МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук

Кафедра прикладной математики и информатики

Утверждено на заседании кафедры
прикладной математики и информатики
24.01.2023, протокол № 5

И.о. заведующего кафедрой

Н.В. Ларин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий по дисциплине (модулю) « Дискретные и вероятностные математические модели»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.04.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Перспективные методы искусственного интеллекта
в сетях передачи и обработки данных

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010402-03-23

Тула 2023 год

Разработчик:

Баранов В.П., профессор кафедры ПМиИ, д.т.н., доцент 

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1. **ПОЛУЧЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ НА ЭВМ**

I. ТЕОРИЯ

1. Методы Монте-Карло и случайные величины

Методами Монте-Карло называются численные методы решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Как правило, в качестве стандартной выбирают непрерывную случайную величину γ, равномерно распределенную в интервале (0, 1). Основные характеристики этой величины: плотность $\rho_\gamma(x) = 1$, функция распределения $F_\gamma(x) = x$, математическое ожидание $\mathrm{M}(\gamma) = \frac{1}{2}$, дисперсия $D(\gamma) = \frac{1}{2}$.

Иногда в качестве стандартной используются дискретная случайная величина ε, принимающая с одинаковой вероятностью значения 0,1,2,…,9. Величина ε называется случайной цифрой, а величина γ - случайным числом. Связь между γ и ε устанавливается разложением числа γ в бесконечную десятичную дробь:

$$\gamma = 0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_k \quad \text{или} \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 10^{-k}. \tag{1}$$

Справедливо утверждение: если g - произвольное целое положительное число, то случайная величина $\zeta = Д(g\gamma)$ равномерно распределена в интервале (0,1), где $Д(x)$ – дробная часть числа x.

2. Способы получения случайных величин

2.1. Метод таблиц. Осуществляют N независимых опытов, в результате которых получают N случайных цифр: $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_N$. Записав эти цифры в порядке появления в таблицу, получают таблицу случайных цифр. Достоинства метода: однократная проверка, возможность воспроизводить числа. Недостатки: ограниченный запас чисел, таблица большого объема занимает много места в накопителе. Этот метод используют главным образом при расчетах вручную; для расчетов на ЭВМ им практически не пользуются.

2.2. Метод датчиков. Генераторами, или датчиками, случайных величин называют различные технические устройства, вырабатывающие случайные величины. Чаще всего для построения датчика используют радиоэлектронные приборы (диоды, тиратроны, газотроны и др.). Простейшим датчиком двоичных цифр является счетчик, выдающий число $\nu(mod2)$, т.е. 0 при четном ν и 1 при нечетном ν. Обычно датчики случайных чисел содержат m генераторов описанного типа, работающих независимо, так, что датчикам выдается приближенное случайное число $\gamma = 0,\alpha_1,\dots,\alpha_m$, записанное в форме m-разрядной двоичной дроби. Этот метод в основном применяется в системах автоматического регулирования и аналоговых вычислительных машинах, значительно реже – в методах Монте-Карло. Достоинства метода: неограниченный запас чисел, сверхбыстрое их получение, запас чисел не занимает много места в накопителе. Недостатки: периодическая проверка, невоспроизводимость чисел, требуется специальное устройство.

2.3. Метод случайных чисел. Псевдослучайными числами называют числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении некоторых задач. Достоинства метода: однократная проверка, воспроизводимость чисел, их быстрое получение, запас чисел занимает мало места в накопителе. Недостатки: запас чисел ограничен. Этот метод – самый удобный с практической точки зрения и является основным при расчетах методом Монте-Карло.

3. Алгоритмы получения псевдослучайных чисел. Большинство алгоритмов представляют собой рекуррентные формулы первого порядка

$$\gamma_{n+1} = \Phi(\gamma_n), \tag{2}$$

где начальное число γ_0 задано.

3.1. Метод середины квадрата (Неймана). Число γ_n представляют 2k -значным:

$$\gamma_n = 0, a_1\, a_2 \ldots a_{2k}.$$

Чтобы получить число γ_{n+1}, надо γ_n возвести в квадрат: $\gamma_n^2 = 0, b_1\, b_2 \ldots b_{4k}$, а затем отобрать средние 2К цифр этого квадрата: $\gamma_{n+1} = 0, b_{k+1}\, b_{k+2} \ldots b_{3k}$.

Этому методу соответствует функция

$$\Phi(x) = Д[10^{-2k} Ц(10^{3k} x^2)] \tag{3}$$

или (что то же самое)

$$\Phi(x) = 10^{-2k} Ц[10^{2k} Д(10^k x^2)], \tag{4}$$

где $Ц(x)$ – целая часть числа *x*.

Недостатком этого метода является наличие больше, чем нужно, малых чисел. Кроме этого, при некоторых γ_0 наблюдается вырождение последовательности, т.е. $\gamma_n \equiv 0$ при n $\gg n_0$.

