

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства  
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры  
«Строительство, строительные материалы и  
конструкции»  
«18 » января 2023 г., протокол №5

Заведующий кафедрой

 А.А. Трещев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по проведению практических (семинарских) занятий  
по дисциплине (модулю)  
«Прикладная теория пластичности и ползучести»**

**основной профессиональной образовательной программы  
вышшего образования – программы магистратуры**

по направлению подготовки  
**08.04.01 Строительство**

с направленностью (профилем)  
**Теория и проектирование зданий и сооружений**

Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-23

Тула 2023 год

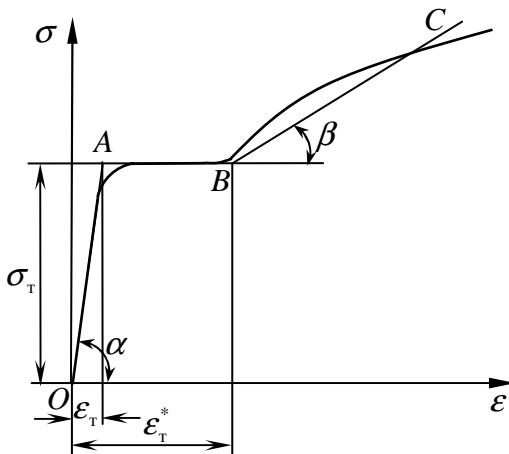
**Разработчик методических указаний**

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

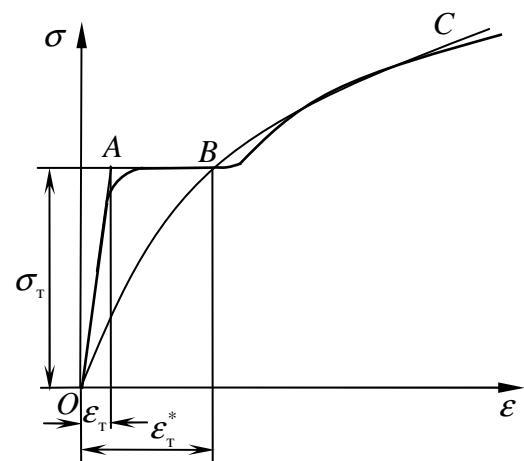
Теличко  
(подпись)

## 1 СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В расчётах за пределами упругости желательно использовать экспериментально полученные диаграммы растяжения. Для упрощения расчётов эти диаграммы обычно схематизируются, т.е. заменяются линиями (прямыми или кривыми), имеющими достаточно простое математическое выражение и в то же время хорошо совпадающими с экспериментально полученными диаграммами. Так, например, диаграмма растяжения с площадкой текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из трёх прямых  $OA$ ,  $AB$  и  $BC$  (рисунок 1.1), или ломаной, состоящей из двух прямых  $OA$  и  $AB$  и участка параболы  $BC$  (рисунок 1.2). Первая схематизированная диаграмма называется диаграммой растяжения с площадкой текучести и линейным упрочнением, а вторая – диаграммой растяжения с площадкой текучести и степенным упрочнением.



**Рисунок 1.1 – Схематизация диаграммой с площадкой текучести и линейным упрочнением**



**Рисунок 1.2 – Схематизация диаграммой с площадкой текучести и степенным упрочнением**

Отметим, что при схематизации диаграмм различие между пределами пропорциональности и текучести стирается.

Приведём зависимости напряжений от деформаций на различных участках схематизированных диаграмм. Для диаграммы с площадкой текучести и линейным упрочнением:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \rightarrow \sigma = E\varepsilon;$$

$$\text{при } \varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t^* \rightarrow \sigma = \sigma_t; \quad (1.1)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_t^* \rightarrow \sigma = \sigma_t + E_t (\varepsilon - \varepsilon_t^*) = \sigma_t \left[ 1 - (1 - \lambda) \frac{\varepsilon_t^*}{\varepsilon_t} \right] + E_t \varepsilon.$$

В этих уравнения  $\varepsilon_t$  – деформация, соответствующая пределу текучести материала;  $\varepsilon_t^*$  – деформация, соответствующая началу упрочнения;  $E_t = \tan \beta$  – модуль упрочнения материала;  $\lambda$  – параметр упрочнения:

$$\lambda = 1 - \frac{E_t}{E}. \quad (1.2)$$

Величина модуля упрочнения зависит от того, как провести прямую  $BC$ . Для получения более адекватных результатов в теории пластичности обычно стараются как можно точнее схематизировать тот участок экспериментально полученной диаграммы, который используется в расчётах. При схематизации с линейным упрочнением обычно величина модуля упрочнения оказывается в 10...50 раз меньше модуля упругости.

Для диаграммы с площадкой текучести и степенным упрочнением:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \rightarrow \sigma = E\varepsilon;$$

$$\text{при } \varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t^* \rightarrow \sigma = \sigma_t; \quad (1.3)$$

$$\text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_t^* \rightarrow \sigma = \sigma_t \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t^*} \right)^m,$$

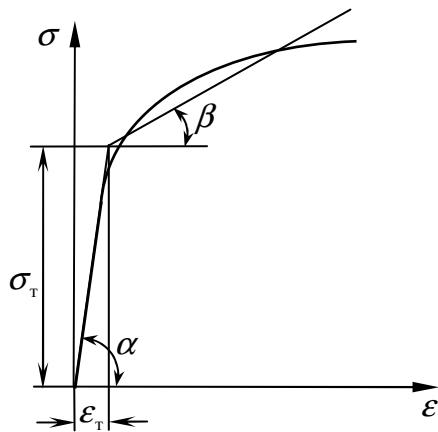
где показатель степени  $m$  изменяется от 0 до 1.

Диаграмма растяжения без площадки текучести может быть схематизирована ломаной линией, состоящей из двух прямых (рисунок 1.3), или ломаной, состоящей из прямой и участка параболы (рисунок 1.4). Первая схематизированная диаграмма называется диаграммой растяжения с линейным упрочнением, а вторая – диаграммой растяжения со степенным упрочнением.

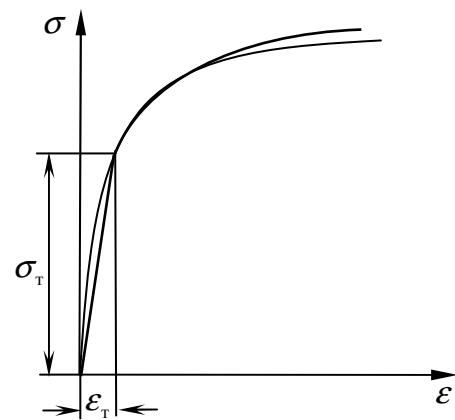
Зависимости напряжений от деформаций для этих схематизированных диаграмм могут быть легко получены из уравнений (1.1) и (1.3) с учётом того, что в рассматриваемом случае  $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t$ .

Частным случаем диаграммы с линейным упрочнением является диаграмма идеального упругопластического тела (рисунок 1.5), для которого модуль упрочнения  $E_t$  равен нулю. Она часто называется диаграммой без

упрочнения Л. Прандтля. Эта диаграмма может быть использована, например, для материалов, имеющих ярко выраженную площадку текучести при условии, что деформации детали не превосходят  $\varepsilon_t^*$ .

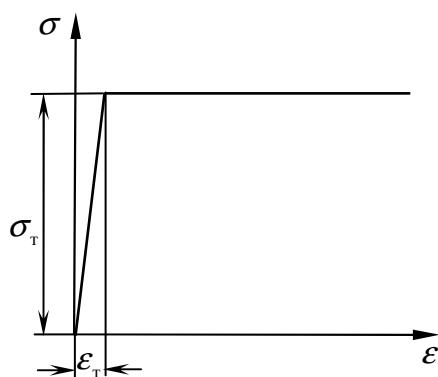


**Рисунок 1.3 – Схематизация диаграммой с линейным упрочнением**

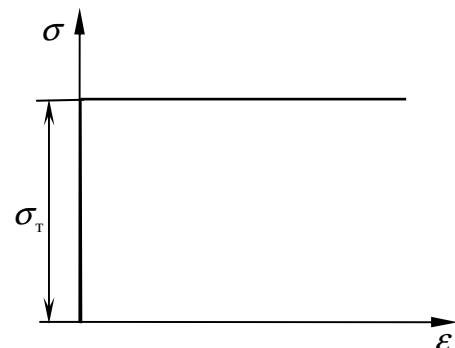


**Рисунок 1.4 – Схематизация диаграммой со степенным упрочнением**

При больших деформациях величиной упругой деформации можно пренебречь, т.е. принять модуль упругости  $E$  равным бесконечности. Тогда при отсутствии упрочнения получаем диаграмму жесткопластического тела (рисунок 1.6).



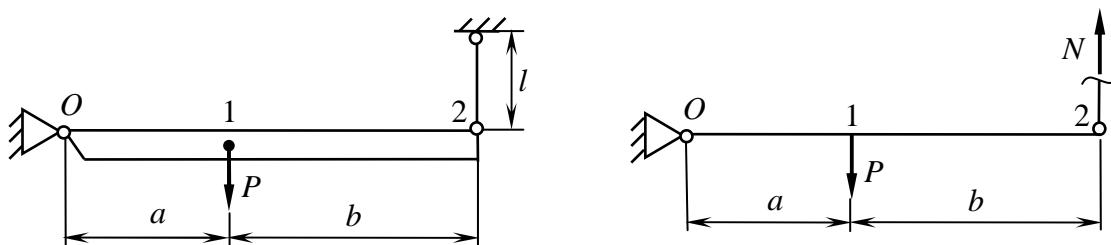
**Рисунок 1.5 – Диаграмма идеального упругопластического тела**



**Рисунок 1.6 – Диаграмма жёсткопластического тела**

## 2 РАСЧЁТ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ

*Пример 1:* Абсолютно жёсткая балка, крепящаяся на шарнире и ферменной подвеске, нагружена силой  $P$  (рисунок 2.1). Определить предельную нагрузку.



**Рисунок 2.1 – Жёсткая балка с одним ферменным элементом**

Ферменным элементом называется прямолинейный стержень, работающий только на растяжение или сжатие.

Поскольку материал без упрочнения, для него можно воспользоваться диаграммой растяжения Прандтля (см. рисунок 1.5).

Из условия равновесия  $\Sigma M_O = 0$  находим

$$N(a+b) = Pa \quad \text{или} \quad N = P \frac{a}{a+b}.$$

Напряжение в ферменном элементе определяется как  $\sigma = N/F$ . В предельном состоянии напряжение в этом элементе составляет  $\sigma_t$ . Следовательно, величина предельного усилия в стержне равна  $N_t = \sigma_t F$ .

Найдём предельную нагрузку для рассматриваемой системы:

$$P_t = N_t \frac{a+b}{a} = N_t \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

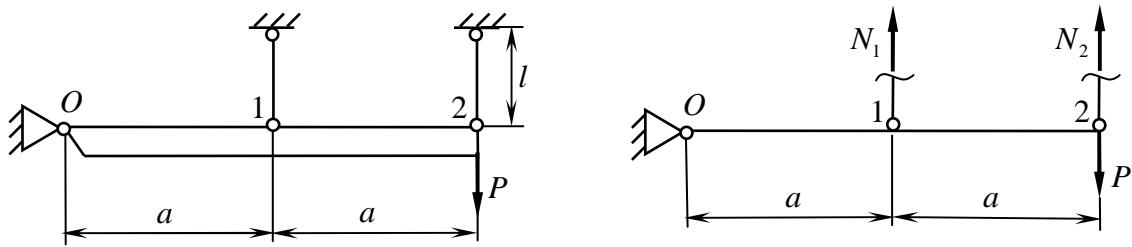
Рассмотрим частные случаи. При  $b=0$ :  $P_t = N_t$ , при  $b=a$ :  $P_t = 2N_t$ .

