МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры
«Строительство, строительные материалы и конструкции»
«_18_» _января_ 2023 г., протокол №_5_

Заведующий кафедрой

_____ А.А. Трещев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Методы решения краевых задач
механики деформируемого твердого тела»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
08.04.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Теория и проектирование зданий и сооружений

Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080401-04-23

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Теличко В.Г., доцент, к.т.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Введение

Целью практических занятий по дисциплине является изучение алгоритмов решения краевых задач механики деформируемого тела и численных методов, используемых при реализации этих алгоритмов.

Изучение алгоритмов должно сопровождаться усвоением ответов на следующие вопросы:

1. Каковы теоретические основы метода, на базе которого построен алгоритм решения?

2. Как обеспечивается сходимость численной реализации алгоритма?

3. Как обеспечивается точность численной реализации алгоритма?

4. Как связан выбор алгоритма с видом решаемой математической задачи?

Изучение тематики практических занятий проводится в форме *разбора решений* конкретных задач. При этом студент должен быть подготовлен по тематике практического занятия на базе проведенной самостоятельной работы. Для этого им готовится материал для сообщения как минимум по двум темам практических занятий.

Материалы сообщения на практическом занятии представляются в виде презентации, содержащие ответы на сформулированные выше вопросы.

Оформление презентации к сообщению должно обеспечивать:

• указание на источник приводимой информации и конкретное положение соответствующего материала в этом источнике в виде пунктов содержания и страниц, на которых эти пункты следует искать;

• компактную форму с максимальной информационной ёмкостью, что достигается использованием иллюстраций и базисных математических соотношений;

• объём сообщения не может превышать 5-7 слайдов формата A5 (в ландшафтном положении);

• применение материалов доклада в качестве конспекта для углублённого изучения этого материала другими студентами группы;

• передачу материалов доклада другим студентам и преподавателю в формате PDF, обеспечивающим навигацию по пунктам и подпунктам содержания на основе системы закладок.

Качество подготовленных сообщений, выступления с ними на практическом занятии, а также активность участия студента в дискуссии по тематике практических занятий оценивается бальной оценкой (до 12 баллов за семестр).

Тема 1

Методы решения нелинейных алгебраических, трансцендентных уравнений и их систем

Занятие № 1

1.1. Метод простой итерации

Пример Требуется найти корень уравнения

$$f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0 \qquad (1.1)$$

на отрезке $[1;1,1]$.

Приведём заданное уравнение к виду, разрешённому относительно аргумента:

$$x = \varphi(x) = \sqrt[5]{x + 0,2}\,. \qquad (1.2)$$

Проверим условие сходимости:

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{5}(x + 0,2)^{-4/5} = \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 0,173 \\ x = 1,1 \Rightarrow 0,162 \end{cases} < 1\,. \qquad (1.3)$$

В качестве начального значения корня примем левую границу отрезка ($x_1 = 1$) и в соответствии с алгоритмом метода

$$x_{i+1} = \varphi(x_n) = \sqrt[5]{x_i + 0,2},\ i = 1, 2, \ldots \qquad (1.4)$$

получим:.

$$x_2 = \sqrt[5]{1 + 0,2} = 1,0371,\ x_3 = \sqrt[5]{1,0371 + 0,2} = 1,0435,$$

$$x_4 = \sqrt[5]{1,0435 + 0,2} = 1,0445,\ x_5 = \sqrt[5]{1,0445 + 0,2} = 1,0447,$$

$$x_6 = \sqrt[5]{1,0447 + 0,2} = 1,0448,\ x_7 = \sqrt[5]{1,0448 + 0,2} = 1,0448.$$

Таким образом, решением является значение 1,0448.

1.2. Метод Ньютона-Рафсона

Пример Требуется решить уравнение (1.1) методом касательных на том же отрезке.

Для этого приводим его к виду:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 1, 2, \ldots \qquad (1.5)$$

Итерационный процесс (1.5) имеет место при ненулевых значениях производных функции уравнения в точках вычисления, а также при *условии*, что в начальной точке функция уравнения и её вторая производная имеют *одинаковые знаки*.

Проверим значения функции и её производных на концах заданного отрезка:

$$x_1 = 1 \Rightarrow f(1) = -0,2;\quad f'(1) = 3;\quad f''(1) = 20$$

$$x_1 = 1,1 \Rightarrow f(1,1) = 0,31;\quad f'(1) = 6,32;\quad f''(1,1) = 26,6.$$

Таким образом, нужно принять $x_1 = 1,1$.

Алгоритм (1.5) применительно к уравнению (1.1) приобретает вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 - x_i - 0,2}{5x_i^4 - 1},\ i = 1, 2, \ldots . \qquad (1.6)$$

Выполняя вычисления, получим:

$$x_2 = 1,05;\quad x_3 = 1,0448;\quad x_4 = 1,0448.$$

Результат совпадает с предыдущим, однако число итераций меньше.

Занятие № 2

1.3. Применение метода простой итерации к решению систем нелинейных уравнений

Пример Требуется найти положительные корни системы уравнений, исходя из того, что графическим методом определены приближённые значения $x_1 \approx 3,5;\quad y_1 = 2,2$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ f_2(x,y) = x + 1{,}3029\log x - y^2 = 0 \end{cases}. \qquad (1.7)$$

Приведём систему к стандартному для метода простой итерации форме:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x,y) = \left[\frac{1}{2}x(y+5) - \frac{1}{2}\right]^{0,5} \\ y = \varphi_2(x,y) = (x + 1{,}3029\log x)^{0,5} \end{cases}. \qquad (1.8)$$

Для анализа сходимости метода вычислим частные производные введённых вспомогательных функций в малой окрестности решения с радиусом 0,1:

$$max\left(\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|_{x_1 \pm 0,1, y_1 \pm 0,1}\right) = 0{,}53; \quad \left(max\left(\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|_{x_1 \pm 0,1, y_1 \pm 0,1}\right) = 0{,}26;\right)$$

$$max\left(\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|_{x_1 \pm 0,1, y_1 \pm 0,1}\right) = 0{,}42; \quad max\left(\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|_{x_1 \pm 0,1, y_1 \pm 0,1}\right) = 0.$$

Вычисляем критерий сходимости процесса:

$$\sum_{j=1}^{2} max\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|, i = 1,2 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{2} max\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right| = 0{,}95 < 1 \\ \sum_{j=1}^{2} max\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right| = 0{,}26 < 1 \end{cases}$$

Таким образом, последовательные приближения решения не выйдут за пределы *назначенной малой* окрестности.

