МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2023 г., протокол № 5

И.о. заведующего кафедрой
__________________________Н.В. Ларин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студента
по дисциплине (модулю)
«Функциональный анализ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Перспективные методы искусственного интеллекта
в сетях передачи и обработки данных

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-03-23

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Иванов В.И., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н., профессор

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

I. Цели и задачи самостоятельных занятий студента

Целью изучения дисциплины «Функциональный анализ» является формирование математической культуры магистрантов, фундаментальная подготовка магистрантов в области функционального анализа, возникшего в результате взаимодействия и последующего обобщения на бесконечномерный случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры. Современная математика немыслима без функционального анализа. Идеи, концепции, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают все области математики, объединяя ее в единое целое.

Задачами дисциплины являются:

- освоение, изучение основных понятий, определений и утверждений функционального анализа,
- приобретение навыков решения и исследования линейных интегральных уравнений второго рода, других задач функционального анализа,
- изучение приложений функционального анализа в других математических дисциплинах.

Целями и задачами самостоятельной работы студента являются самостоятельное изучение разделов дисциплины, выполнение домашнего задания, подготовка к практическим занятиям и экзамену. Самостоятельная работа предусмотрена в объеме 141,75 час.

№ п/п	Наименование видов самостоятельной работы	Трудоемкость (час.)	Методические материалы
1	Самостоятельное изучение отдельных тем или разделов дисциплины:	40	
	1.1-1.3	6	[1,2,5]
	2.1-2.5	6	[1,2,5]
	3.1-3.3	6	[1,2,5]
	4.1-4.4	6	[1,2,5]
	4.6	8	[1,2,4]
	5.1-5.7	8	[1,2,5]
2	Выполнение индивидуального домашнего задания	47	[1,2,4,5]
3	Подготовка к практическим занятиям	24	[1,3,6]
4	Подготовка к экзамену	30,75	

II. Самостоятельное изучение разделов дисциплины

1. Метрические пространства

1.1. Понятие метрического пространства. Основные примеры.

1.2. Сходимость. Плотные подмножества. Открытые и замкнутые множества.

1.3. Полные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.

1.4. Принцип сжимающих отображений. Его применения.

2. Топологические пространства

2.1. Определение топологического пространства. Примеры. Сравнение топологий.

2.2. Системы окрестностей. База. Аксиомы счетности. Сходящиеся последовательности.

2.3. Непрерывные отображения топологических пространств.

2.4. Аксиома отделимости. Метризуемость.

2.5. Линейные топологические пространства. Примеры. Локально выпуклые пространства.

3. Компактность

3.1. Компактные топологические пространства. Критерий компактности. Свойства компактных пространств. Предкомпактные множества.

3.2. Непрерывные отображения компактных пространств. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах.

3.3. Счетная компактность. Связь с компактностью.

3.4. Компактность в метрическом пространстве. Полная ограниченность. Критерий Хаусдорфа.

4. Нормированные пространства

4.1. Определение нормированного пространства. Банаховы пространства. Примеры.

4.2. Линейные непрерывные функционалы. Норма линейного функционала. Первое и второе сопряженные пространства для нормированного пространства. Рефлексивные пространства. Примеры.

4.3. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

4.4. Слабая сходимость в нормированном пространстве. Критерий слабой сходимости.

4.6. Пространства $L_p[a,b]$. Описание предкомпактных множеств, линейных непрерывных функционалов в $L_p[a,b]$.

5. Линейные операторы

5.1. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма линейного оператора.

5.2. Пространство линейных операторов. Равномерная и сильная сходимости последовательности линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

5.3. Сопряженные и самосопряженные операторы. Норма самосопряженного оператора. Примеры.

5.4. Обратные операторы. Теорема Банаха. Обратимость оператора Е-А.

5.5. Спектр и резольвента линейного оператора. Примеры.

5.6. Вполне непрерывные операторы. Их свойства. Вполне непрерывные интегральные операторы.

5.7. Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывных операторов.