*Пример 2:* К жёсткой балке добавим ещё один ферменный элемент, как показано на рисунке 2.2.

Запишем уравнение равновесия ( $\Sigma M_O = 0$ ):

$$N_1 a + N_2 \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{или} \quad N_2 = P - \frac{N_1}{2}.$$

Рассматриваемая система является один раз статически неопределенной. Найдём сначала «упругое» решение. Для этого воспользуемся началом наименьшей работы Кастильяно: в упругой системе устанавливается такое распределение внутренних усилий, при котором потенциальная энергия деформации имеет минимальное значение.



**Рисунок 2.2 – Жёсткая балка с двумя ферменными элементами**

Балку будем считать недеформируемой. Тогда потенциальную энергию деформации рассматриваемой системы можно найти как

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} N_1 \delta_1 + \frac{1}{2} N_2 \delta_2 = \frac{1}{2} N_1 \frac{N_1 l}{EF} + \frac{1}{2} N_2 \frac{N_2 l}{EF} = \frac{l}{2EF} (N_1^2 + N_2^2),$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – удлинения стержней (ферменных элементов).

Тогда с учётом уравнения равновесия получим

$$U = \frac{l}{2EF} \left( N_1^2 + \left( P - \frac{N_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{l}{2EF} \left( \frac{5}{4} N_1^2 - PN_1 + P^2 \right).$$

Из условия минимума потенциальной энергии деформации

$$\frac{dU}{dN_1} = 0$$

находим

$$\frac{5}{2} N_1 - P = 0,$$

откуда

$$N_1 = \frac{2}{5} P; \quad N_2 = P - \frac{1}{5} P = \frac{4}{5} P = 2N_1.$$

Это решение упругой задачи. Рассмотрим теперь предельные нагрузки. Пусть при  $P = P_1$  напряжение во втором (наиболее нагруженном) стержне достигает предела текучести, т.е.  $N_2 = N_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}} F$ .

Тогда

$$N_{\text{т}} = \frac{4}{5}P_1 \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{5}{4}N_{\text{т}}.$$

При этом

$$N_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4}N_{\text{т}} = \frac{N_{\text{т}}}{2} < N_{\text{т}}.$$

Пусть далее  $P > P_1$ . Поскольку с увеличением нагрузки усилие  $N_2 = N_{\text{т}}$  будет оставаться неизменным, из уравнения равновесия находим

$$N_1 + N_{\text{т}} \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{и} \quad N_1 = 2(P - N_{\text{т}}).$$

Отметим, что внешняя нагрузка может расти до тех пор, пока усилие  $N_1$  не станет равным  $N_{\text{т}}$ . Эту предельную нагрузку обозначим через  $P_{\text{т}}$ . Используя предыдущее равенство, получим

$$N_{\text{т}} = 2(P_{\text{т}} - N_{\text{т}}) \quad \text{или} \quad P_{\text{т}} = \frac{3}{2}N_{\text{т}}.$$

Дальнейший рост внешней нагрузки невозможен, поскольку усилия в стержнях, равные  $N_{\text{т}}$ , уже не смогут её уравновесить.

Определим перемещения точек 1 и 2. При  $P < P_1$  система работает упруго и, следовательно,

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF} = \frac{2}{5} \frac{Pl}{EF}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{EF} = \frac{4}{5} \frac{Pl}{EF} = 2\delta_1.$$

$$\text{При } P = P_1 = \frac{5}{4}N_{\text{т}}$$

$$\delta_1 = \frac{2}{5} \frac{P_1 l}{EF} = \frac{1}{2} \frac{N_{\text{т}} l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

При  $P_1 < P < P_{\text{т}}$ , поскольку первый стержень продолжает работать упруго,

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF} = \frac{2(P - N_{\text{т}})l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

И, наконец, при  $P = P_t = \frac{3}{2}N_t$

$$\delta_1 = \frac{2\left(\frac{3}{2}N_t - N_t\right)l}{EF} = \frac{N_t l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1.$$

На рисунке 2.3 представлен график зависимости  $\delta_2$  от  $P$ , где обозначено  $\delta_0 = \frac{N_t l}{EF}$ . На рисунке 2.4 показано изменение усилий в стержнях с ростом внешней нагрузки.

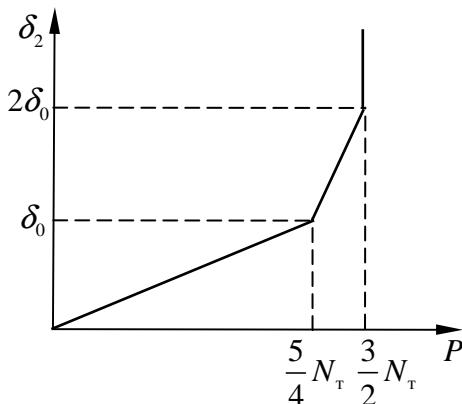


Рисунок 2.3 – Изменение перемещения

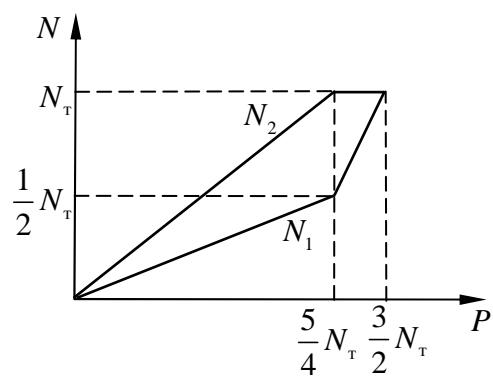


Рисунок 2.4 – Изменение усилий

*Пример 3:* Рассмотрим жёсткую балку с тремя ферменными элементами (рисунок 2.5).

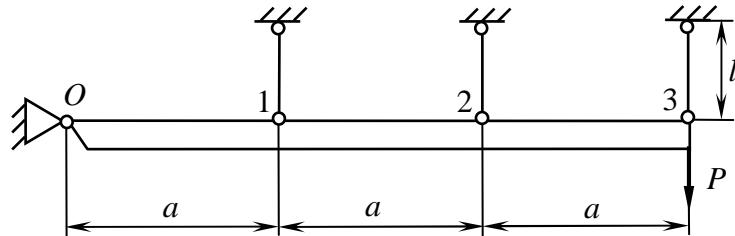


Рисунок 2.5 – Жёсткая балка с тремя ферменными элементами

Данная система является дважды статически неопределенной. Очевидно, что здесь третий, более нагруженный, ферменный элемент ранее других достигнет усилия текучести  $N_t$ , затем второй и, наконец, первый стержень.

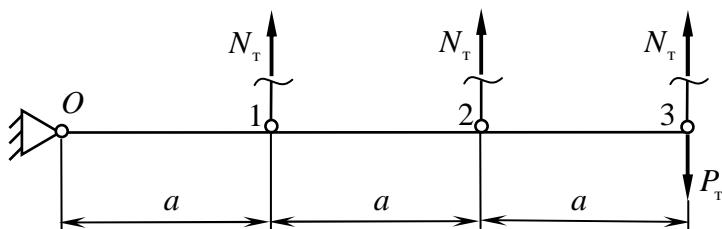
Таким образом, в предельном состоянии  $N_1 = N_2 = N_3 = N_t$  (рисунок 2.6).

Запишем уравнение равновесия ( $\Sigma M_O = 0$ ):

$$N_t a + N_t \cdot 2a + N_t \cdot 3a = P_t \cdot 3a,$$

откуда

$$P_t = 2N_t.$$



**Рисунок 2.6 – Предельное состояние системы**

Из рассмотренных примеров можно наметить следующий способ определения предельной нагрузки для стержневой системы с ферменными элементами из материала без упрочнения.

Пусть задана некоторая стержневая система с ферменными элементами. Будем полагать, что материал элементов системы не обладает упрочнением.

Пусть система является статически неопределенной. В начале нагружения она работает как упругая. Это продолжается до тех пор, пока в одном, наиболее нагруженном, элементе напряжение не достигнет предела текучести  $\sigma_t$ . После этого при дальнейшем росте нагрузки в этом элементе будет неизменное усилие, равное

$$N_t = \sigma_t F,$$

где  $F$  – площадь сечения стержня.

Очевидно, что при этом степень статической неопределенности системы будет уменьшаться на единицу. Если нагрузка на систему продолжает расти, то усилия в остальных элементах будут также возрастать. При достижении состояния текучести каким-либо следующим элементом, а затем и последующими элементами степень статической неопределенности каждый раз уменьшается на единицу. Таким образом, с дальнейшим ростом нагрузки система может стать статически определимой, а затем превратиться в механизм. Последнее будет означать, что произошло исчерпание несущей способности рассматриваемой системы. Такое состояние системы называется

пределенным. При этом внешняя нагрузка еще находится в равновесии с внутренними усилиями. Дальнейшее увеличение нагрузки уже невозможно. В состоянии предельного равновесия перемещения системы становятся неопределенными.

Если же в системе окажутся сжатые элементы, то они могут потерять устойчивость. Обычно принимается, что потерявший устойчивость стержень сопротивляется внешним воздействиям с постоянной силой, равной критической силе  $N_{kp}$ .

*Пример 4:* На плоскую ферму, изготовленную из стальных стержней трубчатого сечения 40x34, действует сила  $P$  (рисунок 2.7). Площадь поперечного сечения стержней  $F = 3,4872 \text{ см}^2$ ; его момент инерции  $I = 6,006 \text{ см}^4$ . Характерный размер  $a = 70 \text{ см}$ . Свойства материала:  $E = 2,05 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_t = 800 \text{ МПа}$ . Найти предельную нагрузку.

Будем также полагать, что материал не обладает упрочнением.

Определим длины стержней:

$$l_1 = a\sqrt{5} = 156,524 \text{ см}; \quad l_2 = a = 70 \text{ см}; \quad l_3 = a\sqrt{2} = 98,995 \text{ см}.$$

Найдём силу текучести:

$$N_t = \sigma_t F = 800 \cdot 348,72 = 279 \text{ кН.}$$

Приведём рассчитанные по формуле

$$N_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

критические усилия для стержней фермы:

$$N_{1kp} = 50 \text{ кН}; \quad N_{2kp} = 250 \text{ кН}; \quad N_{3kp} = 125 \text{ кН.}$$

«Упругое» решения для данной один раз статически неопределенной стержневой системы было получено в курсе строительной механики с использованием матричного метода перемещений. Оно имеет вид

$$N_1 = 0,61463P; \quad N_2 = 0,17538P; \quad N_3 = -0,63676P.$$

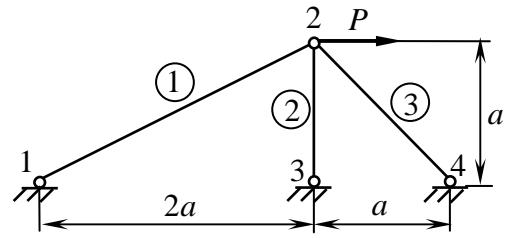


Рисунок 2.7 – Плоская ферма

В наиболее тяжёлых условиях здесь работает стержень 3. Он теряет устойчивость при силе  $P = P_1$ , которую можно найти из следующего равенства:

$$|-0,63676P_1| = N_{3\text{kp}} = 125 \text{ кН},$$

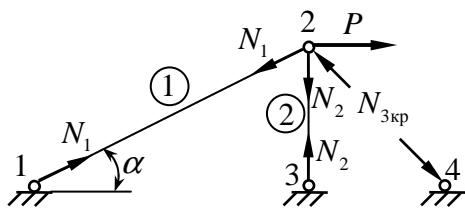
откуда

$$P_1 = \frac{125}{0,63676} = 196,31 \text{ кН.}$$

При этом

$$N_1 = 0,61463 \cdot 196,31 = 120,7 \text{ кН}; \quad N_2 = 0,17538 \cdot 196,31 = 34,4 \text{ кН.}$$

Дальнейшее увеличение силы  $P$  вызовет деформацию стержня 3 при постоянном сжимающем усилии (рисунок 2.8).



