МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2023 г., протокол № 5

И.о. заведующего кафедрой
__________________________Н.В. Ларин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Дополнительные главы исследования операций»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Перспективные методы искусственного интеллекта
в сетях передачи и обработки данных

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-03-23

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

Смирнов О.И., доцент каф. ПМиИ, к.ф.-м.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Содержание

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. Экстремальные свойства. Необходимые условия существования локальных минимумов. Экстремальные свойства на выпуклых множествах

I. Цель работы.

Изучение экстремальных свойств на выпуклых множествах

II. Теоретическая справка.

Предположение о возможности описать зависимости между управляемыми переменными с помощью линейных функций далеко не всегда адекватно природе моделируемого объекта. Например, в линейных моделях цена товара считается независимой от количества произведенного продукта, однако в повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что она может зависеть от объема партии товара. Аналогичные замечания могут быть сделаны и по поводу технологических ограничений: расход определенных видов сырья и ресурсов происходит не линейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства). Попытки учесть эти факторы приводят к формулировке более общих и сложных оптимизационных задач. Изучение методов их решения составляет предмет научной области, получившей названия *нелинейного программирования.*

Общая задача нелинейного программирования (ОЗНП) определяется как задача нахождения максимума (или минимума) целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве D, определяемом системой ограничений

$$D = \left\{ x \in R^n, \left| \begin{array}{c} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, i \in 1:r \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i \in r+1:m \end{array} \right. \right\} \tag{2.1}$$

где *хотя бы одна* из функций f или g_i является нелинейной.

По аналогии с линейным программированием ЗНП однозначно определяется парой (D,f) и кратко может быть записана в следующем виде

$$f(x) \to \max,\ D = \left\{ x \in R^n, \left| \begin{array}{c} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, i \in 1:r \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i \in r+1:m \end{array} \right. \right\} \tag{2.2}$$

Также очевидно, что вопрос о типе оптимизации не является принципиальным. Поэтому мы, для определенности, в дальнейшем по умолчанию будем рассматривать задачи максимизации.

Как и в ЗЛП, вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in D$ называется *допустимым планом,* а если для любого $x \in D$ выполняется неравенство $f(x^*) \ge f(x)$, то x^* называют *оптимальным планом.* В этом случае x^* является точкой глобального максимума.

С точки зрения экономической интерпретации *f(x)* может рассматриваться как доход, который получает фирма (предприятие) при плане выпуска *x,* а $g_i(x) \le 0$ как технологические ограничения на возможности выпуска продукции. В данном случае они являются обобщением ресурсных ограничений в ЗЛП $(a_i x - b_i \le 0)$

Задача (2.2) является весьма общей, т. к. допускает запись логических условий, например:

$$[(g_1(x) \le 0) \Rightarrow (g_2(x) > 0)] \Leftrightarrow [g_1(x) + y^2 g_2(x) > 0, y \in R],$$

или запись условий дискретности множеств:

$$[(x = 0) \vee (x = 1)] \Leftrightarrow [x^2 - x = 0]$$

Набор ограничений, определяющих множество *D,* при необходимости всегда можно свести либо к системе, состоящей из одних неравенств:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ -g(x) \ge 0, \end{cases}$$

либо, добавив фиктивные переменные *y,* к системе уравнений:

$$g(x) \ge 0 \Leftrightarrow g(x) - y^2 = 0.$$

Перечислим свойства ЗИП, которые существенно усложняют процесс их решения по сравнению с задачами линейного программирования:

1. Множество допустимых планов *D* может иметь очень сложную структуру (например, быть невыпуклым или несвязным).
2. Глобальный максимум (минимум) может достигаться как внутри множества *D,* так и на его границах (где он, вообще говоря, будет не совпадать ни с одним из локальных экстремумов).
3. Целевая функция *f* может быть недифференцируемой, что затрудняет применение классических методов математического анализа.

В силу названных факторов задачи нелинейного программирования настолько разнообразны, что для них не существует общего метода решения.

III. Задание

Получить индивидуаьное задание, сформулированное словесно. Построить модель. Проверить, является ли она линейной. Если нет – является ли она выпуклой.

IV. Выполнение.

Проверка может осуществляться как вручную, так и с помощью любого пакета прикладных программ.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: задание, построенная модель, её исследование, выводы о линейности или нелинейности – и о выпуклости.

VI. Контрольные вопросы.

1. Что такое выпуклое множество.
2. Что такое выпуклая функция.
3. Может ли квадратичная задача быть выпуклой.
4. Может ли квадратичная задача быть невыпуклой.
5. Есть ли способы свести выпуклую задачу к линейной.

VII. Библиографический список

1. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике—СПб: Питер, 2000. — 208 с.: ил..

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. Достаточные условия оптимальности. Теория множителей Лагранжа, теорема Куна-Таккера

I. Цель работы.

Изучение достаточных условий оптимальности.

II. Теоретическая справка.

Одним из наиболее общих подходов к решению задачи поиска экстремума (локального максимума или минимума) функции при наличии связующих ограничений на ее переменные (или, как еще говорят, *задачи условной оптимизации)* является **метод Лагранжа.** Многим читателям он должен быть известен из курса дифференциального исчисления. Идея данного метода состоит в сведении задачи поиска условного экстремума целевой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.3)$$

на множестве допустимых значения D, описываемом системой уравнений

$$D: \begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

к задаче безусловной оптимизации функции

$$\Phi(x,u) = f(x_1,x_2,...,x_n)+u_l g_l(xi,x_2,...,x_n)+...+u_n g_m(x_l,x_2,...,x_n),$$
(2.5)

где $u \in R^m$ — вектор дополнительных переменных, называемых *множителями Лагранжа.* Функцию *Ф(х,u),* где $x \in R^m$, $u \in R^m$, называют *функцией Лагранжа.* В случае дифференцируемое™ функций *f* и g_i справедлива теорема, определяющая необходимое условие существования точки условного экстремума в задаче (2.3)-(2.4). Поскольку она непосредственно относится к предмету математического анализа, приведем ее без доказательства.

Теорема 2.1. *Если x^* является точкой условного экстремума функции* (2.3) *при ограничениях* (2.4) *и ранг матрицы первых частных производных функций*

$$\left\| \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$$

равен m, то существуют такие $u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*$*, не равные одновременно нулю, при которых*

$$\nabla \Phi\left(x^*, u^*\right) = \nabla f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i\left(x^*\right) = 0$$

(2.6)

Из теоремы (2.1) вытекает метод поиска условного экстремума, получивший название метода множителей Лагранжа, или просто **метода Лагранжа.** Он состоит из следующих этапов.

1. Составление функции Лагранжа *Ф(x,u).*
2. Нахождение частных производных

$$\frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial x_j}\left(j \in 1:n\right) \text{ и } \frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u_i}\left(i \in 1:m\right)$$

3. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(x,u)}{\partial x_j} = 0, \left(j \in 1:n\right); \\ \dfrac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u_i} = g_i(x) = 0, \left(i \in 1:m\right) \end{cases} \qquad (2.7)$$

относительно переменных *x* и *u.*

4. Исследование точек, удовлетворяющих системе (2.7), на максимум (минимум) с помощью достаточного признака экстремума.