3.2. Метод сравнений (Лемера). В этом методе $\Phi(x) = Д(gx)$, т.е. $\gamma_{n+1} = Д(g\gamma_n)$, где g - большое целое число. Если задать $\gamma_0 = \frac{m_0}{M}$, где m_0 *и* M - целые числа и M взаимно просто с g, то все γ_n будут несократимыми дробями вида $\gamma_n = \frac{m_n}{M}$, где числители определяются по формуле

$$m_{n+1} = g m_n (mod M)\ . \tag{5}$$

Последняя запись означает, что m_{n+1} равно остатку, полученному при делении $g m_n$ на M.

На практике обычно используют формулу (5). Вопрос о пригодности псевдослучайных чисел, в конечном счете, решается эмпирически. При некоторых g, M, m_0 получают удовлетворительные последовательности, при других – плохие.

3.3. Метод Коробова. Псевдослучайные числа γ_i вычисляются по формуле

$$\gamma_i = Д\frac{r_i}{m}, \tag{6}$$

где $r_i = \frac{m}{2} h_{i-1}; h_0 = 1; h_{i-1} = r_{i-1} - mЦ(\frac{r_{i-1}}{m})$; $i=1,2,\dots,n$;
m - простое число вида $m = 2m_1 + 1$ (m_1- тоже простое число); n - число псевдослучайных точек.

II. ЗАДАНИЕ

Получить десять псевдослучайных точек, равномерно распределенных на интервале (0,1), методами Неймана, Лемера и Коробова. Необходимые для вычислений значения параметров указаны в вариантах задания (таблица).

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определения случайному числу и случайной цифре. Указать связь между ними.
2. Какие существуют способы получения случайных чисел на ЭВМ? Отметить преимущества и недостатки каждого из этих способов.
3. Укажите методы получения псевдослучайных чисел. В чем состоят недостатки метода середины квадратов?

IV. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие для вузов / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотепов, Ю.И. Бродский. – М.: Академия, 2008. – 236 с.
2. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М., Наука, 1973, с. 10-29.
3. .Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. – М., Советское радио, 1971. – 210 с.

V. ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

№ варианта	Метод Неймана	Метод Лемера			Метод Коробова
	γ_0	m_0	g	M	m_1
1	0,50	0,2	5^2	2^8	1
2	0,75	0,4	5^3	2^9	3
3	1,00	0,6	6^3	2^{10}	5
4	1,25	0,8	7^3	2^{11}	7
5	1,50	1,0	5^4	2^{12}	11
6	1,75	1,2	6^4	2^{13}	13
7	2,00	1,4	7^4	2^{14}	17
8	2,25	1,6	5^5	2^{15}	19
9	2,50	1,8	6^5	2^{16}	23
10	2,75	2,0	7^5	2^{17}	29
11	3,00	2,2	5^6	2^{18}	31
12	3,25	2,4	6^6	2^{19}	37
13	3,50	2,6	7^6	2^{20}	41
14	3,75	2,8	5^7	2^{21}	43
15	4,00	3,0	6^7	2^{22}	47
16	4,25	3,2	7^7	2^{23}	53

17	4,50	3,4	5^8	2^{24}	59
18	4,75	3,6	6^8	2^{25}	61
19	5,00	3,8	7^8	2^{26}	67
20	5,25	4,0	5^9	2^{27}	71
21	5,50	4,2	6^9	2^{28}	73
22	5,75	4,4	7^9	2^{29}	79
23	6,00	4,6	5^{10}	2^{30}	83
24	6,25	4,8	6^{10}	2^{31}	89
25	6,50	5,0	7^{10}	2^{32}	91

Практическое занятие 2. **СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ**

I. ТЕОРИЯ

Случайные числа, полученные любым из трех способов (Неймана, Лемера, Коробова), необходимо проверять. Для такой проверки существуют различные критерии.

1. Критерий согласия χ^2. Пусть имеется конкретная гипотеза о законе распределения случайных величин ξ. В результате N независимых экспериментов получены N значений $\xi_1, \dots, \xi_N$ этой величины (N достаточно велико). Установим, не противоречат ли эти N значений нашей гипотезе. Для этого выберем какое-нибудь число r и разбиение множества возможных значений x случайной величины ξ на r попарно непересекающихся множеств $x = x_1 + \dots + x_r$. Исходя из нашей гипотезы, вычисляем вероятности $P_j = P\{\xi \in x_j\}$. По значениям $\xi_1, \dots, \xi_N$ вычисляем величины $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ (этот этап называется группировкой значений) и величину χ^2 по формуле

$$\chi_N^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\gamma_j - NP_j)^2}{NP_j}. \qquad (1)$$

Выбрав доверительную вероятность β по табл. 1 (см. приложение), находят значение $\chi^2(r-1, 1-\beta)$. Если $\chi_N^2 < \chi^2(r-1, 1-\beta)$, то этот результат не противоречит нашей гипотезе, причем при $\beta = 0{,}95$ значение χ_N^2 называется почти значимым, при $\beta = 0{,}99$ - значимым, а при $\beta = 0{,}999$ - высоко значимым. В противном случае гипотеза должна быть отброшена.