**Рисунок 2.8 – После потери устойчивости стержня 3**

Таким образом, при  $P > P_1$  в узле 2 останется два неизвестных усилия. Количество уравнений равновесия для их определения также равно двум, т.е. задача становится статически определимой. Учитывая, что

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

составим уравнения равновесия узла 2:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + N_{3\text{kp}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= P \\ N_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + N_2 &= N_{3\text{kp}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$N_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( P - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3\text{kp}} \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( P - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 125 \right) = 1,1180P - 98,82;$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} N_{3\text{kp}} - \frac{N_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 125 - \frac{1,1180P - 98,82}{\sqrt{5}} = 132,58 - 0,49998P.$$

Анализ данных выражений показывает, что стержень 1 раньше исчерпает несущую способность, нежели стержень 2.

Примем, что при  $P = P_2$  напряжение в стержне 1 достигает предела текучести, т.е.  $N_1 = N_t$ . Определим  $P_2$ :

$$N_t = 1,1180P_2 - 98,82,$$

откуда

$$P_2 = \frac{N_t + 98,82}{1,1180} = \frac{279 + 98,82}{1,1180} = 337,9 \text{ кН.}$$

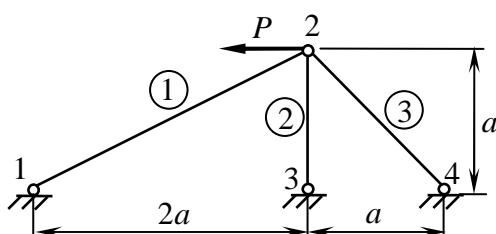
При этом

$$N_2 = 132,58 - 0,49998P_2 = 132,58 - 0,49998 \cdot 337,9 = -36,38 \text{ кН.}$$

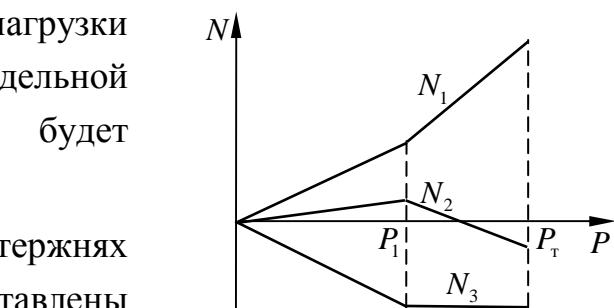
Дальнейшее увеличение нагрузки невозможно. Таким образом, предельной силой для данной фермы будет  $P_t = P_2 = 337,9 \text{ кН.}$

Зависимости усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки представлены на рисунке 2.9.

Рассмотрим теперь другой случай нагружения фермы, когда сила  $P$  направлена в противоположную сторону (рисунок 2.10).



**Рисунок 2.10 – Второй случай нагружения плоской фермы**



**Рисунок 2.9 – Изменение усилий в стержнях фермы**

При этом «упругое» решение, очевидно, имеет вид

$$N_1 = -0,61463P; \quad N_2 = -0,17538P; \\ N_3 = 0,63676P.$$

Стержень 1 сжат и имеет наименьшую критическую нагрузку. Следовательно, он раньше других потеряет несущую способность.

Пусть  $P = P_1$  стержень 1 теряет устойчивость. Тогда

$$|-0,61463P_1| = N_{1\text{кр}} = 50 \text{ кН},$$

откуда

$$P_1 = \frac{50}{0,61463} = 81,35 \text{ кН.}$$

И, следовательно,

$$N_2 = -0,17538 \cdot 81,35 = -14,27 \text{ кН}; \quad N_3 = 0,63676 \cdot 81,35 = 51,80 \text{ кН.}$$

При  $P > P_1$  стержень 1 работает с постоянным усилием, равным  $N_{1\text{кр}}$ , и система становится статически определимой (рисунок 2.11).

Составим уравнения равновесия узла 2:

$$\left. \begin{aligned} N_{1\text{кр}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= P \\ N_2 + N_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= N_{1\text{кр}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\}.$$

Решая данную систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left( P - \frac{2}{\sqrt{5}} N_{1\text{кр}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( P - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 50 \right) = 1,4142P - 63,25; \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} N_{1\text{кр}} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 50 - \frac{\sqrt{2}}{2} (1,4142P - 63,25) = 67,08 - P. \end{aligned}$$

Можно заметить, что при  $P > P_1$  стержень 2 будет сжат, а стержень 3 – растянут. Анализ данных выражений показывает, что стержень 3 раньше исчерпает несущую способность, нежели стержень 2.

Примем, что при  $P = P_2$  напряжение в стержне 3 достигает предела текучести, т.е.  $N_3 = N_t$ . Определим  $P_2$ :

$$N_t = 1,4142P_2 - 63,25,$$

откуда

$$P_2 = \frac{N_t + 63,25}{1,4142} = \frac{279 + 63,25}{1,4142} = 242,0 \text{ кН.}$$

При этом

$$N_2 = 67,08 - P_2 = 67,08 - 242 = -174,9 \text{ кН,}$$

что по модулю меньше  $N_{2\text{кр}} = 250 \text{ кН}$ , т.е. при такой нагрузке стержень 2 ещё не теряет устойчивости.

Поскольку дальнейшее увеличение нагрузки невозможно, предельной силой в этом случае нагружения будет  $P_t = P_2 = 242,0 \text{ кН}$ . Она существенно отличается от предыдущего значения, когда нагрузка была направлена вправо. Зависимости усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки представлены на рисунке 2.12.

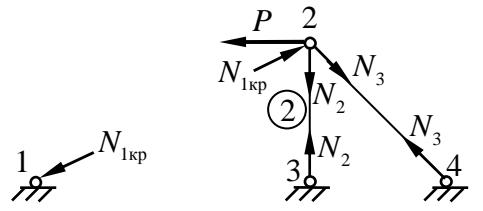


Рисунок 2.11 – После потери устойчивости стержня 1

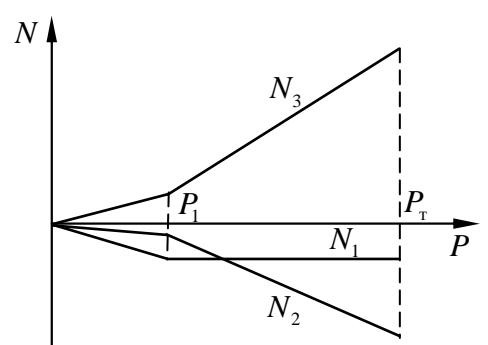


Рисунок 2.12 – Изменение усилий в стержнях фермы

### 3 РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ФЕРМЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Будем считать, что материал обладает линейным упрочнением, т.е. его диаграмма растяжения имеет вид, показанный на рисунке 3.1. Будем также полагать, что напряжения в системе не могут превышать значения  $\sigma_{\max}$ .

Приведём зависимости  $\sigma - \varepsilon$  на различных участках диаграммы.

При  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t$

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.1)$$

где  $E = \tan \alpha$  – модуль упругости.

При  $\varepsilon \geq \varepsilon_t$

$$\sigma = \lambda\sigma_t + E_t\varepsilon, \quad (3.2)$$

где  $E_t = \tan \beta$  – модуль упрочнения;  $\lambda = 1 - E_t/E$  – параметр упрочнения.

Обычно  $E_t/E \approx 0,05 \dots 0,15$ .

*Пример 1:* Абсолютно жёсткая балка, крепящаяся на шарнире и двух ферменных подвесках, нагружена силой  $P$  (рисунок 3.2). Определить усилия в стержнях в зависимости от приложенной силы.

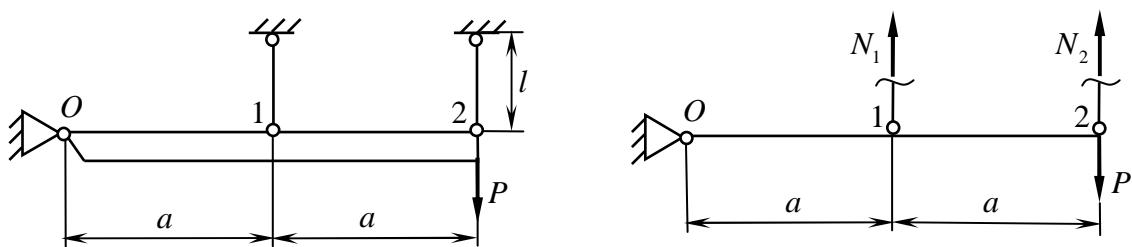


Рисунок 3.2 – Жёсткая балка с двумя ферменными элементами

Рассматриваемая система является один раз статически неопределенной. Запишем уравнение равновесия ( $\sum M_O = 0$ ):

$$N_1 a + N_2 \cdot 2a = P \cdot 2a \quad \text{или} \quad N_1 + 2N_2 = 2P. \quad (3.3)$$

Для раскрытия статической неопределенности воспользуемся условием

$$\delta_2 = 2\delta_1, \quad (3.4)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – удлинения ферменных элементов (стержней).

Это условие вытекает из того, что балка является абсолютно жесткой.

Найдём сначала «упругое» решение. В этом случае

$$\delta_1 = \frac{N_1 l}{EF}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{EF},$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержней.

Откуда

$$N_1 = \frac{EF}{l} \delta_1; \quad N_2 = \frac{EF}{l} \delta_2$$

и в силу условия (3.4)

$$N_2 = 2N_1.$$

Тогда из уравнения равновесия (3.3) получим

$$N_1 = \frac{2}{5}P; \quad N_2 = \frac{4}{5}P. \quad (3.5)$$

Найдём напряжения и деформации в стержнях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{F} = \frac{2}{5} \frac{P}{F}; & \sigma_2 &= \frac{N_2}{F} = \frac{4}{5} \frac{P}{F}. \\ \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} = \frac{2}{5} \frac{P}{EF}; & \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} = \frac{4}{5} \frac{P}{EF}. \end{aligned}$$

Таким образом, при упругой работе системы

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 < \varepsilon_t; \quad N_2 > N_1.$$

Отсюда следует, что напряжение во втором стержне раньше достигнет предела текучести.

Пусть  $P = P_1$  усилие  $N_2 = N_t = \sigma_t F$ . Тогда

$$N_t = \frac{4}{5}P_1 \quad \text{или} \quad P_1 = \frac{5}{4}N_t. \quad (3.6)$$

При этом усилие в стержне 1 будет равно

$$N_1 = \frac{2}{5}P_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4}N_t = \frac{1}{2}N_t,$$

т.е. данный стержень будет находиться в упругом состоянии.

При дальнейшем росте нагрузки стержень 2 работает за пределами упругости, а первый продолжает быть упругим до тех пор, пока усилие  $N_1$  не достигнет значения  $N_t$ . Пусть это произойдёт при силе  $P = P_2$ .

При  $P_1 < P < P_2$  согласно (3.1) и (3.2) имеем

$$\sigma_1 = E\epsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_t + E_t\epsilon_2 = \lambda\sigma_t + E_t \cdot 2\epsilon_1.$$

Здесь учтено, что в соответствии с условием (3.4)  $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ .

Деформацию  $\epsilon_1$  определим из уравнения равновесия. Разделив левую и правую части равенства (3.3) на  $F$ , получим

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 = 2\frac{P}{F}.$$

С учётом предыдущих выражений имеем

$$\begin{aligned} E\epsilon_1 + 2(\lambda\sigma_t + 2E_t\epsilon_1) &= 2\frac{P}{F}; \\ \epsilon_1(E + 4E_t) &= 2\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_t; \\ \epsilon_1 &= \frac{2\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_t}{E + 4E_t}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

При  $P = P_2$

$$\epsilon_1 = \epsilon_t = \frac{2\frac{P_2}{F} - 2\lambda\sigma_t}{E + 4E_t},$$

откуда

$$\begin{aligned} 2\frac{P_2}{F} - 2\lambda\sigma_t &= \epsilon_t(E + 4E_t); \\ 2\frac{P_2}{F} &= E\epsilon_t \left(1 + 4\frac{E_t}{E}\right) + 2\lambda\sigma_t. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sigma_t = E\epsilon_t \quad \text{и} \quad \frac{E_t}{E} = 1 - \lambda,$$

имеем

$$2\frac{P_2}{F} = \sigma_t [1 + 4(1 - \lambda) + 2\lambda];$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \sigma_{\text{т}} F (5 - 2\lambda) = \frac{5 - 2\lambda}{2} N_{\text{т}}. \quad (3.8)$$

Определим усилия в стержнях, когда  $P_1 < P < P_2$ . Согласно (3.7)

$$N_1 = EF\varepsilon_1 = \frac{2P - 2\lambda\sigma_{\text{т}}F}{1 + 4\frac{E_{\text{т}}}{E}} = \frac{2P - 2\lambda\sigma_{\text{т}}F}{1 + 4(1 - \lambda)}$$

или

$$N_1 = \frac{2P - 2\lambda N_{\text{т}}}{5 - 4\lambda}. \quad (3.9)$$

Для усилия в стержне 2 имеем

$$\begin{aligned} N_2 &= \sigma_2 F; \\ \sigma_2 &= \lambda\sigma_{\text{т}} + E_{\text{т}}\varepsilon_2 = \lambda\sigma_{\text{т}} + E_{\text{т}} \cdot 2\varepsilon_1 = \lambda\sigma_{\text{т}} + 2E_{\text{т}} \frac{\frac{P}{F} - 2\lambda\sigma_{\text{т}}}{E + 4E_{\text{т}}} = \\ &= \lambda\sigma_{\text{т}} + 4\frac{E_{\text{т}}}{E} \cdot \frac{\frac{P}{F} - \lambda\sigma_{\text{т}}}{1 + 4\frac{E_{\text{т}}}{E}} = \lambda\sigma_{\text{т}} + 4(1 - \lambda) \cdot \frac{\frac{P}{F} - \lambda\sigma_{\text{т}}}{5 - 4\lambda}. \end{aligned}$$

Тогда

$$N_2 = \lambda\sigma_{\text{т}} F + \frac{4(1 - \lambda)(P - \lambda\sigma_{\text{т}}F)}{5 - 4\lambda}$$

или

$$N_2 = \frac{4P(1 - \lambda) + \lambda N_{\text{т}}}{5 - 4\lambda}. \quad (3.10)$$

Подстановка (3.9) и (3.10) в уравнение равновесия (3.3) приводит к удовлетворению последнего.

Далее определим усилие  $N_2$  при  $P = P_2$ . Используя (3.10) и (3.8), запишем

$$N_2 = \frac{4P_2(1 - \lambda) + \lambda N_{\text{т}}}{5 - 4\lambda} = \frac{N_{\text{т}}}{5 - 4\lambda} [2(5 - 2\lambda)(1 - \lambda) + \lambda] = N_{\text{т}} \frac{10 - 13\lambda + 4\lambda^2}{5 - 4\lambda}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь поведение системы в случае, когда  $P > P_2$ . При этом оба стержня работают за пределами упругости. Здесь, очевидно, также выполняются уравнения равновесия и условия совместности деформаций. Для данного случая имеем

$$\sigma_1 = \lambda\sigma_t + E_t\epsilon_1; \quad \sigma_2 = \lambda\sigma_t + E_t\epsilon_2 = \lambda\sigma_t + E_t \cdot 2\epsilon_1.$$

Подставим эти выражения в уравнение равновесия (3.3), делённое на  $F$ . Получим

$$\lambda\sigma_t + E_t\epsilon_1 + 2\lambda\sigma_t + 4E_t\epsilon_1 = 2\frac{P}{F},$$

откуда

$$\epsilon_1 = \frac{1}{5E_t} \left( \frac{2P}{F} - 3\lambda\sigma_t \right)$$

и согласно условию совместности деформаций  $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ .

Используя этот результат, найдём напряжения и усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\sigma_t + E_t\epsilon_1 = \lambda\sigma_t + \frac{1}{5} \left( 2\frac{P}{F} - 3\lambda\sigma_t \right) = \frac{2}{5}\frac{P}{F} + \frac{2}{5}\lambda\sigma_t; \\ N_1 &= \sigma_1 F = \frac{2}{5}P + \frac{2}{5}\lambda N_t; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \lambda\sigma_t + 2E_t\epsilon_1 = \lambda\sigma_t + \frac{2}{5} \left( 2\frac{P}{F} - 3\lambda\sigma_t \right) = \frac{4}{5}\frac{P}{F} - \frac{1}{5}\lambda\sigma_t; \\ N_2 &= \sigma_2 F = \frac{4}{5}P - \frac{1}{5}\lambda N_t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Можно проверить, что выражения (3.12) и (3.13) также удовлетворяют уравнению равновесия.

Примем  $\sigma_{\max} = k\sigma_t$ , где  $k > 1$ . Поскольку  $N_2 > N_1$ , будем определять максимальную нагрузку  $P_{\max}$  из условия

$$N_{2\max} = \frac{4}{5}P_{\max} - \frac{1}{5}\lambda N_t,$$

где

$$N_{2\max} = \sigma_{2\max} F = k\sigma_t F = kN_t. \quad (3.14)$$

Таким образом, имеем

$$P_{\max} = \frac{5}{4}N_t \left( k + \frac{1}{5}\lambda \right). \quad (3.15)$$

Усилие в стержне 1 при максимальной нагрузке будет равно

$$N_1 = N_{1\max} = \frac{2}{5}P_{\max} + \frac{2}{5}\lambda N_t. \quad (3.16)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть  $E_t/E = 0,1$ , тогда с учётом (3.8)

$$\lambda = 1 - \frac{E_t}{E} = 1 - 0,1 = 0,9;$$

$$P_2 = \frac{5 - 2\lambda}{2} N_t = \frac{5 - 2 \cdot 0,9}{2} N_t = \frac{8}{5} N_t.$$

При  $P_1 < P < P_2$  согласно (3.9) и (3.10)

$$N_1 = \frac{2P - 2\lambda N_t}{5 - 4\lambda} = \frac{2P - 2 \cdot 0,9 N_t}{5 - 4 \cdot 0,9} = \frac{10}{7} P - \frac{9}{7} N_t;$$

$$N_2 = \frac{4P(1 - \lambda) + \lambda N_t}{5 - 4\lambda} = \frac{4P(1 - 0,9) + 0,9 N_t}{5 - 4 \cdot 0,9} = \frac{2}{7} P + \frac{9}{14} N_t.$$

Используя данные выражения, найдём усилия в характерных точках.

При  $P = P_1 = \frac{5}{4} N_t$

$$N_1(P_1) = \frac{10}{7} \cdot \frac{5}{4} N_t - \frac{9}{7} N_t = \frac{N_t}{2};$$

$$N_2(P_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{4} N_t + \frac{9}{14} N_t = N_t.$$

При  $P = P_2 = \frac{8}{5} N_t$

$$N_1(P_2) = \frac{10}{7} \cdot \frac{8}{5} N_t - \frac{9}{7} N_t = N_t;$$

$$N_2(P_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{8}{5} N_t + \frac{9}{14} N_t = 1,1 N_t.$$

Примем  $k = 1,2$ . Тогда согласно (3.14)...(3.16)

$$P_{\max} = \frac{5}{4} N_t \left( k + \frac{1}{5} \lambda \right) = \frac{5}{4} N_t \left( 1,2 + \frac{1}{5} \cdot 0,9 \right) = 1,725 N_t;$$

$$N_{2\max} = k N_t = 1,2 N_t;$$

$$N_{1\max} = \frac{2}{5} \cdot 1,725 N_t + \frac{2}{5} \cdot 0,9 N_t = 1,05 N_t.$$

Зависимости усилий в стержнях от внешней нагрузки показаны на рисунке 3.3.

*Пример 2:* Стержневая система из предыдущего примера нагружена силой  $P_{\max}$ . Определить остаточные усилия и деформации в стержнях после снятия этой нагрузки.

Согласно теореме о разгрузке, доказанной А.А. Ильюшиным, остаточные усилия  $N'_1, N'_2$  и остаточные удлинения  $\delta'_1, \delta'_2$  стержней определяются соотношениями

$$N'_1 = N_1 - N_1^0; \quad N'_2 = N_2 - N_2^0;$$

$$\delta'_1 = \delta_1 - \delta_1^0; \quad \delta'_2 = \delta_2 - \delta_2^0,$$

где  $N_1, N_2, \delta_1, \delta_2$  – усилия и удлинения стержней 1 и 2, найденные с учётом их работы за пределами упругости;  $N_1^0, N_2^0, \delta_1^0, \delta_2^0$  – усилия и удлинения, полученные в предположении, что вся приложенная к системе нагрузка воспринимается ею упруго.

При  $P = P_{\max} = 1,725N_t$  из предыдущего примера имеем

$$N_1 = 1,05N_t; \quad N_2 = 1,2N_t.$$

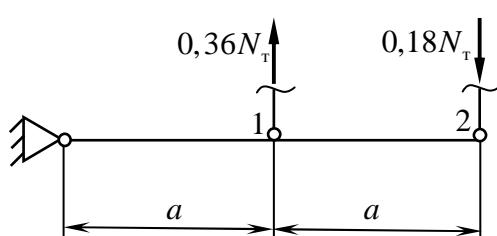
При упругом восприятии заданной нагрузки согласно (3.5)

$$N_1 = \frac{2}{5}P_{\max} = \frac{2}{5} \cdot 1,725N_t = 0,69N_t; \quad N_2 = \frac{4}{5}P_{\max} = 1,38N_t.$$

Теперь можно найти остаточные усилия в стержнях:

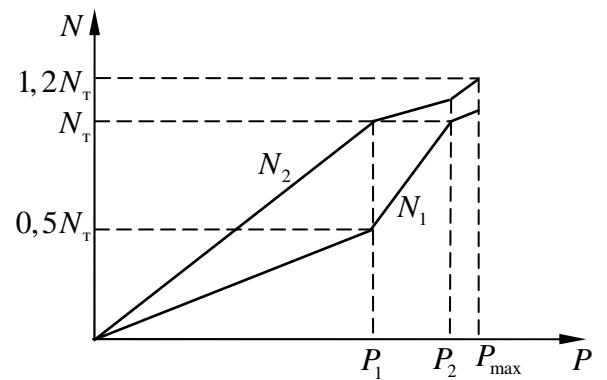
$$N'_1 = N_1 - N_1^0 = 1,05N_t - 0,69N_t = 0,36N_t;$$

$$N'_2 = N_2 - N_2^0 = 1,2N_t - 1,38N_t = -0,18N_t.$$



**Рисунок 3.4 – Остаточные усилия в стержнях системы**

Для стержня 1 имеем



**Рисунок 3.3 – Изменение усилий в стержнях системы**

Под действием остаточных усилий система в целом находится в равновесии (рисунок 3.4).