Вычисления с учётом (1.8) проводим по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(\boldsymbol{x}_i^{(k)}),\ i = 1, 2;\ k = 1, 2, \ldots . \qquad (1.9)$$

Результаты вычислений сводим в таблицу 1.

Таблица 1.1. Результаты простых итераций решения системы уравнений (1.7)

k	$x_1^{(k)} = x^{(k)}$	$x_2^{(k)} = y^{(k)}$
1	3,5	2,2
2	3,4837	2,2589
3	3,4848	2,2605
4	3,4858	2,2608
5	3,4864	2,2611
6	3,4868	2,2613
7	3,4870	2,2614
8	3,4872	2,2615
9	3,4873	2,2616
10	3,4874	2,2616
11	3,4874	2,2616

Таким образом, уточнённым решением являются значения 10-й итерации. Если ограничиться *четырьмя* значащими цифрами, то итерации можно было бы прекратить на 8-м шаге, приняв значения (3,487; 2,262).

Домашнее задание

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \\ f_2(x, y) = x + 3\log x - y^2 = 0 \end{cases} \qquad (1.10)$$

с начальным приближением (3,7;2,7).

Обратить внимание на значения критериев сходимости и скорость сходимости процесса итераций.

1.4. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Пример

Требуется уточнить решение системы двух нелинейных уравнений при наличии приближённого решения со значениями $x_1 = 0{,}4;\quad y_1 = 0{,}9$:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}. \qquad (1.11)$$

Алгоритм метода включает итерации по решению системы уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}^{(k)})}{\partial x_j}(x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = -f_i(\boldsymbol{x}^{(k)}), \qquad (1.12)$$

$$i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Применительно к системе (1.11) система (1.12) имеет вид:

$$\begin{aligned} &(8x^{(k)} + 2y^{(k)})\Delta x^{(k)} + (2y^{(k)} + 2x^{(k)} - 1)\Delta y^{(k)} = \\ &\quad = -(4x^{(k)2} + y^{(k)2} + 2x^{(k)}y^{(k)} - y^{(k)} - 2); \\ &(4x^{(k)} + 3y^{(k)})\Delta x^{(k)} + (3x^{(k)} + 2y^{(k)})\Delta y^{(k)} = \\ &\quad = -(2x^{(k)2} + 3x^{(k)}y^{(k)} + y^{(k)2} - 3). \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Располагая приближением $x^{(1)} = 0{,}4;\quad y^{(1)} = 0$, получим систему уравнения для определения добавок к этим значения, а вместе с ними – и следующее приближение решения:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)},\ i = 1, 2 \qquad (1.14)$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы:

Table 1.1 Реализация метода Ньютона для системы нелинейных уравнений

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$a_{11}^{(k)}$	$a_{12}^{(k)}$	$a_{21}^{(k)}$	$a_{22}^{(k)}$	$b_1^{(k)}$	$b_2^{(k)}$	$\Delta x_1^{(k)}$	$\Delta x_1^{(k)}$
1	0.4	0.9	5.0	1.6	4.3	3.0	-0.73	-0.79	0.11404	0.099877
2	0.51404	0.99988	6.1121	2.0278	5.0558	3.5419	0.084785	0.070169	-0.013865	-0.019579
3	0.50017	0.99986	6.0011	2.0001	5.0003	3.5002	7.4009e-4	3.6001e-4	-1.6997e-4	1.13996e-4
4	0.5	1.00000	6.0	2.0	5.0	3.5	0	0	0	0
5	0.5	1.0								

Как следует из приведенных данных (Таблица 1.1.), процесс итераций сходится.

Домашнее задание

Проверить критерий сходимости процесса итераций

$$M^2 L \delta n^2 \le 0{,}5\,. \tag{1.15}$$

В выражении (1.15) использованы обозначения:

$$M \ge \max_i \sum_{j=1}^{2} \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^{-1} \Big|_{\boldsymbol{x}_1} \right|; \qquad L \ge \max \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2} \Big|_{\boldsymbol{x}_1} \right|; \quad \delta \ge \left| f_i(\boldsymbol{x}_1) \right|; \quad n = 2; \tag{1.16}$$

ТЕМА
2
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Занятие № 4

2.1. Метод сеток для решения уравнений в частных производных

Пример

Требуется решить уравнение (изгиб плиты):

$$z_{xxxx} + 2z_{xxyy} + z_{yyyy} = g;$$
$$z = 0, z_{xx} = 0 \text{ при } x = \pm 0{,}5a; \qquad (2.1)$$
$$z = 0, z_y = 0 \text{ при } x = \pm 0{,}5a.$$

Для конечно-разностной аппроксимации производных используются следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)_{i,j} \approx \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{h_{x_k}}, x_k = x_{k,0} + h_{x_k};$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2}\right)_{i,j} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2_{x_k}};$$

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x_k^4}\right)_{i,j} = \frac{z_{i+2,j} - 4z_{i+1,j} + 6z_{i,j} - 4z_{i-1,j} + z_{i-2,j}}{h^4_{x_k}} \qquad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x_k^2 \partial x_s^2}\right)_{i,j} = \frac{1}{h^2_{x_k} h^2_{x_s}} (z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1} - 2z_{i+1,j} -$$

$$- 2z_{i,j+1} + 4z_{i,j} - 2z_{i,j-1} - 2z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j-1})$$

Для составления уравнений, определяющих дискретные значения искомой функции подставляем выражения (2.2) в (2.1) и вводим обозначения:

$$\frac{h_x}{h_y} = 1, h_x = \frac{a}{4}; \quad \beta = g\frac{a^4}{256}. \qquad (2.3)$$

Систему разрешающих уравнений сформируем, воспользовавшись следующей схемой:

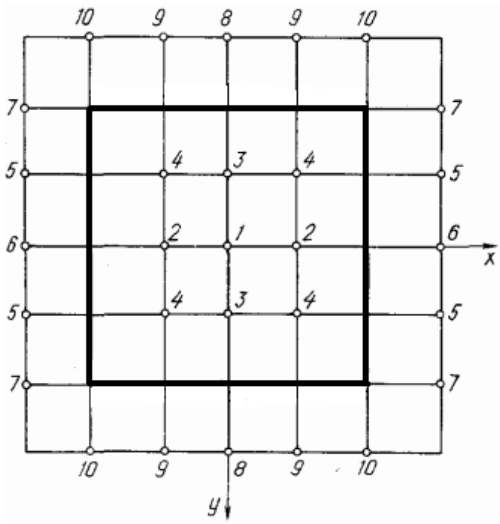

Рис. 2.1. Сеточная область задачи $a \times a$

Система уравнений для решения задачи:

$$\begin{bmatrix} 20 & -16 & -16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 21 & 4 & -16 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 21 & -16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & -8 & 22 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.4)$$

Соотношения (2.4) описывают:

• собственно дифференциальное уравнение – строки №№ 1-4;
• краевые условия при $x = a/2$ – строки №№ 5-7;
• краевые условия при $y = a/2$ – строки №№ 8-10.

Занятие № 5

2.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Пример

Требуется решить уравнение (колебания балки)

$$\begin{gathered} u_{tt} + a u_{xxxx} = 0; \\ u\big|_{t=0} = f(x),\ u_t\big|_{t=0} = g(x); \\ u\big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0,\ u_{xx}\big|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Решение ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.6}$$

Подстановка выражения (2.6) в уравнение (2.5) и учёт линейной независимости функций от пространственной координаты и времени позволяет сформировать систему двух уравнений в обыкновенных производных:

$$X_{xxxx} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 X = 0 \text{ для } X = X(x)\ (\lambda = const = ?), \tag{2.7}$$

$$T_{tt} + \lambda^2 T = 0 \text{ для } T = T(t) \tag{2.8}$$

Решение уравнений (2.7)-(2.8) представляется известными выражениями:

$$= C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x\right) + C_3 \sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x\right) + C_4 \cosh\left($$

$$T(t) = D_1 \cos(\lambda t) + D_2 \sin(\lambda).$$

В этих выражениях постоянные интегрирования C_i определяются из граничных условия, а постоянные D_i – из начальных.

Учитывая периодичность представленных решений через параметр n (число полуволн изгиба), окончательное решение примет форму бесконечного ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_1^{(n)} \cos(\lambda^{(n)} t) + D_2^{(n)} \sin(\lambda^{(n)} t)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Занятие № 6

2.3. Методы минимизации невязки

2.3.1. Метод коллокаций

Пример

Определить методом коллокаций прогибы $w(x,y)$ жестко закрепленной по контуру квадратной $2a \times 2a$ плиты с цилиндрической жесткостью D и толщиной h, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = const$.

Для дальнейших выкладок удобно ввести безразмерные координаты $\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{a}, z = \frac{w}{h}$.

Уравнение прогибов приобретает при этом вид:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial \eta^4} = \frac{qa^4}{Dh} \qquad (2.9)$$

Краевые условия задачи

$$\begin{aligned} z\big|_{\xi=\pm 1} &= \left.\frac{\partial z}{\partial \xi}\right|_{\xi=\pm 1} = 0, \\ z\big|_{\eta=\pm 1} &= \left.\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|_{\eta=\pm 1} = 0, \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Прогиб будем искать в виде произведения решений одномерных задач и корректирующей функции:

$$z = (1-\xi^2)^2 \cdot (1-\eta^2)^2 \cdot (a_0 + a_1\xi^2 + a_1\eta^2 + a_2\xi^2\eta^2) \qquad (2.11)$$

Представленное решение удовлетворяет граничным условиям (2.10). При этом поправочная функция обладает симметрией по координатам, что соответствует симметрии прогиба заданной плиты.

Подстановка решения (2.11) в уравнение (2.9) позволяет сформировать соотношение:

$$\begin{aligned}
&(24a_0+a_1(-48+360\xi^2))(1-\eta^2)^2+\\
&+(24a_1+a_2(-48+360\xi^2))\eta^2(1-\eta^2)^2+\\
&+2(a_0(-4+\eta\xi^2)+a_1(2-24\xi^2+30\xi^4))\times\\
&\times(-4+12\eta^2)+2(a_1(-4+12\xi^2)+\\
&+a_2(2-24\xi^2+30\xi^4))(2-24\eta^2+30\eta^4)+\\
&+(24a_0+a_1(-48+360\eta^2))(1-\xi^2)^2+\\
&+(24a_0+a_2(-48+360\eta^2))\xi^2(1-\xi^2)^2=\bar{q}a^4/(Dh).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Наличие в правой части уравнения (2.12) параметра нагрузки $\bar{q}$ подчёркивает тот факт, что предложенное выражение решения не может дать точное значение правой части уравнения (2.9).

Чтобы уменьшить это различие (невязку) потребуем совпадения правых частей уравнения (2.9) и (2.12) в таком количестве точке, чтобы можно было определить коэффициенты a_i функции корректировки.