Присутствие последнего (четвертого) этапа объясняется тем, что теорема (2.1) дает необходимое, но не достаточное условие экстремума. Положение дел с достаточными признаками условного экстремума обстоит гораздо сложнее. Вообще говоря, они существуют, но справедливы для гораздо более частных ситуаций (при весьма жестких предпосылках относительно функций f и g_i) и, как правило, трудноприменимы на практике. Еще раз подчеркнем, что основное практическое значение метода Лагранжа заключается в том, что он *позволяет перейти от условной оптимизации к безусловной* и, соответственно, расширить арсенал доступных средств решения проблемы. Однако нетрудно заметить, что задача решения системы уравнений (2.7), к которой сводится данный метод, в общем случае не проще исходной проблемы поиска экстремума (2.3)-(2.4). Методы, подразумевающие такое решение, называются *непрямыми.* Они могут быть применены для весьма узкого класса задач, для которых удается получить линейную или сводящуюся к линейной систему уравнений (2.7). Их применение объясняется необходимостью получить решение экстремальной задачи в аналитической форме (допустим, для тех или иных теоретических выкладок). При решении конкретных практических задач обычно используются *прямые* методы, основанные на итеративных процессах вычисления и сравнения значений оптимизируемых функций.

III. Задание.

Задачу, построенную при выполнении первой лабораторной работы, решить методом Лагранжа.

IV. Выполнение.

При решении можно использовать в качестве вспомогательного любой прикладной математический пакет. Проанализировать результаты решения, сделать выводы.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: задача, результаты решения, выводы.

VI. Контрольные вопросы.

1. Где применяется метод Лагранжа.
2. Необходимое условие существования точки условного экстремума.
3. Достаточное условие экстремума.
4. Исследование найденных точек на достаточное условие.

VII. Библиографический список

1. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике—СПб: Питер, 2000. — 208 с.: ил..

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. Двойственность в выпуклом программировании

I. Цель работы.

Изучение свойств двойственности и их практического использования.

II. Теоретическая справка.

Двойственность в нелинейном программировании

Понятие седловой точки. Кратко остановимся на некоторых фундаментальных моментах теории нелинейного программирования. Отправной точкой для них является распространение метода Лагранжа для решения ЗИП с ограничениями в форме неравенств:

$$f(x) \to \max, D = \{x \in X | g_i(x_{1,} x_2, ..., x_n) \le 0, i \in 1:m\} \qquad (2.28)$$

где X — некоторая область в пространстве R^n.

По аналогии с п. 2.1.2 определим для задачи (2.28) функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,u) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.29)$$

►*Пара векторов* $(\bar{x}, \bar{u})$ *называется* **седловой точкой** *функции Ф (x, u) в некоторой области* $X \times U$ *, если для любых* $x \in X$ *u* и $\in U$

$$\Phi(\bar{x}, \bar{u}) \le \Phi(\bar{x}, \bar{u}) \le \Phi(\bar{x}, u) \qquad (2.30)$$

Неравенства (2.30) также называют *неравенствами седловой точки.*

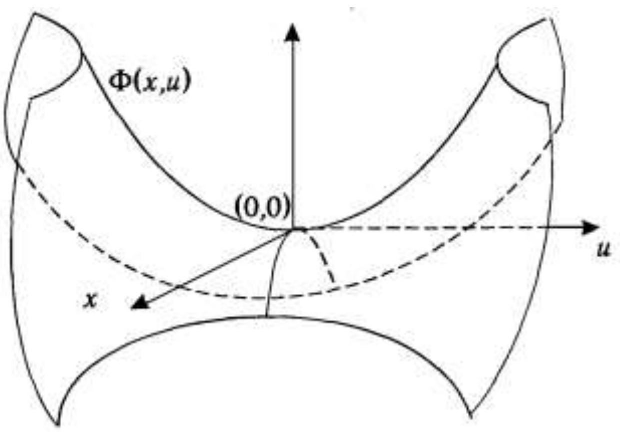


Рис. 2.7

В качестве примера седловой точки может быть приведена точка (0, 0) для функции *Ф(х, u) = - x^2 + u^2,* определенной на множестве $R \times R$. В самом деле, *Ф(0,0) = 0*, *Ф(х,0) = -x^2,* Ф(0, *u) = u^2,* а для любых $x \in R$ и $u \in R$ выполняются неравенства $-x^2 \le 0$ и $0 \le u^2$.

На *рис. 2.7* изображен график функции *Ф(х, u)* (гиперболический параболоид), и, как видно, в окрестности точки (0, 0) он действительно по форме напоминает седло, чем и объясняется происхождение соответствующего термина.

Теорема Куна — Танкера. Центральное место в теории нелинейного программирования занимает теорема Куна — Таккера, которая связывает решение ЗНП с наличием седловой точки у соответствующей функции Лагранжа.

Теорема 2.3. **(Достаточное условие экстремума).** *Если* $(\bar{x},\bar{u})$ *— седловая точка функции Лагранжа, в области* $x \in X \supseteq D$, $u \ge 0$, *то* $\bar{x}$ *является оптимальным планом задачи* (2.28), *причем справедливо так называемое* **правило дополняющей нежесткости:**

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0 \qquad (2.31)$$

Доказательство.

По определению седловой точки

$$f(x) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x) \le f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) \le f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\bar{x}) \qquad (2.32)$$

при всех $x \in X$, $u \ge 0$. Из второго неравенства в (2.32) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\bar{x}) \le \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}), \text{ для } u \ge 0 \qquad (2.33)$$

Однако (2.33) может иметь место только тогда, когда $g_i(\bar{x}) \le 0$ при всех $i \in 1{:}m$. Действительно, если существует такое *k,* что $g_k(\bar{x}) > 0$, то, положив $u_i = 0$ для всех $i \ne k$ и выбрав достаточно большое $u_k > 0$, можно добиться того, что значение

$$\sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\bar{x}) = u_k g_k(\bar{x})$$

окажется больше постоянного выражения

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x})$$

Из того, что для всех *i*∈*1:m* выполняются неравенства $g_i(\bar{x}) \le 0$ следует, что $\bar{x}$ является допустимым планом задачи (2.28).

