

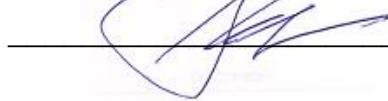
Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное  
общеобразовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
« 26 » января 2023 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



Б.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)  
«Методы математической физики»**

**Основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

с направленностью (профилем)  
**Механика деформируемого твердого тела**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-23

Тула 2023

**Разработчик методических указаний**

Кузнецов А.В., к.ф.-м.н., доцент  
*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*

  
*(подпись)*

## Некоторые примеры решения задач математической физики.

1.

### Решение задачи о колебаниях струны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

Как и всякое дифференциальное уравнение, уравнение (\*) имеет бесконечно много решений и для нахождения функции  $u(x,t)$ , описывающей колебания некоторой конкретной струны, нужно выделить из этого семейства одно, именно для этой струны. Для этого нужно исходить из некоторых исходных условий.

Во-первых, в нашем случае струна закреплена за два конца в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Тогда смещения в этих точках в любой момент времени равно 0:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (1)$$

Эти условия (1) называют краевыми (граничными) условиями задачи.

Обычно задают еще некоторые начальные условия. Например, в начальный момент времени  $t = 0$  известно смещение любой точки струны и известна начальная скорость любой точки струны, что выразится равенством:

$$u(x,0) = f(x) \quad (2)$$

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3)$$

где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  – известные функции,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  – скорость.

Таким образом, решение задачи о колебании струны сводится к решению дифференциального уравнения (\*), т.е. к нахождению функции 2-х переменных  $u(x,t)$ , удовлетворяющей краевым условиям (1) и начальным условиям (2) и (3). Существует несколько способов решения уравнения (\*). Разберем метод Фурье (разделение переменных).

Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = F(x) \cdot \Phi(t) , \quad (4)$$

$F(x)$  – зависит только от  $x$ ,  $\Phi(t)$  – только от  $t$ .

Подставим (4) в (\*). Т.к.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x) \cdot \Phi(t)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\Phi''(t)$ , то  $F(x) \cdot \Phi''(t) = a^2 F''(x) \cdot \Phi(t) \Rightarrow$

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi(t)} = a^2 \frac{F''(x)}{F(x)} \quad (5)$$

Левая часть (5) зависит только от  $t$ , правая – только от  $x$ , но т.к. они равны при любых  $t \geq 0$  и любых  $0 \leq x \leq l$ , то фактически они не зависят ни от  $t$ , ни от  $x$ , т.е.

$$\frac{\Phi''(t)}{a^2 \Phi(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = C = Const \quad (6)$$

Число  $C$  может быть только отрицательным  $C < 0$ .

Если  $C > 0$ , то никакого колебательного процесса не будет.

Действительно, при  $C > 0$  можем считать  $C = b^2$ . Тогда имеем из (6)

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = b^2 \text{ или } F''(x) - b^2 F(x) = 0 \quad (7)$$

Это линейное однородное уравнение 2-го порядка.  $k^2 - b^2 = 0$  – его характеристическое уравнение.

$$k_1 = b$$

$$k_2 = -b$$

его корни. Тогда решение (7) имеет вид

$$F(x) = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx} \quad (8)$$

Используем краевые условия, т.е. что  $u(0,t) = 0$ ;  $u(e,t) = 0$  при любом  $t$ .

Тогда из (8) имеем

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^{b0} + C_2 e^{-b0} \\ 0 = C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} \end{cases}$$

$C_1 = -C_2$ . Из 2-ого  $C_1 e^{bl} - C_1 e^{-bl} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{bl} - e^{-bl}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$  тогда  $C_2 = 0 \Rightarrow$

$$F(x) \equiv 0.$$

Но тогда и  $u(x,t) \equiv 0$  (при любом  $t$ ), т.е. колебаний нет.