2. Критерий ω^2. Рассмотрим одномерную случайную величину ξ с функцией распределения $F(x)$. Выберем N независимых значений $\xi_1, \dots, \xi_N$ этой величины и построим эмпирическую (выборочную) функцию распределения

$$F_N^*(x) = \frac{S_N(x)}{N}, \qquad (2)$$

где $S_N(x)$ равно количеству значений, меньших, чем x.

В качестве меры отклонения $F_N^*(x)$ от $F(x)$ используется величина

$$\omega_N^2 = N \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F_N^*(x)]^2 \, dF(x). \qquad (3)$$

Критерий согласия ω^2 основан на следующем утверждении: для любой случайной величины ξ с непрерывной функцией распределения $F(x)$ при $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega_N^2 < x\} = a_1(x), \qquad (4)$$

где функция $a_1(x)$ от ξ не зависит.

Схема использования этого критерия аналогична схеме использования критерия χ^2: фиксируется доверительная вероятность β; из уравнения $a_1(x_\beta) = \beta$ с помощью табл. 2 (см. приложение) находится соответствующее значение x_β.

Вычисляется ω_N^2 по формуле

$$\omega_N^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{K=1}^{N} \left[F(\xi_K) - \frac{K-1/2}{N} \right]^2 \quad (5)$$

которая следует из формулы (3) при $F_N^*(x) = {}^K/_N \, (K = 0,1,\dots,N)$.

Если $\omega^2 \geq x_\beta$, то гипотезу отвергаем.

3. Проверка псевдослучайных чисел. Проверяются первые десятичные цифры $\varepsilon_K = Ц(10\gamma k)$ псевдослучайных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$. в случае использования критерия χ^2 пользуются формулой (1). Если проверяется равномерное распределение, то в этой формуле

$$P_j = \frac{1}{r} (j = 1,2,\dots,r).$$

Более детальная проверка распределения чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ осуществляется с помощью критерия ω^2. В этом случае числа располагают в вариационный ряд $\gamma_{(1)} \leq \gamma_{(2)} \leq \dots \leq \gamma_{(N)}$. Из формулы (5) вытекает, что

$$\omega_N^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{K=1}^{N} \left(\gamma_{(K)} - \frac{K-1/2}{N} \right)^2 . \quad (6)$$

По сравнению с критерием χ^2 критерий ω^2 имеет следующее преимущество: не нужна группировка значений (не надо вводить параметр r). Недостаток: при очень больших N построение вариационного ряда весьма трудоемко.

II. ЗАДАНИЕ

С помощью критериев χ^2 и ω^2 проверить, является ли закон распределения случайных величин, полученный в лабораторной работе №1 (для каждого из трех методов), равномерным. Для всех вариантов (варианты задания прежние) $\beta = 0{,}95, r = 4$.

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие существуют способы проверки случайных чисел?
2. В каком случае гипотеза о распределении случайных чисел считается справедливой?
3. Укажите преимущества и недостатки критериев χ^2 и ω^2.

IV. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие для вузов / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотепов, Ю.И. Бродский. – М.: Академия, 2008. – 236 с.
2. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – С. 30-43.
3. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЭВМ. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 215 с.

V. ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения $\chi^2(r-1,1-\beta)$

r	β				
	0,50	0,70	0,90	0,95	0,99
3	1,4	2,4	4,6	6,0	9,2
4	2,4	3,7	6,3	7,8	11,3
5	3,4	4,9	7,8	9,5	13,3
6	4,4	6,1	9,2	11,1	15,1
7	5,3	7,2	10,6	12,6	16,8
8	6,3	8,4	12,0	14,1	18,5
9	7,3	9,5	13,4	15,5	20,1
10	8,3	10,7	14,7	16,9	21,7
13	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2
15	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1
17	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0
19	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8
21	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6

Таблица 2

Значения функции $a_1(x)$

x	0,12	0,18	0,35	0,46	0,74
$a_1(x)$	0,50	0,70	0,90	0,95	0,99

Практическое занятие 3. **МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ НА ЭВМ**

I. ТЕОРИЯ

Преобразования, позволяющие с помощью случайных чисел γ вычислить значение любой случайной величины ξ, называют моделированием (формированием, разыгрыванием) случайной величины ξ.