Обратимся далее к определению удлинений стержней. Нагрузка  $P_{\max}$  вызывает деформацию в обоих стержнях за пределами упругости.

$$\sigma_1 = \lambda \sigma_{\text{т}} + E_{\text{т}} \varepsilon_1,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \lambda \sigma_{\text{т}}}{E_{\text{т}}} = \frac{N_1 - \lambda N_{\text{т}}}{E_{\text{т}} F} = \frac{N_1 - \lambda N_{\text{т}}}{EF(1-\lambda)} = \frac{1,05N_{\text{т}} - 0,9N_{\text{т}}}{EF(1-0,9)} = 1,5 \frac{N_{\text{т}}}{EF}.$$

Определяем удлинения стержней:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 l = 1,5 \frac{N_{\text{т}} l}{EF}; \quad \delta_2 = 2\delta_1 = 3 \frac{N_{\text{т}} l}{EF}.$$

Найдём теперь удлинения стержней в предположении упругого восприятия нагрузки  $P_{\max}$ :

$$\delta_1^0 = \frac{N_1^0 l}{EF} = 0,69 \frac{N_{\text{т}} l}{EF}; \quad \delta_2^0 = \frac{N_2^0 l}{EF} = 1,38 \frac{N_{\text{т}} l}{EF}.$$

Тогда остаточные удлинения будут равны

$$\delta'_1 = \delta_1 - \delta_1^0 = (1,5 - 0,69) \frac{N_{\text{т}} l}{EF} = 0,81 \frac{N_{\text{т}} l}{EF};$$

$$\delta'_2 = \delta_2 - \delta_2^0 = (3 - 1,38) \frac{N_{\text{т}} l}{EF} = 1,62 \frac{N_{\text{т}} l}{EF}.$$

Отметим, что остаточные напряжения и деформации не связаны законом Гука.

*Пример 3:* Плоская статически определимая ферма нагружена силой  $P$  (рисунок 3.5). Определить остаточные напряжения и деформации после снятия этой нагрузки.

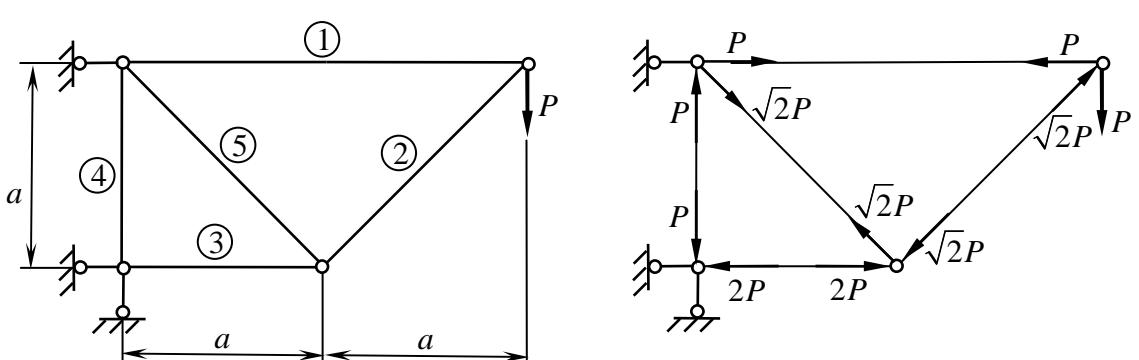


Рисунок 3.5 – Плоская статически определимая ферма

Поскольку рассматриваемая ферма является статически определимой, усилия в стержнях легко находятся из уравнений равновесия узлов (см. рисунок 3.5):

$$N_1 = P; \quad N_2 = -\sqrt{2}P; \quad N_3 = -2P; \quad N_4 = -P; \quad N_5 = \sqrt{2}P.$$

Тогда для напряжений получим

$$\sigma_1 = \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 = -\sqrt{2} \frac{P}{F}; \quad \sigma_3 = -2 \frac{P}{F}; \quad \sigma_4 = -\frac{P}{F}; \quad \sigma_5 = \sqrt{2} \frac{P}{F}.$$

Будем считать, что материал стержней фермы обладает линейным упрочнением.

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_1 &< \sigma_t; \quad |\sigma_4| < \sigma_t; \\ |\sigma_2| &> \sigma_t; \quad |\sigma_3| > \sigma_t; \quad \sigma_5 > \sigma_t, \end{aligned}$$

т.е. стержни 1 и 4 работают упруго, а стержни 2, 3 и 5 – за пределами упругости. Полагаем также, что сжатые стержни не теряют устойчивости.

Если снять нагрузку, то во всех стержнях усилия будут нулевыми, так как система статически определима. При этом стержни 1 и 4 восстановят свою длину, а в стержнях 2, 3 и 5 будут пластические (остаточные) деформации.

Рассмотрим стержень 5. Его полную деформацию, которая определяется по диаграмме растяжения (рисунок 3.6), можно представить в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon^{(5)} = \varepsilon_e^{(5)} + \varepsilon_p^{(5)},$$

где

$$\varepsilon_e^{(5)} = \frac{\sigma^{(5)}}{E}.$$

Тогда

$$\varepsilon_p^{(5)} = \varepsilon^{(5)} - \varepsilon_e^{(5)} = \varepsilon^{(5)} - \frac{\sigma^{(5)}}{E}.$$

Остаточное удлинение стержня 5 находится как

$$\delta^{(5)} = \varepsilon_p^{(5)} l^{(5)},$$

где  $l^{(5)}$  – длина стержня 5.

Аналогично можно рассмотреть стержни 2 и 3.

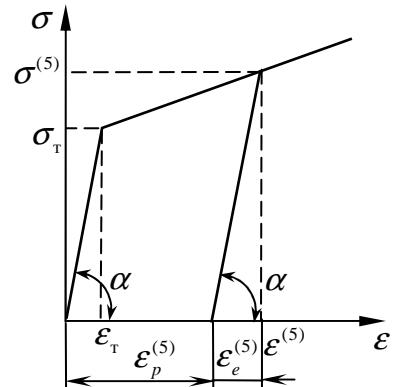


Рисунок 3.6 – Диаграмма для стержня 5

## 4 ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотрим изгиб балки прямоугольного поперечного сечения под действием одного лишь изгибающего момента  $M$  (рисунок 4.1).

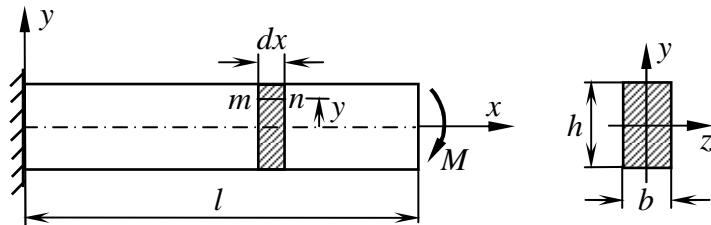


Рисунок 4.1 – Чистый изгиб балки

Будем считать, что и за пределами упругости справедлива кинематическая гипотеза плоских сечений, применяемая в сопротивлении материалов для расчёта балок.

Рассмотрим элемент балки длиной  $dx$  до деформации и после (рисунок 4.2). Согласно принятой гипотезе после деформации оба его сечения остаются плоскими, и справедлива формула

$$\varepsilon = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{y}{\rho}, \quad (4.1)$$

где  $1/\rho$  – кривизна изогнутой оси балки.

Примем, что материал балки не обладает упрочнением, и для него можно воспользоваться диаграммой растяжения Прандтля (рисунок 1.5). При этом распределения деформаций и напряжений по сечению в зависимости от момента будут иметь вид, как показано на рисунке 4.3.

Рассмотрим упругое поведение балки, когда  $M < M_t^*$ . В этом случае максимальные напряжения меньше предела текучести материала, и справедлив закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon$$

или с учётом (4.1)

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (4.2)$$

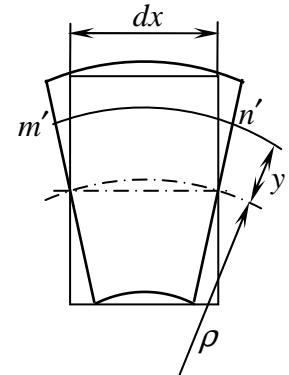
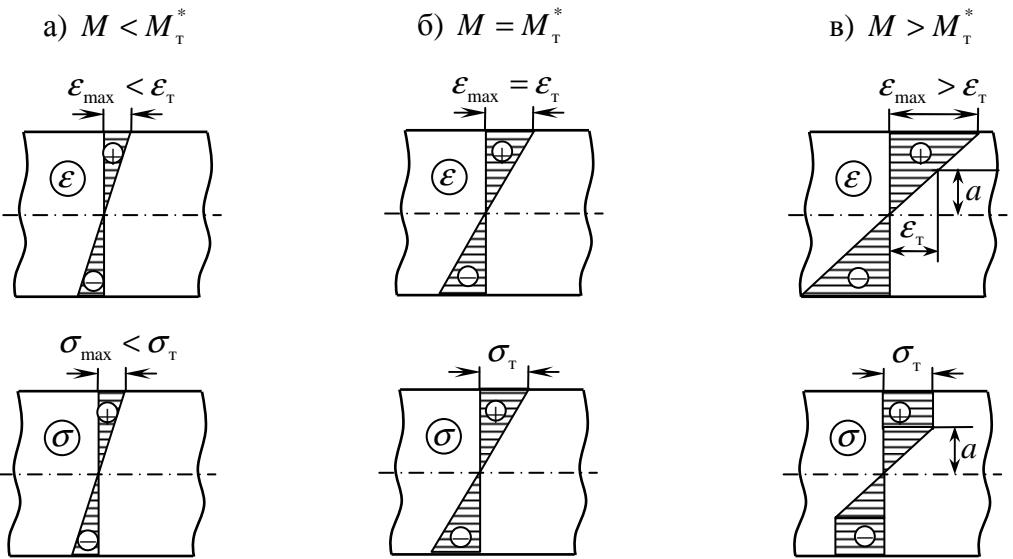


Рисунок 4.2 – Деформация элемента



**Рисунок 4.3 – Распределение деформаций и напряжений по сечению**

Подсчитаем изгибающий момент:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{\rho} y^2 b dy = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{h^3}{12} b = \frac{E}{\rho} I,$$

где  $I = bh^3/12$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси  $z$ .

Тогда

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} \quad \text{и} \quad \sigma = \frac{M}{I} y. \quad (4.3)$$

При этом максимальное напряжение будет равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} y_{\max} = \frac{M}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2}.$$

При  $M = M_t^*$  имеем  $\sigma_{\max} = \sigma_t$ :

$$\sigma_t = \frac{6M_t^*}{bh^2} \quad \text{или} \quad M_t^* = \sigma_t \frac{bh^2}{6}. \quad (4.4)$$

Определим напряжения при  $M > M_t^*$ . Для этого снова подсчитаем изгибающий момент, учитывая иной характер распределения напряжений (см. рисунок 4.3,в):

$$M = \sigma_t \frac{b(2a)^2}{6} + 2\sigma_t b \left( \frac{h}{2} - a \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + a \right) = \sigma_t \frac{2ba^2}{3} + \sigma_t b \left( \frac{h^2}{4} - a^2 \right) =$$

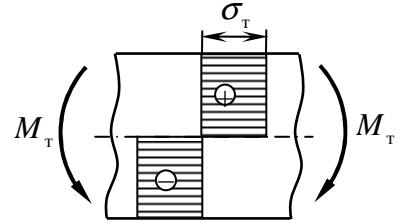
$$= -\sigma_t \frac{ba^2}{3} + \sigma_t b \frac{h^2}{4}$$

или

$$M = \sigma_t \frac{bh^2}{4} \left( 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \right). \quad (4.5)$$

Здесь  $2a$  – размер упругого ядра балки. В предельном состоянии эпюра напряжений имеет вид, показанный на рисунке 4.4. Полагая в (4.5)  $a = 0$ , найдём предельный изгибающий момент для балки, который обозначим через  $M_t$ :

$$M_t = \sigma_t \frac{bh^2}{4}. \quad (4.6)$$



**Рисунок 4.4 – Предельный момент**

Отметим, что предельный момент не зависит от нагрузки. Это свойство сечения и материала.