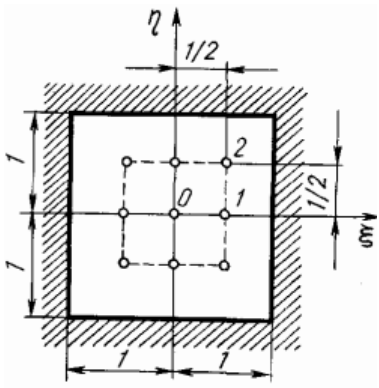

Рис. 2.2. Выбор точек коллокаций

Используя осевую симметрию относительно двух осей, выберем в качестве таких точек отмеченные на Рис. 2.2. точки «0», «1» и «2». Их координаты имеют значения

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0;0) \\ (0{,}5;\ 0) \\ (0{,}5;\ 0{,}5) \end{bmatrix}. \qquad (2.13)$$

Подставляя по-очереди в левую часть (2.12) координаты (2.13), с учётом требования нулевой невязки сформируем систему трёх уравнения:

$$\begin{gathered} 80a_0 - 128a_1 + 8a_2 = qa^4/(Dh); \\ 45{,}5a_0 + 31{,}375a_1 - 15{,}25a_2 = qa^4/(Dh); \\ 29a_0 + 62{,}5a_1 + 20{,}84a_2 = qa^4/(Dh), \end{gathered}$$

Её решение и определяет решение задачи:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{qa^4}{Eh^4} \begin{bmatrix} 0{,}2192 \\ 0{,}0548 \\ 0{,}0631 \end{bmatrix} \Rightarrow w_{max} = 0{,}2192 \frac{qa^4}{Eh^3}. \qquad (2.14)$$

Домашнее задание

Вычислить погрешность полученного значения прогиба в центре плиты в сравнении с точным решением задачи.

Занятие № 7

2.3.2. Метод Бубнова-Галёркина

Пример

Требуется решить задачу о кручении призматического стержня прямоугольного сечения, представленную уравнением для функции напряжений и краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2; \quad \psi\big|_\Gamma = 0. \qquad (2.15)$$

В соответствии с теорией метода предлагается использовать функцию-произведение из трёх сомножителей, первые два из которых дают решением одномерной

задачи, и третий является корректирующей функций в виде ряда с по аргументам с подлежащими определению коэффициентами α_n:

$$\psi_n = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(\alpha_{n=1} + \alpha_{n=2}x^2 + \alpha_{n=3}y^2 + \ldots).$$

Параметры a, b определяют размеры поперечного сечения, которое представлено на рисунке:

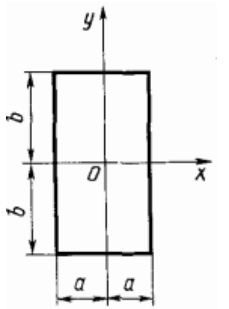

Рис. 2.3. Параметры сечения бруса

Напомним, что предлагаемое решение должно удовлетворять *всем* граничным условиям. Проверка этого свойства для выбранной функции разложения подтверждает его наличие.

На *первом* шаге подставим решение в форме, использующей только один коэффициент корректирующей функции:

$$\psi_1 = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)\alpha_1. \qquad (2.16)$$

Подставив (2.16) в уравнение (2.15), получим невязку

$$\varphi_1 = -2\alpha_1(a^2 - x^2) - 2\alpha_1(b^2 - y^2) + 2. \qquad (2.17)$$

Коэффициент α_1 определим из условия ортогональности базисных функций (это первые две функции-сомножители в выражении ψ_n) и функции невязки φ_1:

Выполнение предписанных операций даёт уравнение для определения α_1:

$$\frac{16}{45}\alpha_1 a^3 b^3 (a^2 + b^2) - \frac{4}{9}a^3 b^3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2). \qquad (2.18)$$

$$a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(-2\alpha_1(a^2 - x^2) - 2\alpha_1(b^2 - y^2) + 2)dxdy$$

Таким образом, решение задачи о кручении призматического стержня прямоугольного решения в первом приближении по методу Бубнова-Галёркина имеет вид:

$$\psi_1 = \frac{5}{4}\frac{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}{a^2 + b^2}. \qquad (2.19)$$

Домашнее задание

Используя выражение первого приближения решения задачи о свободном равномерном кручении призматического стержня в форме (2.19), оценить погрешность вычислением крутящего момента на торцах стержня квадратного сечения.

Точное решение представлено выражением:

$$M_{\text{кр}} = 2,250a^4 G\theta',$$

где G – модуль сдвига, а θ' – угол закручивания на единицу длины волокон стержня, параллельных оси стержня (часто этот угол называют круткой).

Занятие № 8

3.3. Подбор функций перемещений конечного элемента

3.3.1. Функции формы для элемента фермы

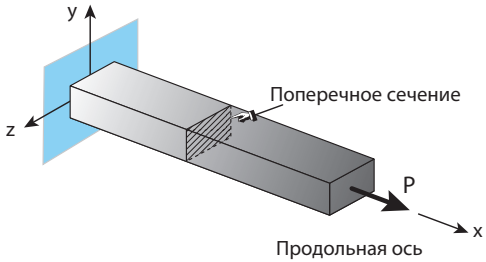

Рис. 3.1. Стержневой элемент конструкции под действием осевой нагрузки

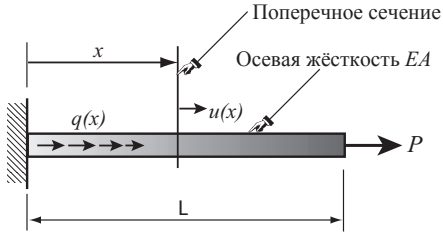

Рис. 3.2. Параметры, характеризующие одноосное НДС

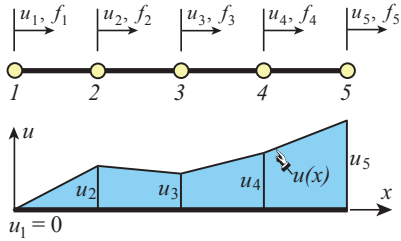

Рис. 3.3. Аппроксимация осевых перемещений при одноосном НДС (f_i – осевая сила)

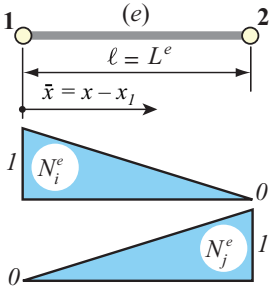

Рис. 3.4. Функции формы для стержня фермы

Номера узлов дискретизации отдельного КЭ (с именем «*e*») на Рис. 3.4. являются *локальными*. Также локальной является координата $\bar{x}$, которая изменяется от 0 до $l = L^e$.