1. Моделирование дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину ξ с распределением

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ P_1 & P_2 \ldots P_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Для вычисления значения ξ разделим интервал (0,1) на интервалы Δ_i, такие, что длина Δ_i равна p_i. Расчет производится по формуле

$$\xi = x_i, \qquad \gamma \in \Delta_i. \tag{2}$$

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равновероятны $\left(P_1 = \ldots = P_n = \frac{1}{n}\right)$, то условие $\gamma \in \Delta_i$ равносильно условию $i - 1 \leq n\gamma < 1$ или $Ц(n\gamma) = i - 1$. Тогда вместо формулы (2) имеем

$$\xi = x_i, \quad \text{где } i = 1 + Ц(n\gamma) \tag{3}$$

2. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратных функций. Пусть случайная величина ξ определена в интервале $a \leq x < b$ и имеет плотность $\rho(x)$. Функция распределения ξ при $a \leq x < b$

$$F(x) = \int_a^x \rho(u)du.$$

Тогда случайная величина ξ определяется из уравнения

$$F(\xi) = \gamma \tag{4}$$

В случае, когда уравнение (4) аналитически разрешимо относительно ξ, имеем явную формулу $\xi = G(y)$ для разыгрывания случайной величины ξ, где $G(y)$ - обратная функция по отношению к $y = F(x)$. В других случаях уравнение (4) решается численно.

II. ЗАДАНИЕ

Используя псевдослучайные числа, полученные в лабораторной работе №1 методом Коробова, смоделировать значения дискретной (задан ряд распределения) и непрерывной (задана плотность распределения) случайной величины в соответствии с вариантами задания (таблица).

III. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется моделированием случайных величин?

2. Укажите методы моделирования дискретных и непрерывных случайных величин.

IV. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие для вузов / Ю.Н. Павловский, Н.В. Белотепов, Ю.И. Бродский. – М.: Академия, 2008. – 236 с.

2. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – С. 30-43.

3. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЭВМ. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.

4. Голенко Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на ЭВМ. – М.: Наука, 1965. – 265 с.

V. ПРИЛОЖЕНИЕ

№	Ряд распределения											Плотность распределения f(x)
1	x_i	0,66	0,42	0,85	0,88	0,89	0,52	0,76	0,04	0,87	0,84	$3\sin 3x$
	P_i	0,03	0,09	0,12	0,17	0,19	0,17	0,12	0,03	0,03	0,05	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$
2	x_i	0,86	0,69	0,41	0,86	0,72	0,94	0,91	0,53	0,12	0,14	$2e^{-2x}$
	P_i	0,05	0,35	0,10	0,15	0,06	0,04	0,12	0,03	0,07	0,03	$(0 < x < \infty)$
3	x_i	0,89	0,49	0,89	0,97	0,14	0,90	0,03	0,42	0,47	0,93	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
	P_i	0,03	0,18	0,10	0,12	0,16	0,08	0,10	0,14	0,07	0,02	$(-\infty < x < \infty)$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4. **МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

I. ТЕОРИЯ

Многие наблюдения природных процессов приводят к временным зависимостям. Временные последовательности измерения таких величин, как температура, сток рек, количество осадков или толщина колец деревьев, можно исследовать с помощью *метода нормированного размаха*, или *метода Херста*. Такие последовательности измерений характеризуются показателем Херста H. Запись измерений представляет собой кривую фрактальной размерности $D = 2 - H$.

Метод Херста основан на использовании безразмерного отношения R/S, где R – размах, S – среднее стандартное отклонение (корень квадратный из дисперсии).

Пусть $X(t,\ \tau)$ – накопившееся за время t отклонение наблюдаемой величины $\xi(t)$ от среднего значения $\langle \xi \rangle_\tau$ за период τ:

$$X(t,\ \tau) = \sum_{u=1}^{t} \{\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau\}, \tag{1}$$

где

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \tag{2}$$

Размах R определяется по формуле

$$R(\tau) = \max_{1 \le t \le \tau} X(t,\ \tau) - \min_{1 \le t \le \tau} X(t,\ \tau). \tag{3}$$

Стандартное отклонение можно оценить по наблюдениям:

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{\xi(t) - \langle \xi \rangle_\tau\}^2 \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Херст показал, что для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах R/S очень хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R/S = (\tau/2)^H. \tag{5}$$

Для многих естественных процессов $H > 1/2$. Если временные ряды связаны со случайными процессами с независимыми значениями и конечной дисперсией, то

$$R/S = (\pi\tau/2)^{1/2}. \tag{6}$$

Для моделирования случайных временных рядов и проверки соотношения (6) используем метод Монте-Карло. Для моделирования случайного процесса с независимыми значениями выполним бросание n монет τ раз и выберем в качестве случайной переменной ξ=(число «орлов»-число «решек»). Вероятность того, что при бросании n монет выпадет k орлов, равна $(1/2)^n (n!/k!(n-k)!)$. При больших τ и n биномиальное распределение приближается к нормальному. Для этого процесса

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2} n\tau - 1},\ S = \sqrt{n}.$$

В пределе при больших τ получаем соотношение (6).

II. ЗАДАНИЕ

1. Смоделировать случайный процесс с независимыми значениями на компьютере, используя генератор случайных чисел, который выбирает -1 или +1 с равной вероятностью. Считать, что «орлы» соответствуют +1. Значения параметров: $n = 10,\ \tau = 2500$.

