МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2023 г., протокол № 5

И.о. заведующего кафедрой
________________________Н.В. Ларин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)
«Функциональный анализ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Перспективные методы искусственного интеллекта
в сетях передачи и обработки данных

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-03-23

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Иванов В.И., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

I. Цели и задачи практических занятий

Целью изучения дисциплины «Функциональный анализ» является формирование математической культуры магистрантов, фундаментальная подготовка магистрантов в области функционального анализа, возникшего в результате взаимодействия и последующего обобщения на бесконечномерный случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры. Современная математика немыслима без функционального анализа. Идеи, концепции, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают все области математики, объединяя ее в единое целое.

Задачами дисциплины являются:

- освоение, изучение основных понятий, определений и утверждений функционального анализа,
- приобретение навыков решения и исследования линейных интегральных уравнений второго рода, других задач функционального анализа,
- изучение приложений функционального анализа в других математических дисциплинах.

Целями и задачами практических занятий по функциональному анализу являются приобретение навыков решения практических задач и закрепление основных понятий, определений и свойств объектов теории приближений.

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	4.1	Линейные нормированные пространства	2
2	4.2	Норма линейного функционала	2
3,4	4.8	Обобщенные функции	4
5	5.1	Норма линейного оператора	2
6	5.2	Сильная и равномерная сходимости линейных операторов	2
7	5.3	Сопряженные и самосопряженные линейные операторы	2
8	5.4	Обратный линейный оператор	2
9	5.5	Спектр, спектральный радиус и резольвента линейного оператора	2
10	5.7	Спектр линейного вполне непрерывного оператора	2
11	5.8	Теория Рисса-Шаудера для линейных уравнений 2-го рода	2
12	5.10	Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта	2

II. Методические указания к проведению практических занятий

Занятие 1
Линейные нормированные пространства

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Является ли отображение $f(x)=\left|x(0)\right|+\left\|x''(t)\right\|_{C[0,1]}$ нормой в нормированном пространстве $C^2[0,1]$?

Решение

Проверим выполнение трех свойств нормы. Функционал неотрицателен. Исследуем, когда он равен нулю:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x(0)=0 \ \text{ и } \ x''(t)=0.$$

Этим условиям удовлетворяет ненулевая функция $x(t)=t$, поэтому первое условие не выполнено и данный функционал нормой не является. Для полноты проверим остальные два свойства нормы. Однородность нормы

$$f(\lambda x)=\left|\lambda x(0)\right|+\left\|\lambda x''(t)\right\|_{C[0,1]}=|\lambda|\left|x(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}|\lambda|\left|x(t)\right|=$$

$$=|\lambda|(\left|x(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|x(t)\right|)=|\lambda|\, f(x)$$

выполнена. Неравенство треугольника

$$f(x+y)=\left|x(0)+y(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|(x(t)+y(t))''\right|=\left|x(0)+y(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|x''(t)+y''(t))\right|\le$$

$$\le\left|x(0)\right|+\left|y(0)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|x''(t)\right|+\max_{0\le t\le 1}\left|y''(t)\right|=f(x)+f(y)$$

также выполнено.

Задачи для самостоятельного решения

1. Является ли отображение $f(x)=\left\|x'(t)\right\|_{C[0,1]}$ нормой в нормированном пространстве $C^1[0,1]$?

2. Является ли отображение $f(x)=\int\limits_0^1\left|x(t)\right|dt+\int\limits_0^1\left|x'(t)\right|dt$ нормой в нормированном пространстве $C^1[0,1]$?

Домашнее задание

1. Является ли отображение $f(x)=\left|x(1)-x(0)\right|+\left\|x'(t)\right\|_{C[0,1]}$ нормой в нормированном пространстве $C^1[0,1]$?

2. Является ли отображение $f(x)=\left|x(0)\right|+\left|x(1)\right|+\left\|x''\right\|_{C[0,1]}$ нормой в нормированном пространстве $C^2[0,1]$?