Если  $C = 0$ , то  $F''(x) = 0$ .  $F'(x) = C$ .  $F(x) = C_1 x + C_2$ . Из краевых условий

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 e + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$$

Снова  $F(x) \equiv 0$ ,  $u(x,t) \equiv 0 \Rightarrow$  колебаний нет.

Итак, возможно лишь  $C < 0$ . Обозначим для удобства  $C = -b^2$ .

Тогда из (6) имеем два линейных дифференциальных уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$F''(x) + b^2 F(x) = 0 \quad (9)$$

$$\Phi''(t) + a^2 b^2 \Phi(t) = 0 \quad (10)$$

$$9) - 10) \Rightarrow k^2 + b^2 = 0 \\ k^2 + (ab)^2 = 0$$

$$\begin{cases} k_{12} = \pm bi \\ k_{12} = \pm abi \end{cases}$$

корни характеристических уравнений.

Потому решения имеют соответственно вид:

$$F(x) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx \quad (11)$$

$$\Phi(t) = D_1 \cos abt + D_2 \sin abt \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (4), получим решение уравнения струны (\*)

$$u(x,t) = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)(D_1 \cos abt + D_2 \sin abt) \quad (13)$$

Это общее решение уравнения (\*). Метод решения дифференциального уравнения 2-ого порядка в частных производных (\*) путем его сведения к решению 2-х обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка был применен Фурье и носит его название – метод Фурье разделения переменных. Он широко применяется в уравнениях математической физики.

Продолжим решение. Наша конкретная струна закреплена и в решении (13) это нужно учесть, т.е.  $u(0,t) = 0$ ,  $u(l,t) = 0$ . Из (13) видно, что в точках  $x = 0$  и  $x = l$  должен равняться 0 множитель, содержащий  $x$ , т.е.

$$\begin{cases} C_1 \cos bx + C_2 \sin bx \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ C_1 \cos bl + C_2 \sin bl = 0 \Rightarrow C_2 \sin bl = 0 \end{cases}$$

Здесь  $C_2 \neq 0$ , т.к. иначе снова  $u(x,t) \equiv 0$  и колебания не было бы.

Тогда

$$\sin bl = 0 \quad (14)$$

(14) может осуществляться только для определенных значений  $b$ , т.к.  $l$  (длина струны) – постоянная. Тогда  $bl = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Откуда

$$b = \frac{k\pi}{l} : 0, \pm \frac{\pi}{l}, \pm \frac{2\pi}{l}, \pm \frac{3\pi}{l}; \dots; \pm \frac{n\pi}{l}, \dots$$

$b = 0$  слева приводит к решению  $(x,t) = 0$  – движения нет.

Если в (13) подставить значения  $b = \frac{n\pi}{l}$  и  $b = -\frac{n\pi}{l}$ , то разница будет

лишь в знаке

у  $\sin bx$ , но наличие произвольной постоянной  $C_2$  делает эти два решения одинаковыми.

Значит, достаточно брать  $b > 0$ , т.е.

$$b = \frac{n\pi}{l} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Для каждого  $n$  получим соответствующее решение уравнения (\*).

$$u_n(x,t) = C_2 \left( D_1 \cos \frac{\pi n t}{l} + D_2 \sin \frac{\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Полагая  $C_2 \cdot D_1 = A_n$ ,  $C_2 \cdot D_2 = B_n$ , можем записать

$$u_n(x,t) = \left( A_n \cos \frac{\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (16)$$

Т.к. в состав  $A_n$  и  $B_n$  входят  $C_2$ ,  $D_1$  и  $C_2$ ,  $D_2$ , то они есть произвольные постоянные.

Из (16) видим, что каждая точка струны с абсциссой  $x$  с течением времени  $t$  совершает колебательные движения с частотой  $\omega = \frac{\pi n}{l}$  и ампли-

тудой  $A = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{\pi n x}{l}$  (общий вид колебательного движения  $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega t + \alpha)$ ). Отсюда видим, что частота колебания однаакова для всех точек струны ( $\omega = \frac{\pi n}{l}$  – не зависит от  $x$ ), амплитуда колебания для каждой точки разная. Т.к. частоты одинаковы, то максимального отклонения все точки достигают в один и тот же момент време-

ни. Все колебательные движения  $u_n(t)$  носят название собственных колебаний или стоячих волн. Это гармонические колебания и потому имеют вид синусоиды в любой момент времени. В зависимости от  $n$  (номера стоячей волны) зависит ее вид.

