МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и конструкции»
«_18_» _января_ 2023 г., протокол №_5_

Заведующий кафедрой

_____ А.А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Прикладная теория пластичности и ползучести»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
08.04.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Теория и проектирование зданий и сооружений

Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-23

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н. _____
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

_____
(подпись)

1 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

1.1 Темы практических занятий

1 Теория напряженно-деформированного состояния в точке.
2 Основные уравнения теории упругости.
3 Плоская задача теории упругости в декартовых координатах.
4 Плоская задача теории упругости в полярных координатах.
5 Изгиб прямоугольных и круглых пластин.
6 Вариационные методы решения задач теории упругости.
7 Решение задач теории упругости методом конечных элементов – консультации по решению индивидуальных задач.
8 Основы теории пластичности и ползучести.

1.2 Теория напряженно-деформированного состояния в точке

П р и м е р 1. Пусть на видимых площадках элемента в форме параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения, показанные на рисунке. Требуется дополнить недостающие напряжения и обозначить их, установить их знаки и записать тензор напряжений.

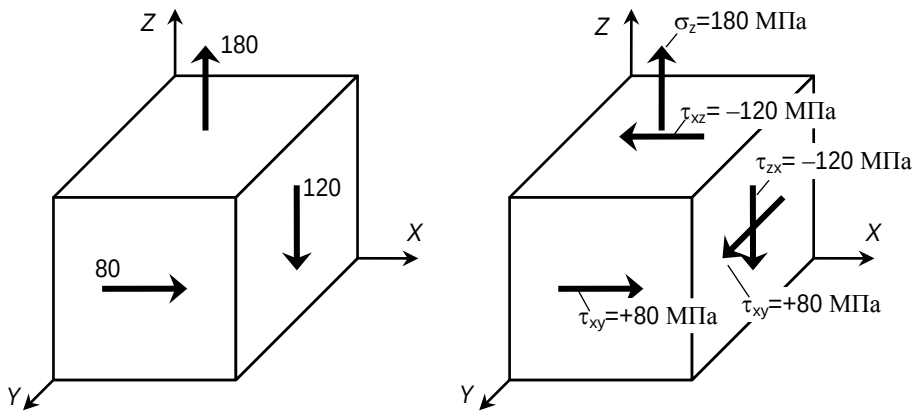


Рис. 27. Напряжения на площадках элемента
в форме параллелепипеда

Запишем тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +80 & -120 \\ +80 & 0 & 0 \\ -120 & 0 & +180 \end{bmatrix}, \text{МПа}.$$

П р и м е р 2. Найти нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке, если известны ее направляющие косинусы и тензор напряжений в окрестности исследуемой точки деформируемого тела.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -60 & 100 \\ -60 & 140 & 90 \\ 100 & 90 & 80 \end{bmatrix}, \text{МПа}; \qquad l = \frac{1}{\sqrt{6}}; \qquad m = \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем проекции полного напряжения на координатные оси

$$\begin{cases} p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 60 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 36{,}07 \text{ МПа}; \\ p_{y\nu} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = -60 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 140 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 119{,}97 \text{ МПа}; \\ p_{z\nu} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = +100 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 80 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 149{,}35 \text{ МПа}. \end{cases}$$

Вычислим полное напряжение на наклонной площадке

$$p_\nu = \sqrt{p_{x\nu}^2 + p_{y\nu}^2 + p_{z\nu}^2} = \sqrt{36{,}07^2 + 119{,}97^2 + 149{,}35^2} = 194{,}93 \text{ МПа}.$$

Вычислим нормальное напряжение на наклонной площадке

$$\sigma_\nu = p_{x\nu} l + p_{y\nu} m + p_{z\nu} n = 36{,}07 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 119{,}97 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 149{,}35 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 189{,}60 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательное напряжение на наклонной площадке

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2} = \sqrt{194{,}93^2 - 189{,}60^2} = 45{,}27 \text{ МПа}.$$

П р и м е р 3. Пусть длинный стержень переменного сечения, показанный на рисунке 28, растянут силой F. Доказать, что в поперечных сечениях стержня появляются не только нормальные напряжения, но также и касательные напряжения, нормальные и касательные напряжения в продольных сечениях стержня. Найти их значения, если площадь поперечного сечения равна A.

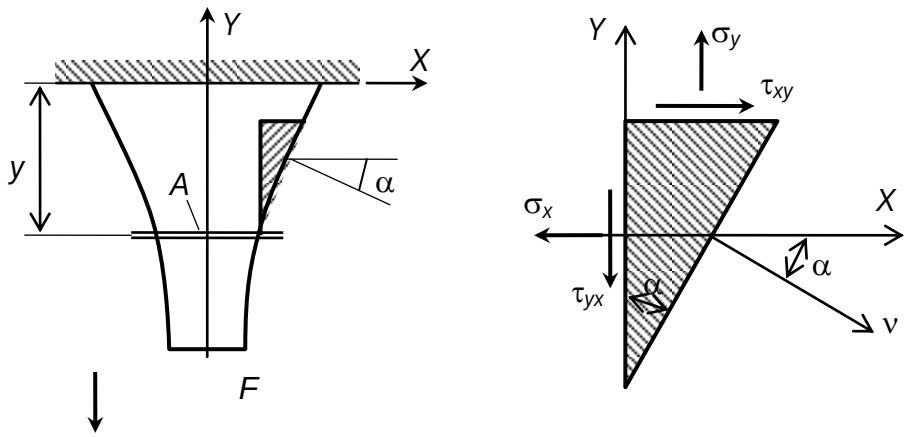


Рис. 28. Стержень переменной жесткости, загруженный сосредоточенной силой

Полагаем, что нормальные напряжения распределяются по площади сечения равномерно. Тогда по формуле сопротивления материалов нормальное напряжение в поперечном сечении равно

$$\sigma_y = \frac{F}{A}.$$

Запишем уравнения, выражающие условия на границе стержня, учитывая, что имеет место плоское напряженное состояние, а на поверхности стержня нагрузка отсутствует.

$$\begin{cases} p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = 0; \\ p_{y\nu} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0. \end{cases}$$

Значения направляющих косинусов выразим через угол α.

$$l = \cos(x, \nu) = \cos\alpha; \qquad m = \cos(y, \nu) = \sin(\alpha).$$

Из второго уравнения граничных условий выразим касательное напряжение τ_{yx}

$$\tau_{yx} = -\sigma_y \frac{m}{l} = -\frac{F}{A}\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha)} = -\frac{F}{A} tg\alpha.$$

По закону парности имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A} tg\alpha.$$

Из первого уравнения выразим нормальное напряжение σ_x

$$\sigma_x = -\tau_{xy}\frac{m}{l} = \frac{F}{A}tg\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F}{A}tg^2\alpha.$$

Утверждение доказано. Значение напряжений найдено.

$$\sigma_y = \frac{F}{A}; \qquad \sigma_x = \frac{F}{A}tg^2\alpha; \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A}tg\alpha.$$

1.3. **Основные уравнения теории упругости**

П р и м е р 4. В консольной балке, показанной на рисунке, составить выражения для напряжений σ_x и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, исходя из формул сопротивления материалов. Получить функцию для напряжения σ_y, применив для этого дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