Если в левую часть неравенства (2.33) подставить значения $u_i = 0$, *i*∈*1:m,* то получим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) \ge 0$$

Вместе с тем из того что, $g_i(\bar{x}) \le 0$ и $\overline{u_i} \ge 0$, следует оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) \le 0$$

Совместное рассмотрение последних двух неравенств приводит к правилу дополняющей нежесткости в точке $\bar{x}$*:*

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$$

Тогда на основании левой части неравенства седловой точки (2.32) имеем, что для всех *x* ∈ *X* (в том числе и для *x* ∈ *D*)

$$f(\bar{x}) \ge f(x) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x)$$

По условию ЗИП для любых *x* ∈ *D* верны неравенства $g_i(\bar{x}) \le 0$, что, в сочетании с условием $\overline{u_i} \ge 0$, позволяет записать

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x) \le 0$$

Значит,

$$f(x) - \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(x) \ge f(x)$$

Окончательно получаем, что для любых *x*∈ *D* справедливо со-отношение $f(\bar{x}) \ge f(x)$*,* т.е. $\bar{x}$ — оптимальный план задачи (2.28). ▲

Утверждение, обратное теореме (2.3), т. е. необходимое условие экстремума в ЗНП, оказывается верным только при выполнении дополнительных условий, которым должна удовлетворять задача (2.28). Важнейшим из них является так называемое условие регулярности Слейтера:

►*Говорят, что функция $g_i(x)$, задающая ограничение в задаче* (2.28), *удовлетворяет условию регулярности Слейтера, если существует такая точка $\tilde{x}$, принадлежащая области допустимых, планов D, что*

$$g_i(\tilde{x}) < 0$$

т. е. $\tilde{x}$ является внутренней точкой относительно ограничения $g_j(x)$. Поэтому данное условие также называют условием *телесности.*

Вообще говоря, существуют разные варианты необходимого условия Куна—Таккера. Приведем один из них.

Теорема 2.4. **(Необходимое условие наличия экстремума).**

Если (D, f) является задачей выпуклого программирования с решением $\bar{x}$, ее целевая функция f(x) и функции ограничений $g_i(x)$ — дифференцируемы, нелинейные ограничения в форме неравенств удовлетворяют условию регулярности Слейтера, то существует такой вектор $\bar{u} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{u})$ — седловая точка функции Лагранжа Ф (x, u).

Мы не будем здесь приводить доказательство теоремы (2.4), которое является довольно сложным. Заинтересованный читатель может найти его в таких источниках, как [1, 13].

Значение теоремы Куна—Таккера состоит в том, что она позволяет связать процесс решения оптимизационной задачи с поиском седловых точек функции Лагранжа, т. е., грубо говоря, с максимизацией этой функции по *x* и минимизацией по *u*.

Определим *F(x) как* функцию, ставящую в соответствие каждому значению *x* минимальное значение функции *Ф(x,u)* по *u:*

$$F(x) = \min_{u \geq 0} \Phi(x, u)$$

и по аналогии

$$G(u) = \max_{x \in X} \Phi(x, u)$$

Рассмотрим задачу отыскания максимума функции *F(x)*

$$F(x) = \min_{u \geq 0} \Phi(x, u) \to \max, \ x \in X \tag{2.34}$$

и задачу минимизации *G(u)*

$$G(u) = \max_{x \in X} \Phi(x, u) \to \min, \ u \geq 0 \tag{2.35}$$

Очевидно, что

$$F(x)=\min_{u\geq 0}\Phi(x,u)=\begin{cases} f(x), x\in D \\ \infty, x\notin D\end{cases}$$

Отсюда следует, что максимум *F(x)* находится в допустимой области *D* и совпадает с максимумом целевой функции *f(x)* задачи (2.28):

$$\max_{x\in X}F(x)=\max_{x\in X}\min_{u\geq 0}\Phi(x,u)=\max_{x\in D}f(x)$$

Таким образом, задача (2.34), в определенном смысле, равносильна (2.28). Аналогичные выводы могут быть получены и для (2.35). Задачи (2.34) и (2.35) образуют двойственную пару. Как нетрудно догадаться, данное отношение является обобщением отношения двойственности для задач линейного программирования. Соответственно, при определенных условиях пара двойственных задач нелинейного программирования обладает свойствами, аналогичными свойствам двойственных линейных задач. В частности, при любых $x\in X$, $u\geq 0$

$$F(x)\leq G(u) \tag{2.36}$$

Условие (2.36) находит широкое применение при построении оценок в итеративных методах решения оптимизационных задач. Например, если имеется возможность приблизительно решить прямую и двойственную задачи и получить последовательности приближений $\{x^{(q)}\}$ и $\{u^{(q)}\}$, то с помощью неравенств вида

$$f\left(x^{(q)}\right)\leq f\left(x^{*}\right)\leq G\left(u^{(q)}\right)$$

можно определить момент остановки вычислительной процедуры.

В заключение отметим, что возможен вариант вывода выражений для целевых функций и ограничений пары двойственных задач линейного программирования из общего определения отношения двойственности для нелинейных задач. Также отметим, что в процессе формирования нелинейных двойственных задач существует большая неоднозначность: их вид можно варьировать, включая в множество *X* часть ограничений $g_i(x)\leq 0$.

III. Задание

Построить задачу, двойственную к решавшейся в предыдущих лабораторных работах. Решить её, пользуясь свойством двойственности и зная решение исходной задачи.

IV. Выполнение.

При решении использовать теорему Куна-Таккера.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: исходная задача, двойственная задача, решение, анализ полученного результата.

VI. Контрольные вопросы.

1. В чём отличие двойственной задачи нелинейного программирования – от линейного.
2. Какое практическое значение теоремы Куна-Таккера.
3. Что такое седловая точка.
4. У всякой ли задачи выпуклого программирования есть седловая точка
5. Как связана двойственная задача с достаточным условием экстремума.

VII. Библиографический список

2. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике—СПб: Питер, 2000. — 208 с.: ил..

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 Кооперативные игры. Основные понятия и определения. Методы решения кооперативных игр

I. Цель работы.

Приобретение навыков решения кооперативных игр.

II. Теоретическая справка.

Достаточно часто на практике возникают ситуации, когда выигрыш одного игрока не равен в точности проигрышу другого. Например: 2 фирмы извлекают прибыль из нескольких рынков, и если одна фирма своими действиями помешает другой получить какой-то доход, то это вовсе не означает, что она сама этот доход получит. Такие игры называют также неантагонистическими или играми с ненулевой суммой.

Пусть игроку **A** доступно ***m*** стратегий, которые обозначим как $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_m}$. Соответственно игроку **B** доступно ***n*** стратегий, которые обозначим как $\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_n}$. Если игрок **A** выберет стратегию $\boldsymbol{A_i}$, а $\boldsymbol{B}$ –стратегию $\boldsymbol{B_j}$, то эта пара стратегий ($\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{B_j}$) определяет выигрыш каждого из игроков.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица **A** определяет выигрыш игрока **A** для каждой пары стратегий.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица ***B*** определяет выигрыш игрока ***B*** при той же паре стратегий. В ряде игр эти матрицы записываются в виде общей матрицы:

$$\begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & (a_{12},b_{12}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ (a_{21},b_{21}) & (a_{22},b_{22}) & \cdots & (a_{2n},b_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & (a_{m2},b_{m2}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что все биматричные игры можно рассматривать как частный случай матричных, где $\boldsymbol{b_{ij}=-a_{ij}}$. Соответственно если хотя бы для одной пары стратегий ($\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{B_j}$) это условие не выполняется, то игру можно рассматривать только как биматричную.
Особенность биматричных игр – в отличие от матричных, нет «непримиримого противоречия» между игроками. Поэтому в принципе возможны их согласованные действия. В связи с этим игры делят на кооперативные, в которых игроки могут договариваться о совместных действиях и осуществлять их, и некооперативные – когда возможность договариваться не предусмотрена. Для начала рассмотрим некооперативные игры.
Второй важной особенностью является то, что для биматричных игр нет единого понимания того, что именно считать «оптимальным решением». Есть несколько разных подходов, которые мы и рассмотрим.