КЭ обладает двумя локальными узловыми степенями свободы u_1^e, u_2^e. Описание стержневого КЭ основывается на замене точных значений перемещений сечений стержня их аппроксимацией:

$$u^*(x) \approx u^e(x). \qquad (3.1)$$

Результат такой аппроксимации для ансамбля КЭ показан на Рис. 3.3. В случае кусочно-*линейной* аппроксимации локального перемещения $u^e(x)$ мы может воспользоваться *интерполяционной* формулой

$$u^e(x) = N_1^e(x) \cdot u_1^e + N_2^e(x) \cdot u_2^e = \langle\ N_1^e(x)\ N_2^e(x)\ \rangle \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ u_2^e \end{array} \right\} . \qquad (3.2)$$

Функции $N_1^e(x), N_2^e(x)$ называются функциями формы. Из данных Рис. 3.4. видно, что из можно представить в безразмерном виде формулами

$$N_1^e = 1 - \frac{\bar{x}}{L^e} = 1 - \xi; \qquad N_1^e = \frac{\bar{x}}{L^e} = \xi. \qquad (3.3)$$

Кроме функций формы (3.3), которые связаны с отдельным КЭ, имеются также функции, которые связаны с отдельным узлом дискретизации. Эти *базисные* функции определены соотношением:

$$N_i(x) = \begin{cases} N_i^{e1} \Leftarrow \text{элемент e1} \\ N_i^{e2} \Leftarrow \text{элемент e2} \\ 0 \Leftarrow \text{другие КЭ} \end{cases} . \qquad (3.4)$$

Графическая интерпретация базисной функции дана на рисунке ниже.

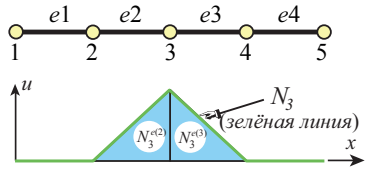

Рис. 3.5. Базисная функция узла 3

Занятие № 9

3.3.2. Функции формы для элемента рамы

Балочный одномерный элемент строительной механики характеризуется двумя узлами и четырьмя степенями свободы.

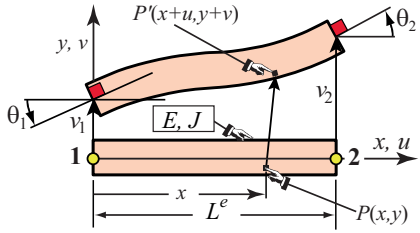

Рис. 3.6. Двухузловой плоский КЭ балки с четырьмя степенями свободы

Узловые перемещения деформированного балочного КЭ можно описать вектором

$$\boldsymbol{u}^e = \langle\ v_1\ \theta_1\ v_2\ \theta_2\ \rangle^T \tag{3.5}$$

Функция поперечных перемещений $v(x)$ как внутри элемента так и между элементами должна быть непрерывной, а также иметь непрерывную производную – угол поворота поперечного сечения $\theta(x) = dv(x)/dx$.

Простейшим вариантом аппроксимации поперечных перемещений и углов поворота внутри КЭ можно считать кубические полиномы, которые должны описывать следующие свойства:

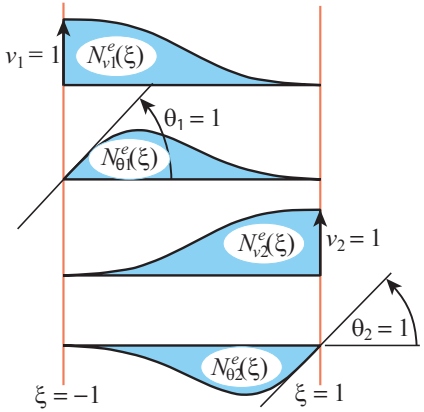

Рис. 3.7. Кубические полиному в качестве функций формы в плоском балочном КЭ

Интерполяционная формула, основанная на этих полиномах имеет вид:

$$v^e = \langle\ N^e_{v1}\ N^e_{\theta 1}\ N^e_{v2}\ N^e_{\theta 2}\ \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \tag{3.6}$$

Эти функции удобно определить через безразмерную координату, симметричную относительно узлов 1 и 2 конечного элемента:

$$\xi = \frac{2x}{L^e} - 1, -1 \le \xi \le 1 . \qquad (3.7)$$

Определение этих функций производится на базе свойств полинома третьей степени

$$v^e = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \xi^i , \qquad (3.8)$$

и свойств функций поперечного перемещения и угла поворота в узлах дискретизации КЭ, представленных на Рис. 3.7.

$$\begin{aligned} N^e_{v1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \\ N^e_{\theta 1} &= \frac{1}{8}L^e(1-\xi)^2(1+\xi), \\ N^e_{v2} &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \\ N^e_{\theta 2} &= -\frac{1}{8}L^e(1+\xi)^2(1-\xi). \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Занятие № 10

3.3.3. Составление системы уравнений МКЭ для плоской стержневой расчётной схемы

Пример

Требуется найти значение критической узловой нагрузки для рамы, представленной на рисунке.

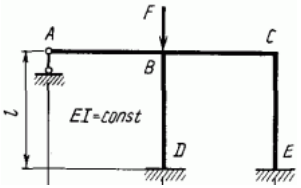

Рис. 3.8. Плоская рама с узловой нагрузкой

На первом шаге составляются матрицы жёсткости КЭ расчётной схемы, в качестве которых выступают участки с помеченными концевыми сечениями.

Таких участков два типа: сжатый силой F (B-D) и несжатые (остальные).

Потеря устойчивости *сжатого* участка описывается базисными функциями типа представленных на Рис. 3.7. Однако следует учесть тот факт, форма потери устойчивости не является однозначной. Поэтому кубический полином заменяется на более общую интерполяционную формулу с использованием тригонометрических функций:

$$v^e = \langle\ 1\ x\ \cos\frac{\pi x}{l}\ \sin\frac{\pi x}{l}\ \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}. \qquad (3.10)$$

Для вычисления матрицы жёсткости отдельного КЭ используется формула

$$\boldsymbol{K}_i = \int_{V_i} \boldsymbol{b}_i^T(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}) dV,$$

в которой матрица $\boldsymbol{b}$ определяет функциональную зависимость деформаций от перемещений, а $\boldsymbol{E}$ – матрица жёсткости бесконечно малого элемента dV.