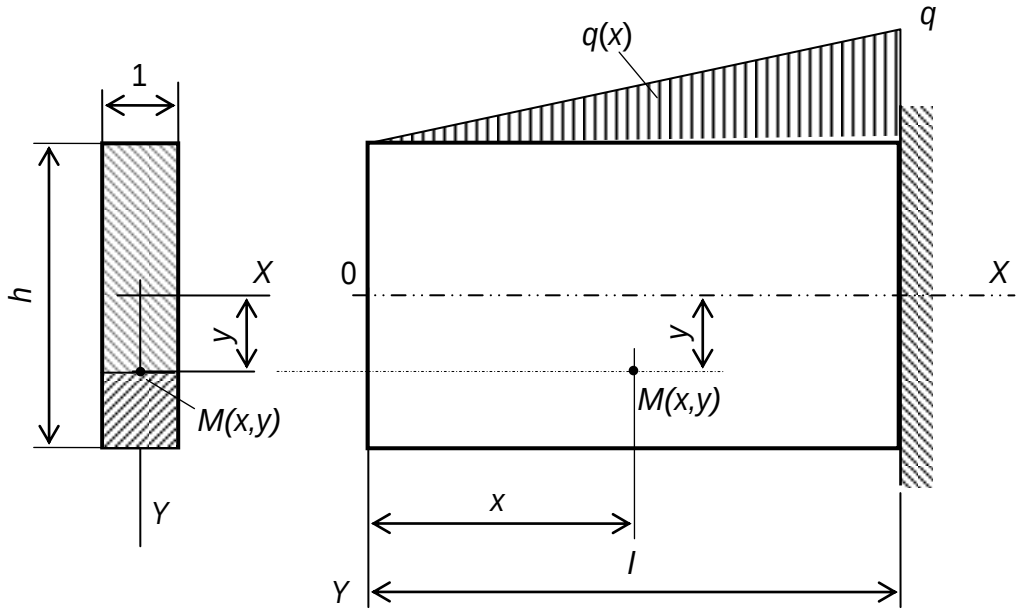


Рис.29. Консольная балка, загруженная распределенной нагрузкой

Составим функцию для нагрузки $q(x)$

$$q(x) = \frac{q}{l}x.$$

Проверим пригодность этой функции

при $x=0$, $\qquad q(0)=\frac{q}{l}\cdot 0=0;$

при $x=l$, $\qquad q(l)=\frac{q}{l}\cdot l=q.$

Очевидно, что функция правильно описывает закон изменения нагрузки.

Составим функцию для поперечной силы $Q_y(x)$ в произвольном сечении балки

$$Q_y(x)=\frac{1}{2}q(x)\cdot x=\frac{qx^2}{2l}.$$

Составим функцию для изгибающего момента $M_z(x)$

$$M_z(x)=\frac{1}{2}q(x)x\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}\frac{qx^3}{3l}=\frac{qx^3}{6l}.$$

Используя решение, полученное в сопротивлении материалов, составим функцию для нормального напряжения $\sigma_x(x,y)$. Предварительно запишем выражение для осевого момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси *Z*.

$$J_z=\frac{1\cdot h^3}{12}=\frac{h^3}{12}. \qquad \sigma_x(x,y)=\frac{M_x(x)}{J_x}y=\frac{q\cdot x^3}{6\cdot l}\frac{12}{h^3}=\frac{2qx^3}{6h^3l}.$$

Используя формулу Журавского, составим функцию для касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx}

$$S_z^0=\left(\frac{h}{2}-y\right)b\left[y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right]=\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(y+\frac{h}{4}-\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{y}{2}+\frac{h}{4}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(h-2y)\cdot\frac{1}{4}(2y+h)=\frac{1}{8}\left(2yh+h^2-4y^2-2yh\right)=\frac{1}{8}\left(h^2-4y^2\right);$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{Q_yS_z^0}{J_xb}=\frac{qx^2}{2l}\cdot\frac{1}{8}\left(h^2-4y^2\right)\frac{12}{h^3}=\frac{3}{4}\frac{qx^2}{h^3l}\left(h^2-4y^2\right).$$

Функцию нормального напряжения $\sigma_y(x,y)$ определим, используя дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0.$$

Из второго уравнения равновесия выразим частную производную нормального напряжения σ_y

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3}{4}\frac{qx^2}{h^3 I}\left(h^2-4y^2\right)\right]=\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left(h^2-4y^2\right).$$

Разделим дифференциалы и получим

$$\partial\sigma_y=-\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left(h^2-4y^2\right)\partial y.$$

Проинтегрируем по y, учитывая, что появится постоянная интегрирования (функция от x)

$$\sigma_y(x,y)=\int\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left(h^2-4y^2\right)dy+f(x)=\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left(h^2 y-\frac{4}{3}y^3\right)+f(x).$$

Функцию $f(x)$ следует определить по граничным условиям на верхней и на нижней поверхностях балки. На верхней поверхности балки $\sigma\left(x,-\frac{h}{2}\right)=\frac{-qx}{I}$. Воспользуемся этим и найдем функцию $f(x,y)$. Вначале вычислим интеграл при $y=-h/2$

$$\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left[h^2\left(-\frac{h}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]=\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left[-\frac{h^3}{2}+\frac{4h^3}{3\cdot 8}\right]=\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left[-\frac{h^3}{2}+\frac{h^3}{6}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{qx}{h^3 I}\left[\frac{-3h^3+h^3}{6}\right]=\frac{3qx}{2h^3 I}\left(-\frac{h^3}{3}\right)=-\frac{qx}{2I}.$$

Тогда условие по верхнему краю балки запишется так

$$\sigma(x,-h/2)=-\frac{qx}{2I}+f(x)=-\frac{qx}{I}.$$

Отсюда имеем

$$f(x)=-\frac{qx}{2I}.$$

Значит, нормальное напряжение $\sigma(x,y)$ будет выражаться функцией

$$\boxed{\sigma(x,y)=\frac{3qx}{2h^3I}\left(h^2y-\frac{4}{3}y^3\right)-\frac{qx}{2I}}.$$

Проверим выполнение граничных условий на верхнем и нижнем краях балки.

На верхнем краю балки $y=-h/2$

$$\sigma(x,-h/2)=\frac{3qx}{2h^3I}\left[h^2\left(-\frac{h}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]-\frac{qx}{2I}=-\frac{qx}{2I}-\frac{qx}{2I}=-\frac{qx}{I}.$$

На нижнем краю балки $y=+h/2$

$$\sigma(x,+h/2)=\frac{3qx}{2h^3I}\left[h^2\left(+\frac{h}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(+\frac{h}{2}\right)^3\right]-\frac{qx}{2I}=-\frac{qx}{2I}+\frac{qx}{2I}=0.$$

Очевидно, что оба граничных условия выполняются. Следовательно, задача решена.

П р и м е р 5. Определить полную удельную потенциальную энергию, удельную энергию изменения объем и удельную энергию изменения формы, если известен тензор напряжений

$$T_\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}160 & 0 & -100\\ 0 & 0 & 0\\ -100 & 0 & -120\end{bmatrix},\text{МПа}.$$

Принять значения модуля упругости и коэффициента Пуассона, соответственно, равными $E=200\,\text{ГПа}$ и $\nu=0,3$.

Так как в тензоре напряжений имеется один нулевой столбец и одна нулевая строка, материал в окрестности исследуемой точки испытывает плоское напряженное состояние.