2. Построить зависимость $\xi(t)$, соединив линиями точки $(t,\ \xi(t))$ и $((t-1),\ \xi(t-1))$, $t = 1,\ \dots,\ 2499$.

3. Построить зависимость $X(t)$ накопленного отклонения от среднего, соединив линиями отдельные точки $(t,\ X(t))$, представляющие собой запись набора значений, принимаемых случайной переменной.

4. Построить в двойном логарифмическом масштабе зависимость $R/S = f(\tau)$. Выполнить аппроксимацию наблюдаемых значений R/S зависимостью $R/S = (a\tau)^H$ и определить значения a и H. На том же графике построить в двойном логарифмическом масштабе зависимость (6) и проанализировать полученные результаты.

Практическое занятие № 5. **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

I. ТЕОРИЯ

Моделирование обобщенного броуновского движения для дискретных приращений производится с помощью соотношения

$$B_H(t)-B_H(t-1)=\frac{n^{-H}}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\left\{\sum_{i=1}^{nt} i^{H-1/2}\xi_{[1+n(M+t)-i]}+\sum_{i=1}^{n(M-1)}[(n+i)^{H-1/2}-i^{H-1/2}]\xi_{[1+n(M-1+t)-i]}\right\}. \quad (1)$$

Здесь:

$B_H(t)$ – броуновская функция, которая является случайной функцией времени t (координата броуновской частицы);

$\Gamma(x)$ – гамма-функция;

H – показатель Хёрста ($0 \le H \le 1$);

$\{\xi_i\}$, $i=1,\ 2,\ ...,\ M,\ ...$ – набор гауссовых случайных чисел с единичной дисперсией и нулевым средним; M – число целочисленных временных шагов;

n – число делений единичного интервала времени.

Алгоритм построения фрактальной броуновской кривой «побед и поражений».

Возьмем отрезок [0, 1] и разобьем его на N интервалов. Пусть $x_0=0$, $x_j=jh$, $h=0,001$; $j=1,\ ...,\ N$ ($x_N=1$). С помощью компьютера образуем последовательность случайных чисел r_j, $j=1,\ ...,\ N$, $0<r_j<1$. Далее получаем точки $P_k(x_k,\ y_k)$, где $x_k=k/N$, $y_k=(r_1-1/2)+(r_2-1/2)+\ ...\ +(r_k-1/2)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N$.

2. ЗАДАНИЕ

1. Рассчитать броуновскую функцию $B_H(t)$ и построить ее график при следующих значениях параметров: $H=0,5$; $M=2500$; $n=8$.

2. Рассчитать и построить графики приращения броуновской функции (фрактального шума) $\Delta B_H(t)=B_H(t)-B_H(t-1)$ для разных показателей Хёрста: $H=0,5$; $0,7$; $0,9$ ($M=2500$; $n=8$).

3. Построить графики броуновской функции $B_H(t)$ при $B_H(0)=0$ и значениях параметров, приведенных в п. 2. Обосновать аномально большие отклонения броуновской функции от начала координат при $H>0,5$ с помощью дисперсии приращений.

4. Построить фрактальную броуновскую кривую «побед и поражений».

Практическое занятие № 6–7. **МЕТОД R/S ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

I. ТЕОРИЯ

Для броуновской функции $B_H(t)$ выполняется соотношение

$$B_H(bt) - B_H(t) = b^H \{B_H(t) - B_H(0)\}, \qquad (1)$$

справедливое в статистическом смысле при всех значениях масштабного множителя b.

Если положить $t = 1$ и $\Delta t = bt$, то придем к выводу, что приращение координаты фрактальной броуновской частицы, равное

$$B_H(\Delta t) - B_H(0) = |\Delta t|^H \{B_H(1) - B_H(0)\} \sim |\Delta t|^H, \qquad (2)$$

статистически пропорционально $|\Delta t|^H$.

Отсюда следует, что размах $R(\tau)$ при запаздывании τ также является случайной функцией, которая подчиняется закону подобия

$$R(\tau) \sim \tau^H. \qquad (3)$$

Поскольку дисперсия выборки значений нормированной фрактальной броуновской функции близка к единице, отсюда вытекает, что

$$R(\tau)/S \sim \tau^H. \qquad (4)$$

Таким образом, показатель Херста H можно оценить, аппроксимируя экспериментальные или модельные результаты соотношением (4).

II. ЗАДАНИЕ

1. Применить метод R/S к анализу результатов численного моделирования функции $B_H(t)$. Построить в двойном логарифмическом масштабе зависимость $R/S = f(\tau)$ для фрактальной броуновской функции $B_H(t)$ с $H = 0,9$.
2. На том же графике показать асимптотическую зависимость для гауссова процесса с независимыми приращениями $R/S = (\pi\tau/2)^{1/2}$.
3. Выполнить аппроксимацию наблюдаемых значений R/S зависимостью $R/S = (a\tau)^H$ и определить значения a и H.
4. Проанализировать полученные результаты.

