\right)^{1/4} = \dfrac{3}{4}\dfrac{R}{p}$. Молярная теплоёмкость двухатомного газа (i=5) будет равна

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{i}{2} R + \frac{pdV}{dT} = \frac{5}{2} R + \frac{3}{4} R = \frac{13}{4} R = 27{,}0 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}.$$

12.3. Три моля идеального газа совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в четыре раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Если газ отдаст 99,7 кДж тепла, то его термодинамическая температура уменьшится в два раза. Определить число степеней свободы молекул газа. Начальная температура газа t°C = 227°C. R =8,31 Дж/К·моль.

Решение.

По условию молярная теплоемкость процесса $C = 4C_p = 4\frac{i+2}{2}R$. При постоянной теплоёмкости процесса количество теплоты, отданное $m/\mu = 3$ молями газа при уменьшении температуры от значения T_1=T= 227+273=500 К до значения T_2=T/2, будет равно $|Q| = \left|3\int_{T_1}^{T_2} CdT\right| = 3C\left(T - \frac{T}{2}\right) = 3(i+2)RT$, откуда $i = \frac{|Q|}{3RT} - 2 = 6$.

12.4. Один моль кислорода O_2, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором молярная теплоёмкость меняется с температурой газа по закону $C = C_0\left(T/T_0\right)^8$, где T_0 = 250 К – начальная температура газа, C_0 = 8,31 Дж/К·моль,. Какую работу совершит газ, нагреваясь до температуры T = 500 К? R =8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Нагреваясь, $m/\mu = 1$ моль газа получает теплоту $Q = \int\limits_{T_1=T_0}^{T_2=2T_0} CdT = \frac{C_0}{T_0^8}\int\limits_{T_1=T_0}^{T_2=2T_0} T^8 dT = \frac{C_0}{T_0^8}\left(\frac{(2T_0)^9 - T_0^9}{9}\right) = \frac{511}{9}C_0T_0$.

Согласно первому началу термодинамики совершенная им работа будет равна $A = Q - \Delta U$, где изменение внутренней энергии одного моля двухатомного (i=5) газа равно $\Delta U = \frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}RT_0$. Отсюда $A = \left(\frac{511}{9}C_0 - \frac{5}{2}R\right)T_0$ = 112,8 кДж.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

12.5. Кислород O_2, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его объём возрастает с ростом температуры по закону $V = \alpha T^4$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса.
R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 54,0 Дж/К·моль

12.6. Метан CH_4, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его объём уменьшается с ростом температуры по закону $V = \alpha T^{-2}$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса.
R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 8,31 Дж/К·моль

12.7. Азот N_2, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его давление уменьшается с ростом температуры по закону $p = \alpha T^{-4}$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса.
R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 62,3 Дж/К·моль

12.8. Аммиак NH_3, который можно считать идеальным газом, совершает процесс, при котором его температура уменьшается с ростом давления по закону $T = (\alpha \cdot p)^{-4}$, где α = const. Найти величину молярной теплоёмкости этого процесса. R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 35,3 Дж/К·моль

12.9. Гелий He, который можно считать идеальным газом, совершает политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в три раза меньше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Отдавая 3 кДж тепла, газ охлаждается от температуры 27 °С до температуры -27 °С. Определить количество гелия (в молях). Универсальная газовая постоянная R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 8,02 моля

12.10. Один моль углекислого газа CO_2, который можно считать идеальным, совершает процесс, при котором молярная теплоёмкость меняется с температурой газа по закону $C = C_0\left(T/T_0\right)^3$, где T_0 = 300 К – начальная температура газа, C_0 = 8,31 Дж/К·моль. Какую работу совершит газ, нагреваясь до температуры T = 600 К? R =8,31 Дж/К·моль.
Ответ: 1,87 кДж

12.11. Пять молей идеального газа, совершают политропический процесс с молярной теплоёмкостью C = 49,86 Дж/К·моль, при котором термодинамическая температура газа уменьшается в два раза, а газ сжимается, и над ним совершают работу A = 37,4 кДж. Определить число степеней свободы молекул газа. Начальная температура газа t°C = 127°C, универсальная газовая постоянная R =8,31 Дж/К·моль.
Ответ: 3

13. Изменение энтропии термодинамической системы

Если происходит равновесный процесс, при котором термодинамическая система получает (отдаёт) количество теплоты δQ, то её энтропия изменяется на величину $\boxed{dS = \delta Q/T}$.

Совет: *Не путайте конечную теплоёмкость системы $C = \delta Q/dT$ и бесконечно малое приращение её энтропии $dS = \delta Q/T$.*

Количество теплоты, принимаемой или отдаваемой при увеличении или уменьшении температуры от величины T_1 до T_2, можно выразить через приращение её энтропии $\boxed{Q = \int_{T_1}^{T_2} TdS}$.

Наоборот, изменение энтропии системы выражается как $\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{\delta Q}{T}}$. Например, изменение энтропии идеального газа можно найти с помощью первого начала термодинамики:

$$\Delta S=\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dU+\delta A}{T}=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}+\int\limits_{V_1}^{V_2}\underbrace{\frac{p}{T}}_{=\frac{m}{\mu}\frac{R}{V}}dV=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)+\frac{m}{\mu}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Примеры решения задач:

13.1. Неидеальная термодинамическая система, сжимаясь, нагревается до температуры T_1 = 480 К, совершая процесс, при котором её энтропия изменяется с температурой по закону $S = S_0 \cdot \left(T/T_0\right)^3$, где
S_0 = 100 Дж/К, T_0 = 240 К – начальная температура системы. Найти величину изменения внутренней энергии системы, если внешние силы совершают над ней работу A = 100 кДж.

Решение.

Сначала находим теплоту, поглощенную системой при нагревании:

$$Q=\int\limits_{T_0}^{T_1=2T_0}TdS=\frac{S_0}{T_0^3}\int\limits_{T_0}^{2T_0}T\underbrace{dT^3}_{=3T^2dT}=\frac{3S_0}{T_0^3}\int\limits_{T_0}^{2T_0}T^3dT=\frac{3S_0}{T_0^3}\left(\frac{\left(2T_0\right)^4-T_0^4}{4}\right)= \;=45S_0T_0/4=270\text{ кДж}.$$

Изменение внутренней энергии находим с помощью первого начала термодинамики: $Q=\Delta U+A_{\text{системы}}=\Delta U-A_{\text{внешн сил}}$ (величина работы внешних сил войдет в это уравнение с отрицательным знаком). Отсюда $\Delta U=Q+A_{\text{внеш сил}}=370$ кДж.

13.2. Термодинамическая система совершает процесс, при котором величина её теплоёмкости убывает с ростом температуры T по закону $C=C_0\sqrt{T_0/T}$, где C_0 = 100 Дж/К, T_0 = 200 К – начальная температура системы. На какую величину увеличится энтропии системы при возрастании её температуры до T_1 = 400 К?

Решение.

Сравнивая термодинамические определения приращения энтропии и теплоёмкости $dS=\frac{\delta Q}{T}$ и $C=\frac{\delta Q}{dT}$, исключаем из этих формул теплоту δQ: $dS=\frac{CdT}{T}$. Поэтому приращение энтропии системы при нагревании будет равно

$$\Delta S=\int\limits_{T_0}^{T_1=2T_0}dS=\int\limits_{T_0}^{2T_0}\frac{CdT}{T}=C_0\sqrt{T_0}\int\limits_{T_0}^{2T_0}T^{-3/2}dT= \;=C_0\sqrt{T_0}\,\frac{\left(2T_0\right)^{-1/2}-T_0^{-1/2}}{-1/2}=2C_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=58{,}6\text{ Дж/К}.$$

13.3. Два моля гелия He, который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в три раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном объёме. Найти приращение энтропии газа, если его температура T возрастает в четыре раза. R = 8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Молярная теплоёмкость заданного в условии политропического процесса постоянна и равна $C=3C_V=3\frac{i}{2}R=\frac{9}{2}R$, так как молекулы одноатомного гелия имеют i = 3 степени свободы.

Совет: *В случае политропических процессов изменение энтропии идеального газа проще вычислить, выражая теплоту δQ с помощью постоянной молярной теплоёмкости процесса:* $\delta Q=\frac{m}{\mu}CdT$. *Тогда* $\Delta S=\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{\delta Q}{T}=\frac{m}{\mu}C\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=\frac{m}{\mu}C\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$.

В данной задаче для $m/\mu=2$ молей газа $\Delta S=\int\limits_{T_0}^{4T_0}\frac{\delta Q}{T}=\int\limits_{T_0}^{4T_0}\frac{m}{\mu}\frac{CdT}{T}=9R\int\limits_{T_0}^{4T_0}\frac{dT}{T}=9R\left(\ln 4T_0-\ln T_0\right)=9R\ln 4=103{,}7$ Дж/К.

13.4. Четыре моля водорода H_2, который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в два раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Начальная температура газа T_0 = 300 К. Найти конечную температуру этого газа после того, как его энтропия уменьшится на величину ΔS = 100 Дж/К. R =8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Молярная теплоёмкость данного политропического процесса равна $C=2C_p=2\frac{i+2}{2}R=7R$ (молекулы двухатомного газа имеют i = 5 степеней свободы). Как и в предыдущей задаче, находим изменение энтропии $m/\mu=4$ молей газа по формуле

$\Delta S=\int\limits_{T_0}^{T}dS=\int\limits_{T_0}^{T}\frac{m}{\mu}\frac{CdT}{T}=28R\int\limits_{T_0}^{T}\frac{dT}{T}=28R\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$. При уменьшении энтропии температура системы уменьшается $\left(T<T_0\right)$.

Чтобы вычислить T, приравниваем экспоненты от обеих частей полученного равенства:

$$\exp\left(\ln\frac{T}{T_0}\right) \equiv \frac{T}{T_0} = \exp\left(\frac{-|\Delta S|}{28R}\right), \text{ откуда } T = T_0\exp\left(\frac{-|\Delta S|}{28R}\right) = 195{,}2 \text{ К.}$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

13.5. Неидеальная термодинамическая система совершает процесс, при котором её энтропия убывает с ростом температуры по закону $S = S_0\cdot(T/T_0)^{-5}$, где S_0 = 100 Дж/К, T_0 = 320 К – начальная температура системы. Какую работу совершат над системой внешние силы, если она нагрвается до температуры T_1 = 640 К, а её внутренняя энергия возрастает при этом на величину ΔU = 22,5 кДж?

Ответ: 60 кДж

13.6. Термодинамическая система совершает процесс, при котором её теплоёмкость возрастает с ростом температуры T по закону $C = C_0\cdot(T/T_0)^7$, где C_0 = 10 Дж/К, T_0 = 250 К – начальная температура системы. На какую величину увеличится энтропия системы при возрастании её температуры до T_1 = 500 К?

Ответ: на 181,4 Дж/К

13.7. Термодинамическая система совершает процесс, при котором её теплоёмкость убывает с ростом температуры T по закону $C = C_0\cdot(T_0/T)^2$, где C_0 = 100 Дж/К, T_0 = 300 К – начальная температура системы. На какую величину изменится энтропия системы при возрастании её температуры в четыре раза?

Ответ: увеличится на 46,9 Дж/К

13.8. Два моля углекислого газа CO_2, который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в четыре раза больше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Найти приращение энтропии газа, если его температура T возрастает в два раза? R =8,31 Дж/К·моль.

Ответ: 184,3 Дж/К

13.9. Два моля азота N_2, который можно считать идеальным газом, совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в шесть раз меньше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном объёме. Начальная температура газа T_0 = 200 К. Найти конечную температуру этого газа после того, как его энтропия возрастёт на величину ΔS = 10 Дж/К. R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 847,6 К

13.10. Шесть молей идеального газа совершают политропический процесс, молярная теплоёмкость которого в восемь раз меньше молярной теплоёмкости этого газа при постоянном давлении. Газ нагревается от температуры T_0 = 300 К до температуры T_1 = 600 К, причем его энтропия возрастает на ΔS = 15,1 Дж/К. Найти число степеней свободы молекул этого газа. R =8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 5

14. КПД циклических процессов в термодинамике

Величина КПД циклического процесса в термодинамике определяется формулой $\boxed{\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н}\cdot 100\%}$, где $Q_н$ – величина теплоты, полученной от “нагревателя” за всё время цикла, а $Q_х$ – количество теплоты, отданное “холодильнику” за время цикла (рис.1.32). Входящие в эту формулу величины должны быть положительными.

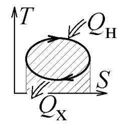


Рис.1.32

Наиболее просто теплоту можно определить через изменение энтропии: $\boxed{Q = \int_{S_1}^{S_2} TdS}$. Поэтому циклические процессы удобно изображать на диаграмме “температура-энтропия” (рис.1.32), где интеграл $Q = \int TdS$ равен площади под кривой процесса $T = T(S)$. Теплота поступает, если энтропия S растёт ($dS > 0$) и отдаётся, если S уменьшается ($dS < 0$). (На рис.1.32 заштрихована площадь под верхней кривой процесса, при котором S растёт, равная полученной теплоте $Q_н$).

Совет: *Следите за направлением циклического процесса!* ***Прямой термодинамический цикл*** *на диаграмме состояния соответствует обходу петли цикла по часовой стрелке (рис.1.32). При этом система, совершающая цикл, производит за один цикл работу* $A_{цикла} = Q_н - Q_х$ *, равную площади петли цикла на диаграмме состояния (рис.1.32). КПД цикла можно записать как* $\boxed{\eta = \frac{A_{цикла}}{Q_н}\cdot 100\%}$.

В случае **обратного цикла** (обход происходит против часовой стрелки, рис.1.33). Внешние силы совершают над системой за один цикл работу $A_{внеш}$ (также равную заштрихованной на рис.1.33 площади петли цикла), за счет которой у “холодильника” забирается теплота $Q_х$, а “нагревателю” отдаётся теплота $Q_н = Q_х + A_{внеш}$.

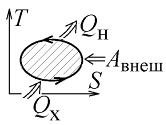
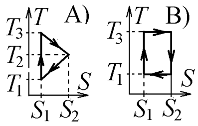


Рис.1.33

Примеры решения задач:

14.1. На диаграмме *T-S* (температура-энтропия), где T_1= 300 К, T_2= 400 К, T_3= 500 К, S_1= 5 Дж/К, S_2= 10 Дж/К, изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Во сколько раз КПД правого процесса η_B больше КПД левого процесса η_A?

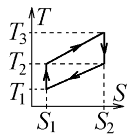


Решение.

Для левого цикла (А) полученная теплота $Q_н = \int_{S_1}^{S_2} TdS$ равна площади трапеции под верхней прямой цикла: $Q_н = \frac{T_3 + T_2}{2}(S_2 - S_1)$, а отданная теплота равна площади трапеции под нижней прямой цикла: $Q_х = \frac{T_2 + T_1}{2}(S_2 - S_1)$. Вертикальная прямая соответствует адиабатическому процессу $S = S_1 = \text{const}$, совершаемому без передачи тепла. Поэтому КПД левого цикла $\eta_A = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} \cdot 100\% = \frac{(T_3 + T_2) - (T_2 + T_1)}{(T_3 + T_2)} \cdot 100\% = \frac{T_3 - T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\%$.

Правый цикл (В) является циклом Карно, для которого $\eta_B == \frac{T_3 - T_1}{T_3} \cdot 100\%$. Искомое отношение $\frac{\eta_B}{\eta_A} = \frac{T_3 + T_2}{T_3} = 1{,}8$.

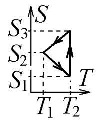
14.2. Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД η = 50 %, изображенный на диаграмме *T-S* (температура-энтропия), где T_2= 300 К, T_3= 700 К, S_1= 4 Дж/К, S_2= 8 Дж/К. Определить температуру T_1.



Решение.

Полученная от нагревателя за цикл теплота $Q_н$ и отданная холодильнику теплота $Q_х$ на диаграмме *T-S* равны, соответственно, площадям трапеций под верхней прямой цикла $Q_н = \frac{T_3 + T_2}{2}(S_2 - S_1)$ и под нижней прямой цикла $Q_х = \frac{T_2 + T_1}{2}(S_2 - S_1)$. Поэтому КПД $\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} \cdot 100\% = \frac{T_3 - T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\% = 50\%$. Отсюда $T_1 = \frac{T_3 - T_2}{2} = 200$ К.

14.3. Вычислить в % КПД циклического процесса идеального газа, изображенного на диаграмме *S-T* (энтропия- температура), где T_1= 300 К, T_2= 450 К, S_1= 10 Дж/К, S_2= 20 Дж/К, S_3= 30 Дж/К.



Решение.

Совет: *Направление обхода против часовой стрелки на диаграмме S-T, приведенной в условии задачи, связано с "неправильным" выбором осей координат. Такие диаграммы надо перерисовать аналогично рис.1.32 в осях T-S "температура-энтропия".*

Получим диаграмму прямого цикла (рис.1.34). Площадь под верхней горизонтальной линией изотермического процесса равна теплу, полученному от "нагревателя": $Q_н = \int_{S_1}^{S_3} TdS = T_2(S_3 - S_1)$. Площадь треугольной петли цикла равна работе за цикл: $A_{цикла} = (T_2 - T_1)(S_3 - S_1)/2$. Поэтому КПД цикла

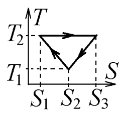
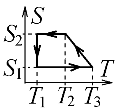


Рис.1.34

$$\eta = \frac{A_{цикла}}{Q_н} \cdot 100\% = \frac{T_2 - T_1}{2T_2} \cdot 100\% = 16{,}67\%.$$



14.4. Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД η = 40 %, изображенный на диаграмме *S-T* (энтропия- температура), где T_1= 350 К, T_2= 500 К, S_1= 3 Дж/К, S_2= 6 Дж/К. Определить температуру T_3.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, надо перерисовать диаграмму прямого цикла в осях *T-S* (температура-энтропия) (рис.1.35). На этом рисунке теплота, полученная от "нагревателя", равна площади трапеции под верхней прямой $Q_н = \frac{T_3 + T_2}{2}(S_2 - S_1)$, а теплота, отданная "холодильнику" – площади под нижней горизонтальной прямой изотермического процесса $Q_х = T_1(S_2 - S_1)$. Из определения КПД $\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} \cdot 100\% =$

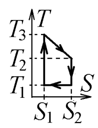
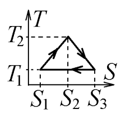


Рис.1.35

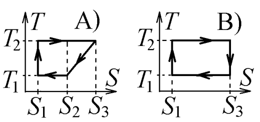
$$= \frac{T_3 + T_2 - 2T_1}{T_3 + T_2} \cdot 100\% = 40\% \text{ находим } T_3 = \frac{10}{3}T_1 - T_2 = 666{,}7 \text{ К}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

14.5. Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД η = 20 %, изображенный на диаграмме *T-S* (температура-энтропия), где T_1= 250 К, S_1= 2 Дж/К, S_2= 4 Дж/К, S_3= 6 Дж/К. Определить температуру T_2.

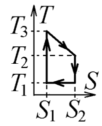


Ответ: 375 К



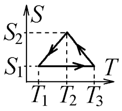
14.6. На диаграмме *T-S*, где T_1= 200 К, T_2= 500 К, S_1= 2 Дж/К, S_2= 4 Дж/К, S_3= 6 Дж/К, изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Найти разность η_B-η_A КПД правого и левого процессов (в %).

Ответ: η_B-η_A = 15%



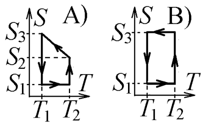
14.7. Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД η = 50 %, изображенный на диаграмме *T-S*, где T_1= = 400 К, T_2= 600 К, S_1= 2 Дж/К, S_2= 4 Дж/К. Определить температуру T_3.

Ответ: 1000 К



14.8. Идеальный газ совершает циклический процесс с КПД η = 30 %, изображенный на диаграмме *S-T* (энтропия- температура), где T_2= 600 К, T_3= 800 К, S_1= 3 Дж/К, S_2= 6 Дж/К. Определить температуру T_1.

Ответ: 380 К



14.9. На диаграмме *S-T* (энтропия- температура), где T_1= 300 К, T_2= 400 К, S_1= 4 Дж/К, S_2= 6 Дж/К, S_3= 8 Дж/К изображены два циклических процесса, совершаемых идеальным газом. Найти разность η_B-η_A КПД правого и левого процессов (в %). *Ответ*: η_B-η_A = 5%

15. Распределение Максвелла

В сосуде находятся N одинаковых молекул идеального газа. Число молекул газа, имеющих величины скоростей v в интервале $\mathrm{v}_1 \le \mathrm{v} \le \mathrm{v}_2$ равно $\boxed{\Delta N = N\int\limits_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_2} f_{\text{м}}(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}}$, где $\boxed{f_{\text{м}} = \left(\dfrac{m}{2\pi k_{\text{Б}}T}\right)^{3/2}\exp\left(-\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2k_{\text{Б}}T}\right)4\pi\mathrm{v}^2}$ – функция распределения Максвелла по величинам скоростей.

Здесь m – масса одной молекулы, T – температура газа (в К), $k_{\text{Б}} = R/N_{\text{Авогадро}} = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Величину $\Delta N/N$ называют долей молекул газа со скоростями $\mathrm{v}_1 \le \mathrm{v} \le \mathrm{v}_2$. Она же будет вероятностью $\boxed{P = \int\limits_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_2} f_{\text{м}}(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}}$ того, что молекулы имеют величины скоростей в интервале $\mathrm{v}_1 \le \mathrm{v} \le \mathrm{v}_2$.

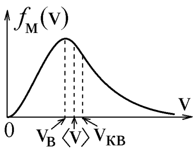


Рис.1.36

Газ характеризуют тремя характерными скоростями, показанными на графике функции распределения Максвелла (рис.1.36):

<u>Наиболее вероятной скоростью</u> $\mathrm{v}_{\text{в}} = \sqrt{2k_{\text{Б}}T/m}$ обладает наибольшая доля $\Delta N/N$ молекул газа $\mathrm{v}_{\text{В}}$. Она соответствует максимуму функции распределения Максвелла (рис.1.36).

<u>Средняя скорость</u> молекул газа (<u>средняя арифметическая</u>) вычисляется по формуле $\langle\mathrm{v}\rangle = \sqrt{8k_{\text{Б}}T/\pi m}$.

<u>Средняя квадратичная скорость</u> молекул $\mathrm{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\langle\mathrm{v}^2\rangle} = \sqrt{3k_{\text{Б}}T/m}$ соответствует молекуле со средней кинетической энергией поступательного движения $\langle E_{\text{кин пост}}\rangle = \dfrac{m\mathrm{v}_{\text{кв}}^2}{2}$. Средняя кинетическая энергия молекулы с числом степеней свободы i, совершающей как поступательное, так и вращательное движение, равна $\boxed{\langle E\rangle = \dfrac{i}{2}k_{\text{Б}}T}$.

Совет: *Чтобы не искать в задачах массу одной молекулы газа, удобнее использовать связь* $\dfrac{k_{\text{Б}}}{m} = \dfrac{R}{mN_{\text{Авогадро}}} = \dfrac{R}{\mu}$, *и выражать записанные формулы через универсальную газовую постоянную* R *и известную молярную массу газа* μ*:*

$$\boxed{f_{\text{м}} = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu\mathrm{v}^2}{2RT}\right)4\pi\mathrm{v}^2};\quad \boxed{\mathrm{v}_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}};\quad \boxed{\langle\mathrm{v}\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}};\quad \boxed{\mathrm{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}.$$

Примеры решения задач:

15.1. Аммиак NH_3, который можно считать идеальным газом с молярной массой μ=17 г/моль, имеет температуру 27°С. Найти вероятность (в %) того, что молекулы этого газа имеют величины скоростей в интервале $\mathrm{v}_1 \le \mathrm{v} \le \mathrm{v}_1 + \Delta\mathrm{v}$, где v_1 – средняя скорость молекул газа, а Δv = 0,1 м/с. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Искомая вероятность или доля молекул, обладающих указанными скоростями, равна $P = \int\limits_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_1+\Delta\mathrm{v}} f_{\text{м}}(\mathrm{v})\,d\mathrm{v}$.