Определим модуль сдвига

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{200}{2(1+0,3)}=76,92\,\text{ГПа}.$$

Используя закон Гука, вычислим деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_z\right) = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[160 - 0,3\left(-120\right)\right]\cdot 10^6 = 0,98\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_z + \sigma_x\right) = -\frac{0,3}{200\cdot 10^9}\left[160 - 120\right]\cdot 10^6 =$$

$$= -0,06\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\sigma_x\right) = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[120 - 0,3\cdot 160\right]\cdot 10^6 = 0,36\cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0}{76,92\cdot 10^9} = 0; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{0}{76,92\cdot 10^9} = 0;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{100\cdot 10^6}{76,92\cdot 10^9} = -1,30\cdot 10^{-3}.$$

Запишем тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 & 0 & -0,65 \\ 0 & -0,06 & 0 \\ -0,65 & 0 & 0,36 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}.$$

Вычислим удельную полную потенциальную энергию

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[160\cdot 0,98 + 0\cdot\left(-0,06\right) + \left(-120\right)\cdot 0,36 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + \left(-100\right)\cdot\left(-0,65\right)\right]\cdot 10^3 =$$

$$= 89,30\,\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Вычислим среднее напряжение и среднюю деформацию

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1}{3}\left(160 + 0 - 120\right) = 13,33\,\text{МПа};$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) = \frac{1}{3}\left(0,98\text{-}0,06\text{+}0,36\right)\cdot 10^{-3} = 0,427\cdot 10^{-3}.$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения объема

$$W_V = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\sigma_m\varepsilon_m\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 13,33\cdot 10^6\cdot 0,427\cdot 10^{-3}\right) = 5,69\,\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения формы

$$W_F = W - W_V = 89,30 - 5,69 = 83,61\,\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

П р и м е р 6. Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -140 & 80 & -60 \\ 80 & 120 & 70 \\ -60 & 70 & 90 \end{bmatrix}, \text{МПа}.$$

Учитывая закон Гука, вычислить деформации и записать тензор деформаций. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными $E = 200\,\text{ГПа}$ и $\nu = 0,3$.

Так как в тензоре напряжений нет нулевых строк и столбцов, то есть в элементе, вырезанном в окрестности исследуемой точки, нет площадок свободных от напряжений, то материал испытывает объемное напряженное состояние. Определим модуль сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92\,\text{ГПа}.$$

По закону Гука вычислим деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[-140 - 0,3(120+90)\right]\cdot 10^6 = -1,015\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[120 - 0,3(90-140)\right]\cdot 10^6 = 0,675\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{200\cdot 10^9}\left[90 - 0,3(-140+120)\right]\cdot 10^6 = 0,480\cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{80 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 1,040 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{70 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 0,910 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{-60 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = -0,780 \cdot 10^{-3}.$$

Запишем тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,015 & 0,520 & -0,390 \\ 0,520 & 0,675 & 0,455 \\ -0,390 & 0,455 & 0,480 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

П р и м е р 7. Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,45 & 0,75 \\ 0,45 & -0,84 & 0,32 \\ 0,75 & 0,32 & 0,96 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Учитывая, что материал тела деформируется по закону Гука, вычислить напряжения и записать тензор напряжений. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными $E = 200\,\text{ГПа}$ и $\nu = 0,3$.

Вычислим модуль сдвига, коэффициент Ляме и относительную объемную деформацию в окрестности рассматриваемой точки

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92\,\text{ГПа};$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 76,92}{1-2 \cdot 0,3} = 115,38\,\text{ГПа};$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (0,65 - 0,84 + 0,96) \cdot 10^{-3} = 0,77 \cdot 10^{-3}.$$

По закону Гука вычислим напряжения

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta = 2\cdot 76,92\cdot 10^9\cdot 0,65\cdot 10^{-3} + 115,38\cdot 10^9\cdot 0,77\cdot 10^{-3} = 188,84\,\text{МПа};$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta = 2\cdot 76,92\cdot 10^9\cdot\left(-0,84\cdot 10^{-3}\right) + 115,38\cdot 10^9\cdot 0,77\cdot 10^{-3} =$$
$$= -40,38\,\text{МПа};$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta = 2\cdot 76,92\cdot 10^9\cdot 0,96\cdot 10^{-3} + 115,38\cdot 10^9\cdot 0,77\cdot 10^{-3} = 236,53\,\text{МПа};$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 76,92\cdot 10^9\cdot\left(-0,45\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2 = -69,23\,\text{МПа};$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 76,92\cdot 10^9\cdot 0,32\cdot 10^{-3}\cdot 2 = 49,23\,\text{МПа};$$
$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 76,92\cdot 10^9\cdot 0,75\cdot 10^{-3}\cdot 2 = 57,69\,\text{МПа}.$$

Запишем тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 188,84 & -69,23 & 57,69 \\ -69,23 & -40,38 & 49,23 \\ 57,69 & 49,23 & 236,53 \end{bmatrix}, \text{МПа}$$

1.4. Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

П р и м е р 8. Пусть на площадках элементарного параллелепипеда, взятого в окрестности исследуемой точки деформируемого тела действуют напряжения $\sigma_x = 120\,\text{МПа}$; $\sigma_z = -100\,\text{МПа}$; $\tau_{xz} = -90\,\text{МПа}$. Вычислить октаэдрические полное, нормальное и касательное напряжения.

Запишем тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -90 \\ 0 & 0 & 0 \\ -90 & 0 & -100 \end{bmatrix}, \text{МПа}.$$

Очевидно, что материал в окрестности исследуемой точки тела испытывает плоское напряженное состояние, так как в тензоре напряжений одна строка и один столбец являются нулевыми.

Учитывая наличие нулевых напряжений, вычислим инварианты тензора напряжений

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 120 - 100 = 20\,\text{МПа};$$

$$\sigma^{II} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 120\cdot(-100) + 0 + 0 - 90^2 =$$
$$= -18400(\text{МПа})^2;$$
$$\sigma^{III} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 0.$$

Кубическое уравнение

$$\sigma^3 - \sigma^I\sigma^2 + \sigma^{II}\sigma - \sigma^{III} = 0$$

можно записать в следующем виде

$$\sigma\left(\sigma^2 - \sigma^I\sigma + \sigma^{II}\right) = 0.$$

Один корень кубического уравнения равен нулю $\sigma_{(1)} = 0$. Два других корня определяются решением квадратного уравнения

$$\sigma^2 - \sigma^I\sigma + \sigma^{II} = \sigma^2 - 20\sigma - 20100 = 0;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{\sigma^I}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma^I}{2}\right)^2 - \sigma^{II}} = \frac{20}{2} + \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 20100} = 152{,}13\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{\sigma^I}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma^I}{2}\right)^2 - \sigma^{II}} = \frac{20}{2} - \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + 20100} = -132{,}13\,\text{МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений

$$\sigma_1 = 152{,}13\,\text{МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_1 = -132{,}13\,\text{МПа};$$

Вычислим полное октаэдрическое напряжение

$$p_{oct} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(152{,}13^2 + 0 + 132{,}13^2\right)} = 116{,}34\,\text{МПа}.$$

Вычислим нормальное октаэдрическое напряжение

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 152{,}13 + 0 - 132{,}13 = 20\,\text{МПа}.$$

Вычислим касательное октаэдрическое напряжение

$$\tau_{oct} = \sqrt{p_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{116,34^2 - 20^2} = 114,61\,\text{МПа}.$$

П р и м е р 9. Рассмотрим пластину, загруженную по торцам двумя парами сил с моментом *M*.