Практическое занятие 8. **МОДЕЛЬ ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ В ПОПУЛЯЦИИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ РАЗМНОЖЕНИЯ**

I. ТЕОРИЯ

Для популяций с дискретным размножением (некоторые виды растений, насекомых и т. д.) поколения четко разнесены во времени и особи разных поколений не сосуществуют). Численность такой популяции можно характеризовать числом N_t и считать t дискретной величиной.

Одна из моделей внутривидовой конкуренции в этом случае выражается уравнением

$$N_{t+1} = \frac{N_t R}{1+\left(aN_t\right)^b}. \qquad (1)$$

Здесь R – скорость воспроизводства популяции в отсутствие внутривидовой конкуренции (это соответствует случаю $a=0$). Тогда уравнение (1) определяет просто изменение численности популяции по закону геометрической прогрессии: $N_t = N_0 R^t$, где N_0 – начальная численность популяции.

Знаменатель в уравнении отражает наличие конкуренции, делающей скорость роста тем меньше, чем больше численность популяции; a и b – параметры модели.

Исходные параметры модели:

R – скорость воспроизводства популяции;

N_0 – начальная численность популяции;

a – параметр, характеризующий интенсивность внутривидовой конкуренции;

b – параметр, характеризующий вид эволюции.

Характерная черта эволюции при $b=1$ – выход численности популяции на стационарное значение при любых значениях других параметров. Однако в природе так бывает не всегда и более общая модель при $b \neq 1$ отражает другие, более сложные, но реально существующие виды эволюции. Модель описывает четыре вида эволюции:

1) монотонное установление стационарной численности популяции;
2) колебательное установление стационарной численности популяции;
3) устойчивые предельные циклы изменения численности популяции;
4) случайные изменения численности популяции без наличия явных закономерностей (динамический хаос).

II. ЗАДАНИЕ

1. Изучить характер эволюции популяции, описываемой моделью (1), при заданных значениях параметров b , R, N_0 в зависимости от значения параметра a в диапазоне $a_1 \le a \le a_2$. Установить наличие или отсутствие качественных различий в характере эволюции в зависимости от значения параметра a.

2. Изучить характер эволюции популяции, описываемой моделью (1), при заданных значениях параметров a, R, N_0 в зависимости от значения параметра b в диапазоне $b_1 \le b \le b_2$. Установить наличие или отсутствие качественных различий в характере эволюции в зависимости от значения параметра b .

3. Изучить характер эволюции популяции, описываемой моделью (1), при заданных значениях параметров a , b , N_0 в зависимости от значения параметра R в диапазоне $R_1 \le R \le R_2$. Установить наличие или отсутствие качественных различий в характере эволюции в зависимости от значения параметра R .

4. Для модели (1) в фазовой плоскости (b, R) найти границы зон, разделяющих режимы монотонного и колебательного установления стационарной численности популяции изучаемой системы.

5. Для модели (1) в фазовой плоскости (b, R) найти границы зон, разделяющих режим колебательного установления стационарной численности популяции изучаемой системы и режим устойчивых предельных циклов.

Таблица 1. Значения параметров модели

№ вар-та	a	a_1	a_2	b	b_1	b_2	R	R_1	R_2	N_0
1	1	0,1	10	1	0,1	10	1	1	4	100
2	2	0,2	12	2	0,2	11	2	2	5	100
3	3	0,3	14	3	0,3	12	3	3	6	100
4	1	0,1	10	4	0,4	13	4	4	7	100
5	2	0,2	12	5	0,5	14	1	1	4	100
6	3	0,3	14	1	0,1	10	2	2	5	110
7	1	0,1	10	2	0,2	11	3	3	6	110
8	2	0,2	12	3	0,3	12	4	4	7	110
9	3	0,3	14	4	0,4	13	1	1	4	110
10	1	0,1	10	5	0,5	14	2	2	5	110
11	2	0,2	12	1	0,1	10	3	3	6	120
12	3	0,3	14	2	0,2	11	4	4	7	120
13	1	0,1	10	3	0,3	12	1	1	4	120
14	2	0,2	12	4	0,4	13	2	2	5	120
15	3	0,3	14	5	0,5	14	3	3	6	120
16	1	0,1	10	1	0,1	10	4	4	7	130
17	2	0,2	12	2	0,2	11	1	1	4	130
18	3	0,3	14	3	0,3	12	2	2	5	130
19	1	0,1	10	4	0,4	13	3	3	6	130
20	2	0,2	12	5	0,5	14	4	4	7	130
21	3	0,3	14	1	0,1	10	1	1	4	140
22	1	0,1	10	2	0,2	11	2	2	5	140
23	2	0,2	12	3	0,3	12	3	3	6	140
24	3	0,3	14	4	0,4	13	4	4	7	140
25	1	0,1	10	5	0,5	14	1	1	4	140