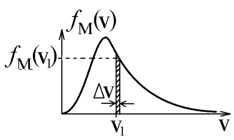


Рис.1.37

Совет: *Если интервал изменения скоростей* Δv *мал, то можно считать, что этот интеграл, практически равен площади заштрихованной узкой полоски под кривой* $f_{\text{м}}(\mathrm{v})$ *на рис.1.37:*

$$P = \int\limits_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_1+\Delta\mathrm{v}} f_{\text{м}}(\mathrm{v})\,d\mathrm{v} \approx f_{\text{м}}(\mathrm{v}_1)\cdot\Delta\mathrm{v} = \left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu\mathrm{v}_1^2}{2RT}\right)4\pi\mathrm{v}_1^2\cdot\Delta\mathrm{v}.$$

Подставляя сюда величину средней скорости $\mathrm{v}_1 = \langle\mathrm{v}\rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu}$ и учитывая, что T =27+273 = 300 К, получим

$$P=\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu}{2RT}\cdot\frac{8RT}{\pi\mu}\right)4\pi\frac{8RT}{\pi\mu}\cdot\Delta\text{v}=\frac{16}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}\exp\left(-\frac{4}{\pi}\right)\cdot\Delta\text{v}==1,485\cdot10^{-4}$$ или 0,01485 %.

15.2. Определите величину молярной массы идеального газа, если известно, что при температуре T = 600 К в каждом моле этого газа величины скоростей от v_1 до $\text{v}_1+\Delta\text{v}$ имеют ΔN = 10^{20} молекул. Здесь v_1 – величина средней квадратичной скорости молекул газа; $\Delta\text{v}=0{,}1$ м/с ; R = 8,31 Дж/К·моль; $N_{\text{Авогадро}}$ = $6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, при малом интервале скоростей Δv можно записать $\frac{\Delta N}{N}\approx f_{\text{м}}(\text{v}_1)\cdot\Delta\text{v}=\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu\text{v}_1^2}{2RT}\right)4\pi\text{v}_1^2\cdot\Delta\text{v}$. Так как в каждом моле газа N=$N_{\text{Авогадро}}$, то, подставив $\text{v}_1=\text{v}_{\text{кв}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, имеем $\frac{\Delta N}{N_{\text{Авогадро}}}\approx\left(\frac{\mu}{2\pi RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\mu}{2RT}\cdot\frac{3RT}{\mu}\right)4\pi\frac{3RT}{\mu}\cdot\Delta\text{v}=3\sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT}}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\Delta\text{v}$, откуда

$$\mu=\frac{\pi RT}{2}\left(\frac{\Delta N}{3\Delta\text{v}N_{\text{Ав}}}\right)^2\exp(3)=48{,}18\text{ г/моль.}$$

15.3. Гелий, который является идеальным газом с молярной массой μ=4 г/моль, находится в закрытом сосуде с объёмом V = 30 литров. Найти давление газа, если сумма квадратов скоростей всех его молекул $\Sigma\text{v}_i{}^2=4\cdot10^{29}\text{ м}^2/\text{с}^2$. Число Авогадро $N_{\text{Авогадро}}$=$6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Решение.

Совет: *Вспомните определение среднего значения любой переменной x, имеющей разные величины x_i: $\langle x\rangle=\sum_{i=1}^{N}x_i\Big/N$. Сумму таких величин легко записать с помощью среднего: $\sum_{i=1}^{N}x_i=N\langle x\rangle$.*

Средняя квадратичная скорость $\text{v}_{\text{кв}}$ определяется средним значением квадрата скорости молекул газа $\text{v}_{\text{кв}}=\sqrt{\langle\text{v}^2\rangle}$. Поэтому в газе из N молекул $\sum_{i=1}^{N}\text{v}_i{}^2=N\text{v}_{\text{кв}}^2=N\frac{3RT}{\mu}$, откуда $NRT=\mu\sum\text{v}_i^2\big/3$. Давление можно найти из уравнения состояния идеального газа, число молей которого равно $\frac{m}{\mu}=\frac{N}{N_{\text{Авогадро}}}$. Получаем $p=\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}=\frac{NRT}{N_{\text{Авог}}V}=\frac{\mu\sum\text{v}_i^2}{3N_{\text{Авог}}V}=29{,}5$ кПа.

15.4. В сосуде с объёмом V = 40 литров находятся N = $5\cdot10^{22}$ молекул идеального газа. Давление газа p = 90 кПа, а величина средней скорости его молекул равна 800 м/с. Найти массу одной молекулы данного газа.

Решение.

Отношение массы газа, состоящего из N молекул, к его молярной массе можно записать в виде $\frac{m_{\text{газа}}}{\mu}=\frac{Nm}{\mu}=N\frac{k_{\text{Б}}}{R}$, где m – масса одной молекулы. Тогда уравнение состояния идеального газа примет вид $pV=\frac{m_{\text{газа}}}{\mu}RT=Nk_{\text{Б}}T$ или $\boxed{p=nk_{\text{Б}}T}$, где $n=N/V$ - концентрация или число молекул в единице объёма. Величину $k_{\text{Б}}T$ найдем из формулы для средней скорости $\langle\text{v}\rangle=\sqrt{\frac{8k_{\text{Б}}T}{\pi m}}$. После подстановки получим $m=\frac{8pV}{N\pi\langle\text{v}\rangle^2}=2{,}86\cdot10^{-25}$ кг.

15.5. В закрытом сосуде под давлением p = 162 кПа находится идеальный газ. Величина скорости, которой обладает наибольшая доля молекул этого газа, равна 450 м/с. Найти величину плотности газа ρ.

Решение.

Плотность идеального газа определяется уравнением его состояния: $\rho=\frac{m_{\text{газа}}}{V}=\frac{p\mu}{RT}$. Неизвестную величину $\frac{RT}{\mu}$ находим из формулы для заданной в условии наиболее вероятной скорости $\text{v}_{\text{в}}=\sqrt{2RT/\mu}$ =450 м/с, откуда $\rho=2p\big/\text{v}_{\text{в}}^2=1{,}6$ кг/м^3.

15.6. В первом сосуде с объёмом V = 20 литров находятся N = =$4\cdot10^{22}$ молекул азота N_2, у которого средняя энергия одной молекулы равна $\langle E_{\text{N}}\rangle$ = $5\cdot10^{-20}$ Дж, а во втором таком же сосуде находится такое же количество молекул кислорода O_2. Давление азота больше давления кислорода на величину Δp = 24 кПа. Считая оба газа идеальными, найти величину средней энергии $\langle E_{\text{O}}\rangle$ одной молекулы кислорода.

Решение.

Выразим давление идеального газа с помощью уравнения состояния $p=\frac{m_{\text{газа}}}{\mu}\frac{RT}{V}=\frac{N}{N_{\text{Авог}}}\frac{RT}{V}$. Так как и число молекул N и объём V газов одинаковы, то разность давлений связана с разностью их температур:

$\Delta p = p_{\rm N} - p_{\rm O} = \dfrac{N}{V}\left(\dfrac{RT_{\rm N}}{N_{\rm Авог}} - \dfrac{RT_{\rm O}}{N_{\rm Авог}}\right)$. Температура газа пропорциональна средней кинетической энергии его молекулы: $\langle E\rangle = \dfrac{i}{2}k_{\rm Б}T = \dfrac{i}{2}\dfrac{RT}{N_{\rm Авог}}$. Отсюда $\dfrac{RT}{N_{\rm Авог}} = \dfrac{2\langle E\rangle}{i}$. Число степеней свободы молекул обоих газов одинаково (i=5). Поэтому $\Delta p = \dfrac{N}{V}\dfrac{2}{i}\left(\langle E_{\rm N}\rangle - \langle E_{\rm O}\rangle\right)$, что даёт $\langle E_{\rm O}\rangle = \langle E_{\rm N}\rangle - \dfrac{iV\Delta p}{2N} = 2\cdot 10^{-20}$ Дж.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

15.7. ΔN_1 и ΔN_2 – число молекул идеального газа со скоростями от v_1 до $v_1 + \Delta v$ и от v_2 до $v_2 + \Delta v$ соответственно. Найти величину отношения $\Delta N_1/\Delta N_2$, если v_1 – средняя квадратичная, а v_2 – наиболее вероятная скорость молекул этого газа, а Δv = 0,1 м/с. *Ответ*: 0,9098

15.8. Метан, имеющий молярную массу μ=16 г/моль, можно считать идеальным газом. Найти температуру этого газа, если вероятность того, что его молекулы имеют величину скорости в пределах от v_1 до $v_1 + \Delta v$, где v_1 – наиболее вероятная скорость молекул, а $\Delta v = 0{,}1$ м/с, равна $P = 0{,}01$ %. R = 8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 663,5 К

15.9. В закрытом сосуде с объёмом V=20 литров находился при температуре T=300 К углекислый газ, который можно считать идеальным газом с молярной массой μ=44 г/моль. Концентрация его молекул $n = 5\cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. На какую величину $\Delta\left(\Sigma|v_i|\right)$ увеличится сумма величин скоростей всех молекул данного газа, если нагреть его в полтора раза? Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/К·моль.
Ответ: на $8{,}54\cdot 10^{23}$ м/с

15.10. Определить величину скорости, которой обладает наибольшая доля молекул аммиака NH_3, который можно считать идеальным газом, имеющим молярную массу μ=17 г/моль. Известно, что внутренняя энергия восьми молей этого газа равна 45,9 кДж. *Ответ*: 474,3 м/с

15.11. В закрытом сосуде с объёмом V=50 литров находится идеальный газ под давлением p=60 кПа, причем величина скорости, которой обладает наибольшая доля его молекул, равна $v_в$=400 м/с. Найти массу газа, находящегося в сосуде.
Ответ: 0,0375 кг

15.12. В закрытом сосуде с объёмом V=15 литров находятся $N = 3\cdot 10^{22}$ молекул идеального газа. Величина среднего квадрата скорости, которой обладает молекула этого газа, равна $\langle v^2\rangle = 6\cdot 10^5$ м^2/с^2. Найти давление газа в сосуде. Масса одной молекулы $m = 4\cdot 10^{-25}$ кг. *Ответ*: 160 кПа

15.13. Найти молярную массу идеального газа, у которого при температуре $t^{\rm o}$ = 27$^{\rm o}$C средняя квадратичная скорость молекул больше средней скорости молекул на Δv = 30 м/с. R = 8,31 Дж/К·моль.
Ответ: 51,45 г/моль

16. Распределение Больцмана. Барометрическая формула

Распределение Максвелла описывает газ молекул, потенциальные энергии которых практически одинаковы. Концентрация n молекул такого газа одинакова во всём его объёме.

Если объём газа настолько велик, что потенциальная энергия молекул в поле внешних сил различна в различных областях, то концентрация n молекул будет зависеть от величины потенциальной энергии одной молекулы $E_{\rm пот}$. Такая зависимость называется распределением Больцмана: $\boxed{n = n_0\exp\left(-\dfrac{E_{\rm пот}}{k_{\rm Б}T}\right)}$, где n_0 - величина концентрации молекул газа в точке, где потенциальная энергия молекулы равна нулю.

В идеальном газе уравнение состояния связывает концентрацию молекул с давлением: $\boxed{p = nk_{\rm Б}T}$. Поэтому для газа с одинаковой во всех точках температурой T = const распределение Больцмана можно записать для давления: $\boxed{p = p_0\exp\left(-\dfrac{E_{\rm пот}}{k_{\rm Б}T}\right)}$.

В частном случае газ находится в поле сил тяжести и для его молекулы с массой m $E_{\rm пот} = mgh$. Распределение Больцмана превращается в <u>барометрическую формулу</u>: $\boxed{p = p_0\exp\left(-\dfrac{mgh}{k_{\rm Б}T}\right) = p_0\exp\left(-\dfrac{\mu gh}{RT}\right)}$, согласно которой давление атмосферы уменьшается с высотой h над уровнем моря, где давление равно p_0 (рис.1.38). Аналогичную формулу можно для концентрации молекул равновесной атмосферы, имеющей всюду одинаковую температуру: $\boxed{n = n_0\exp\left(-\dfrac{\mu gh}{RT}\right)}$.

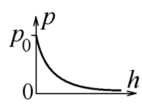


Рис.1.38

Примеры решения задач:

16.1. Газ, образующий атмосферу планеты, имел во всех точках температуру T_1 = 300 К. Какой стала температура атмосферы, если концентрация молекул этого газа увеличилась вблизи поверхности планеты (на высоте h = 0) в 1,22 раз, а на высоте h = 1 км над поверхностью планеты концентрация возросла в 1,2 раза? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2; молярная масса газа μ = 44 г/моль; универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Распределения концентрации молекул газа до и после изменения температуры имеют вид $n_1 = n_{01}\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_1}\right)$ и $n_2 = n_{02}\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_2}\right)$. По условию $\frac{n_2}{n_1} = 1,2$ и $\frac{n_{02}}{n_{01}} = 1,22$. Взяв отношение левых и правых частей записанных формул, получим $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{02}}{n_{01}}\exp\left(\frac{\mu g h}{RT_1} - \frac{\mu g h}{RT_2}\right)$.

Совет: *Чтобы в подобных задачах выразить переменные, стоящие под знаком экспоненты, надо прологарифмировать экспоненциальную функцию:* $\ln(\exp(x)) = x$.

Поэтому $\ln\exp\left(\frac{\mu g h}{RT_1} - \frac{\mu g h}{RT_2}\right) = \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\frac{n_{01}}{n_{02}}\right) = \frac{\mu g h}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$. Отсюда $T_2 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{R}{\mu g h}\ln\left(\frac{1,2}{1,22}\right)\right)^{-1} = 274,3$ К

16.2. Считая температуру атмосферы некоторой планеты постоянной и равной t^{o} = -23^{o}С, определить величину молярной массы смеси газов, образующих атмосферу. Известно, что давление атмосферы вблизи поверхности планеты (на высоте h = 0) равно 150 кПа, а при подъёме на высоту h = 1 км оно изменяется на величину Δp = 20 кПа. Ускорение свободного падения g = 15 м/с^2; R = 8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Согласно барометрической формуле $p = p_0 - \Delta p = p_0\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, где T = -23+273=250 К. Логарифмируя это выражение, находим $\ln\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) = -\frac{\mu g h}{RT} = \ln\left(\frac{p_0 - \Delta p}{p_0}\right)$, и $\mu = -\frac{RT}{gh}\ln\left(\frac{p_0 - \Delta p}{p_0}\right) = 19,8\,\frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

16.3. Газ с температурой t^{o} = 327^{o}С из заряженных ионов находится в таком электрическом поле, что потенциальная энергия иона зависит только от координаты x и меняется по закону $E_{\text{пот}} = \alpha + \beta x$, где $\alpha = 2\cdot 10^{-20}$ Дж. Найти величину постоянной β (в Дж/м), если отношение концентраций этого газа в точках с координатами x_2 = 4 м и x_1 = 2 м равно n_2/n_1 = 0,04. $k_{\text{Б}} = 1,38\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Решение.

Для такого газа из ионов по-прежнему справедливо распределение Больцмана:

$n = n_0\exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{k_{\text{Б}}T}\right) = n_0\exp\left(-\frac{\alpha + \beta x}{k_{\text{Б}}T}\right)$. Отношение концентраций позволяет убрать неизвестную величину n_0:

$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\alpha + \beta x_2}{k_{\text{Б}}T} + \frac{\alpha + \beta x_1}{k_{\text{Б}}T}\right) = \exp\left(\frac{\beta(x_1 - x_2)}{k_{\text{Б}}T}\right)$, откуда $\beta = \frac{k_{\text{Б}}T}{x_1 - x_2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 1,33\cdot 10^{-20}$ Дж/м.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

16.4. Атмосфера планеты имела во всех точках температуру T_1 = 450 К. После того, как температура атмосферы уменьшилась на ΔT = 150 К, концентрация молекул составляющего её газа на высоте h = 1 км над поверхностью планеты увеличилась в 1,5 раза. Чему стала равной концентрация молекул газа вблизи поверхности планеты (на высоте h = 0), если при температуре T_1 она была равна 5·10^{16} м$^{-3}$? Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/с^2; молярная масса газа μ = 16 г/моль; R = 8,31 Дж/К·моль.

Ответ: 7,66·10^{16} м$^{-3}$

16.5. Атмосфера планеты имела во всех точках температуру T_1 = 400 К. После того, как температура атмосферы увеличилась на ΔT = 100 К, давление атмосферы вблизи поверхности планеты (на высоте h = 0) уменьшилось в 1,24 раза. На какой высоте h над поверхностью планеты давление атмосферы уменьшилось в 1,2 раза? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2; молярная масса образующей атмосферу смеси газов μ = 30 г/моль; R = 8,31 Дж/К·моль.

Ответ: 1817 м

16.6. На высоте h = 500 м над поверхностью планеты плотность газа, образующего её атмосферу, составляет 95% от величины плотности газа вблизи поверхности планеты. Определить температуру атмосферы, считая её постоянной и одинаковой во всех точках. Ускорение свободного падения g = 12 м/с^2; молярная масса газа, который можно считать идеальным, μ = 20 г/моль; R = 8,31 Дж/К·моль.

Ответ: 281,5 К

16.7. Известно, что концентрация молекул газа вблизи поверхности некоторой планеты (на высоте h = 0) равна 10^{25} м$^{-3}$, а при подъёме на высоту h она изменяется на величину Δn=8·10^{23} м$^{-3}$. Считая температуру атмосферы этой планеты постоянной и равной t^o = 7^{o}С, определить высоту h. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2; молярная масса газа μ = 30 г/моль; R = 8,31 Дж/К·моль. *Ответ*: 647 м

17. Частота соударений и средняя длина свободного пробега молекул газа

Рис.1.39

Частота соударений молекул со стенкой ν равна числу молекул, сталкивающихся с единицей поверхности стенки за единицу времени. Если с площадкой ΔS за время Δt сталкивается ΔN молекул газа, то $\boxed{\nu = \dfrac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \dfrac{1}{4} n \langle \mathrm{v} \rangle}$, где $\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ - средняя скорость молекул газа, $n = N/V$ – концентрация или число молекул в единице его объёма.

Если в стенке сосуда с газом сделано маленькое отверстие площадью S, то попадающие на отверстие молекулы газа будут вылетать из сосуда. За время Δt из сосуда вылетит $\boxed{\Delta N = \dfrac{1}{4} n \langle \mathrm{v} \rangle S \Delta t}$ молекул (рис.1.39).

Совет: *Для решения задач на эту тему необходимо учесть уравнение состояния газа и заданное по условию уравнение протекающего с газом процесса. Например, если сосуд с газом закрыт, то* $n = N/V = \mathrm{const}$ *, и при изменении температуры происходит изохорический процесс* $p = nk_{\text{Б}}T$.

Примеры решения задач:

17.1. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа возрастает с ростом объёма по закону $p = \alpha \cdot \sqrt{V}$, где α = const. Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади S = 1 см^2 на стенке сосуда за единицу времени, если давление газа возрастёт в 4 раза?

Решение.

Надо вычислить зависимость числа соударений молекул $\Delta N = \dfrac{1}{4} n \langle \mathrm{v} \rangle S \Delta t$ от давления газа p, т.е. устранить из этой формулы параметры V и T (объём и температуру газа). Подставим в эту формулу определение концентрации молекул $n = N_{\text{Авогадро}}/V$ (для 1 моля газа), а также выражение для средней скорости молекул $\langle \mathrm{v} \rangle = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$, откуда можно исключить температуру T с помощью уравнения состояния идеального газа $T = \dfrac{pV}{R}$. Получим $\Delta N = N_{\text{Авог}} \sqrt{\dfrac{p}{2\pi\mu V}} S \Delta t$.

Устранив отсюда переменную $\sqrt{V} = p/\alpha$ (заданное в условии уравнение процесса), находим зависимость $\Delta N \sim 1/\sqrt{p}$. При увеличении p в 4 раза число ΔN соударений молекул уменьшится в 2 раза.

17.2. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа растёт с ростом его температуры по закону $p = \alpha \cdot T^{3/2}$, где α = const. Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади S = 1 см^2 на стенке сосуда за Δt = 1 с, если температура газа возрастёт в 4 раза?

Решение.

Как и в предыдущей задаче, $\Delta N = \dfrac{1}{4} n \langle \mathrm{v} \rangle S \Delta t = \dfrac{1}{4} \dfrac{N_{\text{Авог}}}{V} \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}} S \Delta t$. Теперь, согласно условию, надо выразить объём V через температуру T. Для этого исключаем давление p из уравнения состояния 1 моля идеального газа и заданного уравнения процесса: $p = \dfrac{RT}{V} = \alpha \cdot T^{3/2}$. Отсюда $V = \dfrac{R}{\alpha\sqrt{T}}$ и $\Delta N \sim \dfrac{\sqrt{T}}{V} \sim T$. Как и температура, число соударений ΔN возрастёт в 4 раза.

****

Длина свободного пробега молекулы газа определяется формулой $\boxed{\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}}$, в которой эффективный диаметр d молекулы можно считать практически постоянным при относительно небольшом изменении температуры, предполагаемом в условии задач: $\boxed{d \approx \mathrm{const}}$. Концентрацию молекул идеального газа удобно выражать через давление с помощью уравнения состояния, записанного в форме $\boxed{p = nk_{\text{Б}}T}$.

17.3. Идеальный газ совершает процесс, при котором его температура растёт с увеличением объёма по закону $T = \alpha V^3$, где α = const. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре T_2 = 600 K, если при температуре T_1 = 300 K она равна λ_1 = 300 нм?

Решение.

Концентрация молекул газа меняется обратно пропорционально его объёму, который, согласно условию, зависит от температуры по закону $V=\sqrt[3]{\dfrac{T}{\alpha}}$, т.е. $n=\dfrac{N}{V}\sim\dfrac{1}{\sqrt[3]{T}}$. Поэтому $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\sim\dfrac{1}{n}\sim\sqrt[3]{T}$ или $\lambda=\mathrm{const}\cdot\sqrt[3]{T}$. Отсюда следует, что $\lambda_2=\lambda_1\cdot\sqrt[3]{T_2/T_1}=\lambda_1\cdot\sqrt[3]{2}=378$ нм.

17.4. Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление уменьшается с увеличением объёма по закону $p=\alpha\cdot V^{-1/3}$, где α = const. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре T_2 = 600 K, если при температуре T_1 = 300 K она равна λ_1 = 200 нм?

Решение.

Совет: *Устраняйте неизвестные переменные, решая систему из уравнения процесса и уравнения состояния газа.*

Надо найти зависимость λ от температуры T газа. Для этого исключим вначале объём V из заданного в условии уравнения процесса $p=\alpha\cdot V^{-1/3}$, которое можно переписать в виде $V=(\alpha/p)^3$, и уравнения состояния идеального газа: $V=\dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{p}=\dfrac{\alpha^3}{p^3}$. Отсюда $p\sim\dfrac{1}{\sqrt{T}}$. Подставим эту зависимость в формулу для λ, в которой концентрация n выражена через давление: $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}=\dfrac{k_Б T}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\sim\dfrac{T}{p}\sim T^{3/2}$. Отсюда $\lambda=\mathrm{const}\cdot T^{3/2}$ и $\lambda_2=\lambda_1\left(T_2/T_1\right)^{3/2}=565{,}6$ нм.

17.5. В сосуде, заполненном идеальным газом, имеющем температуру t° = 75°C, проделано маленькое отверстие с площадью S = 1 мм^2. Известно, что средняя длина свободного пробега молекул газа в сосуде равна λ = 1 мкм, эффективный диаметр молекулы d = 0,3 нм, а за секунду из отверстия в окружающий сосуд вакуум вылетает N = 4·10^{20} молекул. Найти величину молярной массы этого газа. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/К·моль.

Решение.