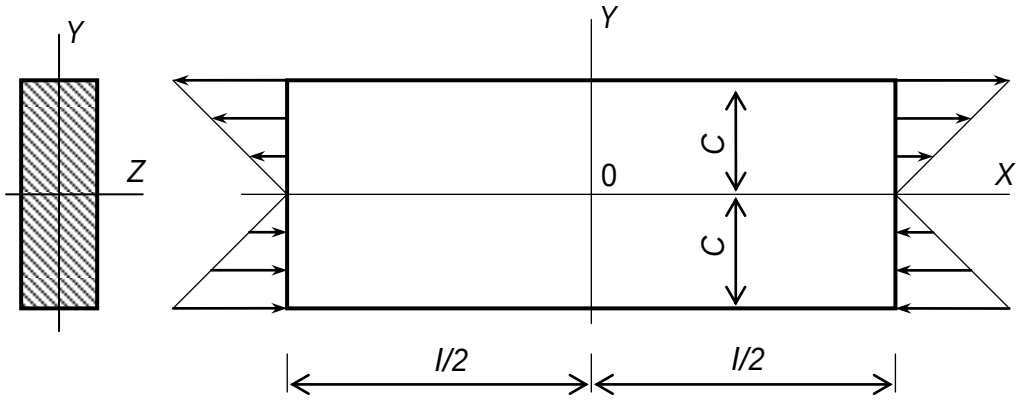


Рис. 30. Балка, загруженная распределенной нагрузкой по торцам

Из сопротивления материалов известно

$$\sigma_x = \frac{M}{J} y; \qquad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Так как напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ выражаются линейными функциями, то уравнение неразрывности удовлетворяются тождественно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0.$$

Чтобы убедиться в пригодности решения, предложенного сопротивлением материалов, достаточно только проверить выполнение дифференциальных уравнений равновесия и условие на контуре пластины. Возьмем производные

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{J} y\right) = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0.$$

Подставим производные в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Следовательно, предложенные функции пригодны для решения задачи теории упругости. Требуется уточнить граничные условия.

Подставим условие на торце пластины. Пусть $x = \pm\frac{l}{2}$. Напряжение на торцах пластины согласно предложенному решению имеет вид

$$\sigma_x = \frac{M}{J}y; \qquad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

То есть, по торцам пластины действуют только нормальные напряжения, которые распределены по высоте сечения по линейному закону. Из граничных условий на правом торце пластины имеем $l = +1,\ m = 0,\ n = 0.$ Тогда проекции нагрузки на торцах пластины выражаются зависимостями

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \frac{M}{J}y \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \frac{M}{J}y;$$
$$p_{y\nu} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Выразим продольную силу на правом торце пластины. При этом принимаем толщину пластины равной единице.

$$N = \int_A p_{x\nu} dA = \int_A \frac{M}{J} y dA = \int_{-C}^{+C} \frac{M}{J} y dy = \frac{M}{J}\int_{-C}^{+C} y dy = \left[\frac{M}{2J}y^2\right]_{-C}^{+C} = 0.$$

Очевидно, что продольная сила равна нулю. Выразим момент сил на торце пластины

$$\int_A p_{x\nu} y dA = \int_A \left(\frac{M}{J}y\right) y dA = \frac{M}{J}\int_A y^2 dA = \frac{M}{J}J = M.$$

Аналогично получается и на правом торце пластины.

Следовательно, решение, полученное в сопротивлении материалов, пригодно в том случае, если по торцам пластины приложены распределенные нагрузки, показанные на рисунке и создающие момент M.

П р и м е р 10. Пластинка постоянной толщины произвольного очертания равномерно сжата по наружному контуру давлением p. Доказать, что во всех точках пластинки касательное напряжение τ_{xy} равно нулю, а нормальные напряжения σ_x и σ_y – давлению сжатия.

Вырежем элемент около произвольной точки контура пластинки. Пусть направляющие косинусы l и m наклонной площадки известны. Полное напряжение на наклонной площадке равно давлению на контур пластинки $p_\nu = -p$.

Найдем проекции полного напряжения

$$p_{x\nu} = p_\nu l; \qquad p_{y\nu} = p_\nu m.$$

Запишем граничные условия

$$\begin{cases} p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = p_\nu l & \times m \\ p_{y\nu} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = p_\nu m & \times n \end{cases} - \qquad (*)$$

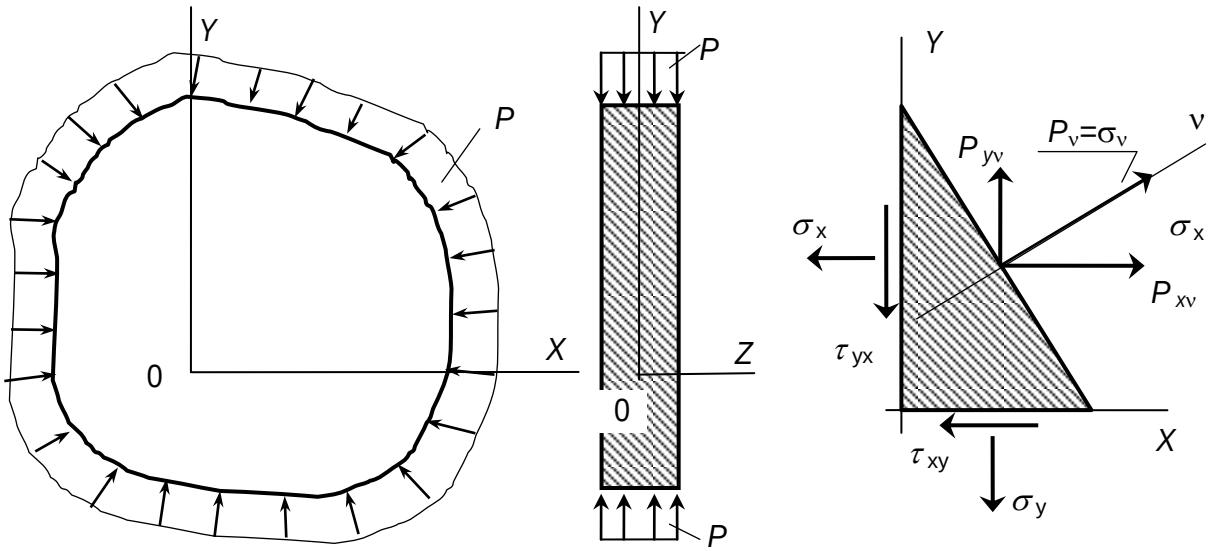


Рис. 31. Равномерно сжатая пластинка произвольного очертания постоянной толщины

Решим полученную систему уравнений, принимая в качестве неизвестных напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ и учитывая, что, согласно закона парности касательных напряжений, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

В результате получим уравнение, содержащее касательное напряжение

$$m^2\tau - l^2\tau = lm \cdot p_\nu - ml \cdot p_\nu$$

или

$$\left(m^2 - l^2\right)\tau = 0. \qquad (**)$$

Это равенство должно выполняться при любых положениях наклонной площадки. При этом направляющие косинусы l и m могут принимать значения

на отрезке $[-1,+1]$. Учитывая соотношение направляющих косинусов для плоской задачи $l^2+m^2=1$ уравнение (**) можно записать следующим образом

$$\left[m^2-\left(1-m^2\right)\right]\cdot\tau=\left[2m^2-1\right]\cdot\tau=0.$$

При различных положениях наклонной площадки множитель $\left[2m^2-1\right]$ может принимать значения на отрезке $[-1,+1]$. Поэтому, чтобы уравнение (***) всегда выполнялось, требуется, чтобы $\tau=0$. То есть, $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau=0$.