Вопросы для самопроверки

1. Понятие метрического пространства. Примеры.
2. Сходимость в метрическом пространстве. Предельные точки и точки прикосновения. Плотные подмножества.
3. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Их свойства. Связь между ними.
4. Критерий полноты метрического пространства.
5. Теорема Бэра. Множества 1-й и 2-й категории.
6. Теорема Кантора о пополнении метрического пространства.
7. Принцип сжимающих отображений. Метод последовательных приближений.
8. Применение принципа сжимающих отображений к решению уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений.
9. Применение принципа сжимающих отображений к решению интегральных уравнений.
10. Топологические пространства. Сравнение топологий. База топологического пространства.
11. Топологические пространства с 1-ой аксиомой счетности. Сходящиеся последовательности.
12. Топологические пространства со 2-ой аксиомой счетности. Сепарабельные топологические пространства.
13. Непрерывные отображения топологическогих пространств. Гомеоморфизм.
14. Аксиомы отделимости в топологических пространствах. Нормальные, регулярные и вполне регулярные пространства.
15. Метризуемость топологических пространств. Условие метризуемости.
16. Компактные топологические пространства. Критерий компактности.
17. Непрерывные отображения компактных пространств. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах.
18. Счетная компактность. Связь с компактностью.
19. Предкомпактные множества в пространствах $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.
20. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Примеры.
21. Линейные непрерывные функционалы. Норма линейного функционала.
22. Первое и второе сопряженные пространства для нормированного пространства. Рефлексивные пространства. Примеры.
23. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.
24. Слабая сходимость в нормированном пространстве. Критерий слабой сходимости.
25. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.

26. Счетно-нормированные пространства. Пространство бесконечно дифференцируемых функций. Пространство Шварца.

27. Обобщенные функции. Основные операции над обобщенными функциями.

28. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма линейного оператора.

29. Сопряженный оператор. Его норма. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

30. Сильная и равномерная сходимости линейных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

31. Линейные методы суммирования тригонометрических рядов Фурье в пространстве $C(T)$.

32. Непрерывная обратимость линейных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

33. Спектр и резольвента линейного оператора. Замкнутость спектра. Спектральный радиус.

34. Вполне непрерывные операторы. Их свойства.

35. Вполне непрерывные интегральные операторы.

36. Спектр вполне непрерывных операторов

III. Домашнее задание

Задача 1. Является ли отображение f нормой в нормированном пространстве X.

1.1. $X = C^2[0,1], \quad f(x) = |x(0)| + |x(1)| + \int_0^1 |x''(t)| dt$.

1.2. $X = C^2[0,1], \quad f(x) = |x(0)| + |x(1)| + \|x''\|_{C[0,1]}$.

1.3. $X = C^2[0,1], \quad f(x) = |x(0)| + |x'(1)| + \|x''\|_{C[0,1]}$.

1.4. $X = C^2[0,1], \quad f(x) = |x(1)| + \|x''\|_{C[0,1]}$.

1.5. $X = C^2[0,1], \quad f(x) = |x(0)| + \|x''(t)\|_{C[0,1]}$.

1.6. $X = C^1[0,1], \quad f(x) = \int_0^1 |x(t)| dt + \int_0^1 |x'(t)| dt$.

1.7. $X = C^1[0,1], \quad f(x) = \int_0^1 |x(t)| dt + \|x'(t)\|_{C[0,1]}$.

1.8. $X = C^1[0,1], \quad f(x) = |x(1)| + \|x'(t)\|_{C[0,1]}$.

1.9. $X = C^1[0,1], \quad f(x) = |x(1) - x(0)| + \|x'(t)\|_{C[0,1]}$.

1.10. $X = C^1[0,1], \quad f(x) = \|x'(t)\|_{C[0,1]}$.

Задача 2. Найти величину наилучшего приближения функции x^2 линейными функциями $\alpha x+\beta$ в пространстве $C\left[a,b\right]$.

2.1. $a=-4,\ \ b=-2$.

2.2. $a=-3,\ \ b=-2$.

2.3. $a=1,\ \ b=3$.

2.4. $a=1,\ \ b=2$.

2.5. $a=-1,\ \ b=3$.

2.6. $a=-1,\ \ b=2$.

2.7. $a=-2,\ \ b=0$.

2.8. $a=-1,\ \ b=0$.

2.9. $a=0,\ \ b=4$.

2.10. $a=0,\ \ b=3$.

Задача 3. Найти квадрат величины наилучшего приближения и элемент наилучшего приближения функции x^2 линейными функциями $\alpha x+\beta$ в пространстве $L_2\left[a,b\right]$.

3.1. $a=0,\ \ b=3$.

3.2. $a=0,\ \ b=4$.

3.3. $a=-1,\ \ b=0$.

3.4. $a=-2,\ \ b=0$.

3.5. $a=-1,\ \ b=2$.

3.6. $a=-1,\ \ b=3$.

3.7. $a=1,\ \ b=2$.

3.8. $a=1,\ \ b=3$.

3.9. $a=-3,\ \ b=-2$.

3.10. $a=-4,\ \ b=-2$.