Выразим концентрацию молекул газа через среднюю длину свободного пробега, $n=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\lambda}$, и подставим её в формулу для числа молекул, вылетающих через отверстие за время Δt = 1 с: $N=\dfrac{1}{4}n\langle \mathrm{v}\rangle S\Delta t=\dfrac{1}{4\sqrt{2}\pi d^2\lambda}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}S\Delta t$. Отсюда

$\mu=\dfrac{RT}{4\pi^3}\left(\dfrac{S\Delta t}{d^2\lambda N}\right)^2=18$ г/моль.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

17.6. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что давление газа возрастает с ростом объёма по закону $p=\alpha V^2$, где α = const. Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади S = 1 см^2 на стенке сосуда за одну секунду, если объём сосуда возрастёт в 4 раза?

Ответ: увеличится в 2 раза

17.7. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что объём газа возрастает с ростом его давления по закону $V=\alpha p^3$, где α = const. Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади S = 1 см^2 на стенке сосуда за одну секунду, если объём сосуда возрастёт в 4 раза?

Ответ: уменьшится в 1,587 раз

17.8. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что температура газа возрастает с ростом его давления по закону $T=\alpha p^6$, где α = const. Во сколько раз изменится число соударений молекул газа с участком площади S = 1 см^2 на стенке сосуда за одну секунду, если давление возрастёт в 4 раза?

Ответ: уменьшится в 16 раз

17.9. Один моль идеального газа находится в сосуде, объём и температуру которого меняют так, что температура газа уменьшается с ростом его объёма по закону $T=\alpha/V^2$, где α = const. Во сколько раз изменится частота соударений молекул газа со стенкой, если давление газа возрастёт в 8 раз? *Ответ*: увеличится в 4 раза

17.10. В закрытом сосуде с объёмом V = 100 литров находится N = 2,4·10^{24} молекул углекислого газа, который можно считать идеальным газом. Масса этого газа m = 176 г. За промежуток времени Δt = 3 сек из маленького отверстия с площадью S = 3 мм^2 в стенке сосуда должно вылетать наружу ΔN = 2·10^{22} молекул. Найти величину давления газа в сосуде.

Ответ: 94,8 кПа

17.11. Идеальный газ совершает процесс, при котором его давление возрастает с увеличением температуры по закону $p=\alpha\cdot T^{3/2}$, где α = const. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре T_2 = 600 K, если при температуре T_1 = 300 K она равна λ_1 = 100 нм? *Ответ*: 70,7 нм

17.12. Идеальный газ совершает процесс, при котором его объём уменьшается с ростом давления по закону $V = \alpha/p^4$, где α = const. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре T_2 = 1600 К, если при температуре T_1 = 200 К она равна λ_1 = 100 нм? *Ответ*: 1600 нм

17.13. Идеальный газ совершает процесс, при котором его температура возрастает с увеличением давления по закону $T = \alpha \cdot p^{2/3}$, где α = const. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул газа при температуре T_2 = 600 К, если при температуре T_1 = 300 К она равна λ_1 = 300 нм? *Ответ*: 212 нм

18. Явления переноса (теплопроводность)

Поток тепла или количество теплоты, переносимое за единицу времени через поперечную поверхность с площадью *S*, определяется уравнением теплопроводности: $\boxed{\vec{J}_Q = -\kappa \cdot \overline{\operatorname{grad} T} \cdot S}$, где $\left|\vec{J}_Q\right| = \Delta Q/\Delta t$, κ – коэффициент теплопроводности среды.

Если поток тепла направлен вдоль одной оси, то во всех точках он должен быть одинаков: $\boxed{J_Q = \text{const}}$. Иначе нарушается тепловое равновесие и участки среды, куда поступает больше тепла, чем уходит, быстро разогреваются до огромных температур.

В газах коэффициент теплопроводности определяется формулой $\kappa_{\text{газа}} = \frac{i}{6} k_Б n \lambda \langle \text{v} \rangle \sim p/\sqrt{T}$ и в зависимости от газового процесса может иметь разную зависимость от температуры *T*.

В твердых средах зависимостью κ от температуры можно пренебречь и считать, что $\kappa_{\text{тв среды}} \approx \text{const}$. В этом случае градиент температуры постоянен так же как и поток тепла, и его можно вычислить по формуле $|\operatorname{grad} T| = \Delta T/\Delta x$. Температура изменяется по линейному закону (рис.1.40). Количество теплоты Δ*Q*, переносимого за время Δ*t* через поперечную площадь S в сторону с более низкой температурой можно вычислить по формуле $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} S$.

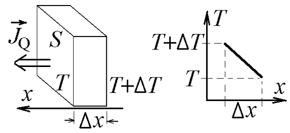
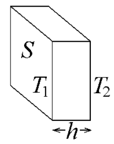


Рис.1.40

Примеры решения задач:

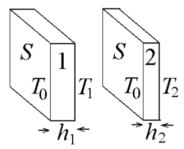
18.1. Кирпичная стена толщиной в два кирпича (*h* = 50 см) имеет площадь *S* = 15 м². Коэффициент теплопроводности кирпича κ = 0,7 Вт/м·К. Какое количество теплоты переносится сквозь стену из отапливаемой комнаты на улицу за сутки? Температуру воздуха в комнате $t_1^o = 27^oC$ и на улице $t_2^o = -10^oC$ считать неизменными.



Решение.

Из уравнения теплопроводности $J_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa \cdot |\operatorname{grad} T| \cdot S = \kappa \frac{T_2 - T_1}{h} S$ находим $\Delta Q = \kappa \frac{T_2 - T_1}{h} S \Delta t = 67{,}13$ МДж. Этот пример показывает, насколько велики потери тепла зимой через стены зданий.

18.2. Два плоских слоя с одинаковой поперечной площадью *S* сделаны из разных металлов. Слой “1” с толщиной h_1 = 4 см – из стали, а слой “2” с толщиной h_2 = 8 см – из меди. Температура T_0 = 300 К по левую сторону этих слоёв одинакова. По их правую сторону температуры равны T_1 = 450 К и T_2 = 400 К. За 3 минуты через стальной слой переносится 5,2 МДж теплоты. За какое время через медный слой будет перенесено 19 МДж теплоты? Коэффициенты теплопроводности стали и меди равны κ_1 = 52 Вт/м·К и κ_2 = 380 Вт/м·К.

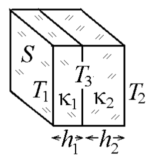


Решение.

Запишем выражения для тепловых потоков через два указанных слоя: $J_{Q1} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = \kappa_1 \frac{T_1 - T_0}{h_1} S$, $J_{Q2} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_0}{h_2} S$.

Отношение левых и правых частей этих уравнений позволяет устранить неизвестную площадь *S* и определить время $\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{\Delta Q_2 h_2}{\Delta Q_1 h_1} \frac{\kappa_1 (T_1 - T_0)}{\kappa_2 (T_2 - T_0)} = 4{,}5$ мин.

18.3. Два плотно прижатых друг к другу плоских слоя с поперечной площадью *S* = 16 м² изготовлены из разных материалов с коэффициентами теплопроводности κ_1 = 3 Вт/м·К и κ_2 = 4 Вт/м·К и имеют толщину h_1 = 20 см и h_2 = 40 см соответственно. Найти промежуток времени, за который через слои переносится количество теплоты, равное 360 кДж? Температуры слева и справа от слоёв неизменны и равны T_1 = 300 К и T_2 = 360 К.



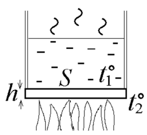
Решение.

Поток тепла через левый слой должен быть равен потоку тепла через правый слой. Иначе из-за разности поступающего и уходящего тепла граница между слоями очень быстро нагреется до бесконечности или охладится до 0 К. Температура T_3 граничного слоя лежит в интервале $T_1 < T_3 < T_2$. Уравнение баланса тепловых потоков

$J_{Q1} = \kappa_1 \frac{T_3 - T_1}{h_1} S = J_{Q1} = \kappa_2 \frac{T_2 - T_3}{h_2} S$ позволяет вычислить эту температуру $T_3 = \frac{\kappa_2 h_1 T_2 + \kappa_1 h_2 T_1}{\kappa_2 h_1 + \kappa_1 h_2} = 324$ К.

Количество теплоты Δ*Q*, переносимое через слои за одно и то же время Δ*t*, одинаково. Промежуток времени Δ*t* может быть вычислен, например, для левого слоя: $J_{Q1} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa_1 \frac{T_3 - T_1}{h_1} S$, откуда $\Delta t = \frac{\Delta Q \cdot h_1}{\kappa_1 (T_3 - T_1) S} = 62{,}5$ сек.

18.4. Вода кипит в стальном сосуде при температуре t_1^o = 100°С. Температура противоположной стороны плоского дна сосуда с площадью S = 500 см^2 равна t_2^o = 100,3°С. Определить толщину h дна сосуда, если за две минуты из сосуда выкипает, превращаясь в пар, масса воды, равная Δm = 8 г. Удельная теплота парообразования воды q = 2250 кДж/кг, коэффициент теплопроводности стали κ = 52 Вт/м·К.

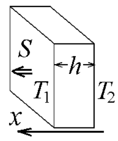


Решение.

Вся теплота ΔQ, поступающая в сосуд с водой через плоское дно за время Δt = 2 мин идёт на нагревание кипящей воды и превращение в пар массы Δm: $\Delta Q = q\Delta m$. Уравнение теплопроводности позволяет выразить эту теплоту через поток тепла: $\Delta Q = J_Q\Delta t = \kappa\dfrac{T_2 - T_1}{h}S\Delta t$. Отсюда $h = \kappa\dfrac{T_2 - T_1}{q\Delta m}S\Delta t = 5{,}2$ мм.

Металлы хорошо пропускают тепло. Поэтому разность температур двух поверхностей металлического дна (одна граничит с кипящей водой, а другая нагревается пламенем), так невелика : $T_2 - T_1$=0,3 К.

18.5. Поток тепла направлен вдоль оси x и одинаков во всех точках плоского слоя с поперечной площадью S = 1 м^2 с толщиной h = 50 см. Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны T_1 = 300 К и T_2 = 600 К. Коэффициент теплопроводности материала этого слоя зависит от температуры T по закону $\kappa = \alpha\cdot\sqrt{T/T_1}$, где α = 10 Вт/м·К. Какое количество теплоты будет перенесено через слой за одну минуту?



Решение.

В данной задаче коэффициент теплопроводности зависит от температуры и зависимость T =T(x) нельзя представить линейным графиком (рис.1.40). Но величина теплового потока J_Q по-прежнему одинакова во всех точках слоя. Поэтому уравнение теплопроводности $J_Q = \kappa(T)\cdot|\mathrm{grad}\,T|\cdot S = \kappa(T)\dfrac{dT}{dx}S = \mathrm{const}$ позволяет разделить переменные $\dfrac{J_Q}{S}dx = \kappa(T)dT$ и проинтегрировать обе части полученного уравнения: $\dfrac{J_Q}{S}\int\limits_0^h dx = \dfrac{J_Q}{S}h = \int\limits_{T_1}^{T_2=2T_1}\kappa(T)dT = \dfrac{\alpha}{\sqrt{T_1}}\int\limits_{T_1}^{T_2=2T_1}T^{1/2}dT =$

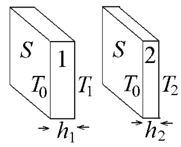
$= \dfrac{\alpha}{\sqrt{T_1}}\dfrac{(2T_1)^{3/2} - T_1^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2\alpha T_1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$. Полученный результат позволяет найти перенесенную через слой за время Δt = 1 мин теплоту: $\Delta Q = J_Q\Delta t = \dfrac{2\alpha T_1 S}{3h}\left(2\sqrt{2} - 1\right)\Delta t = 438{,}8$ кДж.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

18.6. Бетонная стена здания толщиной 20 см за счет теплопроводности пропускала за сутки количество теплоты, равное 240 МДж. Какой должна быть толщина деревянной стены с той же поперечной площадью, чтобы она за неделю пропускала вдвое меньшее количество теплоты при условии, что разность температур по обе стороны бетонной и деревянной стен одинакова? Коэффициенты теплопроводности бетона и древесины равны $\kappa_Б$ = 1,7 Вт/м·К и $\kappa_Д$ = 0,15 Вт/м·К.

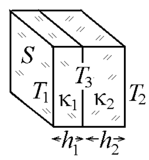
Ответ: 24,7 см

18.7. Две стены с одинаковой поперечной площадью S сделаны из разных материалов. Стена “1” толщиной h_1 = 25 см – из кирпича, а стена “2” толщиной h_2 = 20 см – из бетона. Температура T_0 = 300 К по одну сторону этих стен одинакова. По другую сторону стен температуры равны T_1 = 250 К и T_2 = 260 К. Через кирпичную стену за пять минут переносится 60 кДж теплоты. Какое количество теплоты переносится за две минуты через бетонную стену? Коэффициенты теплопроводности кирпича и бетона равны
κ_1 = 0,8 Вт/м·К и κ_2 = 1,6 Вт/м·К соответственно.



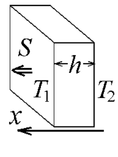
Ответ: 48 кДж

18.8. Стена с площадью S состоит из двух плотно прижатых плоских слоёв. Материалы этих слоёв имеют разные коэффициенты теплопроводности κ_1 = 4 Вт/м·К и κ_2 = 5 Вт/м·К. Температуры слева и справа от слоёв, а также в точке их соприкосновения, равны T_1 = 300 К, T_2 = 400 К и T_3 = 360 К соответственно. Чему равна толщина h_1 левого слоя, если толщина правого слоя h_2 = 30 см?

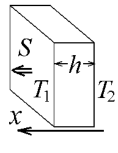


Ответ: 36 см

18.9. Поток тепла направлен вдоль оси x и одинаков во всех точках плоского слоя с толщиной h = 21 см. Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны T_1 = 300 К и T_2 = 600 К. Коэффициент теплопроводности материала из которого изготовлен слой, зависит от температуры T по закону $\kappa = \alpha\cdot\left(T/T_1\right)^5$, где α = 10 Вт/м·К. Найти площадь S поперечного сечения слоя, если за одну минуту через это сечение переносится количество теплоты, равное 27 МДж. *Ответ*: 3 м^2



18.10. Поток тепла направлен вдоль оси x и одинаков во всех точках плоского слоя с поперечной площадью S = 16 м^2. Температуры по обе стороны слоя неизменны и равны T_1 = 300 К и T_2 = 600 К. Коэффициент теплопроводности материала этого слоя зависит от температуры T по закону $\kappa = \alpha\cdot\left(T_1/T\right)^6$, где α = 10 Вт/м·К. Через слой за один час переносится количество теплоты, равное 210 МДж. Найти толщину слоя h.



Ответ: 16,2 см

Семестр 3

19. Расчет электростатических полей точечных зарядов

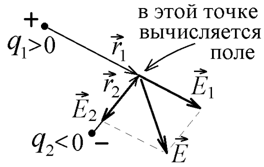
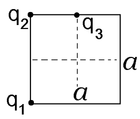


Рис.2.1

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях r_1 и r_2 от зарядов их потенциалы складываются с учетом знака заряда, $\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + \dfrac{-|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}}$. Напряженности складываются векторно, $\boxed{\vec E = \vec E_1 + \vec E_2}$, где величины векторов (поля точечных зарядов) $\boxed{E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}}$, $\boxed{E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}}$. Надо помнить, что вектор $\vec E_1$ поля положительного заряда $+q_1$ направлен от заряда, а вектор $\vec E_2$ поля отрицательного заряда $-q_2$ направлен к заряду, как показано на рис.2.1 (линии $\vec E$ начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, $\varepsilon -$ диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха $\varepsilon \cong 1$) Постоянная $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

На любой точечный заряд q, внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная $\boxed{\vec F = q\vec E}$, а энергия внесенного заряда равна $\boxed{W = q\varphi}$.

Пример решения задач:



19.1. Точечные заряды q_1 = +5 мкКл и q_2 = = +1 мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной a = = 3 м, а заряд q_3 = +2 мкКл – в середине его стороны (см.рисунок). Найти а) величину кулоновской силы, действующей на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2; б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата; в) энергию заряда q_3. Как изменятся результаты, если заряд q_1 поменяет знак?

Решение.

Совет: *Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок – это 30-50% успешного решения задачи.*

Как видно из рис.2.2, величины напряженностей $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$; $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC^2}$, где $BC = \dfrac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$. Проекции векторов на оси x и y равны $E_{1x} = E_1\cos\beta$; $E_{1y} = E_1\sin\beta$; $E_{2x} = E_2$; $E_{2y} = 0$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\cos\beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$; $\sin\beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$.

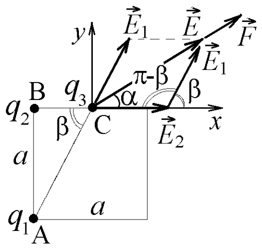


Рис.2.2

Проекции результирующего вектора $\vec E = \vec E_1 + \vec E_2$ в точке С равны

$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt5} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_2}{a^2}$; $E_y = E_{1y} + E_{2y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt5}$. Сила Кулона, действующая на заряд q_3 равна $F = q_3E = q_3\sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4q_3}{a^2}\sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt5} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_2}{\sqrt5}\right)^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{4\cdot2\cdot10^{-6}}{3^2}\sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt5} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}\cdot10^{-6} = 0,0136 \text{ Н}.$$

Совет: *Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при подстановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.*

Угол α между направлением вектора силы $\vec F$ (или вектора $\vec E$) и осью x можно найти из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = E_y/E_x = 2q_1/\left(q_1 + 5\sqrt5 q_2\right) = 0,0856$, откуда $\alpha = 4,89^{\circ}$.

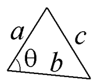


Рис.2.3

Совет: *Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a и b треугольника и угол θ между ними (рис.2.3), то противоположная сторона равна* $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$.

Из рис.2.2 видно, что векторы $\vec E_1$, $\vec E_2$ и $\vec E$ образуют треугольник с углом $\pi - \beta$. Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов $E_1 = \dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0\cdot 5a^2} = 4000$ В/м, $E_2 = \dfrac{4q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot a^2} = 4000$ В/м. $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi-\beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta}$ и $F = q_3E = 13,6$ мН.

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\cdot AC} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot BC} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{q_1}{\sqrt5} + q_2\right) = 1,94\cdot10^4$ В.

Энергия заряда q_3 в электростатическом поле зарядов q_1 и q_2 будет равна $W = q_3\varphi = q_3(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,0388$ Дж.

Совет: Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

Если заряд q_1 *изменит знак, то вектор* $\vec{E}_1$ *поменяет направление (рис.2.4). Тогда по теореме косинусов* $F = q_3 E = q_3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta} = 8{,}41$ мН *. Потенциал заряда* q_1 *изменит знак:*

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-|q_1|}{AC} + \dfrac{q_2}{BC}\right) = -7{,}42\cdot 10^3$ В *и* $W = q_3\varphi = -0{,}0148$ Дж .

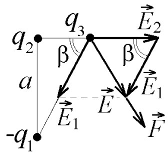
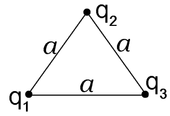


Рис.2.4

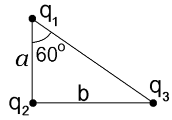
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

19.2. Имеющие разные знаки точечные заряды $q_1 = q_3 = 2$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 действует электрическая сила величиной $F = 0{,}01$ Н. Найти длину a стороны треугольника.



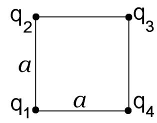
Ответ: 1,77 м.

19.3. Точечные заряды одного знака $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл и q_3 находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом 60° и с прилежащим катетом $a = 1$ м. Определить величину заряда q_3, если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов q_1 и q_2, равна $F = 6$ мН. Определить величину энергии заряда q_3.



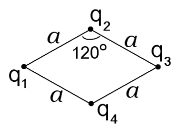
Ответ: 0,747 мкКл; 11,1 мВ.

19.4. Точечные заряды разного знака q_1, q_2, q_3 и q_4 находятся в вершинах квадрата со стороной a = = 2 м. Определить величину положительного заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов q_2, q_3. и q_4., равен $F = 0{,}2$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4 в точке, где находится заряд q_1. Учесть, что $q_2 = q_4 = -2$ мкКл, $q_3 = +6$ мкКл.



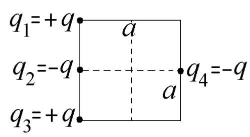
Ответ: 0,518 мкКл, 1092 В.

19.5. Точечные заряды разного знака $q_1 = q_3 = +3$ мкКл, $q_2 = q_4 = -2$ мкКл находятся в вершинах ромба с углом 120° и с длиной каждой из сторон $a = 1$ м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q_3 со стороны трёх других зарядов q_1, q_2. и q_4. Найти энергию заряда q_3 в поле трех остальных зарядов.



Ответ: 66,5 мН, –0,0145 Дж.

19.6. Точечные заряды q_1, q_2, q_3. и q_4. имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны a =3 м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1, q_2. и q_3. равен $F = 1$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4. в точке расположения заряда q_1.



Ответ: 1,523 мкКл, 8,66 кВ.

20. Расчет электростатических полей распределенных зарядов

Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью ρ, то его можно разбить на крошечные участки dV , заряды которых можно считать **точечными** $dq = \rho dV$ (рис.2.5). Созданные ими напряженности $d\vec{E}$ и потенциалы $d\varphi$ суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл: $\varphi = \int d\varphi = \int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

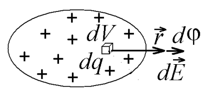


Рис.2.5

Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью ρ [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной dl находится заряд $\boxed{dq = \rho dl}$, создающий в вакууме на удалении r потенциал $d\varphi = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и напряженность $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (рис.2.6). Интегрировать надо по всем участкам, на которых находится ненулевой заряд $\rho \neq 0$, причем векторы $d\vec{E}$ надо складывать с учетом направления.

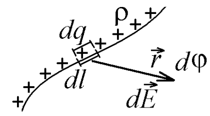
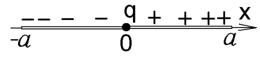


Рис.2.6

Примеры решения задач:

20.1. Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины $2a = 1$ м, вытянутому вдоль оси x Линейная плотность кэтого заряда меняется с координатой x по степенному закону



$\rho = \begin{cases} \rho_0\cdot(x/a)^3 & \text{при } -a \le x \le a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$ где $\rho_0 = 4$ мкКл/м. В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён точечный заряд $q = 3$ мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд q. Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.

Решение.

Положительный заряд $dq = \rho(x)dx$, находящийся на расстоянии x справа от точки 0, создает в этой точке напряженность $d\vec{E}_+$, направленную от заряда против оси x (рис.2.7). Так

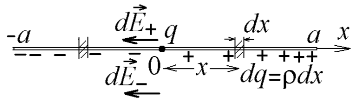


Рис.2.7

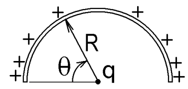
как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то ту же по величине напряженность $d\vec{E}_-$, направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд $-|dq|$ слева от точки 0.

Совет: *Используйте условия симметрии в распределении заряда. Достаточно вычислить поле заряда только одного знака.* Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0 одинаковые поля:

$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left(\rho_0 \frac{x^3}{a^3}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{2a}$. Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на стержне в точке 0 равна $\vec{E} = 2\vec{E}_+$, а проекция силы, действующей на заряд q, $F_x = qE_x = \rho_0 q/(4\pi\varepsilon_0 a) = -0{,}216$ Н.

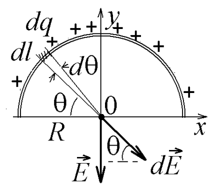
Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположенных положительного и отрицательного зарядов должны компенсировать друг друга, $\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-$. Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.

20.2. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см неравномерно с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2\theta$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ указан на рисунке. Найти величину электрической силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, который заряд на полукольце создает в его центре.