Из первого уравнения системы (*) получим значение нормального напряжения σ_x

$$\sigma_x l+\tau_{xy}m=\sigma_x l+0\cdot m=p_\nu l;\quad \sigma_x=p_\nu=-p.$$

Из второго уравнения системы (*) получим значение нормального напряжения σ_y

П р и м е р 11 . Дана квадратная пластина и заданы функции для напряжений

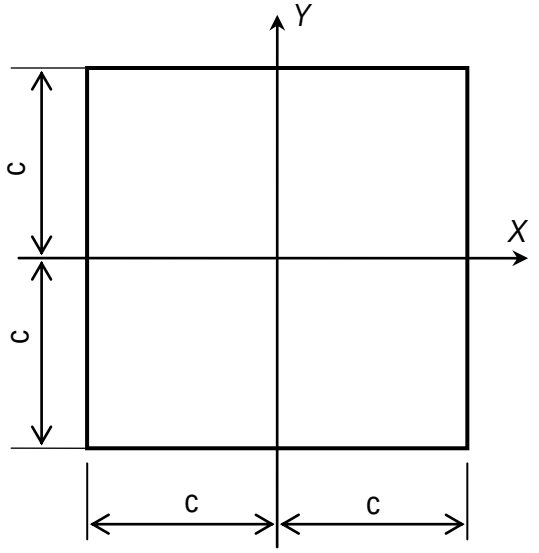


Рис. 32. Квадратная плита

$$\sigma_x=-\frac{1}{2}Cx^4y;$$

$$\sigma_y=-Cx^2y^3;$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=Cx^3y^2.$$

Требуется установить соответствующую нагрузку по контуру пластины.

Р е ш е н и е.

Проверим пригодность заданных функций для напряжений $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ для задачи теории упругости. Так как функции $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$, их производные и взятые от них интегралы являются непрерывными, то уравнения Сен-Венана (уравнения неразрывности деформаций) будут удовлетворяться. Следует проверить, будут ли выполняться условия равновесия, то есть дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

Возьмем производные

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - -\frac{1}{2}\cdot 4Cx^3y = -2Cx^3y; \qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = -3Cx^2y^2;$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 2Cx^3y; \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} = 3Cx^2y^2.$$

Подставим производные в уравнения Навье

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0.$$

и получим $-2Cx^2y + 2Cx^2y = 0;$ $\qquad 3Cx^2y^2 - 3Cx^2y^2 = 0.$

Очевидно, что заданные функции для напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия.

Определим нагрузки по краям пластины

на верхнем краю пластины $-C \le x \le C, \quad y = C, \quad l = 0, \quad m = 1.$

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2}Cx^4y\cdot 0 + Cx^3y^2\cdot 1 = Cx^3y^2 = C^3x^3;$$

$$p_{y\nu} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3y^2\cdot 0 - Cx^2y^3\cdot 1 = -Cx^2y^3 = -C^4x^2.$$

на нижнем краю пластины $-C \le x \le C, \quad y = -C, \quad l = 0, \quad m = -1.$

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2}Cx^4y\cdot 0 - Cx^3y^2\cdot 1 = -Cx^3y^2 = -C^3x^3;$$

$$p_{y\nu} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3y^2\cdot 0 - Cx^2y^3\cdot(-1) = Cx^2y^3 = C^4x^2.$$

на левом краю пластины $x \le -C, \quad -C \le y \le C, \quad l = -1, \quad m = 0.$

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2}Cx^4y\cdot(-1) = \frac{1}{2}Cx^4y = \frac{1}{2}C^5y;$$

$$p_{y\nu} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3y^2\cdot(-1) = -Cx^3y^2 = C^4y^2.$$

на правом краю пластины $x \le C, \quad -C \le y \le C, \quad l = +1, \quad m = 0.$

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2}Cx^4y\cdot 1 = -\frac{1}{2}Cx^4y = -\frac{1}{2}C^5y;$$

$$p_{y\nu} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3y^2\cdot 1 = Cx^3y^2 = C^4y^2.$$

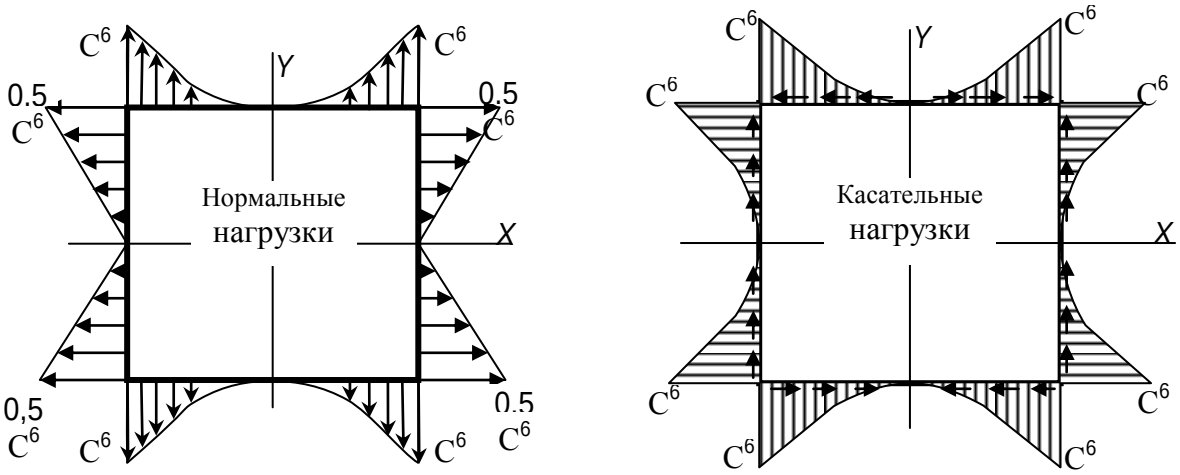
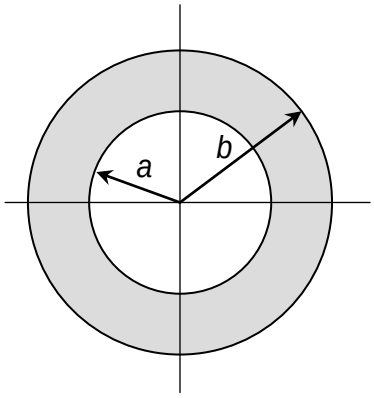


Рис. 33. Эпюры нормальных и касательных нагрузок

1.5. Плоская задача теории упругости в полярных координатах

П р и м е р 12. Для плоского кольца известны выражения для напряжений



$$\sigma_\theta = p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b}{r^2}\right); \qquad \sigma_r = p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b}{r^2}\right);$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

Проверить выполнение условия равновесия и найти нагрузку на кольцо.

Рис. 34. Кольцо, загруженное распределенной нагрузкой

Найдем слагаемые дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} = p\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{r^3}; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = 0; \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} = 0;$$

$$\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r} = 0; \qquad \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0; \qquad \frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} = -p\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{r^3}.$$

Подставим в дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=p\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{r^3}-p\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{r^3}=0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0+0+0=0.$$

Оба уравнения удовлетворяются тождественно. Следовательно, условия равновесия соблюдаются.

Найдем нагрузку, действующую на краях кольца.

При $r = b$

$$\sigma_r=p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{b^2}\right)=0.$$

При $r = a$

$$\sigma_r=p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=-p.$$

На внутренний край кольца действует равномерно распределенная нагрузка $-p$.

1.6. **Изгиб круглых пластин**

П р и м е р 13. Пластинка круглого очертания и постоянной толщина шарнирно опирается по своему контуру и загружена равномерно распределенной нагрузкой. Прогиб пластины задан функцией

$$W(\rho)=C\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\rho^2+(1+\mu)\rho^4\right],\ \ C=const.$$

Приняты: радиус пластины $a=2$ м; толщина пластины $h=0,2$ м; коэффициент $\mu=0,25$. Требуется найти функции для изгибающих моментов, поперечной силы, прогибов и построить эпюры.