Например, при изгибе стержня в плоскости, матрица $\boldsymbol{E}$, задана одним элементом EJ.

$$\boldsymbol{K}_i = \frac{\pi^4 EJ}{8l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ -\frac{1}{2l}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right) & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right) & \\ \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ -\frac{1}{2l}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\right) & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right) & \end{bmatrix}. \qquad (3.11)$$

Для сжатого участка матрица жёсткости представлена выражением, полученным из работы сжимающих сил $\boldsymbol{F}_i$:

$$\boldsymbol{A}_i = \int_s \left(\frac{d\boldsymbol{v}^e}{ds}\right)^T \boldsymbol{F}_i \left(\frac{d\boldsymbol{v}^e}{ds}\right) ds\,. \qquad (3.12)$$

С учётом выражения (3.10) матрица (3.12) для прямолинейного участка, загруженного единственной сжимающей силой $\boldsymbol{F}$, приобретает вид

$$\boldsymbol{A}_i = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{\pi^2}{8l} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{l}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{l}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - 3\right) \\ \frac{\pi^2}{8l} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{\pi^2}{8l} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{l}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - 3\right) & \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16}\right) & \frac{l}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \end{bmatrix}. \qquad (3.13)$$

В связи с тем, что участок *A*-*B* в узле *A* опирается на шарнир, требуется получить матрицы $\boldsymbol{K}_i$, $\boldsymbol{A}_i$ и для такого стержня. Функции формы для такого стержня опираются на представление вида (начало координат в жёсткой опоре)

$$v^e = \langle\ 1\ \ x\ \ \cos\frac{\pi x}{l}\ \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \qquad (3.14)$$

Соответствующие матрицы приобретают выражения:

$$\boldsymbol{K}_i = \frac{\pi^4 EJ}{32l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_i = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \frac{\pi^2}{8l} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8l} & \frac{\pi^2}{8l} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ 1 - \frac{\pi^2}{8} & 1 - \frac{\pi^2}{8} & -\left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right) l \end{bmatrix}$$

В выражениях, полученных для матриц $\boldsymbol{K}_i$, $\boldsymbol{A}_i$ положительными приняты повороты *по часовой стрелке* и поступательные перемещения, направленные *влево*.

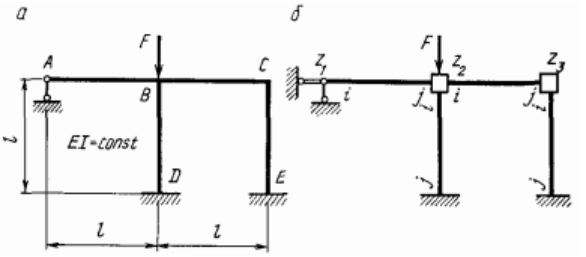

Рис. 3.9. Расчётные схемы:
а – заданная, *б* – МКЭ

Запишем матрицы направляющих косинусов КЭ представленной задачи:

$$\boldsymbol{\alpha}_{A-B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\alpha}_{B-C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{B-D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\alpha}_{C-E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad . \tag{3.15}$$

Далее формируется матрица жёсткости расчётной схемы

$$\boldsymbol{K} = \frac{EJ}{l^2} \begin{bmatrix} \dfrac{24{,}1761}{l} & 6{,}0881 & 6 \\ 6{,}0881 & 11{,}2777l & 2l \\ 11{,}2777l & 2l & 8l \end{bmatrix}$$

Матрица работы внешних сил для расчётной схемы вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_{B-G}^{T}\boldsymbol{A}_{B-D}\boldsymbol{\alpha}_{B-G} = F\begin{bmatrix} \frac{1{,}2337}{l} & 0{,}1169 & 0 \\ 0{,}1169 & 0{,}1834l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Определитель устойчивости приобретает вид:

$$|\boldsymbol{K} - \boldsymbol{A}| = F^2 - 74{,}4639\frac{EJ}{l^2}\cdot F + 898{,}3375\left(\frac{EJ}{l^2}\right)^2 = 0 . (3.17)$$

Минимальный корень этого квадратного уравнения имеет значение

$$F_{min} = 15{,}14\frac{EJ}{l^2}. \quad (3.18)$$

Для сравнения приведём числовой множитель решение задачи методом перемещений – 15,1. А использование в качестве функции формы полинома третьей степени (3.8) приводит к значению коэффициента 15,41.

Домашнее задание

Получить матрицу работы внешних сил, заданных линейным изменением по высоте стержня *B*-*D* функцией $\boldsymbol{F} = ql\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[1\right]$, где q – сила тяжести участка стержня единичной длины.

Тема
4
Методы возмущений в механике

Занятие № 11

4.1. Возмущения по параметру

Пример 1

Рассмотрим сначала решение алгебраического уравнения

$$u = 1 + \varepsilon u^3, \tag{4.1}$$

где ε – малое число, отличное от нуля. Заметим, что при нулевом значении ε имеем решение $u = 1$.

Предположим, что возможно представление решения уравнения (4.1) в форме ряда

$$u = 1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i u_i \ . \tag{4.2}$$

Использование решения (4.2) а уравнении (4.1) позволяет сформировать уравнение вида

$$\varepsilon(u_1 - 1) + \varepsilon^2(u_2 - 3u_1) + \varepsilon^3(u_3 - 3u_2 - 3u_1^2) + \ldots = 0 \tag{4.3}$$

Линейная независимость степеней ε порождает последовательность уравнений для определения u_i:

$$\begin{gathered} u_1 - 1 = 0; \\ u_2 - 3u_1 = 0; \\ u_3 - 3u_2 - 3u_1^2 = 0; \\ \ldots \end{gathered} \tag{4.4}$$

Последовательное решение уравнений системы (4.4) даёт следующее приближение для решения уравнения (4.1):

$$u = 1 + \varepsilon + 3\varepsilon^2 + 12\varepsilon^3 + \ldots . \tag{4.5}$$

Погрешность решения (4.5) определяется членом с ε^4.