Задача 4. Найти величину наилучшего приближения и элемент наилучшего приближения функции x^2 линейными функциями $\alpha x+\beta$ в пространстве $L\left[a,b\right]$.

4.1. $a=0,\ \ b=3$.

4.2. $a=0,\ \ b=4$.

4.3. $a=-1,\ \ b=0$.

4.4. $a=-2,\ \ b=0$.

4.5. $a=-1,\ \ b=2$.

4.6. $a=-1,\ \ b=3$.

4.7. $a=1,\ \ b=2$.

4.8. $a=1,\ \ b=3$.

4.9. $a=-3,\ \ b=-2$.

4.10. $a=-4,\ \ b=-2$.

Задача 5. Вычислить норму линейного функционала $f:X\to\mathbb{R}$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

5.1. $X=c_0,\ \ f\left(x\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}$.

5.2. $X = l_2, \ f(x) = x_1 + 2x_2$.

5.3. $X = l_1, \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(2 - \frac{1}{k}\right)x_k$.

5.4. $X = l_1, \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$.

5.5. $X = L_2[0,1], \ f(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}}dt$.

5.6. $X = L_1[-1,1], \ f(x) = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)x(t)dt$.

5.7. $X = C[-1,1], \ \int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)$.

5.8. $X = C[-1,1], \ 2\int_{-1}^{0} x(t)dt - 3\int_0^1 x(t)dt$.

5.9. $X = C[0,1], \ x(t) - x(1)$.

5.10. $X = C[-1,1], \ \int_{-1}^{1} t^2 x(t)dt$.

Задача 6. Найти общие решения уравнений в обобщенных функциях

6.1. $x^3 y' = 0$

6.2. $y'' - 9y = 2\delta(x)$

6.3. $xy''' = 0$

6.4. $y'' + 4y = 3\delta(x)$

6.5. $x^2 y''' = 0$

6.6. $y'' - y' - 2y = 2\delta(x)$

6.7. $x^3 y'' = 0$

6.8. $y'' + y' - 2y = 3\delta(x)$

6.9. $x^4 y' = 0$

6.10. $y'' - 5y' + 6y = \delta(x)$

Задача 7. Вычислить норму линейного оператора $A: X \to Y$ и указать элемент или последовательность элементов, на которых она достигается.

7.1. $Ax(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le 1/2 \\ 0, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

7.2. $Ax(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)x(t) : C[0,1] \to C[0,1]$.

7.3. $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{3}{4}x_2, \ldots, \left(1 - \frac{1}{2n}\right)x_n, \ldots\right) : l_2 \to l_2$.

7.4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}: l_1^3 \to l_1^3$.

7.5. $Ax(t)=2x(t)-3x\left(\frac{t}{2}\right): C[0,1] \to C[0,1]$.

7.6. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}: l_\infty^3 \to l_1^3$.

7.7. $Ax(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)x(t): L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

7.8. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}: l_\infty^3 \to l_\infty^3$.

7.9. $Ax(t)=x(t)+x(1-t)-2x\left(\frac{1}{2}\right): C[0,1] \to C[0,1]$.

7.10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}: l_1^3 \to l_\infty^3$.

Задача 8. Для последовательности линейных непрерывных операторов $A_n : X \to X$ указать предельный оператор и характер сходимости к нему (равномерная, сильная).

8.1. $A_n x(t)=x\left(t+\frac{\pi}{n}\right): C[0,2\pi) \to C[0,2\pi)$. Здесь $C[0,2\pi)$ – пространство непрерывных 2π -периодических функций.

8.2. $A_n x=\left(\frac{x_1}{n^2},\frac{x_2}{n^2},\ldots\right): l_2 \to l_2$.

8.3. $A_n x(t)=x\left(t^n-t^{n+1}\right): C[0,1] \to C[0,1]$.

8.4. $A_n x=\left(0,0,\ldots,x_{n+1,}x_{n+2},\ldots\right): l_2 \to l_2$.

8.5. $A_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k A^k}{k}: X \to X$. Здесь X – банахово пространство, $A\in\mathcal{L}(X)$, $\|A\|<1$.

8.6. $A_n x(t)=x\left(\frac{nt}{n+t}\right): C[0,1] \to C[0,1]$.

8.7. $A_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k A^k : X \to X$. Здесь X – банахово пространство, $A\in\mathcal{L}(X)$, $\|A\|<1$.

8.8. $A_n x(t)=x\left(\sqrt{n}t(1-t)^n\right): C[0,1] \to C[0,1]$.