Практическое занятие 9. **ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ**

I. ТЕОРИЯ

В этом случае исследуется конкуренция популяций, потребляющих общий ресурс. Пусть N_1 и N_2 - численности конкурирующих популяций. Логистическая модель (называемая также моделью Лотки-Вольтерры) выражается уравнениями

$$\frac{dN_t}{dt} = r_1 \cdot N_1 \cdot \frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} \cdot N_2}{K_1},$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 \cdot N_2 \cdot \frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} \cdot N_1}{K_1}. \qquad (1)$$

Здесь r_1, r_2 - врожденные скорости роста популяций; K_1, K_2 - предельные плотности насыщения популяций; α_{12}, α_{21} - коэффициенты конкуренции, отражающие интенсивность межвидовой конкуренции.

Главный вопрос, который интересует исследователя межвидовой конкуренции, - при каких условиях увеличивается или уменьшается численность каждого вида? Для ответа на этот вопрос надо построить диаграммы, где были бы изображены все возможные сочетания численностей обоих видов. На таких диаграммах численность одного вида откладывают по горизонтальной оси, а другого - по вертикальной. При одних сочетаниях численностей будет отмечаться рост выбранной для наблюдения популяций, при других - уменьшение ее численности. Также для каждого из видов строятся изоклины - линии, вдоль которых не наблюдается ни увеличения, ни уменьшения численности.

Таким образом, данная модель предсказывает два режима эволюции взаимодействующих популяций:

1) устойчивое сосуществование;

2) полное вытеснение одной из популяций.

II . ЗАДАНИЕ

1. Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (1) при заданных значениях параметров r_1 , r_2 , K_1 , K_2 , α_{12} , α_{21} . Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений их начальной численности N_1^0 и N_2^0.

2. Реализовать моделирование межвидовой конкуренции по формулам (1) при заданных значениях параметров r_1 , r_2 , K_1 , K_2 , N_1^0, N_2^0. Проанализировать зависимость судьбы популяций от соотношения значений коэффициентов конкуренции α_{12} и α_{21}.

3. Построить в фазовой плоскости (N_1^0, N_2^0) границы зон, разделяющих какие-либо два режима эволюции конкурирующих популяций в соответствии с моделью (1). Остальные параметры модели выбрать произвольно. Учесть при этом, что режим устойчивого сосуществования популяций может быть реализован только при $\alpha_{12} \cdot \alpha_{21} < 1$.

Таблица 1. Значения параметров модели

№ вар-та	r_1	r_2	K_1	K_2	α_{12}	α_{21}	N_1^0	N_2^0
1	2	4	180	200	0,4	0,6	90	11O
2	3	3	190	190	0,5	0,5	100	100
3	4	2	200	180	0,6	0,4	110	90
4	4	2	210	190	0,65	0,45	120	100
5	3	3	200	200	0,55	0,55	110	110
6	2	4	190	210	0,45	0,65	100	120

7	2	5	190	220	0,45	0,6	80	110
8	3	4	200	210	0,5	0,55	90	100
9	4	3	210	200	0,55	0,5	100	90
10	5	2	220	190	0,6	0,45	110	80
11	5	2	220	190	0,65	0,35	120	90
12	4	3	210	200	0,55	0,45	110	100
13	3	4	200	210	0,45	0,55	100	110
14	2	5	190	220	0,35	0,65	90	120
15	2	4	200	220	0,45	0,65	100	110
16	3	3	210	210	0,55	0,55	105	105
17	4	2	220	200	0,65	0,45	110	100
18	4	2	190	150	0,6	0,4	75	55
19	3	3	170	170	0,5	0,5	65	65
20	2	4	150	190	0,4	0,6	55	75
21	3	5	180	230	0,4	0,7	95	110
22	5	3	230	180	0,7	0,4	110	95
23	2	6	160	240	0,35	0,75	90	115
24	4	4	210	210	0,55	0,55	100	100
25	6	2	240	160	0,75	0,35	115	90

Практическое занятие 10– 11. **МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»**

I. ТЕОРИЯ

В этой системе ситуация значительно отличается от предыдущей. В частности, если в случае конкурирующих популяций исчезновение одной означает выигрыш для другой (дополнительные ресурсы), то исчезновение «жертвы» влечет за собой и исчезновение «хищника», для которого в простейшей модели «жертва» является единственным кормом.

Введем обозначения: C - численность популяции хищника, N - численность популяции жертвы. Одна из известных моделей выражается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r \cdot N - a \cdot C \cdot N, \\ \dfrac{dC}{dt} = f \cdot a \cdot C \cdot N - q \cdot C. \end{cases} \qquad (1)$$

В первое уравнение заложен следующий смысл: в отсутствии хищников (т. е. при C = 0) численность жертв растет экспоненциально со скоростью r, так как модель не учитывает внутривидовой конкуренции; скорость роста жертв (т. е. $\frac{dN}{dt}$) уменьшается тем больше, чем чаще происходят встречи представителей видов; a - коэффициент эффективности поиска.