С учётом (4.6) выражение (4.5) примет вид

$$M = M_t \left( 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \right). \quad (4.7)$$

При  $M_t^* < M < M_t$  имеем

$$\frac{M}{M_t} = 1 - \frac{4a^2}{3h^2} \quad \text{или} \quad \frac{4a^2}{3h^2} = 1 - \frac{M}{M_t},$$

откуда

$$a = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M_t} \right)}. \quad (4.8)$$

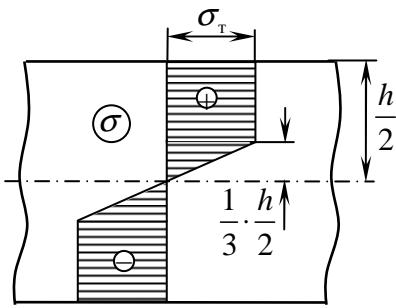
Итак, мы имеем два характерных момента  $M_t^*$  и  $M_t$ . При действии первого момента напряжения достигают  $\sigma_t$  только в крайних волокнах, а при действии второго момента во всех волокнах напряжения равны  $\sigma_t$ . Сравним эти значения. Согласно (4.4) и (4.6)

$$\frac{M_t}{M_t^*} = \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = \frac{3}{2}. \quad (4.9)$$

Если известно значение  $M$ , то по формуле (4.8) может быть определён размер упругого ядра сечения балки.

Пусть  $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}$ . Используя (4.7), найдём момент

$$M = M_{\text{т}} \left( 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{h^2} \right) = M_{\text{т}} \left( 1 - \frac{1}{27} \right) = \frac{26}{27} M_{\text{т}}.$$



**Рисунок 4.5 – Эпюра напряжений**

Соответствующая эпюра напряжений представлена на рисунке 4.5.

После снятия этого момента в балке будут остаточные напряжения  $\sigma'$ . Определим их по теореме о разгрузке:

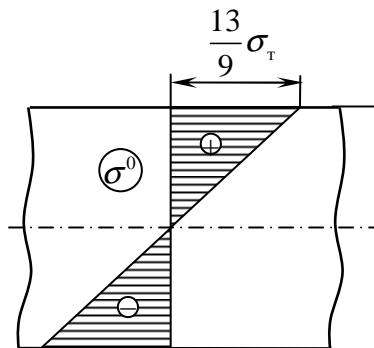
$$\sigma' = \sigma - \sigma^0, \quad (4.10)$$

где  $\sigma^0$  – напряжения в сечении балки, возникающие в предположении, что момент  $M$  вос-

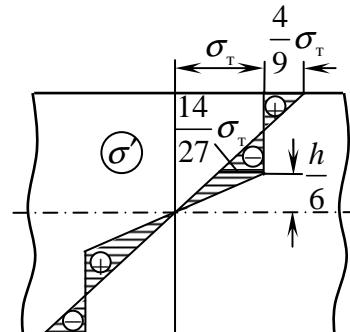
принимается упруго:

$$\sigma^0 = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_{\max}^0 = \frac{M}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6}{bh^2} \cdot \frac{26}{27} M_{\text{т}} = \frac{6}{bh^2} \cdot \frac{26}{27} \cdot \frac{bh^2}{4} \sigma_{\text{т}} = \frac{13}{9} \sigma_{\text{т}}.$$

На рисунке 4.6 показана эпюра напряжений  $\sigma^0$ , а на рисунке 4.7 изображено распределение остаточных напряжений, рассчитанных по формуле (4.10). Напряжения  $\sigma'$  являются самоуравновешенными.



**Рисунок 4.6 – Линейное решение**



**Рисунок 4.7 – Эпюра остаточных напряжений**

Определим перемещения  $v$  точек оси балки (рисунок 4.8). Поскольку при  $y = a$  деформация  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}}/E$ , то согласно формуле (4.1)

$$\frac{\sigma_t}{E} = \frac{a}{\rho} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_t}{Ea}.$$

При малых углах поворота кривизна балки выражается как

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2},$$

откуда

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\sigma_t}{Ea}. \quad (4.11)$$

Первое интегрирование данного уравнения даёт

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_t}{Ea}x + C_1.$$

В заделке при  $x=0$  угол поворота  $\frac{dv}{dx}=0$  и, следовательно,  $C_1=0$ . Интегрируя далее, получим

$$v = \frac{\sigma_t}{Ea} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Поскольку при  $x=0$  перемещение  $v=0$ , то и  $C_2=0$ . Тогда

$$v = \frac{\sigma_t}{2Ea} x^2, \quad (4.12)$$

где  $a$  находится по формуле (4.8).

При этом максимальный прогиб равен

$$v(l) = f = \frac{\sigma_t}{2Ea} l^2. \quad (4.13)$$

В линейной упругой постановке имеем

$$\frac{d^2v^0}{dx^2} = \frac{M}{EI}; \quad \frac{dv^0}{dx} = \frac{M}{EI}x; \quad v^0 = \frac{M}{2EI}x^2.$$

Также определяем максимальный прогиб при упругом восприятии момента:

$$v^0(l) = f^0 = \frac{M}{2EI}l^2. \quad (4.14)$$

И, наконец, находим остаточный прогиб

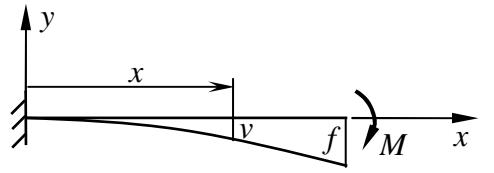


Рисунок 4.8 – Деформация балки

$$f' = f - f^0 = \frac{\sigma_t}{2Ea} l^2 - \frac{M}{2EI} l^2. \quad (4.15)$$

*Пример:*

$$M = \frac{26}{27} M_t; h = 10 \text{ см}; b = 5 \text{ см}; l = 60 \text{ см}; E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \sigma_t = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда согласно (4.4) и (4.6)

$$M_t^* = \sigma_t \frac{bh^2}{6} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{6} = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_t = \sigma_t \frac{bh^2}{4} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{4} = 33,75 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

откуда

$$M = \frac{26}{27} M_t = \frac{26}{27} \cdot 33,75 = 32,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Поскольку

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2},$$

то по формуле (4.13)

$$f = \frac{\sigma_t}{2Ea} l^2 = \frac{270 \cdot 600^2 \cdot 6}{2 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 100} = 40,5 \text{ мм}.$$

Находим момент инерции поперечного сечения балки

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 4,1667 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Согласно (4.14)

$$f^0 = \frac{M}{2EI} l^2 = \frac{32,5 \cdot 10^6 \cdot 600^2}{2 \cdot 7,2 \cdot 10^4 \cdot 4,1667 \cdot 10^6} = 19,5 \text{ мм}.$$

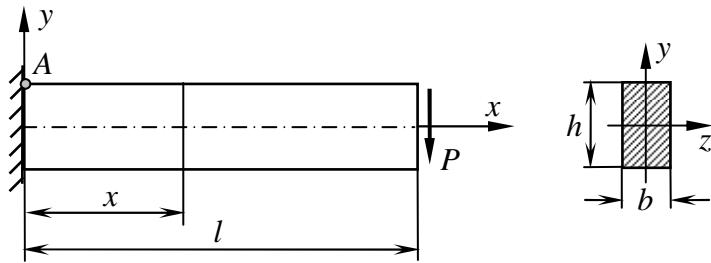
И, наконец, по формуле (4.15) определяем остаточный прогиб:

$$f' = f - f^0 = 40,5 - 19,5 = 21 \text{ мм}.$$

Полученное здесь решение можно обобщить и на случай более общего нагружения балки.

## 5 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ИЗ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА СИЛОЙ НА КОНЦЕ

Рассмотрим консольную балку (рисунок 5.1). Будем считать, что материал балки также не обладает упрочнением.



**Рисунок 5.1 – Консольная балка**

Решим сначала задачу в предположении, что сила воспринимается упруго. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M}{I} y; & M &= P(l-x); & I &= \frac{bh^3}{12}; \\ \sigma &= \frac{12P(l-x)}{bh^3} y.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Максимальные напряжения, очевидно, будут в заделке ( $x=0$ ) при  $y=\pm h/2$ . Так, например, для точки А получим

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(0, \frac{h}{2}\right) = \frac{12Pl}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{6Pl}{bh^2}.$$

По мере роста нагрузки напряжение в данной точке в первую очередь достигнет предела текучести. Пусть при  $P=P_t^*$  максимальное напряжение  $\sigma_{\max} = \sigma_t$ . Определим эту силу, воспользовавшись предыдущим выражением,

$$\sigma_t = \frac{6P_t^*l}{bh^2} \quad \text{или} \quad P_t^* = \frac{bh^2}{6l} \sigma_t.\tag{5.2}$$

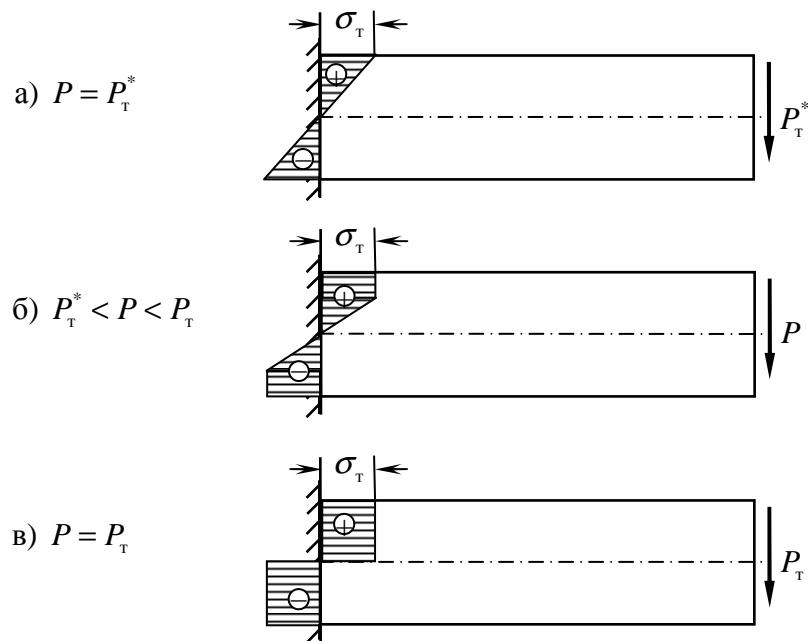
Введём обозначение

$$M_t^* = \frac{bh^2}{6} \sigma_t,$$

тогда

$$P_{\text{т}}^* = \frac{M_{\text{т}}^*}{l}.$$

При дальнейшем росте внешней нагрузки напряжение  $\sigma_{\text{т}}$  будет проникать вглубь сечения (рисунок 5.2), а также идти вправо вдоль оси  $x$ . Пусть при  $P = P_{\text{т}}$  напряжение на нейтральной оси в сечении у заделки достигает предела текучести, т.е. всё сечение начинает работать за пределами упругости. Принято говорить, что в данном сечении возникает пластический шарнир. Это предельное состояние для балки, поскольку она превращается в механизм, и дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.