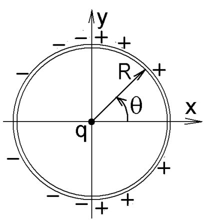
Решение.

При решении подобных задач на полукольце выделяют крошечную дугу длины $dl = Rd\theta$, опирающуюся на бесконечно малый угол $d\theta$ (рис.1.8). На этом участке находится точечный заряд $dq = \rho dl$, создающий в центре 0 полукольца напряженность $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. В силу симметрии распределения заряда слева и справа от вертикальной оси y, суммарная напряженность $\vec{E}$ направлена против оси y, т.е. надо суммировать проекции на эту ось: $E = \int dE \sin\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\theta)\cdot Rd\theta}{R^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \rho_0 \sin^2\theta\cdot\sin\theta d\theta$.



Совет: *При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида* $\int f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ *или* $\int f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$, *которые легко привести к простому виду заменой переменной* $z = \cos\theta$, $\sin\theta d\theta = -dz$ или $z = \sin\theta$, $\cos\theta d\theta = dz$. *При этом* $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Делая замену переменной $z = \cos\theta$ в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак "–", получаем $E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-1}^{1}(1 - z^2)dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\rho_0}{3R}$, откуда $F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\rho_0}{3R} = 0{,}288$ Н – это сила, действующая на заряд q в точке 0. Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как $\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi_0 = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot Rd\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^\pi \rho_0 \sin^2\theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\varepsilon_0 R} = 200$ кВ



20.3. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 60 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0/\cos\theta$, где ρ_0 = 1,18 мкКл/м. В центре кольца помещён точечный электрический заряд q, на который заряд кольца действует с силой $F = 1$ Н. Найти величину заряда q.

Решение.

Выделяем на кольце крошечный участок дуги $dl = Rd\theta$ с точечным зарядом $dq = \rho dl = \rho Rd\theta$, который создает в центре 0 кольца напряженность $d\vec{E}$ (рис.2.9). Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$, направленные против оси x. Их сумма (сумма проекций $d\vec{E}$ на ось x) имеет величину

$$E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2\int dE\cdot\cos\theta = 2\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = 2\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} \frac{\rho Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R}.$$

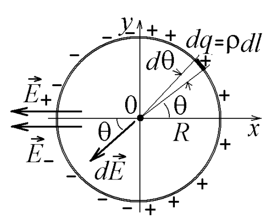


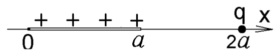
Рис.2.9

Величина силы, действующей на заряд q в точке 0 $F = qE = \frac{q\rho_0}{2\varepsilon_0 R}$, откуда $q = \frac{2\varepsilon_0 RF}{\rho_0} = 9$ мкКл.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

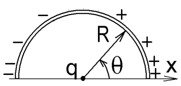
20.4. По тонкому стержню длины a = 2 м, направленному вдоль оси x, неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой x по закону $\rho = \rho_0 \cdot (x/a)^3$, где ρ_0 = -2 мкКл/м. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд q = +2 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд q, а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.

Ответ: +9 мН, –6 кВ.



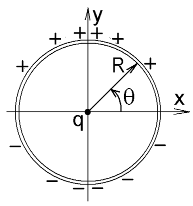
20.5. Тонкий стержень длины a направлен вдоль оси x. По стержню равномерно с линейной плотностью ρ = 0,2 мкКл/м распределен положительный электрический заряд. На расстоянии a от правого конца стержня на оси x находится точечный заряд q = 0,5 мкКл того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд q с силой
F = 0,9 Н. Найти длину a стержня, а также энергию заряда q.

Ответ: 0,5 м, 0,624 Дж.



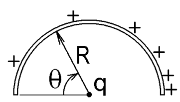
20.6. Положительный точечный заряд q = 7 мкКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \cdot \cos\theta$, где ρ_0 = 1,77 мкКл/м, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x|$ = 0,5 Н.

Ответ: 0,35 м.



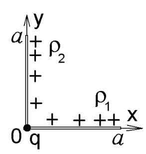
20.7. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 40 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$, где ρ_0 = +2,95 мкКл/м. В центре кольца помещён другой точечный заряд q = +24 мкКл. Найти величину электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд q.

Ответ: 5 Н.



20.8. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см с линейной плотностью $\rho = \rho_0\left(\theta/\pi\right)^3$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ меняется в пределах $0 \le \theta \le \pi$. Найти энергию точечного заряда q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца.

Ответ: 0,3 Дж.



20.9. Два очень тонких стержня длиной a = 20 см каждый направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей x и y и соединяются в начале координат 0, в котором закреплён точечный заряд q = 2 мкКл (см. рисунок). По стержням неравномерно распределены электрические заряды, линейные плотности которых зависят от координат x и y соответственно: $\rho_1 = \rho_0 \cdot (x/a)^2$, $\rho_2 = \rho_0 \cdot (y/a)^2$, где ρ_0 = 2 мкКл/м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q, а также энергию этого заряда.

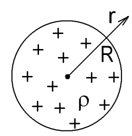
Ответ: 0,255 Н, 0,036 Дж.

21. Использование теоремы Гаусса для расчета электрических полей

В том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность, которую линии напряженности $\vec{E}$ или линии электрической индукции $\vec{D}$ пересекают под прямым углом, для расчета поля удобно использовать теорему Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов $\sum q$ (с учетом их знака!), находящихся **внутри этой поверхности**, деленной на $\varepsilon\varepsilon_0$: $\boxed{\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \sum q/\varepsilon\varepsilon_0}$. Для вектора $\vec{D}$ такая же теорема имеет вид $\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q}$.

Совет: *Используйте теорему Гаусса в том случае, когда заряд распределен симметрично по шару, по длинному цилиндру, по нити или равномерно распределен по плоскости или плоскому слою.*

Примеры решения задач:



21.1. По шару радиуса R равномерно с плотностью ρ распределен электрический заряд. На расстояниях r_1 = 15 см и r_2 = 60 см от центра шара величина напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом, равна, соответственно, E_1 = 24 В/м и E_2 = 12 В/м. Чему равен радиус шара R, если известно, что $r_1 < R < r_2$?

Решение.

Линии $\vec{E}$ начинаются на всех зарядах внутри шара и направлены радиально (рис.2.10). Охватим шар сферической замкнутой поверхностью А с радиусом $r > R$. Если вектор $\vec{E}$ составляет угол θ с вектором элементарной площадки $d\vec{S}$, то $\vec{E}d\vec{S} = E\cos\theta dS$. В нашей задаче элементы площади $d\vec{S}$ направлены параллельно линиям $\vec{E}$, а величина E в силу симметрии одинакова во всех точках сферы. Поэтому поток $\vec{E}$ через замкнутую сферу равен произведению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$, которую линии E пересекают нормально: $\oint \vec{E}d\vec{S} = E\cos 0^0 \oint dS = E \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\varepsilon_0$. Сумма зарядов внутри сферы равна заряду шара $\sum q = \rho \cdot V_{\text{шара}} = \rho \cdot 4\pi R^3/3$, и вне шара напряженность $E_{\text{вне}} = \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2$ совпадает с напряженностью поля заряда, собранного в центр шара.

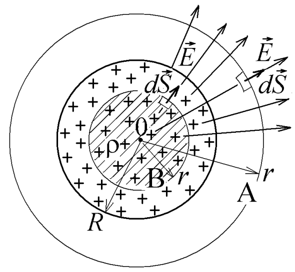


Рис.2.10

Вторую сферическую поверхность B с радиусом $r < R$ выберем внутри шара. Внутри неё находится заряд заштрихованного на рис.2.10 шара радиуса r: $\sum q = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3$. Применение теоремы Гаусса дает $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \varepsilon_0 = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3\varepsilon_0$. Поле внутри шара растет пропорционально расстоянию r: $E_{\text{внутри}} = \rho r / 3\varepsilon_0$ (рис.2.11).

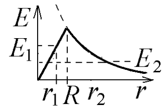


Рис.2.11

Согласно условию, на расстояниях r_1 и r_2 величины напряженностей различаются в два раза (рис.2.11): $E_1 = \rho r_1 / 3\varepsilon_0 = 2E_2 = 2\rho R^3 / 3\varepsilon_0 r_2^2$, откуда $R = \sqrt[3]{r_1 r_2^2 / 2} = 30$ см.

Совет: *Если плотность заряда является функцией расстояния r, то данное решение не меняется, но сумма зарядов внутри сферы радиуса r вычисляется по формуле* $\sum q = \int \rho(r) dV = \int \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$.

21.2. По шару радиуса R = 50 см из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ распределён электрический заряд, причём объёмная плотность такого заряда меняется с расстоянием r от центра шара по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где ρ_0 = const. На расстоянии r = 5 см от центра заряд создаёт электрическое поле с величиной напряжённости E = 20 В/м. Найти величину ρ_0.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую сферическую поверхность радиуса r, находящуюся **внутри** шара, равен $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \varepsilon_0 \varepsilon$ (надо учесть диэлектрическую проницаемость среды). Объем внутри $V = 4\pi r^3 / 3$, элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$. Заряд внутри поверхности $\sum q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \dfrac{4\pi\rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 dr = \dfrac{4\pi\rho_0 r^5}{5R^2}$. Так как $\varepsilon = 2$, то $E = \dfrac{\rho_0 r^3}{10\varepsilon_0 R^2}$ и $\rho_0 = \dfrac{10\varepsilon_0 \varepsilon R^2 E}{r^3} = 7{,}08$ мкКл/м^3.

21.3. Две очень длинные цилиндрические поверхности с радиусами a = 1 м и b = 5 м с общей осью O ограничивают равномерно заряженный цилиндрический слой. Плотность электрического заряда в нём ρ = 4 мКл/м^3. Найти величину вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ (вектора смещения) на расстоянии r = 4 м от оси O.

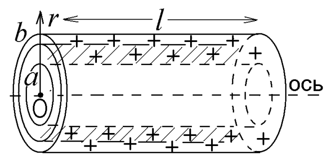


Рис.2.12

Решение.

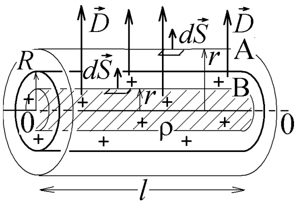


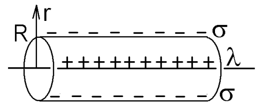
Рис.2.13

Рассмотрим вначале равномерно заряженный с плотностью ρ=const сплошной цилиндр. Окружим его соосной цилиндрической поверхностью A длины l и большего радиуса $r > R$. Как и линии $\vec{E}$, линии индукции $\vec{D}$ направлены по радиусам к общей оси 0 и пересекают боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi r l$ нормально (рис.2.13). Внутри этой поверхности находится заряд из вырезанного поверхностью участка заряженного цилиндра $\sum q = \rho \cdot V_{\text{цилиндра}} = \rho \cdot \pi R^2 l$. Согласно теореме Гаусса $\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \sum q$. Поэтому вне цилиндра $D_{\text{вне}} = \rho R^2 / 2r$.

Цилиндрическая поверхность B меньшего радиуса $r < R$, охватывает заштрихованный на рис.2.13 участок цилиндра с зарядом $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l$. Теорема Гаусса для этой поверхности дает $D \cdot 2\pi r l = \sum q = \rho\pi r^2 l$/ Поэтому внутри цилиндра $D_{\text{внутри}} = \rho r / 2$.

В нашей задаче проводим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса $r < b$ и длины l внутри цилиндрического слоя. Она охватывает заштрихованный на рис.2.12 участок с объемом $V = \pi r^2 l - \pi a^2 l$, имеющий заряд $\sum q = \rho V$. Теорема Гаусса позволяет просто определить индукцию D на этой поверхности: $D = \dfrac{\sum q}{2\pi r l} = \rho\left(r^2 - a^2\right) / 2r = 7{,}5$ мКл/м^2.

21.4. Поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса R = 30 см, равна σ = −2 мкКл/м^2. По её оси протянута нить, равномерно заряженная с линейной плотностью λ = 4 мкКл/м. На каком удалении r от оси напряженность электрического поля, созданного этими зарядами будет равна $E = 1$ кВ/м?

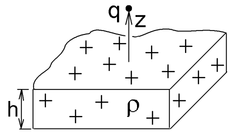


Решение.

Как и на рис.1.13, охватим эту систему зарядов замкнутой цилиндрической поверхностью длины l и радиуса $r > R$. Она охватывает участок цилиндра с зарядом $q_{\text{ц}} = \sigma \cdot 2\pi R l$ и участок нити с зарядом $q_{\text{н}} = \lambda \cdot l$. Линии $\vec{E}$ расходятся вдоль радиусов и перпендикулярны к выбранной поверхности. Согласно теореме Гаусса

$E \cdot 2\pi r l = \sum q / \varepsilon_0 = \left(q_{\text{ц}} + q_{\text{н}}\right) / \varepsilon_0$, откуда $r = \dfrac{2\pi R\sigma + \lambda}{2\pi\varepsilon_0 E} = 4{,}14$ м.

При $r < R$ поле создает только заряд нити. Одна нить создаёт слишком большое поле $E_{\text{нити}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, не удовлетворяющее условиям задачи.



21.5. На удалении z = 1 м от бесконечного плоского слоя, заряженного равномерно с плотностью заряда ρ = 5 мкКл/м^3, находится точечный заряд q = 4 мкКл. Чему равна толщина слоя h, если он действует на заряд q с электрической силой F = 0,02 Н?

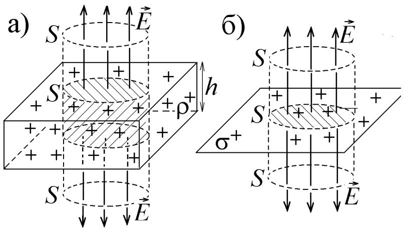


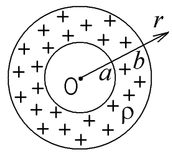
Рис.2.14

Решение.

И в случае равномерно заряженного с плотностью ρ слоя (рис.2.14,а), и в случае равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ плоскости (рис.2.14,б), линии напряженности $\vec{E}$ выходят нормально и пересекают только имеющие площадь S основания цилиндрической замкнутой поверхности, охватывающей заряды на заштрихованных участках. По теореме Гаусса поток $\vec{E}$ через эту поверхность $\oint \vec{E}d\vec{S} = E \cdot 2S = \sum q/\varepsilon_0\varepsilon$. Сумма зарядов на заштрихованных участках $\sum q = \rho \cdot hS$ для слоя и $\sum q = \sigma \cdot S$ для плоскости. Поэтому $E_{\text{слоя}} = \dfrac{\rho h}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ (рис.1.14,а) и $E_{\text{плоскости}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ (рис.1.14,б).

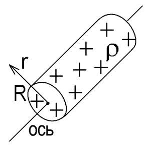
Величина E не зависит от расстояния до бесконечного слоя (или плоскости). Действующая на заряд q сила $F = qE$, и по условиям задачи ($\varepsilon = 1$) толщина слоя $h = 2\varepsilon_0 F/q\rho = 1{,}77$ см.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



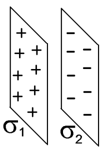
21.6. Заряд с плотностью ρ =3,75 мКл/м^3 равномерно распределён по шаровому слою, ограниченному двумя сферическими поверхностями с общим центром О и с радиусами a и b. Чему равен радиус a, если b = = 9 м, а на расстоянии r = 5 м от центра О величина вектора электрической индукции поля, созданного этим зарядом, равна D = 6,2 мКл/м^2?

Ответ: 1 м.

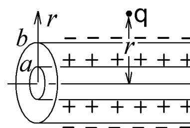


21.7. Очень длинный цилиндр радиуса R = 4 см равномерно с плотностью ρ = const заряжен по объёму. На расстоянии r_1 = 3 см от оси цилиндра напряжённость электрического поля, имеет величину E_1 = 24 В/м, а на расстоянии $r_2 > r_1$ от оси E_2 = 16 В/м. Найти расстояние r_2.

Ответ: 8 см.



21.8. По двум параллельным бесконечным плоскостям равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями σ_1 = +8 мкКл/м^2 и σ_2 = –4 мкКл/м^2 разного знака. Во сколько раз величина вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ между заряженными плоскостями больше величины вектора $\boldsymbol{D}$ слева от обеих плоскостей? *Ответ*: в 3 раза.



21.9. Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы a = 5 см и b = = 10 см. Поверхностные плотности таких зарядов σ_1 = –5,9 нКл/м^2 и σ_2 = +4,72 нКл/м^2. Чему равна величина точечного заряда q, находящегося на расстоянии r = 20 см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила F = 3 мН?

Ответ: 30 мкКл.

21.10. Электрический заряд распределён в пространстве неравномерно: его плотность изменяется с расстоянием r от центра О по закону: $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (R/r)^3 & \text{при } r \geq R; \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$ где ρ_0 = 2,36 нКл/м^3; R = 50 см. Найти величину напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом на расстоянии r = 1 м от центра О. ε =1.

Ответ: 23,1 В/м.

21.11. Электрический заряд распределён по объёму бесконечно длинного цилиндра радиуса R = 20 см. Плотность заряда меняется с расстоянием r от оси цилиндра по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где ρ_0 = 8 мКл/м^3. На каком расстоянии r от оси (внутри цилиндра) величина вектора электрической индукции равна D = 3,2 мкКл/м^2?

Ответ: 4 см.

22. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы

Совет: *При решении задач проще использовать дифференциальные операторы (производные).* Например, напряженность поля можно определить, зная его потенциал: $\boxed{\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi \equiv -\vec{i}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \vec{j}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \vec{k}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}$.

Зная напряженность, вычисляют плотность заряда, создающего электрическое поле:

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)}.$$

Примеры решения задач:

22.1. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x)+\sin(\beta y)+\sin(\gamma z))$, где $\varphi_0 = 100$ В, $\alpha=\beta=\gamma= \pi/2$ рад/м. Найти плотности ρ электрического заряда в той точке, в которой потенциал поля равен $\varphi = 100$ В, а также величину напряженности в точке $x = y = z = 2$ м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$.

Решение.

Находим проекции вектора $\vec{E}$: $E_x = -\partial\varphi/\partial x = -\alpha\varphi_0 \cos(\alpha x)$;
$E_y = -\partial\varphi/\partial y = -\beta\varphi_0 \cos(\beta y)$; $E_z = -\partial\varphi/\partial z = -\gamma\varphi_0 \cos(\gamma z)$. Плотность заряда пропорциональна дивергенции этого вектора и, так как $\alpha = \beta = \gamma$, во всех точках пропорциональна потенциалу:

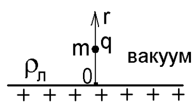
$$\rho = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \varepsilon_0 \left(\alpha^2\varphi_0 \sin(\alpha x) + \beta^2\varphi_0 \sin(\beta y) + \gamma^2\varphi_0 \sin(\gamma z) \right) = \varepsilon_0 \alpha^2 \varphi = 2{,}18 \text{ нКл/м}^3 .$$

Величина напряженности: $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\varphi_0^2 \cos^2 \pi} = \sqrt{3}\alpha\varphi_0 = 544$ В/м.

Работу по перемещению частицы с зарядом q из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле можно вычислить с помощью силы Кулона: $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q\vec{E} d\vec{r}$. Но проще найти её с помощью потенциала. Эта работа идет на изменение кинетической энергии заряженной частицы: $\boxed{A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m\text{v}_2^2}{2} - \frac{m\text{v}_1^2}{2}}$.

Примеры решения задач:

22.2. Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью $\rho_л = 2$ мкКл/м. Покоившаяся первоначально на расстоянии $r_1 = 1$ м от нити частица с зарядом $q = 5$ мкКл и с массой $m = 0{,}8$ г удаляется от нити под действием электрической силы. На каком расстоянии r_2 от нити частица будет иметь скорость v = 30 м/с?



Решение.

Совет: *Напряженности поля заряженного шара, плоскости, нити можно получить с помощью теоремы Гаусса.*

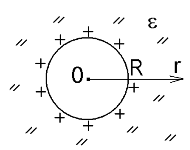
В данной задаче напряженность поля нити $E_{нити} = \frac{\rho_л}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (см. задачу 21.4). Поэтому

$\frac{m\text{v}^2}{2} = A_{1\to 2} = \int\limits_{r_1}^{r_2} qEdr = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. Избавиться от логарифма можно вычислив экспоненту от обеих частей уравнения: $\exp\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \equiv \frac{r_2}{r_1} = \exp\left(\frac{\pi\varepsilon_0 m\text{v}^2}{q\rho_л}\right)$, откуда $r_2 = 7{,}40$ м.

Плотность энергии электрического поля (или энергия единицы объема поля) $\boxed{\text{w}_{эл} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2}$. Энергия поля в объеме V вычисляется как $\boxed{W = \int \text{w}_{эл} dV}$.

Примеры решения задач:

22.3. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$ заполняет все пространство вокруг заряженного металлического шара радиуса $R = 3$ см. Чему равна величина заряда q на шаре, если энергия созданного им электрического поля равна $W = 60$ Дж.



Решение.

Внутри металлического шара поле отсутствует, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, собранного в центр шара: $E = q/\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2\right)$, при $r \ge R$. Поэтому энергия поля вне шара

$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int\limits_R^\infty \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$. Отсюда $q = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 WR} = 40$ мкКл.

Совет: *Вместо энергии поля иногда проще найти энергию системы зарядов, создающих данное поле. Эти энергии одинаковы.*

Энергия заряда выражается через емкость проводника C и его потенциал φ: $W = C\varphi^2/2$, где $q = C\varphi$. Емкость уединенного шара $C_{шара} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, его потенциал $\varphi = q/\left(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\right)$. Подставляя, получаем уже найденную формулу для энергии *W*.

Заряд q и емкость C конденсатора связаны с разностью потенциалов $U=\Delta\varphi$ на его обкладках: $\boxed{q=CU}$. Энергия заряженного конденсатора $\boxed{W=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$. Емкость вычисляют, с помощью формулы, связывающей напряженность и потенциал поля: $\boxed{\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2\vec{E}d\vec{r}}$.

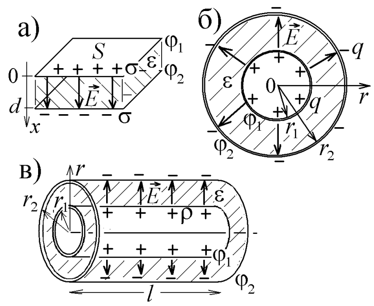


Рис.2.15

В **плоском конденсаторе** (рис.2.15,а) с площадью пластин *S*, расстоянием между пластинами *d*, заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, напряженность поля между пластинами $\boxed{E_{\text{конд}}=\sigma/\varepsilon\varepsilon_0}$, где $\sigma=q/S$ - поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов на пластинах $U=\varphi_1-\varphi_2=\int_0^d E_{\text{конд}}dx=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}d=\frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$. Ёмкость плоского конденсатора $\boxed{C_{\text{плоск}}=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$.

В **сферическом конденсаторе** (рис.2.15,б) пространство между металлическими сферами с радиусами r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с $\varepsilon=\text{const}$. Поле между ними создано зарядом *q* на внутренней сфере: $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Тогда $U=\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{C}$. Ёмкость сферического конденсатора $C_{\text{сфер}}=4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2\big/\left(r_2-r_1\right)$.

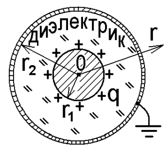
Аналогичным вычислением покажите, что емкость **цилиндрического конденсатора** (две соосные цилиндрические поверхности с радиусами r_1 и r_2 большой длины *l*, рис.2.15,в) равна $C_{\text{цилин}}=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$.

Примеры решения задач:

22.4. Заряженный плоский конденсатор заполнен твердым диэлектриком и имеет энергию *W* = 0,2 Дж. Расстояние между его пластинами *d* = 2 мм. Найти силу, притягивающую одну пластину к другой.

Решение.