8.9. $A_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{A^{2k}}{(2k)!}:X\to X$. Здесь X – банахово пространство, $A\in\mathcal{L}(X)$, $\|A\|<1$.

8.10. $A_nx(t)=x\left(t\left(1-\sqrt[n]{t}\right)\right):C[0,1]\to C[0,1]$.

Задача 9. Для линейного оператора $A:X\to X$ найти его сопряженный оператор и проверить его самосопряженность.

9.1. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$.

9.2. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^t tx(s)ds$.

9.3. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^t sx(s)ds$.

9.4. $A:l_2\to l_2$, $Ax(t)=(0,x_1,x_2,\ldots)$.

9.5. $A:l_2\to l_2$, $Ax(t)=(x_2,x_3,\ldots)$.

9.6. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=tx(t)$.

9.7. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$.

9.8. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1 (2t-3s)x(s)ds$.

9.9. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1 (t^2s+2s^3t)x(s)ds$

9.10. $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, $Ax(t)=\int_0^1 (t-2s\cos t)x(s)ds$

Задача 10. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $A:X\to X$ с областью определения $D(A)$.

10.1. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $Ax(t)=\int_0^\pi \sin(s+t)x(s)ds$.

10.2. $A:C[-\pi,\pi]\to C[-\pi,\pi]$, $Ax(t)=\int_{-\pi}^{\pi} \sin(s+t)x(s)ds$.

10.3. $A:C[-\pi,\pi]\to C[-\pi,\pi]$, $Ax(t)=\int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$.

10.4. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $Ax(t)=\int_0^\pi \cos(s+t)x(s)ds$.

10.5. $A:C[0,\pi]\to C[0,\pi]$, $Ax(t)=x''(t)$,

$D(A)=\left\{x\in C^2[0,\pi]\,|\,x(0)=x(\pi)=0\right\}$.

10.6. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = x''(t),$

$D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] \mid x'(0) = x'(\pi) = 0\}$.

10.7. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = x''(t),$

$D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] \mid x(0) = x(\pi), x'(0) = x'(\pi)\}$.

10.8. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = x''(t),$

$D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] \mid x(0) = x'(\pi) = 0\}$.

10.9. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = x''(t),$

$D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] \mid x'(0) = x(\pi) = 0\}$.

10.10. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi],\ Ax(t) = x''(t),$

$D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] \mid x'(0) = x(\pi), x(0) = x'(\pi)\}$.

Задача 11. Найти спектр $\sigma(A)$, спектральный радиус $r(A)$ и резольвенту $R_\lambda(A)$ линейного оператора $A: X \to X$ с областью определения $D(A)$.

11.1. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = tx(t)$.

11.2. $A: C[0,2\pi] \to C[0,2\pi],\ Ax(t) = e^{it}x(t)$.

11.3. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$.

11.4. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x'(t),$

$D(A) = \{x \in C^1[0,1] \mid x(0) = 0\}$.

11.5. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x'(t),$

$D(A) = \{x \in C^1[0,1] \mid x'(0) = 0\}$.

11.6. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

11.7. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (x_2, x_3, \ldots)$.

11.8. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (0, 2x_1, x_2, \ldots)$.

11.9. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (2x_2, x_3, \ldots)$.

11.10. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x'(t),.$

$D(A) = \{x \in C^1[0,1] \mid x(0) = x(1)\}$.

Задача 12. Найти спектр вполне непрерывного линейного оператора $A: X \to X$.

12.1. $X = C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t (t-s)x(s)ds$.

12.2. $X = C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t (1-ts)x(s)ds$.

12.3. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2}$.

12.4 $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \cos ks}{k^2}$.

12.5. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)ds, K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^2}$.

12.6. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \cos ks}{k^2}$.

12.7. $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (t+2s)x(s)ds$.

12.8. $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (2t+s)x(s)ds$.

12.9. $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (t-2s)x(s)ds$.

12.10. $X = C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (2t-s)x(s)ds$.

Задача 13. Доказать, что линейный оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратим и найти обратный оператор A^{-1}.

13.1. $Ax(t) = x(t) + 2\int_0^t x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.2. $Ax(t) = x(t) + 2\int_0^t sx(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.3. $Ax(t) = x(t) + 2\int_0^t (2s-1)x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.4. $Ax(t) = x(t) - 2\int_t^1 x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.5. $Ax(t) = x(t) + 4\int_t^1 sx(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.6. $Ax(t) = x(t) - 3\int_0^t x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.7. $Ax(t) = x(t) - 4\int_0^t sx(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.8. $Ax(t) = x(t) - 3\int_0^t (2s-1)x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.9. $Ax(t) = x(t) + 3\int_t^1 x(s)ds : C[0,1] \to C[0,1]$.