Занятие 2
Норма линейного функционала

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Вычислить норму линейного функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}:c_0\to\mathbb{R}$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

Решение

По определению

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_\infty\le 1}|f(x)|=\sup_{|x_k|\le 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}\right|\le\sup_{|x_k|\le 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{2^k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1`}{2^k}=1.$$

Эта оценка является точной и достигается на экстремальной последовательности $x^n=(1,1,\dots,1,0,\dots)$. Здесь у x^n все координаты, начиная с $n+1$-й, равны нулю. Имеем $x^n\in c_0, \left\|x^n\right\|_\infty=1$ и

$$f\left(x^n\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\to 1(n\to\infty).$$

Экстремального элемента нет.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить норму линейного функционала $f(x)=x_1+2x_2:l_2\to\mathbb{R}$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

2. Вычислить норму линейного функционала

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)x(t)dt:L_1[-1,1]\to\mathbb{R}$$

и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается

Домашнее задание

1. Вычислить норму линейного функционала $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{k}\right)x_k : l_1 \to \mathbb{R}$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.
2. Вычислить норму линейного функционала

$$f(x)=2\int_{-1}^{0}x(t)dt-3\int_{0}^{1}x(t)\,dt : C[-1,1]\to\mathbb{R}$$

и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается

Занятия 3, 4
Обобщенные функции

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

1. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $x^2 y'''=0$.

Решение

Пусть $y'''=z$. Уравнение $x^2 z=0$ имеет два линейно независимых решения: $z_1=\delta, z_2=\delta'$. Здесь δ - дельта-функция. Действительно, для произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции φ

$$\langle z_1,\varphi\rangle=\langle x^2\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,x^2\varphi\rangle=x^2\varphi(x)\Big|_{x=0}=0,$$

$$\langle z_2,\varphi\rangle=\langle x^2\delta',\varphi\rangle=\langle\delta',x^2\varphi\rangle=-\langle\delta',(x^2\varphi)'\rangle=-(x^2\varphi(x))'\Big|_{x=0}=$$

$$=-(x^2\varphi(x))'\Big|_{x=0}=-(2x\varphi(x)+x^2\varphi'(x))\Big|_{x=0}=0\,.$$

Таким образом, $y'''=c_1\delta+c_2\delta'$. Общее решение однородного уравнения $y'''=0$ есть $y_o=c_3+c_4x+c_5x^2$. Найдем частное решение неоднородного уравнения $y'''=c_1\delta+c_2\delta'$.. Рассмотрим регулярную обобщенную функцию $f_1(x)=x|x|$. Вычислим ее третью производную:

$$\langle(f_1)''',\varphi\rangle=\langle(x|x|)''',\varphi\rangle=-\langle x|x|,\varphi'''\rangle=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}x^2\varphi'''(x)dx-\int_{0}^{\infty}x^2\varphi'''(x)dx=x^2\varphi''(x)\Big|_{-\infty}^{0}-2\int_{-\infty}^{0}x\varphi''(x)dx-x^2\varphi''(x)\Big|_{0}^{\infty}+2\int_{0}^{\infty}x\varphi''(x)dx=$$

$$= -2x\varphi'(x)\Big|_{-\infty}^{0} + 2\int_{-\infty}^{0}\varphi'(x)dx + 2x\varphi'(x)\Big|_{0}^{\infty} - 2\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx =$$

$$= 2\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - 2\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} = 4\varphi(0) = \langle 4\delta, \varphi\rangle .$$

Итак, $f_1'''(x) = (x|x|)''' = 4\delta.$ Рассмотрим регулярную обобщенную функцию $f_2(x) = |x|$. Также вычислим ее третью производную:

$$\langle (f_2)''', \varphi\rangle = \langle |x|''', \varphi\rangle = -\langle |x|, \varphi'''\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'''(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'''(x)dx = x\varphi''(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\varphi''(x)dx - x\varphi''(x)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\varphi''(x)dx =$$

$$= -\varphi'(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \varphi'(x)\Big|_{0}^{\infty} = -2\varphi'(0) = -2\langle \delta, \varphi'\rangle = \langle 2\delta', \varphi\rangle.$$

Итак, $f_2'''(x) = |x|''' = 2\delta'.$ Таким образом, частное решение уравнения $y''' = c_1\delta + c_2\delta'.$ есть $y_ч = \frac{c_1}{4}\delta + \frac{c_2}{2}\delta'$. Окончательно общее решение исходного уравнения может быть записано в виде:

$$y = c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + c_1\delta + c_2\delta'.$$

2. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $y'' - 9y = 3\delta(x)$.