На пластину с зарядом *q* может действовать только заряд другой пластины (рис.2.15,а), создающий поле $E=\sigma/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right)$ (поле заряженной плоскости). Заряд конденсатора можно выразить через его энергию: $q^2=2CW=2W\,\varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Подставляя этот результат в формулу для силы $F=qE=q\sigma/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right)=q^2/\left(2\varepsilon\varepsilon_0 S\right)$, получаем $F=W/d=100$ Н.



22.5. Пространство между заряженным металлическим шаром радиуса r_1 = 2 см и металлической заземленной сферой с радиусом r_2 = 4 см заполнено неоднородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется с расстоянием *r* от общего центра О по закону ε = α/*r*, где α = 6 см. Найти заряд *q* шара, если энергия такой системы заряженных проводников равна *W* = 0,2 Дж.

Решение.

На внутренней поверхности заземленной сферы окажется заряд $-q$, на котором будут заканчиваться все силовые линии $\vec{E}$, не проникая в металл. Система будет сферическим конденсатором, для которого разность потенциалов $U=\varphi_1-\varphi_2=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Его энергия, $W=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{8\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$, и $q=\sqrt{\frac{8\pi\alpha\varepsilon_0 W}{\ln\left(r_2/r_1\right)}}=1{,}96$ мкКл.

Ёмкость этого конденсатора не совпадает с ёмкостью конденсатора, заполненного однородным диэлектриком.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

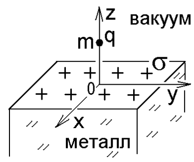
22.6. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону φ = α·*xyz*, где α = const. Величина напряженности такого поля в точке с координатами $x_1=y_1=z_1=1$ м равна E_1 = 30 В/м. Найти величину напряжённости этого поля в точке с координатами x_2 = 1 м, y_2 = 2 м, z_2 = 3 м.

Ответ: 121 В/м.

22.7. Потенциал электростатического поля зависит от координат *x*, *y* по закону φ = φ₀·(sin(α*x*)+cos(β*y*)), где φ_0 = 100 В, α = 2 рад/м, β = 3 рад/м. Найти величину напряженности поля, а также плотность электрического заряда в точке с координатами *x* = *y* = 1 м.

Ответ: 93,4 В/м, -4,67 нКл/м^3.

22.8. Частица с зарядом q = 3 мкКл и с массой m = 0,2 г покоилась на расстоянии z_1 = 1 см от очень большой плоской поверхности металла, по которой с поверхностной плотностью σ = 3,54 нКл/м^2 распределен электрический заряд того же знака. Какую скорость приобретёт частица, удалившись на расстояние z_2 = 4 см от поверхности металла под действием электрической силы.



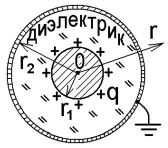
Ответ: 0,6 м/с.

22.9. Заряженный плоский конденсатор, имеющий энергию W = 0,004 Дж, заполнен диэлектриком и отключен от источника напряжения. Чтобы вынуть диэлектрик, надо совершить работу A = 0,003 Дж. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика? *Ответ*: 1,75.

22.10. Расстояние между горизонтально расположенными пластинами плоского воздушного конденсатора d = 1 см. Между пластин неподвижно висит заряженная пылинка с массой m = 0,05 г. Ёмкость конденсатора C = 0,03 мкФ, заряд на его пластинах q = 6 мкКл. Найти величину заряда пылинки. Принять g = 10 м/с^2.

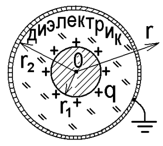
Ответ: 25 нКл.

22.11. Однородная среда с диэлектрической проницаемостью ε = 4 заполняет пространство между металлическим шаром и заземленной металлической сферой радиуса r_2 = 8 м. На шар помещен заряд q = = 6 мкКл, а потенциал электростатического поля в общем центре O шара и сферы имеет величину φ_0 = = 2,4 кВ. Чему равен радиус r_1 шара?



Ответ: 3,30 м.

22.12. Металлический шар радиуса r_1 = 2 см и заземленная металлическая сфера радиуса r_2 = 3 см имеют общий центр O. Диэлектрическая проницаемость непроводящей среды, заполняющей пространство между шаром и сферой, убывает с расстоянием r от центра O по закону ε = a/r, где a = 4 см. Найти ёмкость такой системы проводников (в пФ).



Ответ: 11,0 пФ

22.13. Металлический шар с зарядом q = 4 мкКл окружен заземленной металлической сферой радиуса r_2 = 5 см. Между ними находится диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого убывает с расстоянием r от общего центра O по закону ε =b/r^3, где b = 150 см^3. Энергия этой системы заряженных проводников равна W = 0,36 Дж. Найти радиус шара r_1.

Ответ: 3,16 см.

23. Законы квазистационарного тока

Ток, протекающий по участку цепи с сопротивлением R, создает на нем падение напряжения $\boxed{U = IR}$. Мощность тока $\boxed{P = UI = I^2R}$, а величина силы тока зависит от величины заряда, протекшего через сечение проводника за единицу времени: $\boxed{I = dq/dt}$.

Совет:

Если ток зависит от времени, не используйте школьные формулы, записанные для постоянного тока!

Величина заряда, протекшего по цепи за время $0 \le t \le \tau$ будет равна $\boxed{q = \int_0^\tau I(t)\,dt}$, а величина выделившегося за это время тепла $\boxed{Q = \int_0^\tau I^2(t)\,R\,dt}$.

Примеры решения задач:

23.1. Ток, текущий по проводнику, возрастает прямо пропорционально времени t: $I = \alpha \cdot t$, где α = const. Чему равно сопротивление R проводника, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$, где τ = 4 с, через поперечное сечение проводника протекает заряд q = 5 Кл, а в проводнике выделяется джоулево тепло Q = 80 Дж?

Решение.

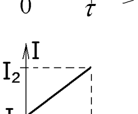
Так как $q = \int_0^\tau I dt = \int_0^\tau \alpha t dt = \frac{\alpha\tau^2}{2}$; $Q = \int_0^\tau I^2 R dt = \int_0^\tau \alpha^2 t^2 R dt = \frac{\alpha^2\tau^3 R}{3}$, то $\frac{q^2}{Q} = \frac{3\tau}{4R}$ (исключили неизвестную α). Поэтому

$$R = \frac{3\tau Q}{4q^2} = 9{,}6 \text{ Ом}.$$

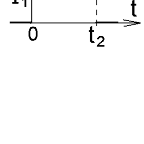
Совет:

Если зависимость силы тока от времени задана с помощью графика (в задачах обычно задана линейная зависимость), то её надо выразить линейной функцией: $I = a + bt$. Параметры a и b этой зависимости определяют подстановкой числовых данных на осях графика.

Надо помнить, что интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции. Например, протекший за время τ заряд будет равен заштрихованной площади под графиком тока.



23.2. По проводнику с сопротивлением R = 2 Ом течёт ток, величина которого за интервал времени $0 \le t \le t_2 = 3$ с меняется по линейному закону от I_1 = 2 А до I_2 = 5 А (см. рисунок). Чему равно тепло Q, которое выделится в проводнике за указанный интервал времени $0 \le t \le t_2$ с, а также заряд q, который протечет по проводнику за это время?

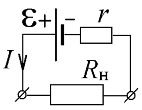


Решение.

Так как $I = a + bt$, то при $t = 0$ имеем $I_1 = a$, а при $t = t_2$ $I_2 = a + bt_2$. Отсюда $b = (I_2 - I_1)/t_2 = 1$ А/с ; $a = I_1 = 2$ А .

Поэтому $Q = \int I^2 R dt = \int (a+bt)^2 R dt = R\left(a^2 \int\limits_0^{t_2} dt + 2ab\int\limits_0^{t_2} t dt + b^2 \int\limits_0^{t_2} t^2 dt\right) = R\left(a^2 t_2 + abt_2^2 + b^2 t_2^3/3\right) = 78$ Дж .

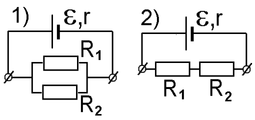
Протекший заряд $q = \int I dt$ равен площади под графиком тока: $q = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)t_2 = 10{,}5$ Кл .



В случае, когда к источнику тока с **постоянной** ЭДС ε подключается внешняя нагрузка с сопротивлением $R_н$, по цепи протекает постоянный ток $I = \varepsilon/(R_н + r)$. Помните, что у каждого источника тока имеется внутреннее сопротивление *r*. В этом случае за время Δt на нагрузке выделяется тепло $Q = I^2 R \Delta t$.

Примеры решения задач:

23.3. К клеммам источника постоянного тока с внутренним сопротивлением r = 40 Ом сначала подключали нагрузку из двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = R$, соединенных параллельно (рис.1), а потом соединённых последовательно (рис.2). В цепи на рис.1 за одну минуту на нагрузке выделялось тепло Q_1 = 3,6 кДж, а в цепи на рис.2 за то же время на нагрузке выделялось тепло Q_2 = 2,5 кДж. Чему равно каждое из сопротивлений R_1 или R_2? Какой заряд протекает через нагрузку в обоих случаях?



Решение.

При параллельном соединении резисторов сопротивление нагрузки равно $R_{н1} = R_1 R_2/(R_1 + R_2) = R/2$, а при последовательном – $R_{н2} = R_1 + R_2 = 2R$. Поэтому $Q_1 = I_1^2 R_{н1} \Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r + R/2}\right)^2 \frac{R}{2}\Delta t$; $Q_2 = I_2^2 R_{н2}\Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r+2R}\right)^2 2R\Delta t$.

Отсюда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{36}{25} = \frac{(r+2R)^2}{4(r+R/2)^2}$, или $\frac{r+2R}{r+R/2} = \frac{12}{5}$ и $R = \frac{7r}{4} = 70$ Ом .

Зная сопротивления, можно вычислить величину ЭДС, величину токов $I_1 = \sqrt{2Q_1/R\Delta t}$; $I_2 = \sqrt{Q_2/2R\Delta t}$, а также определить протекший за время Δt заряд: $q_1 = I_1 \Delta t = \sqrt{\frac{2Q_1\Delta t}{R}} = 111$ Кл ; $q_2 = I_2\Delta t = \sqrt{\frac{Q_2 \Delta t}{2R}} = 46{,}3$ Кл .

Совет:

Если в условии задачи приведены удельное сопротивление проводника ρ *или его удельная проводимость* $\sigma = 1/\rho$, *то можно использовать закон Ома в локальной форме:* $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$.

Здесь $\vec{E}$ - напряженность стороннего электрического поля, создающего ток, а $j = dI/dS$ - плотность тока, текущего через поперечное сечение S проводника, которое может иметь произвольную форму (рис.2.16). Величина силы тока, текущего по проводнику $\boxed{I = \int j dS}$. Если плотность тока во всех точках сечения S одинакова, то $I = jS$, а падение напряжения на проводнике длины l равно $\varphi_1 - \varphi_2 = \int E dl = \boxed{U = El}$.

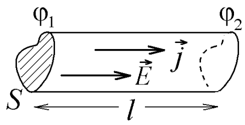
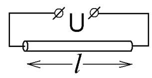


Рис.2.16

Подстановкой j и E из закона Ома в локальной форме легко получить обычную запись закона Ома $U = IR$, где сопротивление участка однородного проводника $\boxed{R = \rho l/S = l/\sigma S}$.

Примеры решения задач:

23.4. Когда проволока длины l_1 была подключена к источнику постоянного напряжения *U*, в ней каждую минуту выделялось джоулево тепло Q_1 = 729 Дж. Затем эту проволоку растянули до длины l_2 и подключили к тому же источнику напряжения *U*. Теперь каждую минуту в проволоке начало выделяться тепло Q_2 = 625 Дж. Во сколько раз была увеличена длина проволоки?



Решение.

Текущий по проволоке ток $I = U/R$ постоянен. Меняется сопротивление $R_1 = \rho l_1/S_1 \to R_2 = \rho l_2/S_2$, где *S* –сечение проволоки, уменьшающееся при её растяжении. Поэтому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U^2}{R_1}\Delta t \Big/ \frac{U^2}{R_2}\Delta t = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} .$$

При растяжении не меняется объём проволоки $V = l_1 S_1 = l_2 S_2$. Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$ и $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$. Длина проволоки меняется в $l_2/l_1 = \sqrt{Q_1/Q_2} = 1{,}08$ раз.

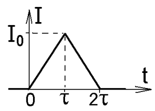
23.5. Напряженность электрического поля внутри цилиндрического проводника с радиусом r_0 = 4 мм направлена вдоль его оси и во всех точках равна E = 0,5 мВ/м. Удельная проводимость материала проводника возрастает с расстоянием r от оси проводника по закону $\sigma = \sigma_0 \left(r/r_0\right)^2$, где σ_0 = $5{\cdot}10^7$ (Ом·м)$^{-1}$. Найти силу тока I, текущего по проводнику.

Решение:

Выражая ток через его плотность $I = \int jdS$, где $dS = d\left(\pi r^2\right) = 2\pi rdr$, и используя закон Ома в локальной форме $j = \sigma E$, получаем $I = \int\limits_0^{r_0} \sigma E \cdot 2\pi rdr = \dfrac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0} r^3 dr = \dfrac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2}\cdot\dfrac{r_0^4}{4} = \dfrac{\pi\sigma_0 E r_0^2}{2} = 0,628$ А.

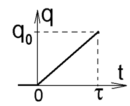
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

23.6. По проводнику течёт ток, величина которого меняется со временем t, как показано на рисунке, где I_0 = 0,6 А, τ = 3 с. Заряд какой величины q протечет через сечение проводника за интервал времени $0 \le t \le 2\tau$?



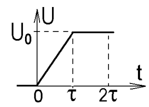
Ответ: 1,8 Кл.

23.7. В начальный момент t = 0 по проводнику с сопротивлением R = 8 Ом начинает течь ток, причем величина протекшего через поперечное сечение проводника заряда q линейно растёт со временем t (см.рисунок). Найти величину заряда q_0 протекшего к моменту времени τ = 3 с, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$ в проводнике выделится джоулево тепло Q = 24 Дж?

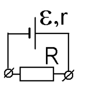


Ответ: 3 Кл.

23.8. Падение напряжения на участке проводника с сопротивлением R = 24 Ом вначале линейно возрастает со временем t, а потом постоянно и равно U_0 = 12 В (см. рисунок, где τ = 1 мин). Какое джоулево тепло выделится в проводнике за промежуток времени $0 \le t \le 2\tau$?

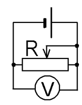


Ответ: 480 Дж.



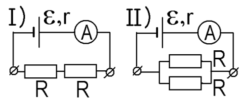
23.9. К клеммам источника постоянного тока подключена нагрузка с сопротивлением R = 30 Ом. За какой промежуток времени Δt в нагрузке выделится джоулево тепло Q = 15 Дж, если за это же время по цепи протечёт заряд q = 5 Кл? *Ответ*: 50 с.

23.10. Вначале сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянного тока с эдс ε = 36 В, было равно R_1 = 100 Ом. Движком реостата увеличили его сопротивление в 4 раза, и при этом падение напряжения на нем в возросло в k = 1,5 раз. Какое джоулево тепло стало после этого выделяться на реостате каждую секунду?



Ответ: 2,25 Дж.

23.11. Два одинаковых резистора с сопротивлением R = 8 Ом каждый подключены к источнику постоянного тока сначала последовательно (рис.I), а потом параллельно (рис.II). Во втором случае ток, показываемый амперметром, в 2,5 раз больше, чем в первом. По цепи, изображённой на правом рис.II за время Δt =2 мин протекает заряд q_{II} = 48 Кл. Чему равна величина эдс данного источника тока? *Ответ*: 3,2 В.



23.12. Найти удельную проводимость σ однородного материала, из которого изготовлен цилиндрический проводник радиуса r_0= 5 мм, если во всех точках проводника напряженность стороннего электрического поля равна E = 0,004 В/м, а по проводнику течет ток I = 10 А.

Ответ: $3{,}18\cdot 10^7$ (Ом·м)$^{-1}$.

23.13. Однородный проводник с удельным сопротивлением $\rho = 5{\cdot}10^{-6}$ Ом·м имеет поперечное сечение в форме квадрата со стороной a =5 мм. Величина напряженности квазистационарного стороннего электрического поля, направленного вдоль проводника, меняется со временем t по линейному закону: $E = At + B$, где A = 5 В/м·с, B = 3 В/м. Какой заряд протечет через поперечное сечение проводника за промежуток времени $0 \le t \le 2$ с ?

Ответ: 80 Кл.

24. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа

Совет:

При решении задач с разветвленными цепями делайте следующие действия, которые автоматически приведут Вас к правильному решению (для примера показана схема на рис.2.17).

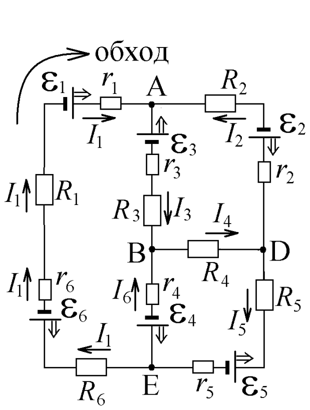
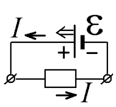


Рис.2.17

1) Аккуратно нарисуйте схему разветвленной цепи и жирными точками обозначьте все узлы – точки, где соединяются три и более проводника (точки A, B, D, E на рис.2.17);



2) **Рядом** с каждым источником ЭДС ε_i поставьте его внутреннее сопротивление r_i. На каждом источнике обозначьте стрелку =>, выходящую из его плюсовой клеммы. Эта стрелка показывает направление тока I_i, создаваемое источником ε_i в неразветвленной цепи:

3) В каждой ветви – участке цепи между двумя узлами – стрелкой обозначьте направление текущего тока. На рис.2.17 видно 6 ветвей и 6 токов $I_1 - I_6$. Старайтесь проставить индексы токов такими же, как индексы сопротивлений, по которым они текут. Вдоль одной ветви ток не дол-

жен менять ни величину, ни направление, как показано для тока I_1. Не думайте в какую сторону действительно течет ток. Если Вы ошиблись с направлением, то в ответе получите этот ток с правильной величиной, но со знаком “минус”.

4) Для каждого узла можно записать первое правило Кирхгофа: $\sum I_i = 0$: токи, входящие в узел записывайте со знаком”+”, а выходящие – со знаком “-”. Число токов равно числу проводников, соединяющихся в узле:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ для узла A; $\quad I_3 + I_6 - I_4 = 0$ для узла B; $\quad I_4 - I_2 - I_5 = 0$ для узла D и.т.п.

5) Выберите направление обхода (по часовой стрелке на рис 2.17) и запишите второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура цепи: $\sum U_i = \sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i$ (алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом же замкнутом контуре). В цепи на рис.2.17 имеется семь **разных** замкнутых контуров (рис.2.18).

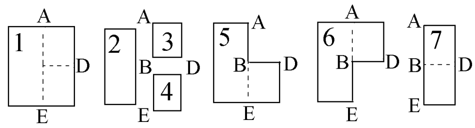


Рис.2.18

Если выбранное направление стрелки тока совпадает с направлением обхода, то этот ток в сумме берется со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Если стрелка ЭДС => совпадает с направлением обхода, то эта ЭДС входит в сумму со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Менять направление уже поставленных стрелок нельзя. Идите по направлению обхода и записывайте падения напряжения **только для тех сопротивлений, которые Вы встретите в выбранном контуре**. Пройдя по контуру второй раз, запишите все встреченные ЭДС с соответствующими знаками:

$I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 + I_5R_5 + I_5r_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6$ (для контура 1 на рис.2.18);

$I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 - I_4R_4 - I_6r_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$ (для контура 6 на рис.2.18) и.т.п.

6) Число возможных уравнений (1-е правило Кирхгофа для 4 узлов и 2-е правило для 7 контуров в цепи на рис.2.17) превышает число неизвестных токов $I_1 - I_6$. Эти уравнения будут линейно зависимыми.

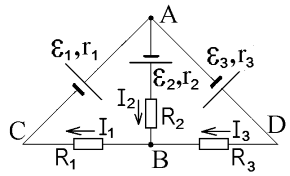
Совет: *Линейно независимыми для цепи с N узлами будут уравнения 1-го правила Кирхгофа для любых $N-1$ узлов и уравнения 2-го правила Кирхгофа для самых маленьких контуров, пустых внутри.*

Для цепи на рис.2.17 это, например, узлы A, B и D, и контуры 2, 3 и 4 (см. рис. 2.18). Остается без ошибок решить записанную систему линейных уравнений.

Как правило, в задаче контрольной работы надо рассчитать цепь с двумя узлами. В этом случае решается простая система из трех уравнений.

Примеры решения задач:

24.1. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: r_1= r_2= r_3= 1 Ом. Найти величину сопротивления R_3, если известно, что R_1= 2 Ом; R_2= = 3 Ом; ε_1= 12 В; ε_2= 8 В; ε_3=10 В; I_2 = 2 А.



Решение.

Линейно независимой будут уравнения системы из 1-го правила Кирхгофа, записанного для узла B: $I_2 + I_3 - I_1 = 0$, и двух 2-х правил Кирхгофа, записанных для треугольных контуров CAB и BAD: $I_1R_1 + I_1r_1 + I_2R_2 + I_2r_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $\quad I_3R_3 + I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

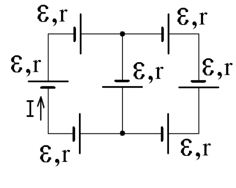
(как и на рис.2.17, направление обхода – по часовой стрелке). Эта система из трех уравнений содержит три неизвестные величины I_1, I_3 и R_3.

Совет: *Решать такую систему в буквенных обозначениях всё ещё слишком громоздко. Если Вы уверены в записанных уравнениях – подставьте все числовые значения из условия в системе СИ. Тогда ответ также получится в системе СИ. Уравнения станут простыми, но проверить размерности Вы уже не сможете.*

Из второго уравнения находим единственную не заданную в нем величину $I_1 = 4$ А. Подставляя её в первое уравнение, находим $I_3 = I_1 - I_2 = 2$ А.

Последнюю неизвестную R_3 находим из последнего уравнения, подставляя все найденные величины: $R_3 = 4$ Ом.

24.2. Семь одинаковых источников тока с внутренним сопротивлением r = 1 Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС ε каждого из источников, если по левому проводнику протекает ток I = 3,2 А.



Решение.

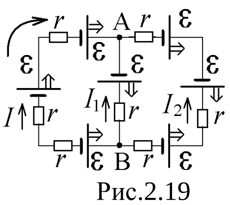


Рис.2.19

Направим стрелки токов I_1 и I_2 вверх, как и стрелку тока I. Все токи сходятся в узле A (рис.2.19) $I + I_1 + I_2 = 0$. Это означает, что направление каких-то токов указано неверно и в процессе вычисления эти токи будут иметь разный знак. Для контуров слева и справа от линии AB 2-е правило Кирхгофа имеет вид:

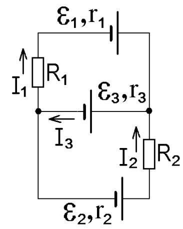
$$Ir + Ir + Ir - I_1r = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon, \qquad I_1r - I_2r - I_2r - I_2r = \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon.$$

Получили систему с тремя неизвестными I_1, I_2 и ε:

$\begin{cases} I_1 + I_2 = -I, \\ 2\varepsilon + I_1r = 3Ir, \\ I_1r - 3I_2r = 0. \end{cases}$ Из последнего уравнения $I_2 = \dfrac{I_1}{3}$, из первого $I_1 = -\dfrac{3}{4}I$, из второго уравнения $\varepsilon = \dfrac{(3I - I_1)r}{2} = \dfrac{15Ir}{8} = 6$ В.

Токи $I_1 = -2,4$ А и $I_2 = -0,8$ А имеют правильную величину, но направления их мы не угадали.

24.3. Три источника тока с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину падения напряжения U_3 на клеммах источника тока с ЭДС $\varepsilon_3 = 9$ В и внутренним сопротивлением r_3, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\varepsilon_1 = 16$ В; $\varepsilon_2 = 25$ В.