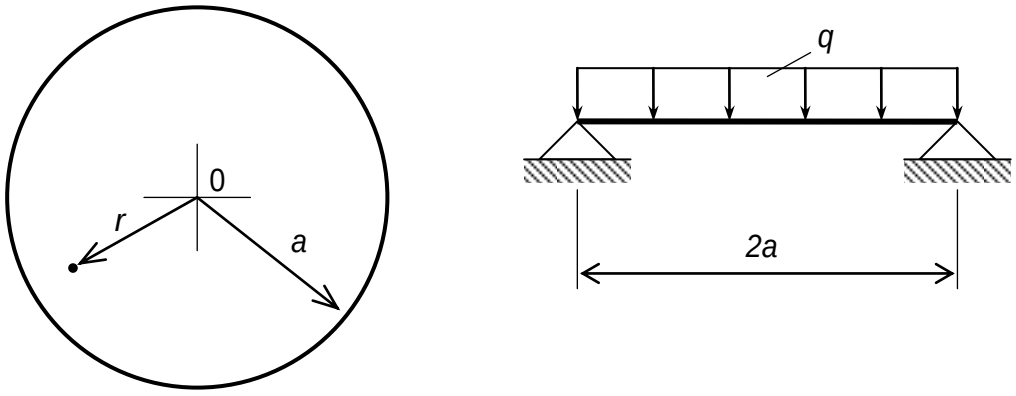


Рис. 35. Шарнирно опертая пластина круглого очертания, загружена распределенной нагрузкой

Перейдем к абсолютной координате $\rho = \frac{r}{a}$. Перепишем функцию прогибов

$$W = C\left[(5+\mu) - 2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2} + (1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right].$$

Найдем производные

$$\frac{dW}{dr} = \left[-4(3+\mu)\frac{r}{a^2} + 4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4}\right]; \qquad \frac{d^2W}{dr^2} = \left[-4(3+\mu)\frac{1}{a^2} + 12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4}\right];$$

$$\frac{d^3W}{dr^3} = \left[24(1+\mu)\frac{r}{a^4}\right]; \qquad \frac{d^4W}{dr^4} = \left[24(1+\mu)\frac{1}{a^4}\right].$$

Проверим выполнение граничных условий на краю пластины
Первое условие – при $r = a,\ W = 0.$

$$W = C\left[(5+\mu) - 2(3+\mu)\frac{a^2}{a^2} + (1+\mu)\frac{a^4}{a^4}\right] = C\left[5+\mu-6-2\mu+1+\mu\right] = 0.$$

Второе условие – при $r = a \quad M_r = 0$.
Момент в радиальной плоскости

$$M_r = -D\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dW}{dr}\right) = -\left\{\left[-4(3+\mu)\frac{1}{a^2} + 12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu}{r}\left[-4(3+\mu)\frac{r}{a^2} + 4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4}\right]\right\}.$$

После преобразования получим выражение

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right).$$

Согласно второму граничному условию, имеем

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{a^2}{a^2} - 1\right) = 0.$$

Условия на краю пластины выполняется.

Определим постоянный коэффициент C, используя дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины.

$$D\left(\frac{d^4W}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3W}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dW}{dr}\right)=q.$$

Подставим выражения для производных

$$DC\left\{24(1+\mu)\frac{1}{a^4}+\frac{2}{r}\left[24(1+\mu)\frac{r}{a^4}\right]-\frac{1}{r^2}\left[-4(3+\mu)\frac{1}{a^2}+12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^3}\left[-4(3+\mu)\frac{r}{a^2}+4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4}\right]\right\}=q.$$

Раскроим скобки, выполним сокращения и приведем подобные

$$DC\{24+48-12+4\}=q.$$

В результате получим

$$C=\frac{qa^4}{64D(1+\mu)}.$$

Учитывая выражения для C, получим функцию прогибов

$$W=\frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right].$$

Составим выражение для радиального изгибающего момента M_r (получено выше)

$$M_r=-\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right).$$

Составим выражение для тангенциального изгибающего момента M_θ

$$M_\theta=-D\left(\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}+\mu\frac{d^2W}{dr^2}\right)=-DC\left\{\frac{1}{r}\left[-4(3+\mu)\frac{r}{a^2}+4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4}\right]+\right.$$

$$\left.+\mu\left[-4(3+\mu)\frac{1}{a^2}+12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4}\right]\right\}.$$

Раскроим скобки и приведем подобные. В результате получим

$$M_\theta = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)\left[(1+3\mu)\frac{r^2}{a^2}-(3+\mu)\right].$$

Составим выражение для поперечной силы

$$Q_r = -D\left(\frac{d^3W}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2W}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dW}{dr}\right)=\left\{DC24(1+\mu)\frac{r}{a^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\left[-4(3+\mu)\frac{1}{a^2}+12(1+\mu)\frac{r^2}{a^4}\right]-\frac{1}{r^2}\left[-4(3+\mu)\frac{r}{a^2}+4(1+\mu)\frac{r^3}{a^4}\right]\right\}.$$

Раскроим скобки, приведем подобные и получим выражение для поперечно силы

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)r.$$

Выразим произведение коэффициентов CD через известные величины

$$DC = D\frac{qa^4}{64D(1+\mu)} = \frac{qa^4}{64(1+\mu)} = \frac{q2^4}{64(1+0,25)} = \frac{q}{5}.$$

Вычислим значения изгибающих моментов и поперечной силы в центре пластины,
$r=0$.

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right) = -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)(3+0,25)\left(\frac{0^2}{a^2}-1\right)=$$

$$=0.8125q;$$

$$M_\theta = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)\left[(1+3\mu)\frac{r^2}{a^2}-(3+\mu)\right]=$$

$$=-\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)\left[(1+3\cdot 0,25)\frac{0^2}{a^2}-(3+0,25)\right]=0,8125q;$$

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)r = \frac{q/5}{2^4}(1+0,25)\cdot 0 = 0.$$

Вычислим значения изгибающих моментов и поперечной силы на краю пластины,
$r = a = 2$.

$$M_r = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)(3+\mu)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right) = -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)(3+0,25)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right) = 0;$$

$$M_\theta = -\frac{4DC}{a^2}(1+\mu)\left[(1+3\mu)\frac{a^2}{a^2}-(3+\mu)\right] =$$

$$= -\frac{4q/5}{2^2}(1+0,25)\left[(1+3\cdot 0,25)\frac{2^2}{2^2}-(3+0,25)\right] = 0,375q;$$

$$Q_r = \frac{DC}{a^4}(1+\mu)a = \frac{q/5}{2^4}(1+0,25)\cdot 2 = 0,03125q.$$

Вычислим прогибы пластины
при $r = 0$

$$W = \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] =$$

$$= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{0^2}{a^2}+(1+0,25)\frac{0^4}{2^4}\right] = 1,05\frac{q}{D};$$

при $r = a/2 = 1$

$$W = \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] =$$

$$= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{1^2}{2^2}+(1+0,25)\frac{1^4}{2^4}\right] = 0,741\frac{q}{D};$$

при $r = a = 2$

$$W = \frac{qa^4}{64D(1+\mu)}\left[(5+\mu)-2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2}+(1+\mu)\frac{r^4}{a^4}\right] =$$

$$= \frac{q2^4}{64D(1+0,25)}\left[(5+0,25)-2(3+0,25)\frac{2^2}{2^2}+(1+0,25)\frac{2^4}{2^4}\right] = 0.$$