Решение

Однородное уравнение $y'' - 9y = 0$ имеет общее решение $y_o = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$ Частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y_ч = y_1\theta,$ где θ - функция Хевисайда, то есть $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Известно, что $\theta' = \delta$. Подставим $y_ч$ в уравнение:

$$y_ч = y_1\theta, y_ч' = y_1'\theta + y_1\theta' = y_1'\theta + y_1\delta .$$

Предположим, что y_1 бесконечно дифференцируемая функция и $y_1(0) = 0$. Тогда определена обобщенная функция $y_1\delta$. Покажем, что она равна нулю: $\langle y_1\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, y_1\varphi\rangle = y_1(0)\varphi(0) = 0.$ Далее

$$y_ч' = y_1'\theta, y_ч'' = y_1''\theta + y_1'\delta, (y_1'' - 9y_1)\theta + y_1'\delta = 3\delta .$$

Окончательно потребуем, чтобы $y_1'' - 9y_1 = 0, y_1'(0) = 3$. Тогда $y_1'\delta = 3\delta$: $\langle y_1'\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, y_1'\varphi\rangle = y_1'(0)\varphi(0) = 3\varphi(0) = \langle 3\delta, \varphi\rangle$ и $y_ч = y_1\theta$ является частным решением исходного уравнения. Остается найти y_1 из задачи Коши

$$y_1'' - 9y_1 = 0, y_1(0) = 0, y_1'(0) = 3 .$$

Подставляя начальные условия в общее решение однородного уравнения, получим систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ 3c_1 - 3c_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда $c_1 = -c_2 = 1/2$. Итак, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y_ч = \frac{1}{2}(e^{3x} - e^{-3x})\theta(x) = sh3x\theta(x).$ Наконец, запишем общее решение исходного уравнения:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + shx\theta(x).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $x^3 y' = 0$.
2. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $y'' + 4y = 3\delta(x)$.
3. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $xy''' = 0$.
4. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $y'' + y' - 2y = 3\delta(x)$.

Домашнее задание

1. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $x^3 y'' = 0$.
2. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $y'' - y' - 2y = 2\delta(x)$.
3. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $x^4 y' = 0$.
4. Найти общее решение уравнения в обобщенных функциях $y'' - 5y' + 6y = \delta(x)$.

Занятие 5
Норма линейного оператора

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Вычислить норму линейного оператора

$$Ax(t) = 2x(t) - 3x\left(\frac{t}{2}\right) : C[0,1] \to C[0,1]$$

и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

Решение

Из определения нормы линейного оператора

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_C \le 1} |Ax| = \sup_{|x(t)| \le 1} \left|2x(t) - 3x(t/2)\right| \le \sup_{|x(t)| \le 1} (2|x(t)| + 3|x(t/2)|) \le 2 + 3 = 5.$$

Пусть $x(t)$ произвольная непрерывная функция, для которой $x(1/4) = -1$, $x(1/2) = 1$, $|x(t)| \le 1$. Для нее $\|x\|_C = 1$ и $Ax(1/2) = 2x(1/2) - 3x(1/4) = 5$. Таким образом, $\|A\| = 5$, а все описанные функции являются экстремальными.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить норму линейного оператора $Ax=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} x : l_1^3 \to l_1^3$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

2. Вычислить норму линейного оператора $Ax=\left(\frac{1}{2}x_1, \frac{3}{4}x_2, \ldots, \left(1-\frac{1}{2n}\right)x_n, \ldots\right) : l_2 \to l_2$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

Домашнее задание

1. Вычислить норму линейного оператора $Ax=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} x : l_\infty^3 \to l_1^3$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

2. Вычислить норму линейного оператора $Ax(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)x(t) : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

Занятие 6
Сильная и равномерная сходимости линейных операторов

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Для последовательности линейных непрерывных операторов

$$A_n x(t) = x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) : C[0,2\pi) \to C[0,2\pi)$$

указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная).