Решение.

Направления токов на рисунке уже заданы. 1-е правило Кирхгофа для левого узла имеет вид $I_3 - I_1 - I_2 = 0$. 2-е правило Кирхгофа для верхнего маленького контура $I_1R_1 + I_1r_1 + I_3r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, для нижнего маленького контура $-I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ (обход – по часовой стрелке). После подстановки числовых данных в СИ имеем простую систему: $\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0, \\ 3I_1 + I_3 = 7, \\ I_3 + 4I_2 = 16. \end{cases}$ Решение этой системы дает $I_1 = 1$ А; $I_2 = 3$ А; $I_3 = 4$ А.

Совет: *Помните, что если ток I **разряжает** батарею с ЭДС ε и с внутренним сопротивлением r (рис. 2.20,а), то падение напряжения на её клеммах* $\boxed{U = \varepsilon - Ir}$. *Если же ток **заряжает** батарею (рис.2.20,б), то* $\boxed{U = \varepsilon + Ir}$. *Величина* $U > \varepsilon$, *иначе ток не потечет против источника ЭДС.*

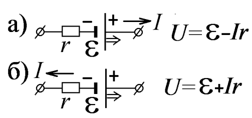
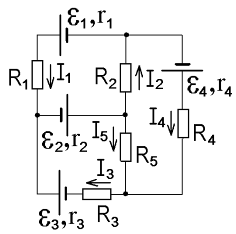


Рис.2.20

В нашей задаче, как видно из рисунка, ток I_3 направлен против источника ЭДС ε_3, и напряжение на его клеммах $U_3 = \varepsilon_3 + I_3r = 13$ В.

Совет: *Если цепь содержит больше двух узлов и линейно независимых уравнений слишком много, расставьте все числовые данные задачи на схеме и определите узлы или контуры, для которых уравнения правил Кирхгофа включают только одну неизвестную величину.*

24.4. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ Ом. Найти величину падения напряжения на клеммах источника ε_2, если известно, что $\varepsilon_2 = 7$ В; $\varepsilon_4 = 4$ В; $R_2 = 2$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $R_5 = 7$ Ом; $I_2 = 3$ А; $I_4 = 2$ А.



Решение.

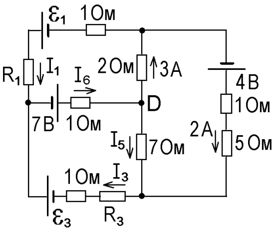


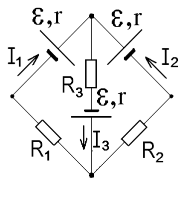
Рис.2.21

Обозначим все числовые данные задачи на схеме (рис.2.21). Теперь видно, что в уравнение 2-го правила Кирхгофа для правого контура входит единственная неизвестная величина – ток I_5: $I_2R_2 + I_4(R_4 + r_4) - I_5R_5 = \varepsilon_4$, откуда легко найти $I_5 = 2$ А.

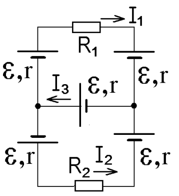
Далее из уравнения 1-го правила Кирхгофа для узла D (рис.2.21) находим величину тока $I_6 = I_2 + I_5 = 5$ А. Этот ток будет разряжать источник ε_2, и падение напряжения на его клеммах согласно рис.1.20,а, равно $U_2 = \varepsilon_2 - I_6r_2 = 4$ В.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

24.5. Три одинаковых источника тока с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке справа. Найти величину ЭДС ε каждого из источников тока, если $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $I_3 = 5$ А.



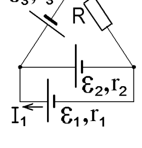
Ответ: 13 В.



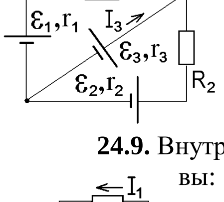
24.6. Пять одинаковых источников тока с ЭДС ε =11 В каждый включены в разветвленную цепь, показанную на рисунке слева. Найти величину внутреннего сопротивления r источника тока, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 6$ Ом; $I_1 = 1$ А.

Ответ: 1,5 Ом

24.7. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину тока I_1, текущего через источник ε_1, если известно, что $R = 5$ Ом; $\varepsilon_1 = 8$ В; $\varepsilon_2 = 4$ В; $\varepsilon_3 = 32$ В.



Ответ: 0 А.

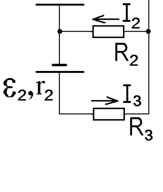


24.8. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину ЭДС ε_3, , если известно, что $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $\varepsilon_1 = 2$ В; $\varepsilon_2 = 10$ В; $I_3 = 2$ А.

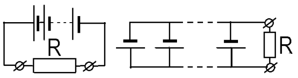
Ответ: 12 В.

24.9. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину тока I_2, текущего через сопротивление R_2 , если известно, что
$R_1 = R_3 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $\varepsilon_1 = 12$ В; $\varepsilon_2 = 14$ В; $\varepsilon_3 = 4$ В.

Ответ: 1 А

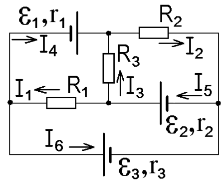


24.10. Внутренние сопротивления двух источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы: $r_1 = r_2 = 1$ Ом. Найти величину сопротивления R_2, если известно, что
$R_1 = 2$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $\varepsilon_1 = 9$ В; $\varepsilon_2 = 36$ В; $I_2 = 3$ А. *Ответ*: 3 Ом.



24.11. Одиннадцать одинаковых источников ЭДС с внутренним сопротивлением r = 12 Ом каждый соединяют в батарею вначале последовательно, а потом параллельно, и подключают к клеммам этих батарей одну и ту же нагрузку. Найти сопротивление нагрузки R, если при последовательном соединении источников ток в нагрузке в два раза больше, чем при параллельном.

Ответ: 28 Ом.



24.12. Три источника тока включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину сопротивления R_2, если известно, что ε_1 =3 В; ε_2 =9 В; r_1= r_2= 1 Ом; R_1= 2 Ом; I_1 = 2 А; I_3 = I_4= 1 А.

Ответ: R_2= 2 Ом.

25. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами

Элемент тока I длины $d\vec{l}$, направленный по току, создает на расстоянии $\vec{r}$ магнитное поле с индукцией $\boxed{d\vec{B} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}}$ (рис.2.22). Здесь μ – магнитная проницаемость среды ($\mu = 1$ в вакууме или воздухе), $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная.

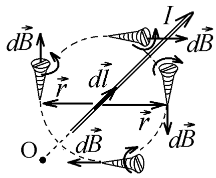


Рис.2.22

Совет: *В задачах очень важно правильно определить направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в любой точке. Для этого надо поставить винт перпендикулярно току и радиус-вектору $\vec{r}$, проведенному в эту точку. Если вращать винт ближней стороной по направлению тока, как показано на рис.2.22, то направление его поступательного движения покажет направление вектора $\vec{B}$. Замкнутые линии $\vec{B}$ охватывают проводник с током.*

Чтобы найти индукцию $\vec{B}$ всего тока надо взять интеграл по длине проводника: $\vec{B} = \int d\vec{B}$. В задачах контрольной работы встречаются токи, текущие по круговому или по прямому проводнику.

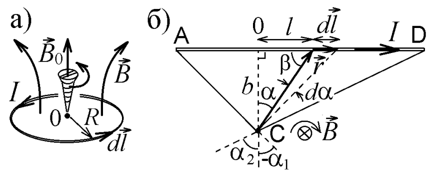


Рис.2.23

В центре 0 кругового витка радиуса R с током I (рис.2.23,а) получаем $B_0 = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int\dfrac{rdl\sin 90^{\circ}}{r^3} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\underbrace{\oint dl}_{=2\pi R} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2R}$.

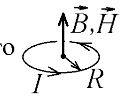
Для точки С, находящейся на расстоянии b от прямого отрезка с током I, как видно из треугольника на рис.2.23,б, выполняются соотношения $r = b/\cos\alpha$; $l = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $dl = bd\left(\mathrm{tg}\,\alpha\right) = bd\alpha/\cos^2\alpha$. Угол β между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока $Id\vec{l}$ равен $\beta = 90^{\circ} - \alpha$. Поэтому $B_C = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int\dfrac{rdl\sin\beta}{r^3} = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}\int\limits_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha = \dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}\left(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2\right)$.

Пределы интегрирования $-\alpha_1$ и α_2 соответствуют граничным точкам А и D отрезка с током (точка 0 на рис.2.23,б соответствует углу $\alpha = 0$). Для бесконечного прямого проводника с током $\alpha_1, \alpha_2 \to 90^{\circ}$ и $B_C = \dfrac{\mu\mu_0}{2\pi b}$.

Помимо индукции $\vec{B}$ магнитное поле можно описать вектором напряженности $\vec{H}$, которая в неферромагнитной среде имеет вид $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0$.

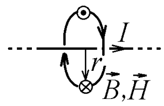
Все полученные для индукции $\vec{B}$ формулы будут справедливыми и для напряженности $\vec{H}$ магнитного поля, если в них убрать множитель $\mu\mu_0$:

в центре кругового тока



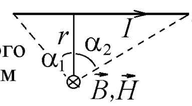
$\boxed{B = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2R},\ H = \dfrac{I}{2R}}$

для бесконечного прямого тока



$\boxed{B = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi r},\ H = \dfrac{I}{2\pi r}}$

для прямолинейного отрезка с током

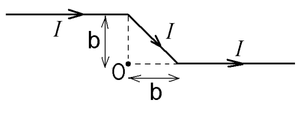


$$\boxed{\begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \\ H &= \frac{I}{4\pi r}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \end{aligned}}$$

Совет: *В задачах контрольной работы линейные токи состоят из отдельных участков круговых токов, прямолинейных отрезков с токами и прямых бесконечных проводников с токами. Необходимо разбить систему на такие участки, определить величину **и правильное направление** вектора $\vec{B}$ или $\vec{H}$, созданного током, текущим по каждому участку, а затем сложить все эти векторы.*

Учтите, что на продолжении прямого тока (точка О *на рис.2.22) поле не создается:* $B_{\text{O}} = 0$.

Примеры решения задач:



25.1. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых проводников, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в точке О, если b = 40 см.

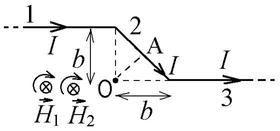
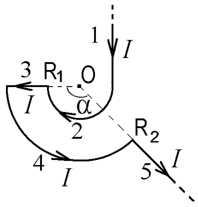


Рис.2.24

Решение.

Разбиваем систему на отдельные прямолинейные участки 1, 2 и 3 (рис.2.24). Участок 1 – это полубесконечный ток, создающий в точке О напряженность $H_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{I}{2\pi b}$. Участок 2 – прямолинейный отрезок, находящийся на расстоянии $r = \text{OA} = b\cos 45^{\circ}$ от точки О. Его концы видны из этой точки под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^{\circ}$.Он создает напряженность $H_2 = \dfrac{I}{4\pi r}\cdot 2\sin 45^{\circ} = \dfrac{I}{2\pi b}$. Точка О находится на продолжении прямого участка 3, и этот участок поля в ней не создает: $H_3 = 0$. Как видно из рис.2.24, направления векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ совпадают и их сумма $H_O = H_1 + H_2 = 3I/4\pi b = 1,79$ А/м .

25.2. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых полубесконечных линий, двух дуг с радиусами R_1 = 1 м и R_2 = 2 м (внешняя дуга имеет угол α = 135°) и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуг.

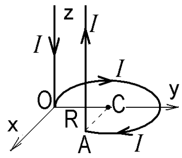


Решение.

Прямые участки 3 и 5 на рисунке не создают полей в точке О на их продолжении. Поэтому $\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4$. Индукция полубесконечного тока 1 $B_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ и индукция половины кругового тока 2 $B_2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2R_1}$ направлены в одну сторону, а индукция, созданная участком 4, являющимся частью окружности, $B_4 = \dfrac{135^{\circ}}{360^{\circ}}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2R_2}$, направлена противоположно. Так как $R_2 = 2R_1$, то в точке О имеем $B_O = \left|B_1 + B_2 - B_4\right| = \dfrac{\mu_0 I}{4R_1}\left|\dfrac{1}{\pi} + 1 - \dfrac{3}{8}\right| = 0,889$ мкТл .

Совет: *Если векторы $\vec{B}$ или $\vec{H}$ направлены под углом друг к другу, то удобно указать их направления в трех осях декартовой системы координат.*

25.3. Бесконечный проводник согнут так, что текущий по нему ток I = 3 А вначале течет против оси z, затем поворачивает в начале координат О, образуя дугу окружности с углом 270° и с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости xy, а затем снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной параллельно оси z. Найти величину индукции магнитного поля в центре дуги С.



Решение.

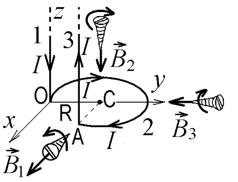
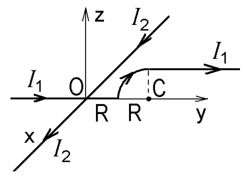


Рис.2.25

Определяем направления полей, созданных отдельными участками (рис.2.25) с помощью винтов, острия которых должны находиться в точке С. Направление вращения винтов связаны с направлением токов (см.рис.2.22). Как видно, вектор индукции поля полубесконечного тока 1 имеет величину $B_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ и направлен вдоль оси x; вектор индукции, созданный $3/4$ кругового тока 2, и имеющий величину $B_2 = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ направлен против оси z; вектор индукции полубесконечного тока 3, $B_3 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$, направлен против оси y (рис.2.25). Все эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма имеет в точке С величину $B_C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \dfrac{\mu_0 I}{4R}\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{\pi^2}} = 1,48$ мкТл .

25.4. Ток I_1 = 1 А течёт по бесконечному проводнику, вначале совпадающему с осью y, затем образующему дугу в четверть окружности с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости yz. Далее проводник продолжается в виде прямой линии, параллельной оси y. Расстояние от центра дуги С до начала координат О равно 2R. Второй ток I_2 = 3 А течет по бесконечному проводнику вдоль оси x (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этими токами в центре дуги С.

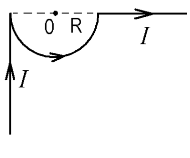


Решение.

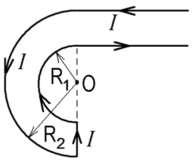
В точке С первый ток создает напряженность $H_1 = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{I_1}{2R} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{I_1}{2\pi R}$, вектор которой направлен против оси x (это поле 1/4 кругового тока, протекающего по дуге и поле половины бесконечного прямого тока). Второй ток, находящийся на расстоянии 2R от точки С, создает напряженность $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi\cdot 2R}$, вектор которой направлен вдоль оси z. Величина суммы этих векторов $H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \dfrac{1}{4R}\sqrt{\left(\dfrac{I_1}{2} + \dfrac{I_1}{\pi}\right)^2 + \left(\dfrac{I_2}{\pi}\right)^2} = 0,314\ \dfrac{\text{А}}{\text{м}}$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

25.5. По бесконечному проводнику, согнутому, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуги с радиусом R = 20 см.



Ответ: 3,21 мкТл.

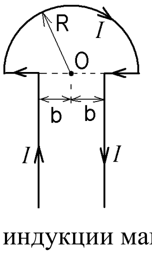


25.6. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных прямых линий, двух полуокружностей с радиусами R_1 = 50 см и R_2 = 1 м и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 5 А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре О полуокружностей.

Ответ: 1,648 А/м.

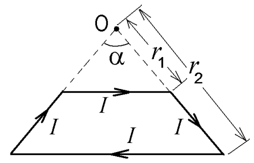
25.7. По замкнутому проводнику, согнутому в виде дуги с радиусом R = 20 см и соединяющей её концы хорды (см. рисунок), течет ток I = 3 А. Найти величину напряженности магнитного поля в центре О дуги, если угол α = 90°.

Ответ: 8,01 А/м.



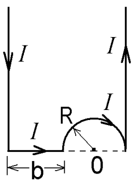
25.8. По бесконечному проводнику, согнутому в виде полуокружности с радиусом R = 60 см, двух прямых отрезков и двух параллельных линий, течет ток I = 4 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре О полуокружности (см. рисунок), если b = 30 см.

Ответ: 4,76 мкТл.



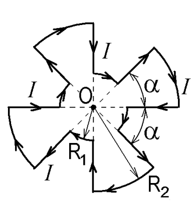
25.9. По проводнику, согнутому в виде симметричной трапеции, течет ток I = 3 А. Размеры приведены на рисунке, где r_1 = 20 см, r_2 = 50 см, α = 90°. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в точке О.

Ответ: 1,8 мкТл.

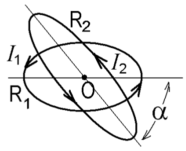


25.10. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных линий, полуокружности с радиусом R = = 40 см и прямого отрезка длины b = 50 см, течет ток I = 2 А (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого током в центре О полуокружности.

Ответ: 0,849 мкТл.

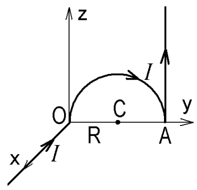


25.11. По проводнику, согнутому в виде восьми круговых дуг с одинаковыми углами α = 45° и с радиусами R_1 = 40 см и R_2 = 80 см, а также восьми соединяющих их прямых отрезков, как показано на рисунке, течет ток I = 5 А. Найти величину индукции магнитного поля в общем центре дуг О. *Ответ*: 5,89 мкТл.



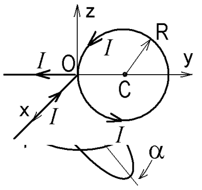
25.12. По согнутым в кольца проводникам с радиусами R_1 = R_2 = 1 м текут одинаковые токи I_1 = I_2 = 3 А. Угол между плоскостями проводников α = 60° (см. рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого токами в общем центре О колец.

Ответ: 3,26 мкТл.



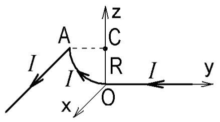
25.13. Бесконечный проводник согнут так, что образованная им полуокружность с радиусом R = = 40 см расположена в плоскости yz. Направление текущего по нему тока I = 3 А указано на рисунке. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого током в центре С полуокружности.

Ответ: 1,41 А/м.



25.14. Бесконечный проводник согнут так, что ток I = 4 А течет по нему против оси x, поворачивает в начале координат О, протекая по окружности с радиусом R = 30 см, расположенной в плоскости yz, а затем течет против оси y (см.рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре С окружности.

Ответ: 7,00 А/м



25.15. Ток I = 3 А течет по согнутому бесконечному проводнику против оси y, поворачивает в начале координат О, протекая по дуге окружности с углом 90° и с радиусом R = 50 см, расположенной в плоскости yz, снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной вдоль оси x (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре дуги С.

Ответ: 1,66 мкТл.

26. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру называется интеграл $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$. Циркуляция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля равна произведению $\mu\mu_0$ на **алгебраическую** сумму токов, охватываемых контуром: $\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i}$

(для вектора напряженности $\vec{H}$ циркуляция по замкнутому контуру равна $\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_i}$).

Совет:

Чтобы определить знак тока в этой сумме, расположите винт перпендикулярно плоскости контура и вращайте его по направлению обхода контура. Если направление тока совпадает с направлением поступательного движения винта, то этот ток входит в сумму с положительным знаком. Если ток направлен противоположно движению винта, то он входит в сумму со знаком "минус".

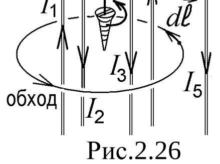


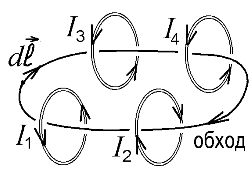
Рис.2.26

Например, на рис.2.26 винт, вращающийся по направлению обхода контура, движется вверх. В эту сторону направлены токи I_1 и I_4, охватываемые контуром, а противоположно – токи I_2 и I_3. Согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\mu_0\left(I_1 - I_2 - I_3 + I_4\right)$. Ток I_5 создает поле, но не охватывается контуром, и в сумму не входит.

Совет: *Внимательно следите на рисунке, сколько раз линия замкнутого контура* ***охватывает*** *каждый ток. Если ток охватывается N раз, то в сумму он также входит N раз.*

Примеры решения задач:

26.1. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 2 А, I_2= 1 А, I_3= 4 А и I_4. Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\oint \vec{B}d\vec{l}$ по этому контуру равна 5 мкТл·м. Найти величину тока I_4.



Решение.

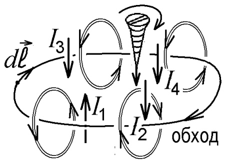
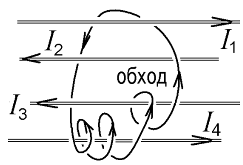


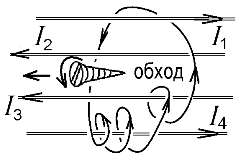
Рис.2.27

На рис.2.27 дополнительными стрелками указаны направления токов I_i **внутри** охватывающего их замкнутого контура. Винт, вращаемый по направлению обхода контура, движется вниз. В эту сторону направлены токи I_2, I_3, I_4. Здесь $\mu = 1$. Поэтому $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right)$ и $I_4 = I_1 - I_2 - I_3 + \oint \vec{B}d\vec{l} \big/ \mu_0 = 0{,}979$ А.

26.2. На рисунке показан замкнутый контур, направление его обхода и прямолинейные проводники с токами I_1= 3 А, I_2, I_3= 1 А, I_4= 2 А. Циркуляция вектора индукции магнитного поля, созданного этими токами по указанному контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = -4$ мкТл·м. Найти величину тока I_2.



Решение.

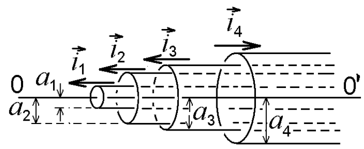


Приглядитесь к рисунку внимательно! Линия контура проходит за током I_1, не охватывая его. Перед током I_4 эта линия проходит три раза, т.е. ток I_4 охватывается 3 раза, ток I_3 - 2 раза, ток I_2 - один раз.

Вращаемый по направлению обхода винт движется налево, вдоль токов I_2 и I_3. Поэтому, согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(I_2 + 2I_3 - 3I_4\right)$, откуда $I_2 = 3I_4 - 2I_3 - \left|\oint \vec{B}d\vec{l}\right| \big/ \mu_0 = 0{,}817$ А .

Совет: *Теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитного поля токов с симметричным распределением плотности тока* $\vec{j}$ *или поверхностной плотности тока* $\vec{i}$.

26.3. По четырем тонким и очень длинным цилиндрическим проводящим поверхностям, имеющим радиусы a_1= 1 см, a_2= 2 см, a_3= 3 см и a_4=4 см протекают токи с поверхностными плотностями i_1= 3 А/м, i_2= = 4 А/м, i_3=5 А/м и i_4=6 А/м соответственно. Направления токов показаны на рисунке. На каком расстоянии r от общей оси 00' проводников величина индукции магнитного поля B = 0,5 мкТл, при условии, что $r > a_4$?



Решение.

Поверхностная плотность тока задается формулой $\boxed{i = dI/dl}$, где dI – это ток, протекающий по полоске поверхности ширины dl. Поэтому величина тока, текущего по цилиндрической поверхности радиуса a равна $I = i \cdot 2\pi a$ (рис.2.28). Окружим цилиндр круговым замкнутым контуром радиуса $r > R$, совпадающим с линией индукции $\vec{B}$ магнитного поля, созданного током I внутри контура. По теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$. Хотя ток и распределен в пространстве, он создает такое же поле, как и линейный ток I, проходящий по оси цилиндра. Подставив I, получим $B = \mu_0 ia/r$. В нашей задаче круговой контур радиуса r охватит четыре проводника, по которым токи i_1, i_2, i_3 текут в одну сторону, а ток i_4 - в другую. Циркуляция $\oint \vec{B}d\vec{l}$ $= B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi\left(i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3 - i_4a_4\right)$, откуда $r = \mu_0 \left(i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3 - i_4a_4\right) \big/ B = 5{,}03$ см .