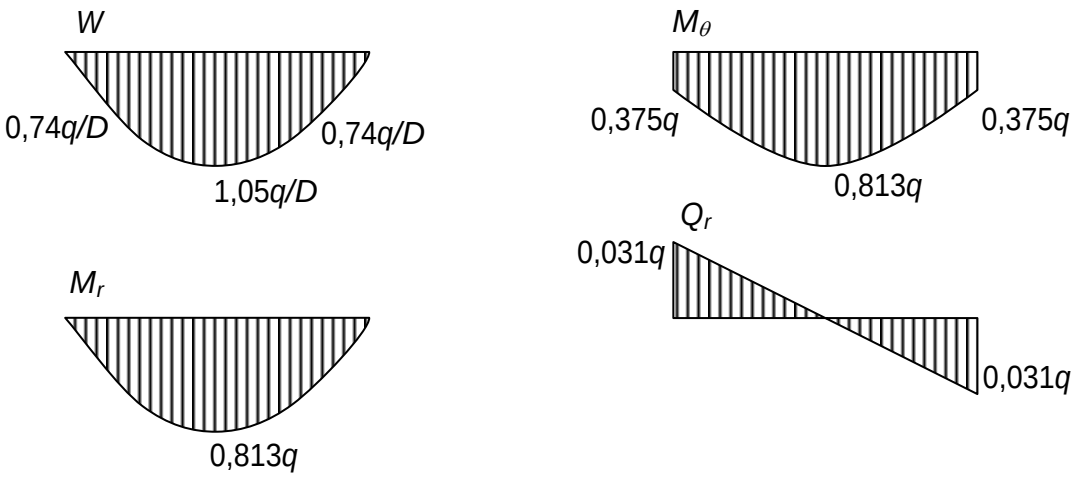


Рис. 36. Эпюры прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил

Вычислим максимальные нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,816q}{0,2^2} = 122,4q;$$

$$\sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,816q}{0,2^2} = 122,4q;$$

$$\tau_r = \frac{3Q_r}{2h} = \frac{3 \cdot 0,031q}{2 \cdot 0,2} = 0,233q.$$

1.7. Основы теории пластичности и ползучести

П р и м е р 14. Абсолютно жесткий стержень AC шарнирно опертый в точке C удерживается тремя тяжами в точках A, B и E, составленными из шести стержней с одинаковой площадью поперечных сечений A. Определить комбинацию стержней, при которой предельная нагрузка F будет самой большой, если материал деформируется по диаграмме Прандтля.

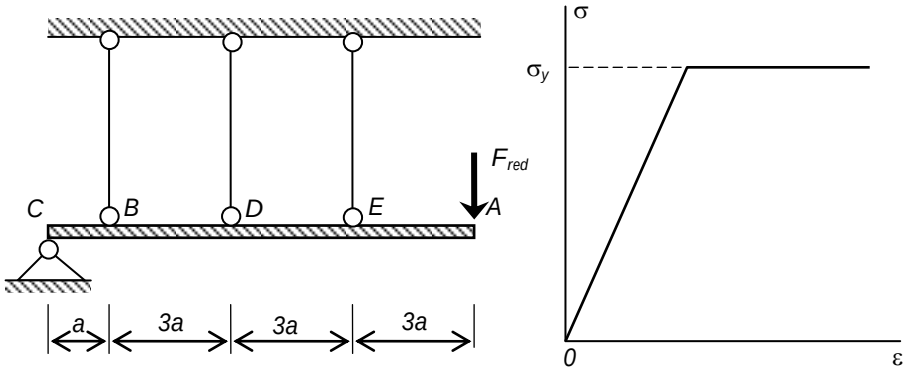


Рис. 37. Статически неопределимая система с учетом пластических деформаций материала тяжей

Р е ш е н и е. Обозначим количество стержней в тяжах B, D, E, соответственно, n_B, n_D, n_E. Согласно условию задачи при всех комбинациях расположения стержней суммарное их количество равно шести, то есть $n_B + n_D + n_E = 6$. Система потеряет прочность, то есть способность воспринимать сколь угодно малую дополнительную нагрузку, если во всех тяжах напряжения будут равными пределу текучести σ_y. Составим уравнение предельного равновесия заданной системы

$$\sum M_C = \sigma_y n_B A \cdot a + \sigma_y n_D A \cdot 4a + \sigma_y n_E A \cdot 7a - F_{red} \cdot 10a = 0.$$

Из уравнения получим значение предельной нагрузки

$$F_{red} = \frac{\sigma_y A}{10}\left(n_B + 4n_D + 7n_E\right).$$

Отсюда следует, что наибольшая нагрузка будет при наибольшем значении выражения в скобках. Составим возможные варианты расположения стержней в тяжах B, D, E и посчитаем выражение в скобках для каждого варианта.

Таблица 1 – Результаты расчета статически неопределимая система с учетом пластических деформаций материала тяжей

Вариант	Распределение стержней по тяжам			Количество стержней	Значение $\left(n_B + 4n_D + 7n_E\right)$
	n_B	n_D	n_E		
1	1	2	3	6	30
2	1	3	2	6	27
3	2	1	3	6	27
4	2	2	2	6	24
5	2	3	1	6	21
6	3	1	2	6	21
7	3	2	1	6	18

Очевидно, что заданная система может нести наибольшую предельную нагрузку при варианте распределения стержней по тяжам, обозначенным номером 1. При этом наибольшая предельная нагрузка равна

$$F_{red} = 3\sigma_y A.$$

2 КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

2.1 Индивидуальные задачи для самостоятельной работы

На квадратную пластинку, опирающуюся на упругое основание Фусса-Винклера, действуют четыре вертикальные силы F, приложенные к расчетным точкам (рис. 38), в соответствии с таблицей 3.

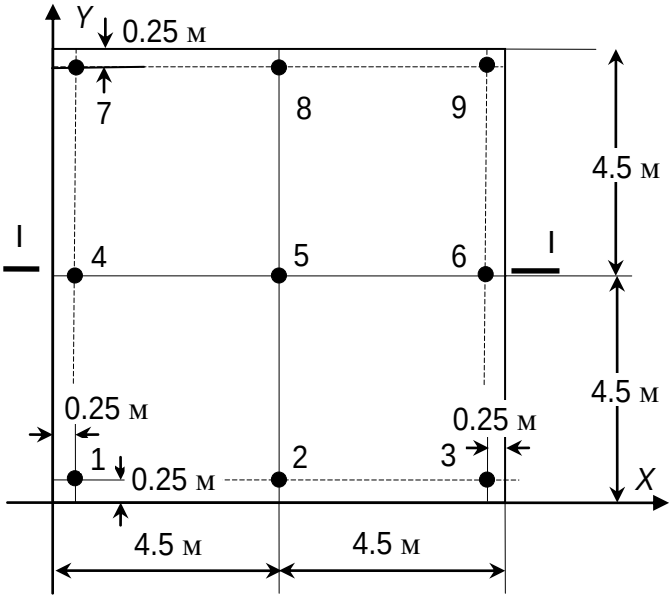


Рис. 38. Расчетные точки приложения нагрузки к пластинке

Коэффициент Пуассона υ = 0,25, размеры пластинки 9.5×9.5 м, коэффициент жесткости основания k_o = 10 МН/м коэффициент запаса n_o = 1.5, опасное напряжение (предел текучести) σ_y=20 МПа, размеры площадки нагружения 25×25 см принимаются одинаковыми для всех вариантов. Другие данные выбираются из таблиц 2 и 3 по шифру студента (заочная форма обучения) или по указанию преподавателя.

Т р е б у е т с я:

1. Изобразить конечно-элементную модель пластинки и все расчетные точки.
2. Подготовить исходные данные и выполнить расчет пластинки по программе *Sturm*, получить карты изолиний V, M_x, M_y и M_{xy}, сделать их анализ и выводы о деформации пластинки и о характере распределения в ней внутренних сил (*только для студентов очной формы обучения*)
3. В окрестности одной из точек приложения сил F (на усмотрение студента) определить - изгибающие и крутящие моменты, интенсивность давления и поперечные силы от местной нагрузки; вычислить нормальные и касательные напряжения и изобразить их эпюры.
4. В окрестности выбранной точки (п.3) вблизи верхней поверхности пластинки вырезать элементарный объем показать все напряжения на его площадках, установить вид напряженного состояния, найти главные напряжения и положение главных площадок.
5. Используя теорию прочности Губера-Мизеса-Генки, определить допускаемое значение нагрузки F_{adm}.