Решение

Так как $\pi/n \to 0$, то предельным оператором может быть только единичный оператор, для которого $Ex(t)=x(t)$. Исследуем сильную и равномерную сходимости. Для любого n $\|A_n - E\| = 2$ и равномерной сходимости нет. Действительно, оценка сверху очевидна. Оценка снизу достигается на любой непрерывной 2π-периодической функции $x(t)$, для которой $|x(t)| \le 1$, $x(0) = 1$, а $x(\pi/n) = -1$.

Сильная сходимость есть, так как для любой непрерывной 2π-периодической функции $x(t)$

$$\|A_n x(t) - Ex(t)\|_C = \|x(t + \pi/n) - x(t)\|_C \le \omega(\pi/n, x)_C \to 0 (n \to \infty).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для последовательности линейных непрерывных операторов

$$A_n x = \left(0, 0, \ldots, x_{n+1,} x_{n+2}, \ldots\right) : l_2 \to l_2$$

указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная).

2. Для последовательности линейных непрерывных операторов

$$A_n x(t) = x\left(\frac{nt}{n+t}\right) : C[0,1] \to C[0,1]$$

указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная).

Домашнее задание

1. Для последовательности линейных непрерывных операторов

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} : X \to X$$

указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная). Здесь X – банахово пространство, $A \in \mathrm{L}(X)$.

2. Для последовательности линейных непрерывных операторов

$$A_n x(t) = x\left(t^n - t^{n+1}\right) : C[0,1] \to C[0,1]$$

указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная).

Занятие 7
Сопряженные и самосопряженные линейные операторы

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Для линейного оператора $Ax(t)=\int_0^t tx(s)ds: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.

Решение

Запишем скалярное произведение в пространстве $L_2[0,1]$

$$(Ax(t),y(t))=\int_0^1\left(\int_0^t tx(s)y(t)ds\right)dt\quad .$$

В повторном интеграле сделаем перестановку переменных интегрирования. Получим

$$(Ax(t),y(t))=\int_0^1\left(\int_s^1 ty(t)dt\right)x(s)ds=(x(s),A'y(s)),$$

где $A'y(s)=\int_s^1 ty(t)dt$ - сопряженный оператор. Оператор A не совпадает с A' и поэтому не является самосопряженным.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для линейного оператора $Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.
2. Для линейного оператора $Ax(t)=(x_2,x_3,...): l_2\to l_2$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.

Домашнее задание

1. Для линейного оператора $Ax(t)=\int_0^1(2t-3s)x(s)ds: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.
2. Для линейного оператора $Ax(t)=(0,x_1,x_2,...): l_2\to l_2,$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.

Занятие 8
Обратный линейный оператор

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Доказать, что линейный оператор $Ax(t)=x(t)+2\int\limits_0^t x(s)\,ds : C[0,1]\to C[0,1]$ непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

Решение

Оператор A - непрерывный, как сумма единичного и вполне непрерывного операторов. Покажем, что он взаимно однозначный. Рассмотрим уравнение

$$Ax(t)=x(t)+2\int\limits_0^t x(s)\,ds=0.$$

Продифференцируем его, получим задачу Коши

$$x'(t)+2x(t)=0, x(0)=0.$$

Она имеет единственное нулевое решение. Если мы покажем, что его область значений совпадает с $C[0,1]$, то это будет означать, что существует обратный оператор $A^{-1}:C[0,1]\to C[0,1]$ и по теореме Банаха он непрерывен. Все это будет означать, что оператор A - непрерывно обратим.

Рассмотрим уравнение

$$x(t)+2\int\limits_0^t x(s)\,ds=y(t),$$

где $y(t)$ вначале будем считать непрерывно дифференцируемой функцией. Дифференцируя его, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} x'(t)+2x(t)=y'(t), \\ x(0)=y(0). \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид $x_o(t)=ce^{-2t}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом вариации произвольной постоянной $x(t)=c(t)e^{-2t}$. Подставляя его в уравнение, получим $c'(t)e^{-2t}=y'(t)$, $c'(t)=e^{2t}y'(t)$ и $c(t)=\int\limits_0^t e^{2s}y'(s)ds.$ Интегрируя по частям, получим

$$c(t)=e^{2s}y(s)\Big|_0^t-2\int\limits_0^t e^{2s}y(s)ds=e^{2t}y(t)-y(0)-2\int\limits_0^t e^{2s}y(s)ds.$$