**Рисунок 5.2 – Изменение напряжений в сечении у заделки**

Определим предельную силу. Имеем

$$P_{\text{т}} = \frac{M_{\text{т}}}{l},$$

где в соответствии с рисунком 5.2, в предельный момент равен

$$M_{\text{т}} = \frac{bh^2}{4} \sigma_{\text{т}}.$$

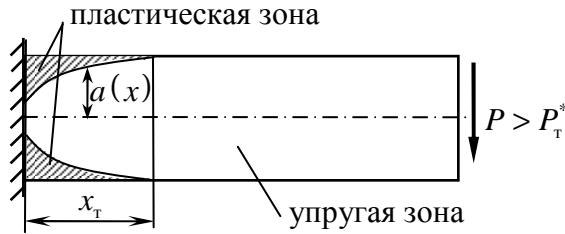
Тогда

$$P_{\text{т}} = \frac{bh^2}{4l} \sigma_{\text{т}}. \quad (5.3)$$

Используя (5.2) и (5.3), сопоставим силы  $P_t^*$  и  $P_t$ :

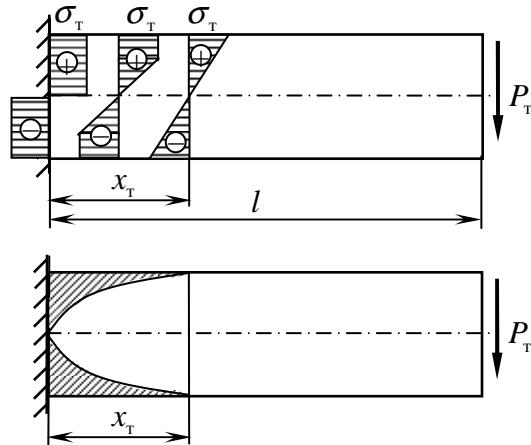
$$\frac{P_t}{P_t^*} = \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad P_t = \frac{3}{2} P_t^*. \quad (5.4)$$

При  $P > P_t^*$  в балке можно выделить две области: упругую и пластическую (рисунок 5.3).



**Рисунок 5.3 – Конфигурация пластической области**

При  $P = P_t$  в заделке имеет место предельное состояние. При удалении от неё распределение напряжений будет иным (рисунок 5.4).



**Рисунок 5.4 – Изменение напряжений по длине балки**

Найдём размер упругопластического участка  $x_t$  из условия, что в крайних волокнах соответствующего сечения ( $x = x_t$ ) напряжения достигают предела текучести. Используя (5.1), запишем

$$\sigma\left(x_t, \frac{h}{2}\right) = \frac{12P_t(l - x_t)}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_t,$$

откуда

$$l - x_{\text{т}} = \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\text{т}}}{P_{\text{т}}} = \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\text{т}}}{\frac{bh^2}{4l} \sigma_{\text{т}}} = \frac{2}{3} l;$$

$$x_{\text{т}} = \frac{1}{3} l.$$

При  $P < P_{\text{т}}$  это размер будет меньше. Действительно,

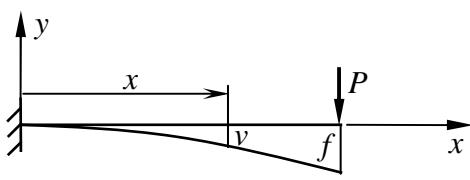
$$\begin{aligned} \sigma\left(x_{\text{т}}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{6P(l - x_{\text{т}})}{bh^2} = \sigma_{\text{т}}; \\ l - x_{\text{т}} &= \frac{bh^2}{6} \frac{\sigma_{\text{т}}}{P} = \frac{M_{\text{т}}^*}{P}; \\ x_{\text{т}} &= l - \frac{M_{\text{т}}^*}{P} = l - \frac{2M_{\text{т}}}{3P} = l - \frac{2P_{\text{т}}}{3P}l = l\left(1 - \frac{2P_{\text{т}}}{3P}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что при  $P < P_{\text{т}}$  размер  $x_{\text{т}} < l/3$ .

Найдём границы между упругой и пластической областями. Согласно (4.8) имеем

$$a(x) = \frac{h}{2} \sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M_{\text{т}}}\right)} = \frac{h}{2} \sqrt{3\left[1 - \frac{P(l-x)}{P_{\text{т}}l}\right]} = \frac{h}{2} \sqrt{3\left[1 - \frac{P}{P_{\text{т}}}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]} \quad (0 \leq x \leq x_{\text{т}}). \quad (5.6)$$

Из этой формулы следует, что границы упругой и пластической областей являются квадратными параболами.



Перейдём к определению перемещений балки (рисунок 5.5).

На упругопластическом участке ( $0 \leq x \leq x_{\text{т}}$ ) согласно (4.11) имеем

**Рисунок 5.5 – Деформация балки**

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{Ea}$$

или

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{2\sigma_{\text{т}}}{Eh\sqrt{3\left[1 - \frac{P(l-x)}{M_{\text{т}}}\right]}} = \kappa_1. \quad (5.7)$$

Для упругого участка ( $x_{\text{т}} \leq x \leq l$ )

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P(l-x)}{EI} = K_2. \quad (5.8)$$

Таким образом,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = K = \begin{cases} K_1, & 0 \leq x \leq x_t \\ K_2, & x_t \leq x \leq l \end{cases}.$$

Проинтегрируем данное выражение:

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^x K dx = \vartheta = \begin{cases} \vartheta_1, & 0 \leq x \leq x_t \\ \vartheta_2, & x_t \leq x \leq l \end{cases},$$

где

$$\vartheta_1 = \int_0^{x_t} K_1 dx; \quad \vartheta_2 = \vartheta_1(x_t) + \int_{x_t}^x K_2 dx. \quad (5.9)$$

Интегрируя далее, получим выражение для прогиба:

$$v = \int_0^x \vartheta dx = \begin{cases} v_1, & 0 \leq x \leq x_t \\ v_2, & x_t \leq x \leq l \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_0^x \vartheta_1 dx; \\ v_2 &= v_1(x_t) + \int_{x_t}^x \vartheta_2 dx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Примерный вид графиков этих функций показан на рисунке 5.6.

*Пример:*

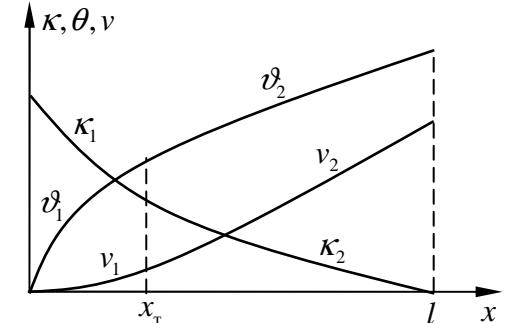


Рисунок 5.6 – Графики функций

$$h = 10 \text{ см}; b = 5 \text{ см}; l = 80 \text{ см}; E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \sigma_t = 270 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$EI = E \frac{bh^3}{12} = 7,2 \cdot 10^4 \cdot \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 3 \cdot 10^{11} \text{ мм}^4;$$

$$M_t^* = \sigma_t \frac{bh^2}{6} = 270 \cdot \frac{50 \cdot 100^2}{6} = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_t = \frac{3}{2} M_t^* = \frac{3}{2} \cdot 22,5 = 33,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P_{\text{т}}^* = \frac{M_{\text{т}}^*}{l} = \frac{22,5 \cdot 10^6}{800} = 28125 \text{ Н};$$

$$P_{\text{т}} = \frac{3}{2} P_{\text{т}}^* = \frac{3}{2} \cdot 28125 = 42188 \text{ Н.}$$

Для определённости примем, что размер пластического ядра в сечении у заделки составляет  $h/3$ , т.е.

$$a(0) = \frac{h}{6}.$$

При этом согласно (4.7) и (5.5)

$$\begin{aligned} P &= \frac{M(0)}{l} = \frac{M_{\text{т}}}{l} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{(a(0))^2}{h^2} \right) = \frac{M_{\text{т}}}{l} \left( 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{h^2}{36} \frac{1}{h^2} \right) = \\ &= \frac{26 M_{\text{т}}}{27 l} = \frac{26}{27} \cdot \frac{33,75 \cdot 10^6}{800} = 40625 \text{ Н}; \\ x_{\text{т}} &= l \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{P_{\text{т}}}{P} \right) = 800 \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{42188}{40625} \right) = 246,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

По формулам (5.7) и (5.8) вычисляем значения кривизны оси балки. Интегрирование выражений (5.9) и (5.10) выполняем численно по методу трапеций. Результаты расчётов представлены в таблицах 5.1 и 5.2.

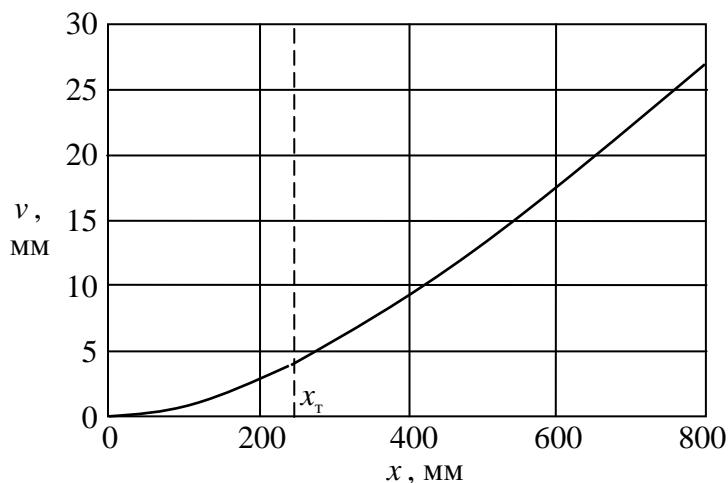
**Таблица 5.1 – Вычисление значений кривизны оси балки**

$\frac{x}{x_{\text{т}}}$	$x$ , мм	$\kappa_1 \cdot 10^5$ , 1/мм	$\frac{x - x_{\text{т}}}{l - x_{\text{т}}}$	$x$ , мм	$\kappa_2 \cdot 10^5$ , 1/мм
0	0	22,5	0	246,2	7,500
0,2	49,23	13,95	0,2	356,9	6,000
0,4	98,46	10,98	0,4	467,7	4,500
0,6	147,7	9,343	0,6	578,5	3,000
0,8	196,9	8,271	0,8	689,2	1,500
1,0	246,2	7,500	1,0	800,0	0

**Таблица 5.2 – Вычисление значений прогиба балки**

$\frac{x}{x_{\text{т}}}$	$x$ , мм	$v_1$ , мм	$\frac{x - x_{\text{т}}}{l - x_{\text{т}}}$	$x$ , мм	$v_2$ , мм
0	0	0	0	246,2	3,98
0,2	49,23	0,225	0,2	356,9	7,47
0,4	98,46	0,797	0,4	467,7	11,7
0,6	147,7	1,64	0,6	578,5	16,5
0,8	196,9	2,71	0,8	689,2	21,6
1,0	246,2	3,98	1,0	800,0	27,0

График функции прогиба показан на рисунке 5.7.