Третья особенность заключается в том, что наличие решения в чистых стратегиях не отрицает возможности решения и в смешанных стратегиях. Поэтому не выделяется отдельным этапом поиск решения в чистых стратегиях. Сразу ищем в смешанных, то есть в виде $S_A{}^* = (p_1,...,p_m)$, $S_B{}^* = (q_1,...,q_n)$. Чистые стратегии таким образом будем искать только как частный случай смешанных. Паре стратегий будет соответствовать также пара выигрышей. Мы отдельно рассматриваем выигрыши первого и второго игроков:

$$H_A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j, \qquad H_B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, p_i q_j\,. \qquad (1)$$

4.1. Равновесие по Нэшу

Определение. Точкой равновесия по Нэшу называется пара стратегий $S_A{}^*$ и $S_B{}^*$, обладаюшие следующим свойством: если игрок отступает от своей равновесной стратегии в ситуации, когда другой игрок придерживается своей равновесной стратегии, то этот игрок не получает никаких преимуществ, отклоняясь от своей равновесной стратегии, выигрыш уменьшается или в лучшем случае остаётся тем же.

Такой критерий называют ещё критерием «чистого эгоизма». Игрок, отступая от точки равновесия, теряет в своём выигрыше. Что при этом происходит с выигрышем другого игрока, вообще никак не учитывается. Он может уменьшиться, остаться прежним или вообще увеличиться. В данном случае это не имеет значения.

Для поиска точек равновесия сначала рассмотрим наиболее простой вариант – игры, в которых у каждого игрока только две стратегии.

Биматричные игры 2х2

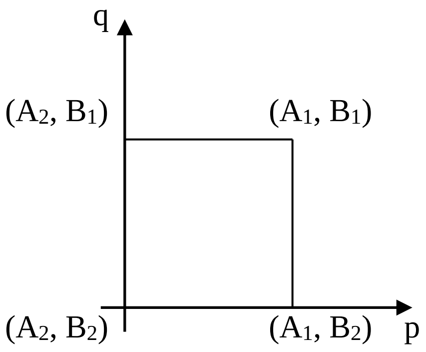
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

В данном случае любую смешанную стратегию игрока можно однозначно задать одним числовым показателем. Для первого игрока это будет $A: 0 \le p \le 1$.

Соответственно вероятности будут равны $p_1 = p,$ и $p_2 = 1 - p$. Крайние значения дадут нам $p = 0 \Rightarrow A_1$ (чистая стратегия), $p = 1 \Rightarrow A_2$ (чистая стратегия). Если же $0 < p < 1 \Rightarrow$ смешанная стратегия.

Аналогично для второго игрока это будет $B: 0 \le q \le 1$. Здесь получаем вероятности $q_1 = q,$ и $q_2 = 1 - q$. При значениях $q = 0 \Rightarrow B_1$ (чистая стратегия), $q = 1 \Rightarrow B_2$ (чистая стратегия), и $0 < q < 1 \Rightarrow$ смешанная стратегия.

Любая пара стратегий игроков задаётся таким образом парой координат точки (p, q). Всё множество допустимых стратегий составляет единичный квадрат. Его вершины – 4 пары чистых стратегий. Внутренние точки – пары смешанных стратегий. Рёбрам соответствует ситуация, когда у одного из игроков чистая стратегия, у другого смешанная…



Точки равновесия будем искать в виде (p*, q*). Средний выигрыш игроков можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} H_A(p,q) &= a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-q)(1-p) \\ H_B(p,q) &= b_{11}qp + b_{12}p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q) \end{aligned} \quad (2)$$

Запишем в приведённых терминах требование равновесия по Нэшу.

Определение. Будем говорить, что пара чисел (p^*, q^*), $0 \le q^* \le 1$, $0 \le p^* \le 1$, определяет равновесную стратегию, если $\forall(p, q)$ подчинённых условиям $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ одновременно выполняются следующие равенства:

$$H_A(p, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \quad (3)$$

$$H_B(p^*, q) \le H_B(p^*, q^*) \quad (4)$$

Неравенства (3)-(4) очень слабо пригодны для построения алгоритма поиска решения, поскольку слишком много надо сравнивать.

Однако, если рассмотреть формулы (1), (2), можно Заметить, что они зависят от p и q «почти линейно». Имеется ещё произведение p q. Отсюда можно вывести более простые условия.

Теорема. требования

$H_A(p, q^*) \le H_A(p^*, q^*)$, $H_B(p^*, q) \le H_B(p^*, q^*)$,

равносильны выполнению неравенств:

$$\begin{cases} H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \\ H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} H_B(p^*, 0) \le H_B(p^*, q^*) \\ H_B(p^*, 1) \le H_B(p^*, q^*) \end{cases} \quad (6)$$

Эти неравенства позволяют построить уже вполне работоспособный алгоритм поиска решения, поскольку требуется всего четыре сравнения.

Алгоритм поиска решения Средний выигрыш игроков 1и 2 запишем в удобной форме:

$$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} \quad (7)$$

$$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22} \quad (8)$$

Если в неравенствах (5)-(6) из правой части вычесть левую, то полученные разности должны быть больше нуля.

$H_A(p,q) = H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$ Обозначим
$-(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} - a_{12} - (a_{21} - a_{22})q - a_{22}$

$\alpha = a_{22} - a_{12}$

$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$

С учётом этих обозначений получим

$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0$

$H_A(p,q) - H_A(0,q) = p(Cq - \alpha) \geq 0$

Если аналогичный вывод поделать для H_B, введя обозначения: $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta = b_{22} - b_{21}$

то получим:

$H_B(p,q) - H_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta) \geq 0$

$H_B(p,q) - H_B(p,0) = q(Dp - \beta) \geq 0$

Таким образом, для того, чтобы в биматричной игре пара стратегий (p, q) определяла равновесие необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq - \alpha) \geq 0 \\ p(Cq - \alpha) \geq 0 \\ (q-1)(Dp - \beta) \geq 0, \\ q(Dp - \beta) \geq 0 \\ 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Где $\begin{cases} C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \\ \alpha = a_{22} - a_{12} \\ D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \\ \beta = b_{22} - b_{21} \end{cases}$

Вывод: если C и D не равны нулю, то легко видеть, что точки равновесия определяются формулами:

$$p = \frac{\beta}{D}, \quad q = \frac{\alpha}{C} \quad p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, \quad q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

Таким образом, равновесие каждого игрока определяется элементами матрицы его противника. Заметим, что такого требования мы не вводили, но в итоге получилось, что равновесие игроков определяется не желанием максимизировать свой выигрыш, а в первую очередь желанием удержать под контролем выигрыш противника.