Отметим, что в этой записи $y(t)$ произвольная непрерывная функция. Общее решение неоднородного уравнения запишем в виде

$$x(t)=c(t)e^{-2t}+y(t)-y(0)e^{-2t}-2\int\limits_0^t e^{2s-2t}y(s)ds.$$

Из начального условия получим, что

$$A^{-1}y(t)=x(t)=y(t)-2\int\limits_0^t e^{2s-2t}y(s)ds$$

- искомый обратный оператор, определенный на всем пространстве $C[0,1]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что линейный оператор

$$Ax(t)=x(t)-4\int_0^t sx(s)ds : C[0,1]\to C[0,1]$$

непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

2. Доказать, что линейный оператор

$$Ax(t)=x(t)+3\int_t^1 x(s)ds : C[0,1]\to C[0,1]$$

непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

Домашнее задание

1. Доказать, что линейный оператор

$$Ax(t)=x(t)+2\int_0^t (2s-1)x(s)ds : C[0,1]\to C[0,1]$$

непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

2. Доказать, что линейный оператор

$$Ax(t)=x(t)+4\int_t^1 sx(s)ds : C[0,1]\to C[0,1]$$

непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

Занятия 9
Спектр, спектральный радиус и резольвента линейного оператора

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $Ax(t)=x'(t): C[0,1]\to C[0,1]$ с областью определения $D(A)=\left\{x\in C^1[0,1] \mid x(0)=0\right\}$.

Решение

Найдем сначала собственные значения из задачи Коши:

$$x'(t)-\lambda x(t)=0, x(0)=0.$$

Она имеет единственное нулевое решение, поэтому собственных значений нет. Для произвольной непрерывной функции $y(t)$ рассмотрим задачу Коши:

$$x'(t)-\lambda x(t)=y(t), x(0)=0.$$

Решение однородного уравнения имеет вид $x_o(t)=ce^{\lambda t}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $x(t)=c(t)e^{\lambda t}$. Подставляя его в уравнение, получим $c'(t)e^{\lambda t} = y(t)$. Отсюда $c(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda s} y(s)ds.$ Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = ce^{\lambda t} + \int\limits_0^t e^{\lambda t - \lambda s} y(s)ds.$$

Из начального условия $c = 0$, поэтому $(A - \lambda E)^{-1} y(t) = x(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda t - \lambda s} y(s)ds.$ Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ обратный оператор существует на всем пространстве $C[0,1]$ и по теореме Банаха он непрерывен. Таким образом, $\sigma(A) = \varnothing$, $r(A)=0$ и резольвента

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1} y(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda t - \lambda s} y(s)ds.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $Ax(t) = tx(t) : C[0,1] \to C[0,1]$.
2. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau : C[0,1] \to C[0,1]$.

Домашнее задание

1. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $Ax(t) = x'(t) : C[0,1] \to C[0,1]$ с областью определения $D(A) = \{x \in C^1[0,1] \mid x(0) = x(1)\}$.
2. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $Ax(t) = e^{it} x(t) : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$.

Занятие 10
Спектр линейного вполне непрерывного оператора

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$, где $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds$.

Решение

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ax(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds = \lambda x(t).$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$. Дифференцируя уравнение, получим $\int_0^t x(s)ds = 0$. Опять дифференцируя, получим $x(t) = 0$. Значит, $\lambda = 0$ не является собственным значением, а является точкой непрерывного спектра. Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Тогда из задачи на собственные значения $x(0) = 0$. Продифференцируем уравнение, получим $\int_0^t x(s)ds = \lambda x'(t)$. Отсюда также $x'(0) = 0$. Еще раз дифференцируя последнее уравнение, получим $x(t) = \lambda x''(t)$. Задача Коши

$$x(t) = \lambda x''(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

имеет единственное нулевое решение. Поэтому собственных значений нет. Единственной точкой спектра (непрерывного спектра) является $\lambda = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$, где $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (2t+s)x(s)ds$.
2. Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$, где $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^\pi K(t,s)x(s)ds,\ K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2}$.

Домашнее задание

1. Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$, где $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t (1-ts)x(s)ds$.
2. Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$, где $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^\pi K(t,s)x(s)ds, K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^2}$.