Например, при  $n = 1$ ,

$u_1(x,t) = \left( A_1 \cos \frac{\pi at}{l} + B_1 \sin \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l}$ . Амплитуда  $A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin \frac{\pi x}{l}$ , достигает наибольшего значения при  $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$ , т.е.  $\frac{\pi x}{l} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{2}$  - посередине.

При приближении к  $x = 0$  и  $x = l$  амплитуда уменьшается до 0. Стоячая волна имеет вид, при  $n = 2$ ,  $u_2(x,t) = \left( A_2 \cos \frac{2\pi at}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi at}{l} \right) \sin \frac{2\pi x}{l}$ .

$A = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \sin \frac{2\pi x}{l}$ . Наибольшее значение  $A$  при  $\frac{2\pi x}{l} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .  $\frac{2x}{l} = \frac{1+4k}{2}$ .  $k = 0$ .  $x = \frac{l}{4}$ ;  $k = 1$ ,  $x = \frac{5}{4}l$  - нет такой.

При  $x = \frac{l}{2}$   $\sin \frac{l\pi x}{l} = 0$ , при  $x = \frac{3l}{4}$   $\sin \frac{2\pi 3l}{4l} = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$  наименьшее значение. В точке  $x = \frac{l}{2}$  узел. Точка остается не месте при

колебаниях. Стоячая волна имеет вид, указанный на втором рисунке.

Совершенно аналогично стоячая волна при  $n = 3$  имеет уже 2 узла и т.д.

Так как уравнение (\*) есть однородное линейное, то сумма ее решений тоже есть решение и потому функция представлена рядом

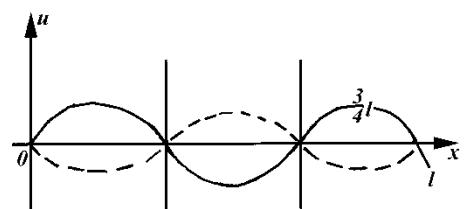
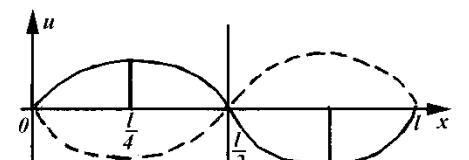
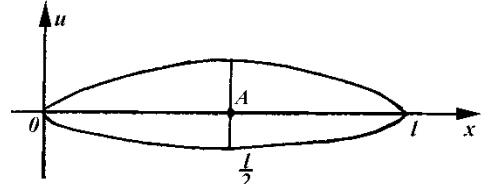
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17)$$

тоже есть решение уравнения (\*), только нужно требовать, чтобы этот ряд можно было почленно дважды дифференцировать. Действительно, тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] = 0,$$

т.е.  $u(x,t)$  решение (\*).

Это решение  $u(x,t)$  удовлетворяет краевым условиям, т.к. им удовлетворяет любая из функций  $u_n(x,t)$ :  $u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,t) = 0$ ,  $u(l,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(l,t) = 0$ .



В состав решения (17) входят произвольные коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ . Выберем эти коэффициенты так, чтобы выполнялись и начальные условия

$$(2) \text{ и } (3): u(x,0) = f(x) \text{ и } \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \varphi(x).$$

Для этого нужно, чтобы функция  $u(x,t)$  из (17) удовлетворяла им.

$$U(x,0) = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad (18)$$

$$\text{И т.к. } \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\pi n a}{l} A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{\pi n a}{l} B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ то}$$

$$\left. \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{t=0} = \sum B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \quad (19)$$

Вспоминая о разложениях в ряды Фурье функций  $f(x)$  на  $[0,l]$ , из (18) и (19) видим, что можно считать

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (20)$$

$$B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \text{ или}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (21)$$

Таким образом, функция  $u(x,t)$  из (17) с коэффициентами  $A_n$  и  $B_n$ , определяемым по (20) и (21), есть решение дифференциального уравнения свободных колебаний струны, удовлетворяющих заданным краевым и начальным условиям.