Если поменять элементы в A, это никак не скажется на равновесной стратегии игрока A, но заставит поменять стратегию игрока B.

Таким образом хотя биматричные игры называются неантагонистическими, так как у нас нет антагонизмов интересов, но мы обнаруживаем антагонизм поведения.

Кроме того заметим, что подобные задачи обладают свойством «устойчивости относительно малых изменений». То есть, если слегка изменять те или иные цифры в матрице, то картинка расположения точек равновесия будет смещаться не значительно.

При составлении матриц игры мы часто используем достаточно условные цифры, выражающие, например, степень довольства или недовольства игроков в той или иной ситуации. Но благодаря описанному свойству решение мы получаем достаточно точное.

4.2. Оптимальность по Парето

Критерий Парето принципиально отличается от критерия Нэша. Если там каждый игрок, действуя сам по себе, добивался максимально выгодного для себя исхода, то здесь игроки, действуя совместно, стараются найти решение, максимально устраивающее их обоих.

В данном разделе мы по прежнему рассматриваем ситуацию, когда переговоры невозможны, т.е. если игрок применяет смешанную стратегию, то это действительно каждый раз ход неожиданный для противника.

Отличие ситуации оптимальности по Парето вот в чём: если в ситуации равновесия по Нэшу ни один из игроков действуя в одиночку не мог увеличить свой собственный выигрыш, то в ситуации оптимальной по Парето игроки действуя совместно не могут увеличить выигрыш хотя бы одного из них без того, чтобы выигрыш другого не уменьшился. Применительно к биматричной игре 2х2 ситуацию $\left(p^*, q^*\right)$ назовём оптимальной по Парето, если из того, что для некоторой точки (p, q). одновременно выполняются условия $H_A\left(p^*, q^*\right) \leq H_A(p, q)$ и $H_B\left(p^*, q^*\right) \leq H_B(p, q)$ следует, что $(p, q) = \left(p^*, q^*\right)$.

Для нахождения решения используется координатная плоскость V0W, где $V = H_A$, $W = H_B$. То есть по координатным осям откладываются выигрыши первого и второго игрока соответственно.

Очевидно, что любая пара стратегий игроков $\left(S_A, S_B\right)$ однозначно проектирутся в некоторую точку плоскости с координатами (V,W). Соответствие не является взаимно однозначным, то есть произвольной точке (V,W) этой плоскости может соответствовать одна пара стратегий $\left(S_A, S_B\right)$, несколько пар – или вообще не соответствовать ни одной из допустимых пар стратегий.

Теперь спроектируем на плоскость всё множество допустимых стратегий. Если рассматривать игры размерности 2х2, то проектируется ранее рассмотренный единичный квадрат. Для игр большей размерности это более сложное множество. В итоге получаем на плоскости некоторую связанную геометрическую фигуру. Характерно, что для некооперативных игр эта фигура вовсе не обязательно является выпуклой.

На этой фигуре выделяем поверхность Парето так, как это описано в первой главе. Если она содержит более чем одну точку, то окончательное решение принимаем, например, методом идеальной точки.

В итоге получаем точку с координатами (V*,W*). На последнем этапе нам требуется найти пару стратегий $\left(S_A^*, S_B^*\right)$, проекцией которых и является эта точка. Решение может быть единственным или не единственным.

III. Задание.

Получить индивидуальное задание в виде двух матриц (биматричная игра). Найти решения по Нэшу и по Парето.

IV. Выполнение.

Найти точки равновесия по Нэшу, соответствующие им оптимальные стратегии и выигрыши игроков. Найти оптимальное решение по Парето, также – стратегии и выигрыши игроков. Сравнить результат.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: постановка задачи, ход решения, графические иллюстрации для обоих случаев. Полученные результаты. Обязательно – выводы, сделанные после сравнения решений.

VI. Контрольный вопросы.

1. Почему для биматричных игр не проводится отдельно поиск решения в чистых стратегиях.
2. Чем отличаются критерии Нэша и Парето.
3. Что такое угроза.
4. Сколько может быть точек, являющихся решением по Парето.
5. Сколько может быть стратегий, соответсвующих оптимальному решению по Парето.

VII. Библиографический список

1. Воробьёв С.А. Модели и методы исследования операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2007, –148 с.
2. Воробьёв С.А.Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2012, –103 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5 Графическое решение игровых задач. Стабильность соглашения. Сильное равновесие

I. Цель работы.

Приобретение навыков решения игровых задач графическими методами.

II. Теоретическая справка.

Причина, по которой в некооперативных играх получаются невыпуклые проекции области допустимых стратегий, заключаются в том, что при смешанных стратегиях игроки случайным образом выбирают каждый свою стратегию. Поэтому реализуются все возможные пары активных стратегий, в т.ч. и те, которые не выгодны ни одному из игроков.

В случае кооперативных игр этого не происходит. Игроки по взаимной договорённости в назначенное время реализуют согласованные пары стратегий. Не выгодные им пары никогда не реализуются.

набор частот

В кооперативных играх вместо отдельных стратегий игроков находится согласованный набор частот. Пусть игроку **A** доступно $\boldsymbol{m}$ стратегий $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_m}$. Игроку **B** – $\boldsymbol{n}$ стратегий, $\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_n}$.

Набором частот называем матрицу $R = \{r_{ij}\}$ размером mxn, показывающую, как часто используется каждая пара стратегий $(\boldsymbol{A_i, B_j})$. Очевидно, что сумма всех частот равна единице, и любая из этих частот неотрицательна.

$$\forall i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n \quad r_{ij} \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = 1$$

По прежнему используем проекцию на плоскость $\boldsymbol{V0W}$. Но теперь мы получаем на плоскости выпуклую линейную оболочку, натянутую как на вектора базиса на проекции всех возможных пар чистых стратегий, т.е. на точки с координатами (a_{ij}, b_{ij}) $\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$ – вектора двумерного пространства.

Таким образом проекция всегда является выпуклым многоугольником. Некоторые из точек (a_{ij}, b_{ij}) могут оказаться внутренними точками этого многоугольника.

Следующий этап – выделить поверхность Парето. Очевидно, что она состоит из одного или нескольких отрезков, соединяющих вершины (a_{ij}, b_{ij}). Каждой такой вершине соответствует «вырожденный» набор частот, в котором частота данной пары стратегий $r_{ij} = 1$, а все остальные частоты равны 0.