Таблица 2 – Данные к контрольной (расчетно-графической) работе

Вариант	Модуль упругости пластинки *E*, ГПа	Толщина пластинки *t*, см	Вариант	Координаты расчетных точек									
				№точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				X, м	0.25	4.75	9.25	0.25	4.75	9.25	0.25	4.75	9.25
				Y, м	0.25	0.25	0.25	4.75	4.75	4.75	9.25	9.25	9.25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	80	18	1		*F*	-	*F*	*F*	*F*	-	-	-	-
2	58	20	2		-	*F*	*F*	*F*	*F*	-	-	-	-
3	44	22	3		*F*	*F*	-	-	*F*	-	*F*	-	-
4	34	24	4		*F*	-	-	*F*	*F*	-	-	-	*F*
5	27	26	5		-	-	*F*	*F*	*F*	*F*	-	-	-
6	21	28	6		-	-	*F*	*F*	*F*	-	*F*	-	-
7	17	30	7		-	*F*	-	*F*	-	-	*F*	-	*F*
8	14	32	8		-	-	*F*	-	*F*	-	*F*	-	*F*
9	12	34	9		-	*F*	-	-	*F*	-	*F*	-	*F*
0	10	36	0		-	*F*	-	-	*F*	-	-	*F*	*F*
а			*б*										

Таблица 3 – Значение силы *F*, приложенной к пластинке

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Сила *F*, кН	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950
в										

П р и м е ч а н и е. Пример выполнения самостоятельной работы приведен в разделе 4.7. Для проверки решения задачи преподавателям можно использовать учебную компьютерную программу *TUP*, инструкция к которой дана в п.4.7.

2.1 **Контрольные вопросы к зачету**

1. Какое место и значимость имеет теория упругости среди других наук механики твердого тела?
2. Какие основные гипотезы приняты в классической теории упругости?
3. Как обозначаются и как определяются полное, нормальное и касательное напряжения?
4. По каким правилам расставляются индексы и знаки напряжений?
5. Как записывается и какие особенности имеет тензор напряжений?
6. Что следует понимать под напряженным состоянием в точке?
7. Какие частные случаи напряженного состояния выделяют в теории упругости и как записываются соответствующие им тензоры напряжений?
8. Какими уравнениями выражаются условия на границе тела?
9. Как обозначаются и как определяются направляющие косинусы площадки?
10. Как выражаются нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке?
11. Какие напряжения и площадки называются главными?
12. Как определить значения главные напряжений?
13. Как выражаются инварианты тензора напряжений через напряжения на координатных площадках?
14. Как найти значения максимальных (экстремальных) касательных напряжений при объемном напряженном состоянии?
15. Какие площадки и напряжения называются октаэдрическими?
16. Как выражаются октаэдрические напряжения через главные напряжения?
17. Как записывается шаровой тензор напряжения и тензор-девиатор напряжения?
18. Как записывается тензор деформации?
19. Как обозначаются и какие знаки принимаются для линейных и угловых деформаций?
20. Как выражается относительная линейная деформация волокна по произвольному направлению через компоненты тензора деформации?
21. Как вычислить значения главных деформаций?
22. Как выражаются инварианты тензора деформаций через компоненты тензора деформации?
23. Как записывается шаровой тензор деформации и тензор-девиатор деформации?
24. Как записывается дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Нав′е)?
25. Как записываются геометрические уравнения (уравнения Коши)?
26. Как записываются и что выражают уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана)? Их физический и энергетический смысл?
27. Как записываются физические уравнения (закон Гука) для объемного напряженного состояния?
28. Как записываются закон изменения объема и закон изменения формы?

29. Как формулируются гипотезы наступления предельного состояния Кулона-Геста и Губера-Мизеса-Роша?
30. Как формулируется решение задачи теории упругости в перемещениях?
31. Как формулируется решение задачи теории упругости в напряжениях?
32. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости – плоское напряженное состояние?
33. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости – плоское деформированное состояние?
34. Как получить решение плоских задач теории упругости с использованием функции напряжений (функции Эри)?
35. Какие понятия и допущения приняты в теории тонких пластин?
36. Какие классические модели грунтовых оснований применяются для расчета строительных сооружений?
37. Как записывается уравнение упругой поверхности тонкой пластины. (уравнение Софи-Жермен)?
38. Как выражаются внутренние силы через разрешающую функцию прогибов W?
39. Как выражаются граничные условия для тонких прямоугольных пластин?
40. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в тонкой пластине от изгибающих моментов и поперечных сил?
41. Как выражаются напряжения, вызванные действием местной нагрузки?
42. Какая модель принимается для расчета тонкой пластины методом конечных элементов (суть метода)?
43. Как обозначаются напряжения и деформации в полярной системе координат?
44. Как записываются основные уравнения теории упругости в полярной системе координат?
45. В каких случаях используется цилиндрическая система координатных осей при решении задач теории упругости?
46. Как записываются основные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах?
47. Какие понятия принимаются в теории пластичности?
48. Что заложено в понятиях простое нагружение и простое разгружение?
49. Какие основные постулаты приняты в теории малых упруго пластических деформаций А.А.Ильюшина?
50. Как записываются основные уравнения в теории пластичности?

Библиографический список рекомендуемых источников

Основная литература

1. Теличко В.Г. Строительная механика. Параметрическое моделирование расчётных схем в среде РПК SAP2000: учебное пособие / В. Г. Теличко, С. Ф. Злобин, Г. Н. Теличко; ТулГУ Тула: Изд-во ТулГУ, 2017260 с.: ил. Библиогр.: с. 255 https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2017033110270619187400003441 ISBN 978-5-7679-3775-2

2. Вагер, Б. Г. Численные методы: учебное пособие / Б. Г. Вагер. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. — 152 с. — ISBN 978-5-9227-0786-2. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/78584.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Махмутов, М. М. Лекции по численным методам / М. М. Махмутов. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. — 237 с. — ISBN 978-5-4344-0688-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/97368.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Тюльпинова, Н. В. Компьютерные и информационные технологии в науке и производстве : учебное пособие для магистров / Н. В. Тюльпинова. — Саратов : Вузовское образование, 2020. — 268 с. — ISBN 978-5-4487-0612-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/88759.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

5. Акимов, П. А. Строительная информатика: учебное пособие. / Акимов П. А. , Кайтуков Т. Б. , Мозгалева МЛ. , Сидоров В. Н. - Москва : Издательство АСВ, 2018. - 432 с. - ISBN 978-5-4323-0066-9. - Текст: электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432300669.html. - Режим доступа : по подписке.

Дополнительная литература

1. Кокотушкин, Г. А. Численные методы алгебры и приближения функций : методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы» / Г. А. Кокотушкин, А. А. Федотов, П. В. Храпов. — Москва : Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2011. — 60 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/31590.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Численные методы в информационных системах : учебное пособие / Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, М. А. Ивановский [и др.]. — Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2012. — 135 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/64618.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Кудинов, И. В. Аналитические методы решения краевых задач математической физики : монография / И. В. Кудинов ; под редакцией Э. М. Карташова. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2017. — 219 с. — ISBN 978-5-7964-1963-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/90453.html. — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Трухан, А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления : учебное пособие / А. А. Трухан, Т. В. Огородникова. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-3445-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/111893. — Режим доступа: для авториз. пользователей.