Способ решения называется "наложением стоячих волн", т.к. получается сложение отдельных стоячих волн.

Если речь идет о струне музыкального инструмента, то стоячие волны имеют определенный смысл. Каждая стоячая волна есть колебания струны, вызывающая определенное звучание. Чем больше частота звучания  $\omega = \frac{n\pi a}{l}$ , тем больше высота звука (звук тоньше), чем больше амплитуда колебания  $A$ , тем сильнее звук.

Оказывается, что при  $n \rightarrow \infty$ ,  $A_n \rightarrow 0$  и  $B_n \rightarrow 0$ , т.е. с возрастанием и амплитуда  $A$  и, значит, сила звука уменьшается, а высота увеличивается.

Наибольшую силу имеет звук, доставляемый 1-ой ст. волной при  $n = 1$ .

Он называется основным тоном струны. Частота колебания  $\omega_1$  наименьшая, звук самый низкий. Частоты  $\omega_2, \omega_3, \dots$  - колебаний струны называются частотами обертонов.

Т.к. настоящее колебание складывается из бесчисленного числа гармонических колебаний, то и звук складывается из бесчисленного числа звуков – основного тона и обертонаов.

Обертоны влияют на тембр звука, окраску основного тона.

У различных музыкальных инструментов основной звук и обертоны подбираются по разному. В этом секрет их различного звучания.

2.

### Конечная струна -- схема решения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l$$

$$u|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u_t|_{t=0} = u_2(x)$$

+ Границные условия

Две границы  $x = 0; x = l$

На каждой из границ могут быть следующий граничные условия:

I  $u|_{x=0} = \varphi(t)$

II  $u_x|_{x=l} = \psi(t)$

III  $(u_x + Au)|_{x=l} = p(t)$

Шаг 1. Обнуление граничных условий.

$$u = v + \omega$$

Нужно найти функцию  $\omega$ , которая имеет такие же граничные условия, как и функция  $u$ .

Тогда для функции  $v$  условия на границе будут = 0.

Шаг 2. Получить задачу для функции  $v$ . В исходную задачу подставляется  $u = v + \omega$  ( $\omega$ -найденная функция)

$$(v + \omega)_{tt} = a^2(v + \omega)_{xx} + f(x, t), 0 < x < l$$

$$(v + \omega)|_{t=0} = u_1(x)$$

$$(v + \omega)_t|_{t=0} = u_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию  $v$

то есть

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), 0 < x < l, \text{ где } \tilde{f}(x, t) = a^2 \omega_{xx} - \omega_{tt} + f(x, t)$$

$$v|_{t=0} = u_1(x) - \omega|_{t=0} = \tilde{u}_1(x)$$

$$v_t|_{t=0} = u_2(x) - \omega_t|_{t=0} = \tilde{u}_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию  $v$ .

Шаг 3.

Полученная задача еще разбивается на две задачи.

А именно, решение ищется в виде  $v = v_1 + v_2$ , где новые функции являются решением следующих задач.

$$v_{1tt} = a^2 v_{1xx}, 0 < x < l$$

$$v_1|_{t=0} = \tilde{u}_1(x)$$

$$v_{1t} \Big|_{t=0} = \tilde{u}_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию  $v_1$ .

и

$$\begin{aligned} v_{2tt} &= a^2 v_{2xx} + \tilde{f}(x, t), 0 < x < l, \\ v_2 \Big|_{t=0} &= 0 \\ v_{2t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

+ нулевые граничные условия на функцию  $v_2$ .