Если отрезок соединяет две вершины, соответствующие $(\boldsymbol{A_i, B_j})$ и $(\boldsymbol{A_k, B_l})$, то им будет соответствовать матрица, в которой отличны от нуля только два элемента – r_{ij} и r_{kl}. Их сумма равна 1, следовательно весь отрезок можно описать как $r_{ij} = \alpha$ и $r_{kl} = 1 - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Поверхность Парето состоит из одного или нескольких таких отрезков. Их все надо определить. Заметим, что некоторые точки поверхности Парето могут принадлежать сразу нескольким отрезкам, т.е. она может быть реализована не одним, а несколькими разными наборами частот. Очевидно, что принятое решение должно быть элементом данного множества.

Кроме того, для каждого такого отрезка необходимо выразить координаты $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ через параметр $\boldsymbol{\alpha}$.

$$V(\alpha) = a_{ij} \cdot \alpha + a_{kl} \cdot (1-\alpha); \quad W(\alpha) = b_{ij} \cdot \alpha + b_{kl} \cdot (1-\alpha)$$

Это представление потребуется нам в дальнейшем для поиска окончательного решения, принадлежащего переговорному множеству.

Переговорное множество

На следующем этапе нам надо выяснить, все ли точки поверхности Парето могут быть кандидатами на окончательное решение. Оказывается, что не все и не всегда.

Вводится понятие точки Status quo (на рисунке обозначается как Sq). Это точка с координатами с координатами (V*,W*), обычно соответствующими точке равновесия по Нэшу. Т.е. те выигрыши, которые каждый из игроков может гарантировать себе при независимых действиях. Очевидно, что каждый из игроков пойдёт а совместные действия лишь в том случае, когда это принесёт ему выигрыш больший, чем при самостоятельных действиях. Это условия для первого игрока $V \geq V^*$, а для второго $W \geq W^*$. Выберем ту часть поверхности Парето, которая удовлетворяет данным условиям. Это может быть вся поверхность Парето или какая то её часть. В последнем случае вместо $0 \leq \alpha \leq 1$ будет изменение параметра $\boldsymbol{\alpha}$ в каких то других, меньших пределах $c \leq \alpha \leq d$. Находим их из условий $V(\alpha) \geq V^*; \quad W(\alpha) \geq W^*$.

Если в поверхность Парето входят части нескольких отрезков, то для каждого из них пределы устанавливаются по отдельности.

И, наконец, возможен вырожденный случай, когда точка Status quo лежит на поверхности Парето – тогда переговорное множество вырождается до одной этой точки. В этом случае возможный набор частот для совместного применения только один. Такая ситуация не лучше, но и не хуже той, которую игроки могут обеспечить себе, действуя по отдельности, без общей программы.

В принципе решение на этом окончено. От математики больше ничего не зависит. Игроки начинают «торговаться» и в итоге останавливаются на какой то из точек выделенного множества.

Решение арбитра

Рассмотрим ситуацию, когда игроки не могут остановиться на каком то одном решении, т.к. оба хотят «справедливости». Для этой цели приглашают третье лицо – «арбитра», который должен быть совершенно независимым. Арбитр принимает справедливое и беспристрастное решение, которое должно устраивать обоих игроков. Здесь мы попытаемся ввести математическое определение «справедливости» применительно к математической модели теории игр. К арбитру должны быть предъявлены следующие требования:

1. Арбитражное решение должно быть элементом переговорного множества.
2. Арбитражная схема должна быть независимой от имён или обозначений игроков.
3. Если две игры близки между собой в каком-то смысле, то и арбитражные решения должны быть близки.
4. Арбитражное решение должно отражать действенность угроз игроков.

В теории игр подобные требования пытаются формализовать в виде математических аксиом. Одну из таких систем аксиом предложил Дж. Нэш.

Пусть игроку **A** доступно ***m*** стратегий $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_m}$. Игроку **B** – ***n*** стратегий, $\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_n}$.

Через S мы будем обозначать выпуклую оболочку точек (a_{ij}, b_{ij}), $\overline{S}$ - переговорное множество, (V^*, W^*)- точка Status quo, (V^0, W^0) – решение арбитра.

Аксиома 1. (*Оптимальность по Парето*). Точка (V^0, W^0) должна быть элементом переговорного множества, то есть

1. $(V^0, W^0 \in S)$

2. $V^0 \geq V^*, \quad W^0 \geq W^*$

3. в S нет точки (V,W), отличной от точки (V^0,W^0), такой, что $V \geq V^0, \quad W \geq W^0$

Аксиома 2. (*Симметрия*). Пусть игра обладает следую0щими свойствами:

1. $V^* = W^*$;
2. если точка $(V,W \in S)$, то и точка $(W,V \in S)$.

Тогда должно выполняться условие $V^0 = W^0$.

То если игроки находятся в совершенно одинаковой ситуации, то и арбитражное решение должно давать им одинаковые выигрыши.

Следующие две аксиомы менее очевидны, как предыдущие.

Аксиома 3. *(Инвариантность относительно линейного преобразования).* Пусть имеются две игры одинаковой размерности и с платёжными матрицами, связанными соотношениями

$$\overline{a}_{ij} = \alpha_1 a_{ij} + \beta_1 \quad \overline{b}_{ij} = \alpha_2 b_{ij} + \beta_2 \quad i = 1,...,m \quad j = 1,...,n$$

Тогда арбитражные решения для них также должны быть связаны соотношениями

$\overline{V}^0 = \alpha_1 V^0 + \beta_1 \quad \overline{W}^0 = \alpha_2 W^0 + \beta_2$

Аксиома 4. (*Независимость несвязанных альтернатив*). Если к игре добавить новые ходы для игроков с добавлением новых элементов платёжных матриц таким образом, что точка status quo не меняется, то либо арбитражное решение также не меняется, либо оно совпадает с одной из добавленных сделок.

Дж. Нэш показал, что существует единственная арбитражная схема, удовлетворяющая этим четырём аксиомам. Арбитражное решение должно выносится из условия

$$\max_{(V,W)\in\overline{S}} (V - V^*)(W - W^*)$$

то есть решение арбитра (V^0,W^0)должно удовлетворять условию

$$(V^0 - V^*)(W^0 - W^*) \geq (V - V^*)(W - W^*)$$

для всех точек (V,W), принадлежащих переговорному множеству.

Используем этот критерий. Для этого мы должны рассмотреть переговорное множество. Оно состоит из отрезков, каждый из которых однозначно задан набором частот с двумя отличными от нуля элементами, заданными параметром $\boldsymbol{\alpha}$ и пределами его изменения $c \leq \alpha \leq d$.