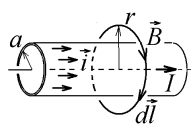
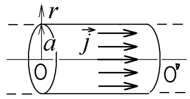


Рис.2.28

26.4. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a течёт постоянный ток с однородной плотностью $\vec{j} = \text{const}$. Величина напряжённости магнитного поля на расстоянии r_1 = 4,8 мм от оси проводника ОО' в полтора раза больше величины напряженности на расстоянии r_2 = 0,8 мм от оси. Найти радиус a проводника, если $r_2 < a < r_1$.



Решение.

Снова окружим проводник круговым замкунтым контуром радиуса $r > a$ (рис.2.29), который охватит ток $I = j \cdot \pi a^2$, протекающий через все поперечное сечение проводника. Согласно теореме о циркуляции: $\oint \vec{H}d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I$. Поэтому вне проводника, при $r > a$, его поле совпадает с полем линейного тока $H_{\text{вне}} = \dfrac{I}{2\pi r} = \dfrac{ja^2}{2r}$. Внутри проводника, при $r < a$, линии $\vec{H}$ также образуют круговой контур, но он охватывает только ток $I = j \cdot \pi r^2$, протекающий через меньшее, заштрихованное на рис.1.29 сечение. Получаем $H_{\text{внутри}} = I/2\pi r = jr/2$.

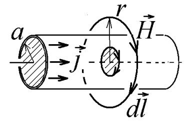
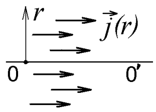


Рис.2.29

По условию $\dfrac{H_{\text{вне}}(r_1)}{H_{\text{внутри}}(r_2)} = \dfrac{ja^2}{2r_1} \cdot \dfrac{2}{jr_2} = \dfrac{a^2}{r_1 r_2} = \dfrac{3}{2}$. Радиус проводника $a = \sqrt{3r_1 r_2 / 2} = 2{,}4$ мм .



26.5. В среде с $\mu = 1$ вдоль выделенной оси ОО’ течёт постоянный ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси по закону $j = j_0 \cdot \sqrt{b/r}$, где b = 0,5 м, j_0 = 3000 А/м^2. Найти величину индукции B магнитного поля, созданного этим током на расстоянии r = 2 м от оси ОО’.

Решение.

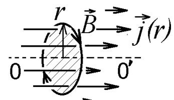
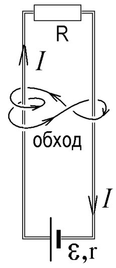


Рис.2.30

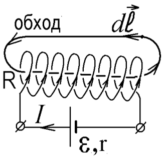
Если плотность тока $\vec{j}$ симметрична относительно оси ОО’, то линии вектора $\vec{B}$, созданного этим током, охватывают ось ОО’ по кругу (рис.2.30). Запишем теорему о циркуляции для контура радиуса r, совпадающего с одной из линий $\vec{B}$: $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$. Величина тока, охватываемого этим контуром $\sum I = \int\limits_0^r jdS = \int\limits_0^r jd\left(\pi r^2\right) = \int\limits_0^r j \cdot 2\pi r dr$. Подставляя заданную зависимость $j = j(r)$, находим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int\limits_0^r j_0 \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \int\limits_0^r \sqrt{r} dr = 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2}$$, откуда $B = 2\mu_0 j_0 \sqrt{br}/3 = 2{,}51$ мТл .

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

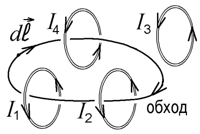


26.6. Резистор с сопротивлением R = 10 Ом подключен длинными проводами к источнику тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r = 2 Ом. Циркуляция вектора $\vec{B}$, созданного протекающим по цепи током I, по замкнутому контуру, направление обхода которого показано на рисунке, равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = 3$ мкТл·м. Найти величину ЭДС ε. *Ответ*: 3,18 В.



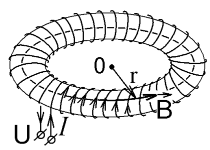
26.7. Источник тока с эдс ε = 24 В подключен к катушке из N =8 витков, имеющей омическое сопротивление R = 10 Ом. По катушке течёт постоянный ток, а циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке, равна $\oint \vec{H}d\vec{l}$ = -30 А. Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока?

Ответ: 3,6 Ом.



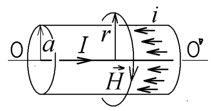
26.8. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 1 А, I_2= 2 А, I_3= 3 А и I_4 (см. рисунок). Циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l}$ = –2 мкТл·м. Найти величину тока I_4.

Ответ: 1,41 А.

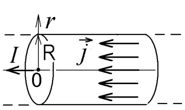


26.9. Провод с сопротивлением R = 30 Ом равномерно навит на тороидальный сердечник из материала с магнитной проницаемостью μ = 25. Ток I, текущий по виткам получившейся катушки, имеющей N = 600 витков, создаёт в сердечнике на удалении r = 9 см от центра катушки О магнитное поле с индукцией B = 0,05 Тл. Чему равно напряжение U, приложенное к концам провода?

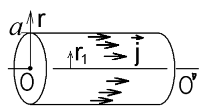
Ответ: 45 В.



26.10. По осевому тонкому проводнику-жиле длинного прямого коаксиального кабеля течёт ток I = 3 А. По второму тонкому цилиндрическому проводнику с радиусом a = 4 мм протекает встречный ток с поверхностной плотностью i = 100 А/м. На каком расстоянии r от оси кабеля ОО’ напряженность магнитного поля равна H = 3 А/м? *Ответ*: 2,58 см



26.11. Ток I = 1 А протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса R = 1 см и имеет однородную плотность $\vec{j} = \text{const}$. Чему равна величина индукции $\vec{B}$ магнитного поля на расстоянии r = 5 мм от оси проводника? *Ответ*: 10 мкТл.



26.12. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a = 5 мм течёт ток с неоднородной плотностью $j = j_0 \cdot (r/a)^3$, зависящей от расстояния r до оси проводника ОО’. На каком расстоянии r_1 от оси проводника напряжённость созданного током магнитного поля равна H = 100 А/м? Известно, что j_0 = 1,6·10^6 А/м^2.

Ответ: 2,5 мм или 8 см.

27. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях

В электромагнитном поле с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$ на частицу с зарядом q и с массой m, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ действует сила Лоренца $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]}$, являющаяся суммой электрической и магнитной сил.

Совет: *Чтобы решить задачу, аккуратно нарисуйте направления векторов $\vec{E}, \vec{B}$ и $\vec{\text{v}}$ в декартовой системе координат, правильно укажите направления сил и сообразите, по какой траектории будет двигаться частица под действием этих сил.*

Примеры решения задач:

27.1. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью $\vec{\text{v}}$ в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Найти минимальную величину скорости частицы, если E = 100 В/м, B = 0,01 Тл.

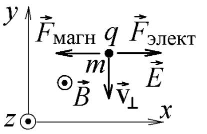


Рис.2.31

Решение.

Так как по условию $\vec{\text{v}}$=const, то $\vec{F} = \vec{F}_{\text{электр}} + \vec{F}_{\text{магн}} = 0$. Направим вектор $\vec{E}$ вдоль оси x, а вектор $\vec{B}$ - вдоль оси z. Магнитная составляющая силы Лоренца компенсирует электрическую составляющую: $F_{\text{электр}} = qE = F_{\text{магн}} = q\text{v}_{\perp}B$ (рис.2.31). Видно, что вектор скорости частицы $\vec{\text{v}}_{\perp}$ направлен против оси y.

Совет: *Определить направление $\vec{F}_{\text{магн}} = q\left[\vec{\text{v}}, \vec{B}\right]$ (векторного произведения) для частицы с положительным зарядом проще с помощью “правила левой руки”: если направить четыре пальца по первому вектору $\vec{\text{v}}$, а второй вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, то большой палец показывает направление $\vec{F}_{\text{магн}}$ (рис.2.32,а). Для частицы с отрицательным зарядом используйте “правило правой руки” (рис.2.32,б).*

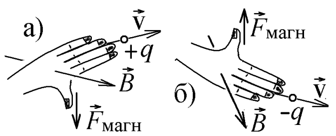
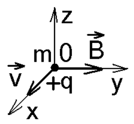


Рис.2.32

Скорость $\text{v}_{\perp} = E/B = 10^4$ м/с будет минимальной скоростью, так как частица может иметь любую проекцию скорости v_z на ось z, параллельную вектору $\vec{B}$. Это не изменит решения, так как не изменит ни величину, ни направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$.

27.2. Частица с положительным зарядом q и с массой m движется в магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси y. В начальный момент t_0= 0 она находилась в точке 0 начала координат и имела скорость $\vec{\text{v}}$, направленную вдоль оси x. В момент времени t_1= 3 мс координата z частицы в первый раз становится максимальной и равной z_{m}= 10 см. Найти расстояние частицы от точки 0 в момент времени t_2= 2 мс.



Решение.

Если скорость $\vec{\text{v}} \perp \vec{B}$ (рис.2.33), то в однородном магнитном поле частица движется по окружности, радиус R которой можно найти, подставляя нормальное ускорение $a_n = \text{v}^2/R$ в уравнение динамики: $ma_n = F_{\text{магн}}$ или $m\text{v}^2/R = q\text{v}B$, откуда $\boxed{R = m\text{v}/qB}$. Период обращения частицы по этой окружности $\boxed{T = \dfrac{2\pi R}{\text{v}} = \dfrac{2\pi m}{qB}}$.

Нарисовав направления векторов и траекторию согласно условиям задачи, видим, что $R = \dfrac{z_{\text{m}}}{2}$. Время $t_1 = \dfrac{T}{2} = 3$ с. За это время частица пройдет половину окружности с углом 180°. А за время $t_2 = 2$ с она опишет дугу окружности с углом 120° и будет находиться в точке А на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 120^{\circ}} = \sqrt{3}R = \sqrt{3}z_{\text{m}}/2 = 8{,}66$ см от точки 0.

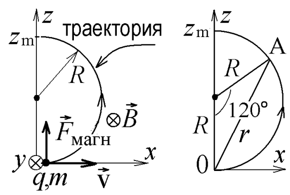
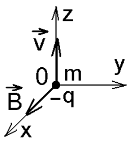


Рис.2.33

27.3. Частица с отрицательным удельным зарядом q/m = $2 \cdot 10^9$ Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 1 кВ, в начальный момент t_0= 0 находится в точке 0 (см. рисунок) и движется со скоростью v = 200 м/с, направленной вдоль оси z в однородном магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси x. В момент времени t = 5 мкс её скорость в первый раз будет направлена против оси y. На каком удалении от точки 0 частица окажется в этот момент времени, и какой путь она пройдет за время t?



Решение.

Работа, совершаемая ускоряющим напряжением $U = \Delta\varphi$, идет на изменение кинетической энергии частицы: $A = q\Delta\varphi = m\text{v}^2/2$. Поэтому, проходя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$, частица приобретает скорость $\boxed{\text{v} = \sqrt{2q\Delta\varphi/m}}$.

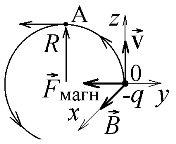
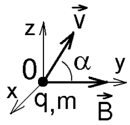


Рис.2.34

Указывая направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$ и рисуя круговую траекторию частицы (рис.2.34), видим, что скорость будет направлена против оси y в точке А, когда частица пройдет четверть окружности за время $t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi m}{qB}$. Отсюда $B = \dfrac{\pi m}{qt}$. Подставляя найденное выражение для v, находим радиус траектории: $R = \dfrac{m\text{v}}{qB} = \dfrac{t}{\pi}\sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}} = = 3{,}18$ м. За время t частица проделает путь $2\pi R/4 = 5$ м и удалится от точки 0 на расстояние $\text{АО} = \sqrt{2}R = 4{,}50$ м.

27.4. Частица с зарядом q и массой m движется в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси y, по винтовой траектории, у которой шаг равен радиусу. Найти угол α между векторами скорости $\vec{v}$ частицы и индукции $\vec{B}$.



Решение.

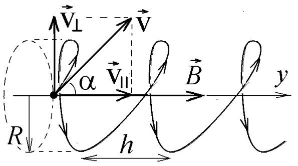
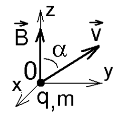


Рис.2.35

Разложим скорость $\vec{v}$ частицы на две составляющие $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$. Со скоростью $v_\perp$, перпендикулярной к направлению $\vec{B}$, частица будет вращаться по кругу радиуса $R = mv_\perp / qB$ вокруг линий $\vec{B}$. А так как скорость $\vec{v}_\parallel$ параллельна $\vec{B}$, то $\vec{F} = q\left[\vec{v}_\parallel, \vec{B}\right] = 0$, и частица движется с постоянной скоростью $v_\parallel$ вдоль направления $\vec{B}$.

Сумма двух движений – винтовая линия (рис.2.35). Так как $v_\perp = v\sin\alpha$, $v_\parallel = v\cos\alpha$, то радиус траектории $R = mv\sin\alpha/qB$, а её шаг h - это расстояние, которое частица пролетает со скоростью $v_\parallel$ за один период обращения по окружности: $h = v_\parallel T = 2\pi m \cdot v\cos\alpha/qB$. По условию их отношение $R/h = \mathrm{tg}\,\alpha/2\pi = 1$ и $\alpha = \mathrm{arctg}\left(2\pi\right) = 89{,}95^{\circ}$.

27.5. Частица с удельным зарядом $q/m = 3 \cdot 10^8$ Кл/кг ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и движется в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл, направленной вдоль оси z. Скорость $\vec{v}$ частицы направлена под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к оси z. Частица периодически пересекает ось z через равные интервалы $\Delta z = 5$ см. Найти величину разности потенциалов $\Delta\varphi$.



Решение.

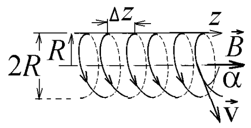
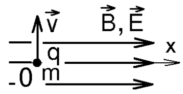


Рис.2.36

Движение частицы происходит по винтовой линии (рис.2.36). Вращаясь вокруг линий $\vec{B}$, она периодически то пересекает ось z, то удаляется от неё на максимальное расстояние $2R$. Интервал Δz – это шаг h, выражение которого получили в предыдущей задаче: $\Delta z = h = \dfrac{2\pi m \cdot v\cos\alpha}{qB}$, где $v = \sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}}$ – скорость, приобретаемая частицей после ускорения. Отсюда $\Delta\varphi = \dfrac{q}{2m}\left(\dfrac{\Delta z B}{2\pi\cos\alpha}\right)^2 = 3{,}04$ кВ.

27.6. Вылетев из точки O на оси x с начальной скоростью v_0, направленной перпендикулярно к этой оси, частица с зарядом $q = 20$ мкКл движется в электрическом и магнитном полях с напряжённостью $E = 20$ В/м и индукцией $B = 0{,}8$ Тл соответственно. Эти поля направлены вдоль оси x (см. рисунок). Чему равна масса m частицы, если совершив $N = 8$ полных витков траектории, она окажется на расстоянии $x = 400$ м от точки O?



Решение.

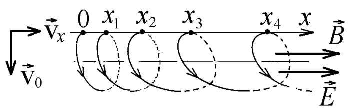
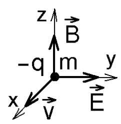


Рис.2.37

Под действием электрического поля частица приобретает постоянное ускорение $a_x = F_{\text{элект}}/m = qE/m$. Поэтому со временем растет проекция её скорости $v_x = a_x t$, параллельная вектору $\vec{B}$, а траектория движения становится винтовой линией с постоянным радиусом $R = mv_0/qB$ и с переменным шагом (рис.2.37). Частица пересекает ось x через каждый период обращения T в точках с координатами $x_n = a_x t^2/2 = a_x\left(nT\right)^2/2$. После восьмого оборота её координата $x = \dfrac{a_x\left(8T\right)^2}{2} = \;= \dfrac{qE}{m}\cdot 32\left(\dfrac{2\pi m}{qB}\right)^2 = 128\pi^2\dfrac{mE}{qB^2}$, откуда получаем величину массы $m = \dfrac{qB^2 x}{128\pi^2 E} = 0{,}203$ мг.

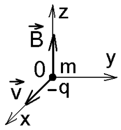
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



27.7. Отрицательно заряженная частица с массой $m = 0{,}4$ мг двигалась с постоянной скоростью $v = 300$ м/с вдоль оси x в электрическом поле с напряженностью $E = 600$ В/м, направленной вдоль оси y, и в магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси z. После выключения электрического поля частица продолжила вращение по окружности радиуса $R = 2$ м. Чему равна величина заряда частицы?

Ответ: 30 мкКл.

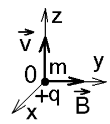
27.8. Ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi = 18$ кВ заряженная частица движется по окружности радиуса $R = 25$ мм в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл. Чему равна величина q/m удельного заряда частицы? *Ответ*: $6{,}4 \cdot 10^8$ Кл/кг.



27.9. Частица с удельным зарядом $q/m = -4 \cdot 10^9$ Кл/кг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и оказалась в магнитном поле с индукцией $B = 5$ мТл, направленной вдоль оси z. В начальный момент $t_0 = 0$ частица находилась в точке 0 и двигалась со скоростью **v**, направленной вдоль оси x (см. рисунок). В дальнейшем наибольшее удаление частицы от точки 0 равно 20 см. Чему равна величина ускоряющей разности потенциалов $\Delta\varphi$?

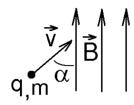
Ответ: 500 В.

27.10. Частица с зарядом q = +5 мкКл движется в однородном магнитном поле, индукция B = 3 Тл которого направлена вдоль оси y. В начальный момент частица находилась в точке 0 и двигалась вдоль оси z (см. рисунок). Через промежуток времени Δt = 0,2 с скорость частицы в первый раз окажется направленной вдоль оси x. Чему равна масса m частицы?



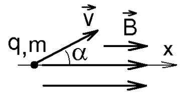
Ответ: m = 0,637 мг.

27.11. Частица с массой m = 0,02 мг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 1 кВ и влетела под углом $\alpha = 45^{\circ}$ в однородное магнитное поле с индукцией B = 2 Тл, после чего начала двигаться по винтовой траектории с шагом h = 2 м. Найти величину заряда частицы.



Ответ: q = 49,3 мкКл.

27.12. Частица имеет удельный зарядом q/m = 3000 Кл/кг, ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 6 кВ и движется под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к линиям индукции однородного магнитного поля, направленного вдоль оси x, периодически пересекая ось x через равные промежутки времени. Максимальное удаление частицы от оси x равно 2 м. Найти величину индукции B.



Ответ: B = 1 Тл.

28. Явление электромагнитной индукции и самоиндукции

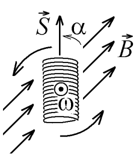


Рис.2.38

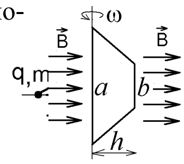
ЭДС электромагнитной индукции возникает в **замкнутом** проводящем контуре, если в нем меняется поток магнитной индукции $\varPhi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Пусть контур (например, катушка) состоит из N витков любой формы с площадью S каждый и вращается с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.2.38). В этом случае $\boxed{\varPhi = BNS\cos\alpha}$, где $\alpha = \omega t + \alpha_0$ – угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$ (вектор площади витка $\vec{S}$ имеет величину, равную площади витка, и направлен перпендикулярно к его плоскости).

Возникает ЭДС индукции $\boxed{\varepsilon_{\text{инд}} = -d\varPhi/dt}$, причиной появления которой может быть или изменение величины индукции B, или изменение площади S контура, или изменение угла α между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$.

Если сопротивление проводящего контура равно R, то при этом в нем возникает индукционный ток $\boxed{I_{\text{инд}} = \left|\varepsilon_{\text{инд}}\right|/R}$, направленный в такую сторону, чтобы компенсировать изменение потока $\varPhi$.

Примеры решения задач:

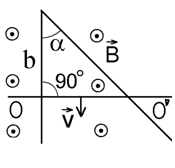
28.1. Замкнутый проводящий контур из тонкого провода с сопротивлением R = 9 Ом имеет вид равнобедренной трапеции с основаниями a = 12 см, b = 6 см и с высотой h = 8 см. Контур вращается в магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл вокруг оси, проходящей через бȯльшее основание трапеции и перпендикулярной к линиям $\vec{B}$. Найти величину угловой скорости вращения ω, если максимальная величина индукционного тока в контуре $I_{\max}$ = 4 мА.



Решение.

Контур состоит из одного витка с площадью (площадь трапеции) $S = \dfrac{(a+b)h}{2} = 72$ см^2. При вращении в витке возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = -\dfrac{d\left(BS\cos\omega t\right)}{dt} = BS\omega\sin\omega t$. Индукционный ток $I_{\text{инд}} = \dfrac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = \dfrac{BS\omega}{R}\sin\omega t$ меняется по гармоническому закону (такая система будет моделью генератора переменного тока). Его амплитуда $I_{\max} = BS\omega/R$, откуда $\omega = I_{\max}R/BS = 25$ рад/с.

28.2. Замкнутый проводящий контур образован двумя прямыми проводниками, согнутыми под углом $\alpha = 45^{\circ}$ и проводником-перемычкой, скользящим со скоростью v = 0,8 м/с (см. рисунок). Перпендикулярно к его плоскости создано магнитное поле. Единица длины каждого из проводников, образующих прямоугольный треугольник, имеет сопротивление R_1 = 2 Ом/м. Чему равна величина индукции магнитного поля B, если в контуре создаётся индукционный ток I = 0,2 А?

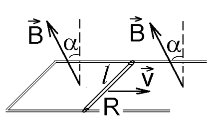


Решение.

В этой задаче меняется площадь $S = b^2/2$ равнобедренного прямоугольного треугольника, так как меняется его катет $b = b_0 + \text{v}t$. Одновременно меняется поток $\varPhi = BS \cdot \cos 0^{\circ}$ (вектор $\vec{S}$ параллелен вектору $\vec{B}$). Величина индукционного тока $I = \left|\dfrac{1}{R}\dfrac{d\varPhi}{dt}\right| = \dfrac{B}{R}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{B}{R}b\dfrac{db}{dt} = \dfrac{B}{R}b\text{v}$.

Сумма всех сторон треугольника равна $b + b + \sqrt{2}b$, и его сопротивление $R = R_1 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)b$ меняется вместе с катетом b. Подставляя эту величину в формулу для I, находим $B = IR_1\left(2 + \sqrt{2}\right)/\text{v} = 1{,}71$ Тл.

28.3. Угол между линиями индукции магнитного поля B = 0,2 Тл и нормалью к плоскости не имеющей сопротивления проводящей П-образной рамки равен $\alpha = 30^{\circ}$. По рамке без трения со скоростью v = 9 м/с скользит проводящая перемычка с сопротивлением R = 20 Ом. В ней возникает индукционный ток I =60 мА. Найти длину перемычки l, а также величину силы, с которой тянут перемычку.



Решение.

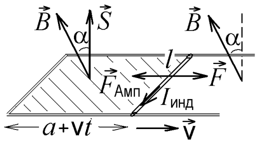
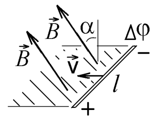


Рис.2.39

При движении перемычки меняется площадь $S = l(a + vt)$ проводящего контура, заштрихованная на рис.2.39. Меняется поток магнитной индукции $\varPhi = BS\cos\alpha$ и возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{инд} = |-d\varPhi/dt| = B\cos\alpha \cdot dS/dt = B\cos\alpha \cdot lv$.

Помните: если линии индукции $\vec{B}$ магнитного поля составляют угол α с нормалью к плоскости движения проводника с поперечным размером l, то на его краях а образуется разность потенциалов, которая будет причиной появления ЭДС индукции $\boxed{\Delta\varphi = \varepsilon_{инд} = Blv\cos\alpha}$.