Занятия 11
Теория Рисса-Шаудера для линейных уравнений 2-го рода

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

В пространстве $C\left[0,\pi\right]$ дано интегральное уравнение

$$x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(2t+s)x(s)ds = y(t).$$

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C\left[0,\pi\right]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

Решение

Воспользуемся теорией Рисса – Шаудера. Запишем 4 уравнения, рассматривая неоднородные и однородные уравнения, сам оператор и его сопряженный в левой части, причем при переходе к сопряженному в интегральном операторе у ядра меняются аргументы:

1) $x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(2t+s)x(s)ds = y(t)$,

2) $x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(2t+s)x(s)ds = 0$,

3) $x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(t+2s)x(s)ds = y(t)$,

4) $x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(t+2s)x(s)ds = 0.$

Теория утверждает, что размерности решений однородных уравнений конечны и совпадают. Если эти размерности равны нулю, то уравнение 1) имеет единственное решение для любой правой части. Если эти размерности больше нуля и правая часть 1) не ортогональна решениям 4), то уравнение 1) не имеет решений. Если эти размерности больше нуля и правая часть 1) ортогональна решениям 4), то уравнение 1) имеет бесконечно много решений. Общее решение 1) есть сумма частного решения 1) и общего решения 2).

Решим уравнение 4):

$$x(t)+\lambda(\sin t\int_0^\pi \cos 2s x(s)ds+\cos t\int_0^\pi \sin 2s x(s)ds)=0.$$

Его решение будем искать в виде $x(t)=a\sin t+b\cos t$. Подставляя его в уравнение, получим

$$a\sin t+b\cos t+\lambda(a\sin t\int_0^\pi \cos 2s\sin s ds+b\cos t\int_0^\pi \sin 2s\cos s ds)=0.$$

Вычислим интегралы

$$\int_0^\pi \cos 2s\sin s ds=\frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin 3s-\sin s)ds=\frac{1}{2}(-\frac{\cos 3s}{3}\Big|_0^\pi+\cos s\Big|_0^\pi)=-\frac{2}{3},$$

$$\int_0^\pi \sin 2s\cos s ds=\frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin 3s+\sin s)ds=\frac{1}{2}(-\frac{\cos 3s}{3}\Big|_0^\pi-\cos s\Big|_0^\pi)=\frac{4}{3}.$$

Подставляем их в уравнение, получаем $a(1-\frac{2}{3}\lambda)\sin t+b(1+\frac{4}{3}\lambda)\cos t=0$. Отсюда

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\ \ \lambda_2=-\frac{3}{4}.$$

Если $\lambda\neq\frac{3}{2},-\frac{3}{4}$, то уравнение 1) имеет единственное решение для любой правой части.

Если $\lambda=\frac{3}{2}$ и $\int_0^\pi \sin s y(s)ds\neq 0$, то уравнение 1) не имеет решений.

Если $\lambda=\frac{3}{2}$ и $\int_0^\pi \sin s y(s)ds=0$, то уравнение 1) имеет бесконечно много решений.

Если $\lambda=-\frac{3}{4}$ и $\int_0^\pi \cos s y(s)ds\neq 0$, то уравнение 1) не имеет решений.

Если $\lambda=-\frac{3}{4}$ и $\int_0^\pi \cos s y(s)ds=0$, то уравнение 1) имеет бесконечно много решений.

Задачи для самостоятельного решения

1. В пространстве $C[0,\pi]$ дано интегральное уравнение

$$x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(2t+3s)x(s)ds=y(t).$$

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C[0,\pi]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

2. В пространстве $C[0,\pi]$ дано интегральное уравнение

$$x(t)+\lambda\int_0^\pi \sin(3t+4s)x(s)ds=y(t).$$

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C[0,\pi]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

Домашнее задание

1. В пространстве $C[0,\pi]$ дано интегральное уравнение

$$x(t)+\lambda\int_0^{\pi}\sin(2t-3s)x(s)ds=y(t).$$

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C[0,\pi]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

2. В пространстве $C[0,\pi]$ дано интегральное уравнение

$$x(t)+\lambda\int_0^{\pi}\sin(t-2s)x(s)ds=y(t).$$

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C[0,\pi]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

Занятие 12
Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта

План занятия

1. Повторение теоретического материала
2. Подробное решение типовой задачи
3. Самостоятельное решение задач
4. Получение домашнего задания

Типовая задача

Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x=y$ в гильбертовом пространстве X, где $X=L_2[0,\pi]$, $Ax(t)=\int_0^{\pi}K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}$, $y\in X$.