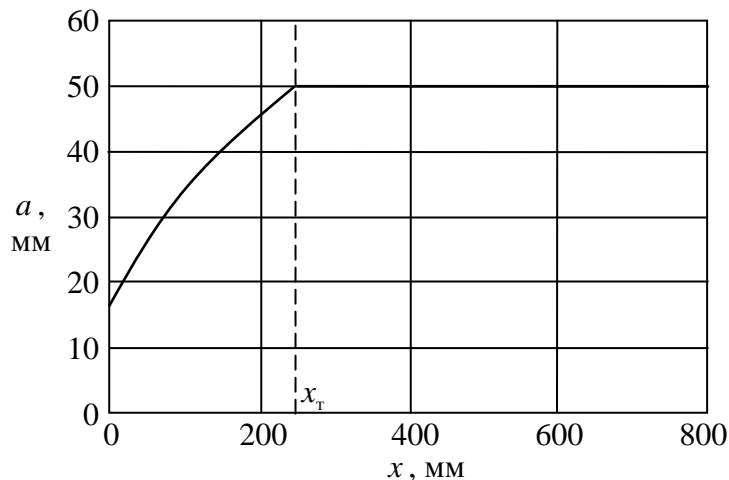


**Рисунок 5.7 – Изменение прогиба по длине балки**

Для сравнения приведём «упругое» решение. Максимальный прогиб в этом случае равен

$$f^0 = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{40625 \cdot 800^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^{11}} = 23,1 \text{ мм.}$$

В заключение, используя формулу (5.6), построим график зависимости  $a(x)$ , описывающий границу между упругой и пластической областями (рисунок 5.8).



**Рисунок 5.8 – Граница между упругой и пластической областями**

## 6 ПРЕДЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ ДЛЯ БАЛКИ С СЕЧЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ОДНУ ОСЬ СИММЕТРИИ

Сечение в виде прямоугольника на практике встречается довольно редко. Оно имеет две оси симметрии. Рассмотрим более общий случай, когда сечение имеет только одну ось симметрии. Будем так же, как и ранее, считать материал неупрочняющимся. Основная сложность расчёта изгиба балок с таким сечением состоит в том, что при возникновении текучести нейтральная линия уже не будет проходить через центр тяжести сечения, как при упругом изгибе (рисунок 6.1).

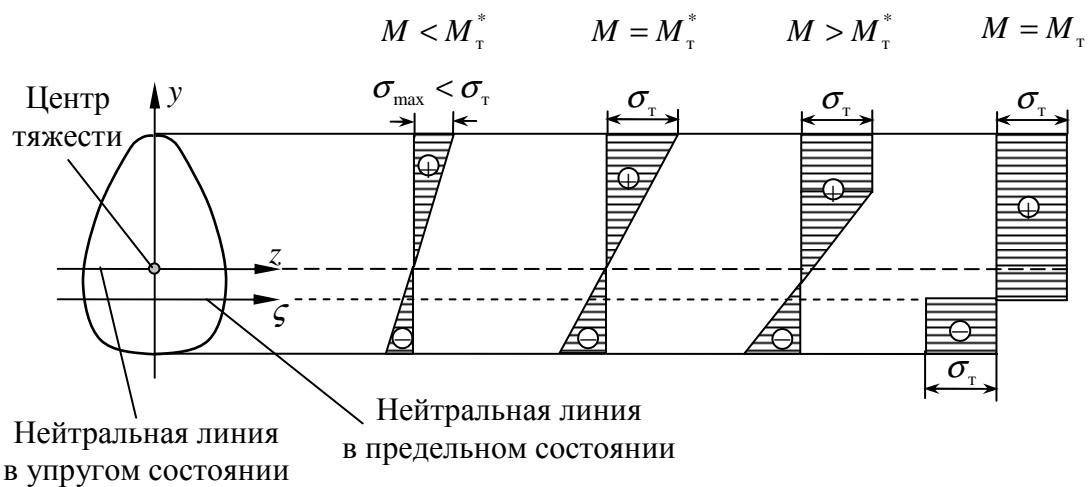


Рисунок 6.1 – Смещение нейтральной оси

Положение нейтральной оси  $\xi$  в предельном состоянии устанавливается из условия равенства нулю нормальной силы:

$$\int_F \sigma dF = 0. \quad (6.1)$$

Обозначим через  $F_p$  площадь растянутой части, а через  $F_{сж}$  площадь сжатой части поперечного сечения. Тогда, учитывая, что в предельном состоянии во всех точках растянутой части напряжения равны  $\sigma_t$ , а во всех точках сжатой части – минус  $\sigma_t$ , из уравнения (6.1) получаем

$$\int_{F_p} \sigma_t dF - \int_{F_{сж}} \sigma_t dF = 0,$$

откуда следует

$$F_p = F_{сж}.$$

Таким образом, нейтральная линия делит площадь поперечного сечения на две равные по площади части (рисунок 6.2). Очевидно, что если сечение имеет две оси симметрии, то в предельном состоянии нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

Определим предельный изгибающий момент (см. рисунок 6.2):

$$M_t = \int_F \sigma \eta dF = \int_{F_p} \sigma_t \eta dF + \int_{F_{cж}} \sigma_t |\eta| dF = \sigma_t \int_{F_p} \eta dF + \sigma_t \int_{F_{cж}} |\eta| dF$$

или

$$M_t = \sigma_t (S_p + |S_{cж}|), \quad (6.2)$$

где  $S_p$  и  $|S_{cж}|$  – абсолютные значения статических моментов соответственно растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии  $\zeta$ .

В частном случае, когда сечение имеет две оси симметрии,

$$S_p = |S_{cж}| = S \quad \text{и} \quad M_t = 2\sigma_t S.$$

Рассмотрим различные формы поперечного сечения изгибаемой балки.

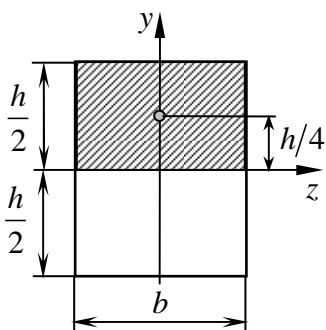


Рисунок 6.3 – Прямоугольник

*Пример 1:* Прямоугольное сечение (рисунок 6.3).

Имеем

$$S = b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}; \quad 2S = \frac{bh^2}{4};$$

$$M_t = 2\sigma_t S = \frac{bh^2}{4} \sigma_t.$$

*Пример 2:* Сечение тонкостенной трубы (рисунок 6.4).

Выделим малый элемент сечения длиной

$$ds = R d\alpha,$$

где  $R$  – радиус средней линии сечения.

Учитывая, что

$$y = R \cos \alpha,$$

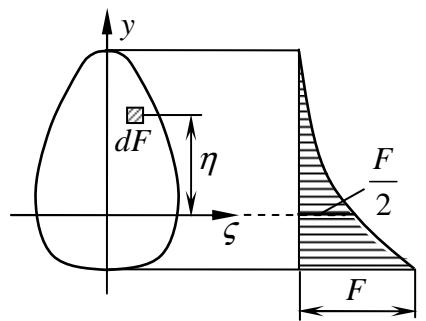


Рисунок 6.2 – График изменения площади

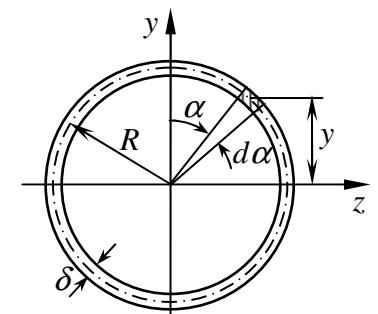
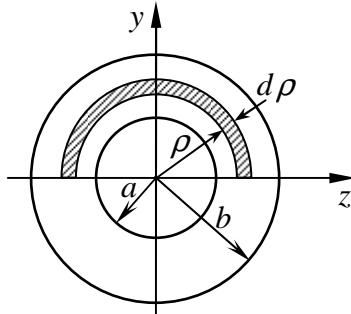


Рисунок 6.4 – Тонкостенная труба

запишем

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} y \delta ds = 2 \int_0^{\pi/2} \delta R^2 \cos \alpha d\alpha = 2\delta R^2 \sin \alpha \Big|_0^{\pi/2} = 2\delta R^2 \quad \text{и} \quad 2S = 4\delta R^2;$$

$$M_{\tau} = 2\sigma_{\tau} S = 4\delta R^2 \sigma_{\tau}.$$



**Рисунок 6.5 – Толстостенная труба**

*Пример 3:* Сечение толстостенной трубы (рисунок 6.5).

Используя результаты предыдущего примера, найдём сначала статический момент полукольца бесконечно малой толщины:

$$dS = 2\rho^2 d\rho.$$

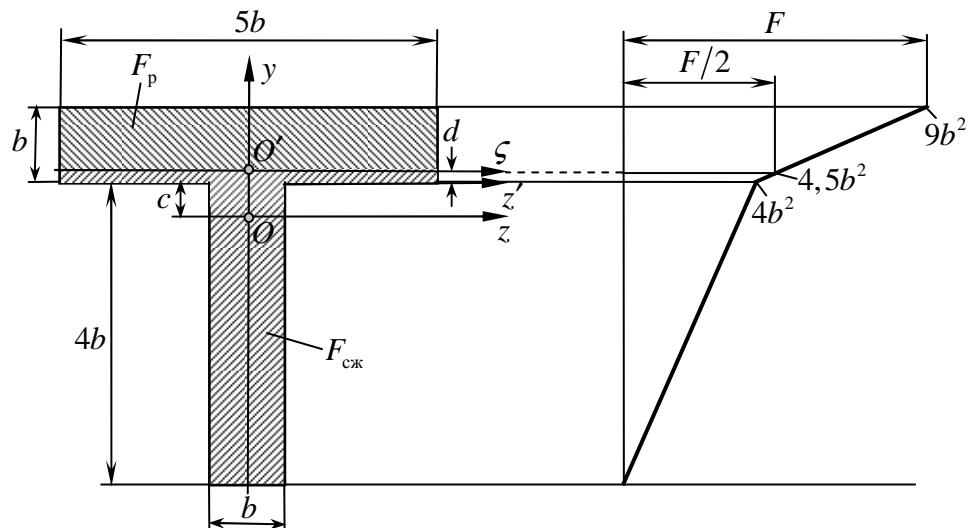
Тогда

$$S = \int_a^b 2\rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \rho^3 \Big|_a^b = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \quad \text{и} \quad 2S = \frac{4}{3} (b^3 - a^3);$$

$$M_{\tau} = 2\sigma_{\tau} S = \frac{4}{3} \sigma_{\tau} (b^3 - a^3).$$

Для круглого сечения, когда  $a=0$ , получаем  $M_{\tau} = \frac{4}{3} \sigma_{\tau} b^3$ .

*Пример 4:* Сечение с одной осью симметрии (рисунок 6.6).



**Рисунок 6.6 – Тавровый профиль**

Площадь сечения равна

$$F = 5b^2 + 4b^2 = 9b^2,$$

тогда

$$F_p = F_{cж} = \frac{F}{2} = 4,5b^2.$$

Определяем положение центра тяжести сечения относительно произвольно выбранной оси  $z'$ :

$$c = \frac{S_{z'}}{F} = \frac{1}{9b^2} (5b^2 \cdot 0,5b - 4b^2 \cdot 2b) = -0,6111b.$$

По графику изменения площади (см. рисунок 6.6) находи размер  $d$ , характеризующий положение нейтральной оси  $\zeta$  в предельном состоянии:

$$d = \frac{4,5b^2 - 4b^2}{9b^2 - 4b^2} b = \frac{0,5b^2}{5b^2} b = 0,1b.$$

Далее определяем статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно оси  $\zeta$ :

$$S_p = 5b \cdot 0,9b \cdot 0,45b = 2,025b^3;$$

$$|S_{cж}| = 4b \cdot b \cdot (2b + 0,1b) + 5b \cdot 0,1b \cdot 0,05b = 8,425b^3.$$

Таким образом,

$$S_p + |S_{cж}| = 2,025b^3 + 8,425b^3 = 10,45b^3$$

и согласно (6.2)

$$M_t = \sigma_t (S_p + |S_{cж}|) = 10,45b^3 \sigma_t.$$