*Шаг 4*

Задача для функции  $v_1$  решается методом разделения переменных (или иначе методом Фурье). Решение ищется в виде произведения

$$v_1 = T(t) \cdot X(x)$$

Подставляя это выражение в уравнение для функции  $v_1$ , получаем

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Поделим обе части на  $a^2 T \cdot X$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Дальнейшее связано со следующим утверждением.

Лемма 1.

Если  $f(\bar{x}) = g(\bar{y}) \quad \forall \bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$ , то  $f = g = const$

Доказательство: Фиксируем  $\bar{y} = \bar{y}_0$ , тогда

$$f(\bar{x}) = \psi(\bar{y}_0) = C = const.$$

Но

$$g(\bar{y}) = f(\bar{x}) = C \Rightarrow f = g = const. \text{ Ч.т.д.}$$

Как следствие Леммы 1

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C = const$$

Отсюда получаем уравнение относительно функции  $T(t)$

$$I_T: \quad T'' - a^2 CT = 0$$

и относительно функции  $X(x)$

$$II_X: \quad X'' - CX = 0$$

Из нулевых граничных условий к уравнению  $II_X$  добавляются условия на функцию  $X$  на границах – это задача Штурма-Лиувилля.

Решить задачу Штурма-Лиувилля означает, что нужно найти нетривиальное решение  $X(x)$  и определить  $C$  при которой существуют ненулевые решения.

Задача Штурма-Лиувилля имеет счетное число различных решений  $\{X_n\}$  и каждому решению соответствует константа  $C_n$ .

Далее  $\forall n$  решаем уравнение  $I_T: T'' - a^2 C_n T = 0$

$$T_n(t) = a_n T_n^{(1)}(t) + b_n T_n^{(2)}(t)$$

$$\Rightarrow \forall n v_{1n} = T_n X_n$$

Уравнение линейно  $\Rightarrow$  действует принцип суперпозиции:

$$v_1 = \sum_n T_n X_n$$

Коэффициенты  $a_n, b_n$  находятся из начальных условий

$$\begin{aligned} v_1|_{t=0} \\ v_{1t}|_{t=0} \end{aligned} \Rightarrow v_1 = \sum_n T_n X_n$$

Шаг 5.

$$v_2 = \sum_n \gamma_n(t) X_n$$

Для выполнения нулевых начальных условий на  $v_2$

достаточно потребовать  $\gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0$ .

Наличие функций  $X_n$  обеспечивает нулевые условия на границах.

$v_2$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} v_{2tt} = a^2 v_{2xx} + \hat{f}(x, t) \\ \left( \sum_n \gamma_n(t) X_n \right)_{tt} = a^2 \left( \sum_n \gamma_n(t) X_n \right)_{xx} + \hat{f}(x, t) \end{aligned}$$

$$\sum_n \gamma_n'' X_n = a^2 \sum_n \gamma_n X_n'' + \hat{f}(x, t)$$

$$\sum_n (\gamma_n'' - a^2 C_n \gamma_n) X_n = \hat{f}(x, t)$$

$\hat{f}(x, t)$  раскладывается в ряд по  $X_n(x)$

$$\hat{f}(x, t) = \sum_n f_n(t) X_n(x).$$

Тогда задача Коши на

$$\gamma_n(t): \begin{cases} \gamma_n'' - a^2 C_n \gamma_n = f_n(t) \\ \gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_n(t) \Rightarrow v_2 = \sum_n \gamma_n(t) X_n$$

$$u = \omega + v_1 + v_2$$

## О задаче Ш.-Л.

Рассмотрим более общую ситуацию: задачу Ш.-Л следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{tt} + p(x)X_t + q(x)X = CX, 0 < x < l \\ \bigoplus \text{при } x = 0 \text{ и } x = l \text{ одно из граничных условий} \\ I X(0) = 0 \text{ или } X(l) = 0 \\ II X'(0) = 0 \text{ или } X'(l) = 0 \\ III (X' + AX)|_{x=0} = 0 \text{ или при } X = l \end{array} \right.$$

Предположим, что  $X_1$  и  $X_2$  – решение задачи Ш.-Л.