Решение

Интегральный оператор A с симметричным и непрерывным ядром (ряд сходится равномерно) самосопряженный и вполне непрерывный. Найдем его собственные векторы и собственные значения. Рассмотрим образы синусов:

$$A\sin nt=\int_0^{\pi}K\left(t,s\right)\sin nsds=\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}\ \sin nsds=\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt\sin ks}{k^2}\ \sin nsds=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^2}\ \int_0^{\pi}\sin ks\sin nsds=\frac{\sin nt}{n^2}\int_0^{\pi}\sin^2 nsds=\frac{\pi}{2n^2}\sin nt.$$

Таким образом, система синусов является системой собственных векторов, ортогональной. Известно, что в пространстве $L_2[0,\pi]$ она является и полной.

Рассмотрим уравнение $\left(E+\lambda A\right)x=y$. Функции $x(t),y(t)$ разложим в ряды Фурье по системе синусов

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\sin kt\,,\quad y(t)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k\sin kt\ ,$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$x_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(t)\sin ktdt\,,\quad y_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y(t)\sin ktdt\,.$$

Подставим эти разложения в уравнение $\left(E+\lambda A\right)x=y$. Пользуясь тем, система синусов является собственной, получим

$$\left(E+\lambda A\right)x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k(1+\frac{\pi\lambda}{2k^2})\sin kt=\sum_{k=1}^{\infty}y_k\sin kt\,.$$

Приходим к бесконечной системе линейных уравнений

$$x_k(1+\frac{\pi\lambda}{2k^2})=y_k\ ,\ k=1,2,...$$

Если $1+\dfrac{\pi\lambda}{2k^2}\neq 0$ для всех k, то

$$x_k=\frac{y_k}{1+\dfrac{\pi\lambda}{2k^2}}\,,$$

поэтому уравнение имеет единственное решение

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{1+\dfrac{\pi\lambda}{2k^2}}\sin kt\,.$$

Если $1+\dfrac{\pi\lambda}{2n^2}=0$, $y_n\neq 0$, то условие $x_n\cdot 0=y_n$ не выполнимо и уравнение не имеет решений. Если $1+\dfrac{\pi\lambda}{2n^2}=0$ и $y_n=0$, то условие $x_n\cdot 0=0$ выполнено для любого x_n, поэтому уравнение имеет бесконечно много решений

$$x(t)=\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{y_k}{1+\dfrac{\pi\lambda}{2k^2}}\sin kt+c\sin nt\,,$$

где $c\in\mathbb{R}$ - произвольное.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ в гильбертовом пространстве X, где

$$X = L_2[0,\pi],\ Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s),\ K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^2},\ y \in X .$$

2. Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ в гильбертовом пространстве X, где

$$X = L_2[0,\pi],\ Ax(t) = \int_0^{1} K(t,s)x(s),\ K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 1 \le t \le s \le 1, \\ s(t-1), & 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}.$$

Домашнее задание

1. Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ в гильбертовом пространстве X, где

$$X = L_2[0,\pi],\ Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s),\ K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^4},\ y \in X .$$

2. Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ в гильбертовом пространстве X, где

$$X = L_2[0,\pi],\ Ax(t) = \int_0^{1} K(t,s)x(s),\ K(t,s) = \begin{cases} t(s+1), & 1 \le t \le s \le 1, \\ s(t+1), & 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}.$$

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: [учеб.пособие] / А.Н. Колмгоров, С.В. Фомин; МГУ им. М.В. Ломоносова.— 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.— 572с.

2. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин; пер. с англ. В.Я. Лина; под ред. Е.А.Горина.— 2-е изд., испр. и доп.— М., СПб., Краснодар: Лань, 2005.— 448с.

3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко.— 3-е изд., испр. — М.: УРСС, 2003.— 192с.

4. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.— 4-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург: Невский диалект, 2004.— 816с.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник / В. А. Треногин.— 4-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2007.— 488 с.
6. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб.пособие для вузов / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева.— 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2004.— 240с