Каждый отрезок, входящий в переговорное множество, требуется рассмотреть по отдельности. Подставляем в критерий выражения координат $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ через параметр $\boldsymbol{\alpha}$ условий $V(\alpha), \quad W(\alpha)$, а вместо области максимизации – пределы изменения этого параметра $c \leq \alpha \leq d$

$$\max_{c\leq\alpha\leq d} (V(\alpha) - V^*)(W(\alpha) - W^*),$$

где $V(\alpha) = a_{ij} \cdot \alpha + a_{kl} \cdot (1-\alpha); \quad W(\alpha) = b_{ij} \cdot \alpha + b_{kl} \cdot (1-\alpha).$

Получаем функцию с одним неизвестным $\boldsymbol{\alpha}$ и находим её максимум. Очевидно, что он находится либо внутри отрезка – и тогда решением будет набор частот из пары отличных от нуля элементов. Либо на границе отрезка – в этом случае возможно решение в виде пары чистых стратегий.

Для каждого отрезка переговорного множества найдено решение, называемое «локальным оптимумом». Теперь, если таких отрезков было больше одного, мы сравниваем полученное для каждого из них значение критерия и находим «глобальный оптимум», т.е. окончательное решение.

Таким образом окончательное решение состоит не просто из набора выигрышей (V^0,W^0), но также содержит оптимальный набор частот. Как правило, точка решения арбитра на плоскости $\boldsymbol{V0W}$ обычно только одна, но ей может соответствовать не один, а несколько различных наборов частот.

III. Задание.

Получить индивидуальное задание в виде двух матриц (биматричная игра).

IV. Выполнение.

Найти переговорное множество, решение арбитра и соответствующий ему набор частот.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: задание, способ его решения, графическая иллюстрация.

VI. Контрольный вопросы.

6. Какова аксиоматика арбитража.
7. Что такое переговорное множество, какие значения оно может принимать.
8. Как на практике использовать принцип симметрии.
9. Сколько у задачи может быть решений арбитра.
10. Сколько у задачи может быть оптимальных наборов частот.

VII. Библиографический список

1. Воробьёв С.А. Модели и методы исследования операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2007, –148 с.
2. Воробьёв С.А.Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2012, –103 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 Совместимые смешанные стратегии. Стабильность на основе угроз. Дележи. Игры в характеристической форме. Ядро

I. Цель работы.

Приобретение навыков решения игровых задач в характеристической форме.

II. Теоретическая справка.

Как было показано в четвёртой лабораторной работе, стратегии, соответствующие точкам равновесия по Нэшу, определяются по «чужим» матрицам и решают вопрос максимального ограничения выигрыша противника. Однако у каждого игрока есть и «свои» матрицы. Что если найти стратегии игроков по ним? Оказывается, это будут стратегии, дающие максимально возможные выигрыши игрокам. Почему же мы их не нашли, когда искали точки равновесия? На самом деле эти стратегии не обладают свойством устойчивости. Т.е. если игрок использует свою «выигрышную» стратегию, то противник может отклониться от своей и получить дополнительный выигрыш. А игрок получит меньший выигрыш.

Тем не менее хочется каким то образом максимизировать свои выигрыши. При этом мы помним, что игра некооперативная, т.е. договариваться игрокам нельзя. Что же делать. Предлагается следующий подход: каждый из игроков имеет не одну, а две стратегии. Первая пара стратегий – стратегии угроз $\left(S_A^*, S_B^*\right)$. Они позволяют игрокам максимально ограничивать выигрыш соперника величинами $\left(H_A^*, H_B^*\right)$. Применяются, как это ясно из названия, для наказания противника за то, что он не хочет соблюдать обоюдную выгоду. Вторая пара – максиминные стратегии $\left(S_A^0, S_B^0\right)$ – как раз таки и позволяет игрокам получать тот самый максимальный выигрыш $\left(H_A^0, H_B^0\right)$.

Стратегии угроз соответствуют точкам равновесия по Нэшу и находятся по «чужим» матрицам. Максиминные – находятся по собственным матрицам игроков. Рассмотрим способы нахождения этих стратегий в общем виде. Пусть имеем игру размерности **m**x**n**. Как и в случае с матричными играми, предварительно преобразуем матрицы таким образом, чтобы они не содержали ни одного отрицательного элемента.

Перед нами четыре задачи. Будем решать их последовательно.

1. Поиск максиминной стратегии игрока **A**. Требуется найти стратегию $S_A^0 = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$ таким образом, чтобы $V = H_A^0 \to \max$. Пусть игрок ***B*** применяет чистую стратегию стратегию ***B$_j$***. В этом случае выигрыш **A** должен быть больше или равен $V = H_A^0$.

Получаем систему неравенств

$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m \geq V \quad j = 1, ..., n$

Введём новые переменные $x_j = p_j / V \quad j = 1, ..., n$. Разделив все неравенства системы на неотрицательную величину **V**, получим

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + ... + a_{mj} x_m \geq 1 \quad j = 1, ..., n \qquad (1)$$

Поскольку все элементы матрицы **A** неотрицательны, **V** тоже неотрицательна. Вероятности неотрицательны по определению. Таким образом введённые переменные должны удовлетворять условию

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, ..., n \qquad (2)$$

Из $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ следует, что $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/V$. $V = H_A^0 \to \max$. Таким образом получаем целевую функцию

$$L = x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/V \to \min \quad (3)$$

Мы получили задачу линейного программирования (1), (2), (3). Решив её, получим $V = 1/L$. Найдём стратегию $S_A^0 = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $p_j = x_j \times V \quad j = 1,...,n$. $H_A^0 = V$.

2. Поиск стратегии угроз игрока **A**. Требуется найти стратегию $S_A^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ таким образом, чтобы $W = H_B^0 \to \min$. Пусть игрок ***B*** применяет чистую стратегию стратегию ***B_j***. В этом случае проигрыш ***B*** не должен быть меньше, чем $W = H_B^*$.

Получаем систему неравенств

$b_{1j} p_1 + b_{2j} p_2 + ... + b_{mj} p_m \le W \quad j = 1,...,n$

Введём новые переменные $x_j = p_j / W \quad j = 1,...,n$. Разделив все неравенства системы на неотрицательную величину **W**, получим

$$b_{1j} x_1 + b_{2j} x_2 + ... + b_{mj} x_m \le 1 \quad j = 1,...,n \quad (4)$$

Поскольку все элементы матрицы **B** неотрицательны, **W** тоже неотрицательна. Вероятности неотрицательны по определению. Таким образом введённые переменные должны удовлетворять условию

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,...,n \quad (5)$$

Из $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ следует, что $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/W$. $W = H_B^0 \to \min$. Таким образом получаем целевую функцию

$$L = x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/W \to \max \quad (6)$$

Мы получили задачу линейного программирования (4), (5), (6). Решив её, получим $W = 1/L$. Найдём стратегию $S_A^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $p_j = x_j \times W \quad j = 1,...,n$. $H_B^* = W$.

Как видим, полученные задачи линейного программирования совершенно независимы. Теперь найдём стратегии второго игрока.

3. Поиск максиминной стратегии игрока **B**. Требуется найти стратегию $S_B^0 = (q_1, q_2, ..., q_n)$ таким образом, чтобы $W = H_B^0 \to \max$. Пусть игрок ***A*** применяет чистую стратегию стратегию ***A_i***. В этом случае выигрыш **B** должен быть больше или равен $W = H_B^0$.