Величина индукционного тока $I_{инд} = \varepsilon_{инд}/R = Blv\cos\alpha/R$. Отсюда $l = IR/Bv\cos\alpha = 0{,}770$ м .

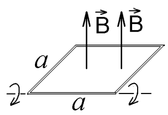
Индукционный ток направлен так, чтобы возникающая сила Ампера $\vec{F}_{Амп} = I_{инд}\left[\vec{l}, \vec{B}\right]$ препятствовала изменению потока $\varPhi$ и тормозила перемычку (рис.1.39). Чтобы перемычка двигалась с постоянной скоростью, её надо тянуть с силой $F = F_{Амп} = I_{инд}lB = B^2l^2\, v\cos\alpha/R = 9{,}24$ мН .

Индукционный ток связан с величиной электрического заряда *q*, протекающего по замкнутому проводящему контуру при изменении магнитного потока $\varPhi$ в нем: $I_{инд} = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\varepsilon_{инд}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\varPhi}{dt}$. Интегрируя получившееся уравнение $\int dq = -\dfrac{1}{R}\int d\varPhi$, находим $\boxed{q = \dfrac{1}{R}\left(\varPhi_{начал} - \varPhi_{конечн}\right)}$.

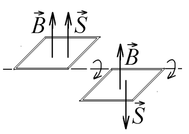
Протекший заряд пропорционален разности начального и конечного значения магнитного потока.

Примеры решения задач:

28.4. Вначале замкнутая проводящая рамка, сделанная в виде квадрата из четырёх одинаковых тонких проводников с сопротивлением *R* = 3 Ом и длиной *a* = = 15 см каждый, располагалась в магнитном поле так, что линии его индукции $\vec{B}$ были перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол 180° вокруг одной из её сторон, по рамке протёк заряд *q* = 6 мКл. Найти величину индукции магнитного поля *B*.

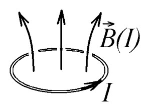


Решение.



До поворота вектор площади $\vec{S}$ был параллелен вектору $\vec{B}$, и поток магнитной индукции был равен $\varPhi_{начал} = Ba^2\cos 0^o$. После поворота на 180° вектор $\vec{S}$ поменял направление, и конечный поток $\varPhi_{конечн} = Ba^2\cos 180^o$. Суммарное сопротивление всех проводников равно 4*R*. Подстановка в формулу для протекшего заряда дает $q = 2Ba^2/4R$, откуда $B = 2qR/a^2 = 1{,}6$ Тл .

Текущий по замкнутому проводящему контуру ток *I* создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току: $B \sim I$. Поэтому и поток магнитной индукции будет пропорционален току: $\varPhi = \int \vec{B}d\vec{S} \sim I$ или $\boxed{\varPhi = LI}$. Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом индуктивности.



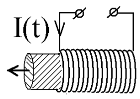
При изменении тока со временем меняется созданный им поток $\varPhi$ и возникает ЭДС самоиндукции

$$\boxed{\varepsilon_{самоинд} = -\frac{d\varPhi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)}\,.$$

Обычно эту формулу записывают в случае $L = \text{const}$. *Но причиной появления* $\varepsilon_{самоинд}$ *может оказаться меняющаяся со временем величина индуктивности L.*

Примеры решения задач:

28.5. Ферромагнитный сердечник извлекают из катушки таким образом, что её индуктивность уменьшается со временем *t* по закону *L(t)* = α/*t*, где α = 4 Гн·с. При этом ток, текущий по катушке, возрастает со временем: *I(t)* = β·t^3, где β = 3 А/с^3. Найти величину индуктивности катушки в тот момент времени, когда возникающая в ней ЭДС самоиндукции ε = 8 В.

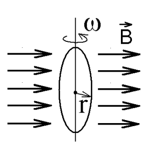


Решение.

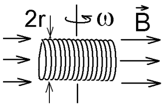
Подставляем приведенные в условии зависимости в формулу $\varepsilon = \left|-\dfrac{d}{dt}(LI)\right| = \alpha\beta\dfrac{d}{dt}\left(t^2\right) = 2\alpha\beta t$. Указанная величина ЭДС наблюдается в момент времени $t = \dfrac{\varepsilon}{2\alpha\beta}$. В этот момент $L = \dfrac{\alpha}{t} = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\varepsilon} = 12$ Гн.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

28.6. Виток из тонкого провода с радиусом *r* = 5 см вращается с угловой скоростью ω = 20 рад/с в магнитном поле с индукцией *B* = 2 Тл. Чему равна величина сопротивления *R* витка, если ось вращения перпендикулярна к линиям индукции, а в витке создаётся индукционный ток с максимальной величиной I_{max} = 4 мА?



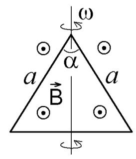
Ответ: 78,5 Ом.



28.7. Короткозамкнутая катушка из N = 20 витков вращается с угловой скоростью ω = 15 рад/с в магнитном поле с индукцией B = 4 мТл. Ось вращения перпендикулярна как к линиям индукции, так и к оси катушки. Чему равен радиус витков катушки, если максимальная величина ЭДС электромагнитной индукции в ней ε_{max} = 4 мВ?

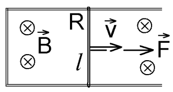
Ответ: 3,26 см.

28.8. В магнитном поле с индукцией B = 0,25 Тл вращается замкнутый проводящий контур с сопротивлением R = 6 Ом имеющий вид равнобедренного треугольника со стороной a = 8 см и с углом α = 30° (см. рисунок). Ось вращения совпадает с биссектрисой угла α и перпендикулярна к линиям индукции $\vec{B}$. Индукционный ток в контуре имеет амплитуду I_{max} = 5 мА. Найти величину угловой скорости вращения ω.



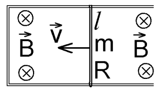
Ответ: 75 рад/с.

28.9. Линии индукции магнитного поля с величиной B = 2 Тл перпендикулярны плоскости П-образной проводящей рамки, не имеющей сопротивления. По рамке с постоянной скоростью без трения скользит проводящая перемычка длины l = 60 см с сопротивлением R = 8 Ом. Для этого перемычку тянут с силой F = 0,9 Н. Чему равна скорость перемычки?



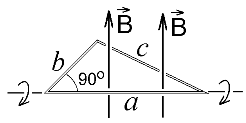
Ответ: 5 м/с.

28.10. Магнитное поле с индукцией B = 1,5 Тл приложено к П-образной проводящей рамке, не имеющей сопротивления. Линии индукции перпендикулярны к плоскости рамки. По рамке без трения скользит проводящая перемычка длины l = 40 см с сопротивлением R = 15 Ом. Чему равна масса m перемычки, если в тот момент, когда её скорость равна v = 3 м/с, она движется с ускорением a = 4 м/с^2?



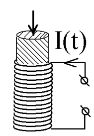
Ответ: 18 г.

28.11. В магнитное поле с индукцией B = 0,4 Тл поместили рамку из тонкого провода с сопротивлением R = 18 Ом, имеющую вид прямоугольного треугольника с катетом b = 15 см. Вначале линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол α = 60° вокруг оси, проходящей через второй катет a, по рамке протёк заряд q = 0,3 мКл. Чему равна длина гипотенузы c треугольника?



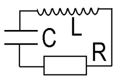
Ответ: 39 см.

28.12. Сердечник вдвигают внутрь катушки индуктивности таким образом, что её индуктивность возрастает со временем t по закону $L(t) = \alpha\cdot t$. При этом ток, текущий по катушке, убывает со временем: $I(t) = \beta/t^3$, где β = = 16 А·с^3. Найти величину постоянной α, если в момент времени t = 2 с величина·ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке, была равна ε = 6 В.



Ответ: 1,5 Гн/с.

29. Собственные электрические колебания



Электрический колебательный контур – это замкнутая цепь, которая содержит конденсатор ёмкости C и катушку с индуктивностью L. Такая цепь может иметь сопротивление R. В таком случае колебания, например, заряда q на конденсаторе будут затухающими: $\boxed{q(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)}$ (рис.2.40,а). Их амплитуда $Ae^{-\beta t}$ экспоненциально уменьшается со временем t. Циклическая частота собственных затухающих колебаний имеет вид $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ – циклическая частота незатухающих колебаний (возникающих при $R = 0$), $\boxed{\beta = R/2L}$ – коэффициент затухания колебаний. Период собственных затухающих колебаний $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$ увеличивается с ростом сопротивления R, и становится бесконечным при критическом сопротивлении $\boxed{R_{кр} = 2\sqrt{L/C}}$, при котором $\omega \to 0$. При $R \ge R_{кр}$ колебания не наблюдаются (рис.2.40,б).

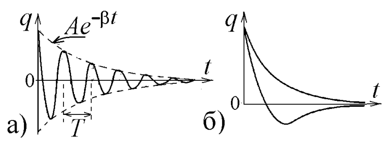


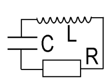
Рис.2.40

Скорость затухания колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания колебаний θ – это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени t к амплитуде через период:

$\theta = \ln\left(Ae^{-\beta t}\Big/Ae^{-\beta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{\beta T}\right)$, т.е. $\boxed{\theta = \beta T}$.

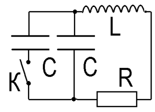
Примеры решения задач:

29.1. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре меняется со временем t по закону $U_C = U_0\cdot\exp(-at)\cos(bt)$, где U_0 = const; a = 10^4 с$^{-1}$; b = 3·10^4 рад/с. Ёмкость конденсатора C = 4 мкФ. Найти сопротивление R контура.



Решение.

Падение напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$ изменяется со временем по тому же приведенному выше закону, что и заряд q на конденсаторе. Поэтому $a = \beta = \dfrac{R}{2L}$, $b = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - a^2}$. Отсюда $L = \dfrac{1}{C\left(a^2 + b^2\right)}$, и $R = 2La = 2a\big/C(a^2 + b^2) = 5$ Ом.



29.2. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. Во сколько раз уменьшился при этом период собственных электрических колебаний? L= 100 Гн; C= 50 мкФ; R= 1 кОм.

Решение.

Помните правила вычисления суммарной ёмкости (или суммарного сопротивления) двух конденсаторов (или резисторов), соединенных последовательно или параллельно (рис.2.41):

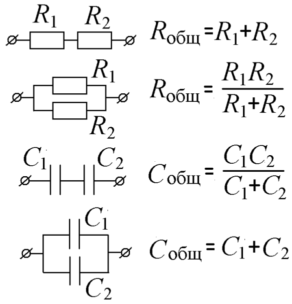
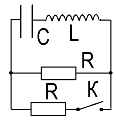


Рис.2.41

При разомкнутом ключе в цепь был подключен один конденсатор с ёмкостью $C_{\mathrm{I}} = C$. После замыкания ключа подключены два параллельно соединенных конденсатора с общей ёмкостью $C_{\mathrm{II}} = C + C = 2C$. Подставляя формулу для периода колебаний, находим, что он уменьшился в $\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} \Bigg/ \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}\right)\Bigg/\left(\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}\right)}$ раз.

Чтобы не запутаться с приставками и степенями при подстановке числовых данных, делайте сложные вычисления по частям, находя отдельные слагаемые в системе СИ и только потом подставляя их в сложную формулу.

$\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}} = \dfrac{1}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 200$ с$^{-1}$; $\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}} = 100$ с$^{-1}$; $\dfrac{R^2}{4L^2} = \left(\dfrac{10^3}{2 \cdot 100}\right)^2 = 25$ с$^{-1}$. Теперь нетрудно найти $\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}} = \sqrt{\dfrac{200-25}{100-25}} = 1{,}53$ раз.

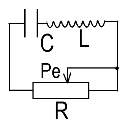


29.3. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний увеличился в два раза. Чему равна индуктивность L контура? C= 0,8 мкФ; R= 5 кОм.

Решение.

Сопротивление контура после замыкания ключа равно $\dfrac{R \cdot R}{R + R} = \dfrac{R}{2}$. Логарифмический декремент был равен

$\theta_1 = \beta_1 T_1 = 2\pi \dfrac{R}{2L} \Bigg/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$. После изменения сопротивления $\theta_2 = \beta_2 T_2 = 2\pi \dfrac{R/2}{2L} \Bigg/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{(R/2)^2}{4L^2}}$. Подставив эти выражения в отношение $\theta_2/\theta_1 = 2$ и возводя в квадрат, чтобы избавиться от корня, получим $\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2} = \dfrac{16}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}$, откуда $L = R^2 C/20 = 1$ Гн.

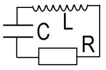


29.4. Движок реостата "Ре" перемещают слева направо, увеличивая сопротивление R. При нулевом сопротивлении, R=R_1 = 0 Ом, циклическая частота собственных электрических колебаний в контуре была равна ω_1. При сопротивлении R=R_2 = 15 кОм частота колебаний уменьшилась в два раза: $\omega_2 = \omega_1/2$. При какой величине сопротивления реостата R_3 колебания прекратятся?

Решение.

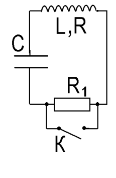
При $R = 0$ циклическая частота незатухающих колебаний равна $\omega_1 = \omega_0 = 1\big/\sqrt{LC}$. При ненулевой величине сопротивления $R = R_2$ частота $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_2^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta_2^2} = \omega_1/2$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, находим $\omega_1^2 - \beta_2^2 = \dfrac{\omega_1^2}{4}$, откуда получаем $\beta_2 = \dfrac{R_2}{2L} = \dfrac{\sqrt{3}\omega_1}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{LC}}$ и $\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{R_2}{\sqrt{3}}$. Колебания прекращаются, когда $\omega = \beta$ и сопротивление достигает критической величины $R_3 = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Поэтому $R_3 = \dfrac{2R_2}{\sqrt{3}} = 17{,}3$ кОм.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

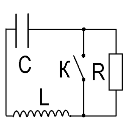


29.5. В колебательном контуре заряд конденсатора меняется со временем t по закону q=q_0·exp(-bt) sin(at), где q_0, a, b – постоянные. Найти величину отношения b/a, если R = 2 кОм; L = 30 Гн; C = 6 мкФ.

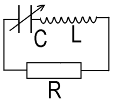
Ответ: 0,5.



29.6. В показанном на рисунке контуре замыкают ключ К, закорачивая сопротивление R_1. Во сколько раз уменьшится при этом период собственных электрических колебаний? Соленоид в контуре имеет индуктивность L= 500 Гн и активное сопротивление R= 10 кОм; C= 4 мкФ; R_1= 10 кОм. *Ответ*: уменьшится в 2 раза.

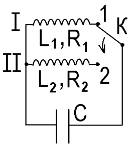


29.7. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом период собственных электрических колебаний уменьшился в полтора раза. Чему равна ёмкость C контура, если L= 27 Гн; R= 2 кОм? *Ответ*: 15 мкФ.

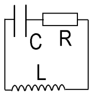


29.8. В цепь колебательного контура включен резистор с сопротивлением R = 1,5 кОм, катушка с индуктивностью L и конденсатор с переменной ёмкостью C. Если величину ёмкости уменьшить от величины C_1 = 18 мкФ до величины C_2 = 4 мкФ, то циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре увеличивается в n = 3 раза. Чему равна индуктивность L катушки?

Ответ: 18 Гн.

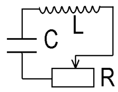


29.9. Ключом К в колебательный контур с ёмкостью C= 4 мкФ включается или соленоид I, или соленоид II с одинаковыми активными сопротивлениями R_1= R_2= R и с индуктивностями L_1=3 Гн и L_2=3L_1 соответственно. При этом частота собственных электрических колебаний в контуре не меняется. Чему равна величина сопротивления R? *Ответ*: 1,5 кОм.



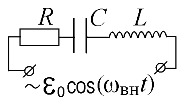
29.10. Логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний в контуре, изображённом на рисунке, θ = 2. Чему равна ёмкость C контура, еслиL= 44 Гн; R= 2 кОм?

Ответ: 4,05 мкФ.



29.11. Собственные электрические колебания в контуре прекращаются при увеличении сопротивления реостата до значения R_0. Чему равен логарифмический декремент затухания θ колебаний при вдвое меньшем сопротивлении $R = R_0/2$? *Ответ*: 3,63.

30. Вынужденные электрические колебания



Вынужденные колебания возникают, если в контур включена внешняя ЭДС с амплитудой ε_0, меняющаяся, например, по гармоническому закону с циклической частотой $\omega_{вн}$.

Величины заряда на конденсаторе и тока в цепи будут меняться с той же частотой $\omega_{вн}$. Амплитуды их колебаний постоянны во времени, но зависят от частоты внешней ЭДС:

амплитуда заряда $\boxed{q_0(\omega_{вн}) = \dfrac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_{вн}^2-\omega_0^2\right)^2+4\beta^2\omega_{вн}^2}}}$; амплитуда тока $\boxed{I_0(\omega_{вн}) = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega_{вн}C}-\omega_{вн}L\right)^2+R^2}}}$.

Графики такой зависимости приведены на рис.2.42.

Наблюдается **резонанс** – резкое увеличение амплитуды колебаний, когда частота внешней ЭДС сравнивается с резонансной частотой $\omega_{рез}$. Резонансная частота для заряда или для напряжения на конденсаторе $\boxed{\omega_{рез\,q} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{2L^2}}}$.

Резонансная частота для тока в цепи $\boxed{\omega_{рез\,I} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. При этой частоте амплитуда тока достигает максимального значения, равного $\boxed{I_{0\,\max} = \varepsilon_0/R}$ (рис.2.42,б).

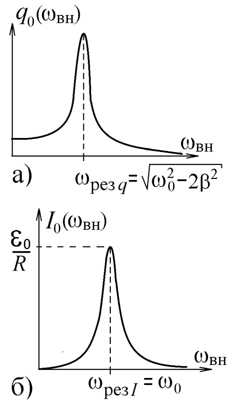
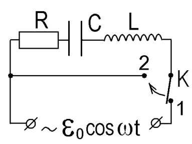


Рис.2.42

Примеры решения задач:



30.1. Если ключ К находится в положении “1” и подключает к электрическому колебательному контуру источник ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω, то при частоте $\omega = \omega_1$ в наблюдается резонанс вынужденных колебаний тока, а при частоте $\omega = \omega_2$ - резонанс вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора. Когда ключ К переключают в положение “2”, в контуре возникают собственные затухающие колебания с циклической частотой ω_3. Найти отношение частот ω_1/ω_3, если известно отношение частот $\omega_3/\omega_2 = 2$.

Решение.

Резонансная частота тока в цепи $\omega_1 = \omega_0$; резонансная частота напряжения $U = q/C$ на конденсаторе $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$; частота собственных затухающих колебаний при положении ключа “2” $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. По условию $\left(\dfrac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = \dfrac{\omega_0^2-\beta^2}{\omega_0^2-2\beta^2} = 2^2 = 4$. Находим отсюда, что $\beta^2 = \dfrac{3}{7}\omega_0^2$. Тогда $\dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3/7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32$.

30.2. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1$=4000 рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2$=5000 рад/с амплитуда тока уменьшается в два раза. Чему равна ёмкость C контура, если R = 15 кОм ?

Решение.

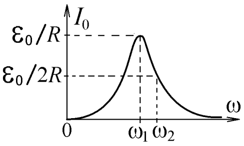


Рис.2.43

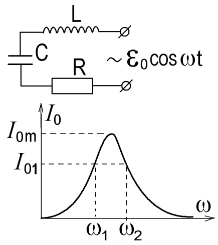
Из графика зависимости амплитуды тока от частоты внешней ЭДС (рис.2.43) видно, что при $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда тока максимальна и равна $I_{0\max} = \varepsilon_0/R$, где ε_0 – амплитуда ЭДС. При частоте ω_2 по условию $I_0(\omega_2) = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 + R^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0}{R}$.

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $\left(\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 = 3R^2$.

Совет: *Помните, что извлекая квадратный корень, Вы получаете два значения: $\sqrt{x^2} = \pm x$. Выбрав неверный знак, можно получить в ответе отрицательную величину сопротивления R, ёмкости C или индуктивности L.*

Поэтому, извлекая корень, учтем оба знака: $\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = \pm\sqrt{3}R$. Индуктивность L подставим из записанной выше формулы $L = 1/\left(\omega_1^2 C\right)$, и находим $C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}R}\left(\dfrac{1}{\omega_2} - \dfrac{\omega_2}{\omega_1^2}\right)$. После подстановки числовых данных видно, что правильным будет нижний знак, дающий положительное значение $C = 4{,}33$ нФ.

30.3. На рисунке представлен график зависимости амплитуды тока I_0 от циклической частоты ω внешней ЭДС. Эта амплитуда имеет одинаковую величину $I_{01} = 3I_{0m}/5$ при двух значениях ω_1 и ω_2 частоты, где I_{0m} – максимальное возможное значение амплитуды тока при вынужденных колебаниях. Найти величину разности частот $\omega_2 - \omega_1$. Параметры контура: $\beta = R/2L = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 9000$ с$^{-1}$.



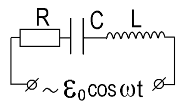
Решение.

Так как $I_{0m} = \dfrac{\varepsilon_0}{R}$, то амплитуда тока $I_{01} = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \dfrac{3}{5}\dfrac{\varepsilon_0}{R}$. Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим $\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = \dfrac{16}{9}R^2$, откуда $\dfrac{1}{\omega C} - \omega L = \pm\dfrac{4}{3}R$. Последнее уравнение приводится к виду

$\omega^2 \pm \dfrac{4}{3}\dfrac{R}{L}\omega - \dfrac{1}{LC} = 0$ или, согласно условию, $\omega^2 \pm \dfrac{8}{3}\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$. Такое квадратное уравнение имеет два положительных корня, если взять нижний знак: $\omega_1 = \omega_0/3$ и $\omega_2 = 3\omega_0$. Поэтому $\omega_2 - \omega_1 = 8\omega_0/3 = 24000$ с$^{-1}$.

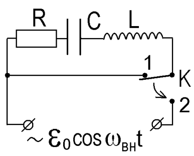
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

30.4. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ с$^{-1}$, а максимум амплитуды тока – при $\omega = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$. Чему равно активное сопротивление R контура, если $L = 2$ Гн?



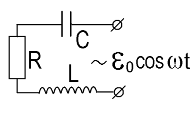
Ответ: 6,324 кОм.

30. 5. Вначале ключ K была замкнут в положении “1”, и циклическая частота собственных электрических колебаний в образовавшемся контуре имела величину $\omega_1 = 4000$ с$^{-1}$. Затем ключ K переключили в положение “2” (см. рисунок), подключая внешнюю ЭДС. При какой циклической частоте $\omega_{вн}$ внешней ЭДС амплитуда тока в цепи будет максимальной, если амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна при $\omega_{вн} = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$?



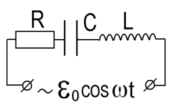
Ответ: 4796 с$^{-1}$.

30.6. В колебательный контур включен источник внешней ЭДС с амплитудой ε_0 и с циклической частотой ω. Наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе наблюдается при $\omega = \omega_1 = 1000$ с$^{-1}$. При каком значении частоты ω достигается наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний тока в цепи? Активное сопротивление контура $R = 8$ кОм, его индуктивность $L = 2$ Гн.



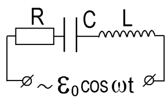
Ответ: 3000 с$^{-1}$.

30.7. Амплитуда тока в электрическом колебательном контуре оказывается одинаковой при двух значениях циклической частоты внешней ЭДС: $\omega_1 = 3000$ рад/с и $\omega_2 = 4000$ рад/с. Чему равна ёмкость C контура, если его индуктивность $L = 1$ Гн ?



Ответ: 83,3 нФ.

30.8. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2 = 3000$ рад/с амплитуда тока уменьшается в три раза. Чему равно сопротивление R контура, если $C = 2$ мкФ ?



Ответ: 49,1 Ом.