Второе уравнение говорит о следующем: в отсутствие жертв численность хищников экспоненциально убывает со скоростью q; положительное слагаемое в правой части уравнения компенсирует эту убыль; f - коэффициент эффективности перехода пищи в потомство хищников.

II . ЗАДАНИЕ

1. Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (4)) при заданных значениях параметров r, a, q, N_0 , C_0 . Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра f в диапазоне $f_1 \le f \le f_2$.

2. Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (4)) при заданных значениях параметров r, a, f, N_0 , C_0 . Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра q в диапазоне $q_1 \le q \le q_2$.

3. Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник-жертва» (модель (4)) при заданных значениях параметров a, f, q, N_0 , C_0 . Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра r в диапазоне $r_1 \le r \le r_2$.

4. Провести моделирование динамики численности популяций в системе «хищник жертва» (модель (4)) при заданных значениях параметров r, f, q, N_0 , C_0 . Проанализировать зависимость результатов моделирования от значения параметра a в диапазоне $a_1 \le a \le a_2$.

5. Модель (4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра a**.** Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

6. Модель (4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищни-

ков от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра q. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

7. Модель (4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра f. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

8. Модель (4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от значений параметра r. Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

9. Модель (4) предсказывает сопряженные колебания численности жертв и хищников. Исследовать зависимость запаздывания амплитуд колебаний численности хищников от амплитуд колебаний численности жертв в зависимости от соотношения значений начальных численностей популяций N_0 и C_0 . Значения остальных параметров фиксировать по усмотрению.

Таблица 1. Значения параметров модели

№ вар-та	a	f	r	q	N_0	C_0
1	0,1	0,45	4	1,5	90	5
2	0,15	0,5	4,5	2	100	6
3	0,2	0,55	5	2,5	120	7
4	0,25	0,6	5,5	3	140	8
5	0,3	0,65	6	3,5	160	9
6	0,1	0,6	4	2	80	4
7	0,15	0,55	4,5	2,5	90	5
8	0,2	0,5	5	3	100	6
9	0,25	0,45	5,5	3,5	120	7
10	0,3	0,4	6	4	140	8
11	0,1	0,35	3	1,5	100	5
12	0,15	0,4	3,5	2	110	6
13	0,2	0,45	4	2,5	120	7
14	0,25	0,5	4,5	3	130	7
15	0,3	0,55	5	3,5	140	8
16	0,1	0,65	6	4	150	8
17	0,15	0,6	5,5	3,5	130	7
18	0,2	0,65	5	3	110	7
19	0,25	0,5	4,5	2,5	90	6
20	0,3	0,55	4	2	70	4
21	0,1	0,35	3,5	2	80	4
22	0,15	0,4	4	2,5	90	5
23	0,2	0,45	4,5	3	100	6
24	0,25	0,5	5	3,5	110	6
25	0,3	0,55	5,5	4	120	7

Значения параметров a_1, a_2, f_1, f_2, r_1, r_2 для всех вариантов: $a_1= f_1= r_1=0,1$; $a_2= f_2= r_2=2$.

Практическое занятие 12. **МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ**

I . ТЕОРИЯ

Оценка эффективности комплекса мероприятий (прививки, вакцины, карантин и т. д.) для данного вида эпидемии (холера, чума, грипп, СПИД и т. д.) основывается на прогнозе протекания эпидемии. Отсюда вытекает задача построения модели, которая могла бы служить целям прогноза. Самой простой моделью является описание естественного хода эпидемии без применения каких-либо профилактических мероприятий и не учитывающей естественного иммунитета у здоровых людей к данному заболеванию. Эта модель определяется дифференциальным логистическим уравнением.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x(t) \cdot \left[N + 1 - x(t)\right], \qquad (1)$$

где $x(t)$ - число источников инфекции в момент времени t (число заболевших), N - число здоровых людей к началу эпидемии, α - коэффициент пропорциональности.

II . ЗАДАНИЕ

Провести моделирование распространения эпидемии на основе модели (1) при заданных значениях параметров N и α (см. табл. 1) и начальным условием $x(0) = 1$ (т. е. в группу из N здоровых людей в момент времени $t = 0$ попадает один заболевший человек). Выяснить скорость увеличения числа больных. Установить интервалы времени возрастания и убывания скорости заболевших.

Таблица 1. Значения параметров модели

Параметры	№ варианта											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	850	1100	1350	1480	1590	710	970	1230	1390	1440	1250	1390
$\alpha \cdot 10^4$	0,75	1,0	1,3	1,8	2,0	0,55	0,85	1,1	1,45	1,9	1,25	1,35
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
N	1670	1850	2100	570	750	840	930	1050	1550	1760	1920	2350
$\alpha \cdot 10^4$	1,5	1,85	2,2	0,6	0,68	0,73	0,8	0,95	1,3	1,55	2,1	2,5