Пример 2 Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\frac{du}{dt}. \qquad (4.6)$$

При $\varepsilon = 0$ это уравнение сводится к виду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0, \qquad (4.7)$$

общее решение которого известно в форме

$$u = a \cdot \cos(t+\varphi); \quad a, \varphi = const. \qquad (4.8)$$

В соответствии с идей возмущение по параметру решение уравнения (4.6) будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \ldots. \qquad (4.9)$$

Подстановка такой аппроксимации в исходное уравнение с учётом линейной независимости степеней параметра позволяет получить последовательность дифференциальных уравнений для определения u_i.

В частности, для определения u_0 имеем уравнение (4.7) и соответствующее решение (4.8).

Для определения u_1 имеем уравнение

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = -\{1 - a^2[\cos(t+\varphi)]^2\} \cdot a \cdot \sin(t+\varphi). \qquad (4.10)$$

Его частным решением является функция

$$u_1 = -\frac{a^3 - 4a}{8} t\cos(t+\varphi) - \frac{1}{32}a^3 \sin[3(t+\varphi)]. \qquad (4.11)$$

По известным u_0 и u_1 определяется правая часть дифференциального уравнения для u_2 и т.д.

4.2. Возмущения по координате

Рассмотрим задачу, в которой независимая переменная, стремясь к некоторому пределу, который можно сделать *нулём* или *бесконечностью*, даёт возможность получить решение исходного дифференциального уравнения.

Тогда можно попытаться найти отклонения этого предельного решения в окрестности предельной значения аргумента.

Пример 3

Рассмотрим решение уравнения

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0. \qquad (4.12)$$

Заметим, что это уравнение имеет *особую точку* $x = 0$, что позволяется искать решение в форме степенного ряда по x в форме

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{\mu+m}; \qquad a_m, \mu - \text{неизвестны}. \qquad (4.13)$$

Определение неизвестных постоянных решения (4.13) производим на базе системы уравнений, полученной после подстановки решения (4.13) в исходное уравнение и приведения подобных с выделением степеней x, которые являются линейно независимыми.

Результат этих операций представляется в форме

$$\begin{gathered} \mu^2 a_0 = 0; \\ (\mu+1)^2 a_1 = 0; \\ (\mu+m+2)^2 a_{m+2} + a_m = 0; \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \\ \ldots \end{gathered} \qquad (4.14)$$

Если положить, что $a_0 \neq 0$, то имеют место следующие значения искомых величин:

$$\begin{gathered} \mu = 0; \\ a_1 = 0; \\ a_{m+2} = -\frac{a_m}{(\mu+m+2)^2}; \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \qquad (4.15)$$

Полученные соотношения позволяют вычислить коэффициенты разложения решения в форме

$$a_{2m+1} = 0; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{\prod_{k=1}^{n} (2k)^2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.16}$$

При $a_0 = 1$ полученное решение определяет функцию Бесселя нулевого порядка.

Сходимость полученного ряда определяется тем, что отношение двух членов ряда (последующего к предыдущему) обладает следующим свойством:

$$\lim_{n \to \infty} \left[-\frac{x^2}{(2n)^2} \right] = 0 . \tag{4.17}$$

Домашнее задание

Построить решение уравнения $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$ для больших x.

Указание: решение искать в форме ряда

$$my = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{-m} .$$

Тема 5

Методы решения нелинейных задач механики деформируемого твёрдого тела

5.1. Методы последовательных приближений

Занятие № 12

5.1.1. Метод Ньютона-Канторовича

Пример

Требуется найти решение нелинейного дифференциального уравнения

$$(3-y)\frac{dy}{dx}+4 = 0, x \in [0, 1], y(0) = 0. \qquad (5.1)$$

Чтобы сформировать алгоритм решения задачи методом Ньютона-Канторовича

$$\begin{array}{c} F'(y_n)\cdot\Delta y_n + F(y_n) = 0, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \end{array}, \qquad (5.2)$$

необходимо построить дифференциал Фреше $\Delta F(y) = F'(y)\cdot\Delta y$ для оператора дифференциального уравнения (5.1)

$$F(y) = (3-y)\frac{dy}{dx}+4. \qquad (5.3)$$

Эту операцию следует выполнять, используя определение производной Фреше в приращениях функционала оператора:

$$\begin{array}{c} \Delta F = F(y+\Delta y)-F(y), F(y) = (3-y)\frac{dy}{dx}+4; \\ F(y+\Delta y) = [3-(y+\Delta y)]\frac{d(y+\Delta y)}{dx}+4 \Rightarrow \\ \Delta F = (3-y)\Delta y' - \Delta y\cdot y' - \Delta y\cdot\Delta y' \end{array}. \qquad (5.4)$$

Ограничиваясь малыми порядка Δy, получаем

$$\Delta F(y) = (3-y)\Delta y' - \Delta y\cdot y'. \qquad (5.5)$$

Таким образом, система (5.2) приобретает вид

$$\begin{aligned}&(3-y_n)\Delta y_n{}' - y_n{}' \cdot \Delta y_n - (3-y_n)y_n{}' + 4 = 0,\\ &y_{n+1}(x) = y_n(x) + \Delta y_n(x); \quad n = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}. \tag{5.6}$$

Первое уравнение (5.6) в качестве неизвестного содержит функцию Δy_n и её первую производную. Такое линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами позволяет своё найти решение сравнительными просто. Что и определяет эффективность метода Ньютона-Канторовича.