Получаем систему неравенств

$b_{i1} q_1 + b_{i2} q_2 + ... + b_{in} q_n \ge W \quad i = 1,...,m$

Введём новые переменные $y_i = q_i / W \quad i = 1,...,n$. Разделив все неравенства системы на неотрицательную величину **W**, получим

$$b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + ... + b_{in} y_n \ge 1 \quad i = 1,...,m \quad (7)$$

Поскольку все элементы матрицы **B** неотрицательны, **W** тоже неотрицательна. Вероятности неотрицательны по определению. Таким образом введённые переменные должны удовлетворять условию

$$y_i \ge 0 \quad i = 1,...,m \quad (8)$$

Из $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$ следует, что $y_1 + y_2 + ... + y_m = 1/W$. $W = H_B^0 \to \max$. Таким образом получаем целевую функцию

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_n = 1/W \to \min \quad (9)$$

Мы получили задачу линейного программирования (7), (8), (9). Решив её, получим $W = 1/F$. Найдём стратегию $S_B^0 = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $q_j = y_j \times W \quad j = 1, ..., n$. $H_B^0 = W$.

Последняя задача (7), (8), (9) симметрично-двойственна задаче (4), (5), (6). Составим задачу поиска стратегии угроз второго игрока. Она будет симметрично-двойственна задаче поиска максиминной стратегии первого игрока (1), (2), (3).

III. Задание.

Получить индивидуальное задание в виде двух матриц (биматричная игра).

.

IV. Выполнение.

Сформулировать задачи поиска стратегий угроз и максиминных стратегий в виде задачам линейного программирования. Решить их с помощью любого доступного программного обеспечения. Получить стратегии игроков и их выигрыши. Сравнить результаты.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: Задание, ход решения, результаты. Обязательно – сравнение результатов применения разных стратегий.

VI. Контрольный вопросы.

11. Будет ли устойчивой точка, соответствующая максиминной стратегии.
12. Будет ли устойчивой точка, соответствующая стратегии угроз.
13. Может ли выигрыш, полученный при помощи стратегии угроз, быть больше выигрыша при максиминной стратегии.
14. Может ли выигрыш, полученный при помощи стратегии угроз, быть меньше выигрыша при максиминной стратегии.
15. Может ли выигрыш, полученный при помощи стратегии угроз, быть равен выигрышу при максиминной стратегии.

VII. Библиографический список

1. Воробьёв С.А. Модели и методы исследования операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2007, –148 с.
2. Воробьёв С.А.Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2012, –103 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7 Применение методов теории игр к решению задач, не относящихся к теории игр. Игры с природой

I. Цель работы.

Приобретение навыков решения задач принятия решений игровыми методами.

II. Теоретическая справка.

Раздел игры с природой традиционно вставляется при изучении курса «теория игр» несмотря на то, что здесь не выполняется основное предположение теории – о разумности и дальновидности противника. Тем не менее, как мы увидим, применяемые методы очень похожи на традиционные схемы теории игр, а иногда вообще неотличимы. Поэтому мы и изучаем данный раздел. Имеются у него и свои особенности.

Пусть Природа может находиться в одном из ***n*** состояний ***j*=1,…,*n***. В каком состоянии она находится сейчас неизвестно. В нашем распоряжении имеется ***m*** возможных действий ***i*=1,…,*m***. Если Природа находится в состоянии ***j***, а мы выбираем действие ***i***, то мы получаем выигрыш a_{ij}. Таким образом мы имеем платёжную матрицу стандартного для матричной игры вида $\mathrm{A} = \{a_{ij}\}_{m \times n}$. Требуется определить, какое же действие нам выбрать. Предлагается несколько критериев такого выбора, рассчитанных на разных людей.

7.1. Максиминный критерий

Этот критерий поведения рассчитан на достаточно пессимистичного человека; ему предлагается выбирать своё действие из условия $\max\limits_{i=1,\dots,m} \min\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$, то есть он действует так, чтобы в наихудшем для себя случае получить максимум. Здесь природа рассматривается как крайне злонамеренный субъект, всегда принимающий наихудшее для нас состояние.

7.2. Критерий минимаксного сожаления

Пусть $R_j = \max\limits_{i=1,\dots,m} a_{ij}$, то есть R_j это максимум того, что может получить игрок при ***j***-м состоянии Природы. Перейдём от величин a_{ij} к величинам $r_{ij} = R_j - a_{ij}$, которые можно трактовать как “сожаление”, то есть недополученная выгода от того, что при ***j***-м состоянии Природы игрок сделал неправильный ход. Тогда в качестве критерия для выбора хода предлагается следующий $\min\limits_{i=1,\dots,m} \max\limits_{j=1,\dots,n} r_{ij}$, то есть минимизируется максимальное “сожаление”.

7.3. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Пусть $m_i = \min\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$ и $M_i = \max\limits_{j=1,\dots,n} a_{ij}$, то есть m_i и M_i соответственно являются минимумом и максимумом того, что мы можем получить при выборе хода номер ***i***. Свяжем с каждым ходом величину $g_i = \alpha \cdot m_i + (1-\alpha) \cdot M_i$ и будем выбирать свой ход из условия $\max\limits_{i=1,\dots,m} g_i$. Коэффициент $0 \le \alpha \le 1$ называется показателем пессимизма игрока. При ***α***=1 мы получаем крайне пессимистичного человека, и этот критерий совпадает с критерием максимина. При α=0 – крайняя степень оптимизма. От природы всегда ждёт самого лучшего из возможных вариантов развития событий.

7.4. Принцип недостаточного основания

Этот принцип сформулировал ещё Я. Бернулли. Он заключается в том, что все n возможных состояний Природы считаются равновероятными. Действие игрока выбираются из условия $\max\limits_{i=1,\ldots,m} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Разумеется, если известны какие то вероятностные оценки, то их надо использовать.

Остаётся задача – как правильно выбрать критерий выбора.

III. Задание.

Получить индивидуальное задание в виде матрицы. Решить задачу всеми перечисленными способами.

IV. Выполнение.

Используя функцию cwt, построить спектрограмму функции. При помощи функции wnoise получить сигнал с шумом и произвести его очистку от шума.

V. Оформление отчета.

В отчете должны быть представлены: задание, способы его решение, сравнение результатов, полученных разными способами.

VI. Контрольный вопросы.

16. Что такое принцип недостаточного основания.
17. В каких случаях критерий Гурвица оптимистичен.
18. Каково основное предположение теории игр.
19. Почему игры с природой относят к теории игр, если основное предположение для них не выполняется.
20. Каков смысл минимаксного сожаления.

VII. Библиографический список

3. Воробьёв С.А. Модели и методы исследования операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2007, –148 с.
4. Воробьёв С.А.Теория игр и исследование операций: учеб. пособие / Тула: ТулГУ. 2012, –103 с.