13.10. $Ax(t)=x(t)-2\int\limits_t^1 sx(s)ds:C[0,1]\to C[0,1]$.

Задача 14. В пространстве $C[0,\pi]$ дано интегральное уравнение $(E+\lambda A)x(t)=y(t)$.

1) При каких λ уравнение имеет единственное решение для любой функции $y\in C[0,\pi]$?

2) При каких λ и y уравнение имеет бесконечно много решений?

3) При каких λ и y уравнение не имеет решения?

14.1. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(t+2s)x(s)ds=y(t)$.

14.2. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(2t+s)x(s)ds=y(t)$.

14.3. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(t-2s)x(s)ds=y(t)$.

14.4. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(s-2t)x(s)ds=y(t)$.

14.5. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(2t+3s)x(s)ds=y(t)$.

14.6. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(3t+2s)x(s)ds=y(t)$.

14.7. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(2t-3s)x(s)ds=y(t)$.

14.8. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(2s-3t)x(s)ds=y(t)$.

14.9. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(3t+4s)x(s)ds=y(t)$.

14.10. $x(t)+\lambda\int\limits_0^\pi \sin(4t+3s)x(s)ds=y(t)$.

Задача 15. В пространстве X исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x=y$.

15.1. $X=C[-1,1]$, $Ax(t)=\int\limits_{-1}^1 stx(s)ds$, $y(t)=\beta t+\gamma$.

15.2. $X=C[-1,1]$, $Ax(t)=\int\limits_{-1}^1 stx(s)ds$, $y(t)=\alpha t^2+\gamma$

15.3. $X=C[0,\pi]$, $Ax(t)=\int\limits_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds$, $y(t)=\alpha\sin t+\beta$.

15.4. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds$, $y(t) = \alpha\cos+\beta$

15.5. $X = C[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} (t^2-2st)x(s)ds$, $y(t) = \alpha t^2+\beta$.

15.6. $X = C[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} (t^2-2st)x(s)ds$, $y(t) = \alpha t+\beta$

15.7. $X = C[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} (3t^2+st-5s^2t^2)ds$, $y(t) = \alpha t$

15.8. $X = C[-1,1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^{1} (3t^2+st-5s^2t^2)ds$, $y(t) = \alpha t^2$.

15.9. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$, $y(t) = \alpha\cos t+\beta$.

15.10. $X = C[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+s)x(s)ds$, $y(t) = \alpha\sin+\beta$.

Задача 16. Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта, исследовать и решить интегральное уравнение 2-го рода $(E+\lambda A)x = y$ в гильбертовом пространстве X.

16.1. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^2}$, $y \in X$.

16.2. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^2}$, $y \in X$.

16.3.. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^3}$, $y \in X$

16.4.. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^3}$, $y \in X$

16.5. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{1} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \begin{cases} t(s-1), & 1 \le t \le s \le 1, \\ s(t-1), & 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$
$y \in X$.

16.6. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{1} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \begin{cases} t(s+1), & 1 \le t \le s \le 1, \\ s(t+1), & 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$
$y \in X$.

16.7. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^4}$, $y \in X$.

16.8. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^4}$, $y \in X$.

16.9. $X = L_2[0,\pi]$, $Ax(t) = \int_0^{\pi} K(t,s)x(s)$, $K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt \sin ks}{k^5}$, $y \in X$.

16.10. $X = L_2\left[0,\pi\right],\ \ Ax(t) = \int\limits_0^{\pi} K(t,s)x(s),\ \ K(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt \cos ks}{k^5},\ \ y \in X$.

IV. Рекомендуемая литература

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: [учеб.пособие] / А.Н. Колмгоров, С.В. Фомин; МГУ им. М.В. Ломоносова.— 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.— 572с.

2. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин; пер. с англ. В.Я. Лина; под ред. Е.А.Горина.— 2-е изд., испр. и доп.— М., СПб., Краснодар: Лань, 2005.— 448с.

3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко.— 3-е изд., испр. — М.: УРСС, 2003.— 192с.

4. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов.— 4-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург: Невский диалект, 2004.— 816с.

5. Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник / В. А. Треногин.— 4-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2007.— 488 с.

6. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб.пособие для вузов / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева.— 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2004.— 240с.

V. Форма отчетности

По изучаемым темам предусмотрены вопросы в билетах для экзамена и выполнение домашнего задания.