В качестве *начального* приближения для реализации алгоритма (5.6) следует принять во внимание граничное условие в (5.1), что позволяет предположить

$$y_0(x) = 0, \Delta y_0(0) = 0 \Rightarrow y_0{}'(x) = 0. \tag{5.7}$$

Тогда для вычисления $\Delta y_0{}'$ из первого уравнения (5.6) имеем

$$3\Delta y_0{}' + 4 = 0, \tag{5.8}$$

что с учётом условий (5.7) даёт решение для $\Delta y_0(x)$:

$$\Delta y_0(x) = -\frac{4}{3}x. \tag{5.9}$$

Используя второе уравнение (5.6), имеем значение искомой функции в первом приближении:

$$y_1(x) = y_0(x) + \Delta y_0(x) = 0 + \left(-\frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x \quad . \tag{5.10}$$

Решение (5.10) определяется значение производной в первом приближении как

$$y_1{}'(x) = -\frac{4}{3}, \tag{5.11}$$

и мы может строить уравнение для определения $\Delta y_1{}'(x)$, используя алгоритм (5.6):

$$\left(3+\frac{4}{3}x\right)\Delta y_1{}' + \frac{4}{3}\Delta y_1 + \left(3+\frac{4}{3}x\right)\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = 0. \tag{5.12}$$

Решение этого уравнения относительно Δy_1 позволяет определить, что

$$\Delta y_1 = \frac{\frac{8}{9}x^2}{3+\frac{4}{3}x} \Rightarrow y_2 = -\frac{4x}{3} + \frac{\frac{8}{9}x^2}{3+\frac{4}{3}x}. \qquad (5.13)$$

Для справки: точное решение уравнения (5.1) имеет вид

$$y = 3 - \sqrt{9+8x}. \qquad (5.14)$$

Определение необходимости продолжения реализации алгоритма (5.6) основано на сравнении двух последовательных приближений решения. Для рассмотренного примера, решения в приближении y_2 оказывается мало отличающимся от y_3.

Домашнее задание

Построить третье приближение решения уравнения (5.1) и определить разницу $y_3 - y_2$ на отрезке [0,1] с шагом 0,25.

5.2. Методы продолжения по параметру

Занятие № 13

5.2.1. Метод продолжения по параметру

Пример

Требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение

$$(3-y)\frac{dy}{dx} + 4 = 0, x \in [0, 1], y(0) = 0 \qquad (5.15)$$

методом продолжения по параметру.

В качестве параметра выберем член уравнения в виде постоянной «4», обозначив её в дальнейших выкладках как H.

Для реализации метода назначим шаг по параметру $h = 2$. Тогда алгоритм метода для уравнения (5.15) можно записать в следующей форме:

$$(3-y_i)\Delta y_i' - y_i'\Delta y_i = -h, i = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (5.16)$$

Происхождение уравнения (5.16) определяется общей формой метода продолжения по параметру, применённой к операторному уравнению $F(y, h) = 0, y(h_0) = y_0$.

Эта форма определяет неявную функцию $y(h)$ из дифференциального уравнения

$$F_y'(H, y)\Delta y + F_h'(H, y)\Delta H = 0, y(H_0) = y_0.$$

По данным примера

$$F_y'(H, y)\Delta y = F(y + \Delta y, H) - F(y, H) =$$

$$= \left\{[3 - (y + \Delta y)]\frac{d(y + \Delta y)}{dx} + H\right\} - \left[(3 - y)\frac{dy}{dx} + H\right] =$$

$$= (3 - y)\Delta y' - \Delta y \cdot y';$$

$$F_h'(H, y)\Delta H = \left[(3 - y)\frac{dy}{dx} + H + \Delta H\right] - \left[(3 - y)\frac{dy}{dx} + H\right] =$$

$$= \Delta H = h.$$

Отсюда и следует форма уравнения (5.16).

Начальный шаг решения проводит для уравнения (5.16), приняв $i = 0$:

$$(3 - y_0)\Delta y_0' - y_0'\Delta y_0 = -h. \qquad (5.17)$$

Принимая начальные значения параметров и шаг со значениями

$$y_0 = 0, \Delta y_0 = 0, H_0 = 0, \qquad (5.18)$$

получаем следующие результаты:

$$3\Delta y_0' = -2 \Rightarrow \Delta y_0 = -\frac{2}{3}x;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + \left(-\frac{2}{3}x\right) = -\frac{2}{3}x; \qquad (5.19)$$

$$H_1 = H_0 + h = 0 + 2 = 2.$$

Запишем уравнение (5.16) для $i = 1$:

$$(3 - y_1)\Delta y_1' - y_1'\Delta y_1 = -h. \qquad (5.20)$$

С учётом значений (5.19) получим дифференциальное уравнение для Δy_1:

$$\left(3+\frac{2}{3}x\right)\Delta y_1' + \frac{2}{3}\Delta y_1 = -2. \qquad (5.21)$$

Его решение даёт следующие результаты:

$$\Delta y_1 = -\frac{2x}{3+\frac{2}{3}x} \Rightarrow y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -\frac{2}{3}x - \frac{2x}{3+\frac{2}{3}x}; \qquad (5.22)$$

$$H_2 = H_1 + h = 2 + 2 = 4.$$

Так как решение y_2 соответствует значению параметра «4», которое определяет вид исходного дифференциального уравнения (5.15), выражение y_2, приведенное в (5.22), является приближённым решением задачи.

Домашнее задание

Выполнить решение уравнения (5.15), изменив шаг по параметру на значение 1. Сравнить полученное решение с решением (5.22) в точках отрезка [0,1] с шагом 0,25.

Выполнить такое же сравнение с решением, полученным для уравнения (5.15) методом Ньютона-Канторовича в таких же точках отрезка [0,1].

Основная литература

1. Агошков, В.И. Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, Дубовский В.П., Шутяев В.П. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

2. Петров, В.В. Методы расчёта конструкций из нелинейно-деформируемого материала :учеб. пособие / В. В. Петров, И. В. Кривошеин .– М. : АСВ, 2009 .– 206 с.

3. Бабкин, А.В. Прикладная механика сплошных сред: учебник для втузов. Т.3. Численные методы в задачах физики быстропротекающих процессов:учебник для втузов / А.В. Бабкин [и др.]. – М.: Изд-во МГТУ, 2006. – 520 с.

Дополнительная литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учеб. пособие для вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Бином, 2007. – 636 с.

2. Глаголев, В.В. Математическое моделирование в системе MATLAB: учеб. пособие / В.В. Глаголев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. – 88 с.

3. Самарский, А.А. Введение в численные мето-ды: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – СПб : Лань, 2005. – 288 с.

4. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики: учеб. пособие для вузов / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М.; СПб., 2005. – 425 с.

5. Поршнев, С.В. MATLAB 7: основы работы и программирования: учеб. пособие для вузов / С.В. Поршнев .– М.: Бином, 2006. – 320с.