Пусть  $X_1$  – решение соответствующее константе  $C = C_1$ ;

$X_2$  – решение соответствующее константе  $C = C_2$ , тогда | \* | \*

$$X_1'' + pX_1' + qX_1 = C_1X_1$$

$$X_2'' + pX_2' + qX_2 = C_2X_2.$$

Умножим первое уравнение на  $X_2 e^{\int p dx}$ , а второе на  $X_1 e^{\int p dx}$  и вычтем из первого второе.

$$e^{\int p dx} (X_1''X_2 - X_2''X_1) + pe^{\int p dx} (X_1'X_2 - X_2'X_1) = (C_1 - C_2)e^{\int p dx} X_1X_2$$

Левую часть можно представить как производную произведения

$$(e^{\int p dx} (X_1'X_2 - X_2'X_1))' = (C_1 - C_2)e^{\int p dx} X_1X_2$$

Проинтегрируем обе части равенства от 0 до  $l$

$$e^{\int p dx} [X_1'(t)X_2(t) - X_2'(t)X_1(t)]|_0^l = (C_1 - C_2) \int_0^l e^{\int p dx} X_1X_2 dt$$

$$\begin{aligned} e^{\int p dx} \{ [(X_1'(l)X_2(l) - X_2'(l)X_1(l))] - [X_1'(0)X_2(0) - X_2'(0)X_1(0)] \} \\ = (C_1 - C_2) \int_0^l e^{\int p dx} X_1X_2 dt \end{aligned}$$

При любых условиях на границах левая часть полученного равенства равна нулю, следовательно

$$\int_0^l e^{\int p dx} X_1X_2 dt = 0$$

Введем функцию  $e^{\int p dx} = \rho(x)$ , которая называется весовой функцией. В результате мы получили, что функции  $X_1$  и  $X_2$  являются ортогональными в интегральном смысле с весом  $\rho(x)$ .

Функцию  $V(x)$  можно разложить в ряд по функциям  $X_n(x)$ . Предположим, что мы имеем подобное разложение

$$V(x) = \sum_n a_n X_n(x).$$

Умножим обе части на  $X_m(x)\rho(x)$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ . Тогда

$$\int_0^l V(x)\rho(x)X_m(x)dx = \sum_n a_n \int_0^l \rho X_n X_m dx.$$

Интегралы в правой части при  $m \neq n$  равны 0. Остается только одно слагаемое при  $m = n$ , откуда

$$a_n = \frac{\int_0^l V(x) \rho X_n dx}{\int_0^l \rho X_n^2 dx};$$

Это общая формула нахождения коэффициентов разложения функции  $V(x)$  в ряд по функциям  $X_n(x)$  на отрезке  $[0; l]$ .

Пример в общем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t), 0 < x < l$$

$$u|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u_t|_{t=0} = u_2(x)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$u_x|_{x=l} = 0$$

$$U = V_1 + V_2$$

$$V_{1,tt} = a^2 V_{1,xx}$$

$$V_1|_{t=0} = u_1(x)$$

$$V_{1,t}|_{t=0} = u_2(x)$$

$$V_1|_{x=0} = V_{1,x}|_{t=0} = 0$$

$$V_1 = T(x)X(x)$$

$$T''X = \alpha^2 TX'' : \alpha^2 TX$$

$$\frac{T''}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = C$$

$$I_T: T'' - \alpha^2 CT = 0$$

$$II_X: X'' - CX = 0$$

$$V_1|_{x=0} = T(x)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$V_{1,x}|_{x=l} = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$

$$C > 0; C = \lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$k^2 - \lambda^2 = 0; k_{1,2} = \pm \lambda$$

$$X = C_1 ch(\lambda x) + C_2 sh(\lambda x)$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X'(l) = \lambda C_2 ch(\lambda l) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X = 0 \text{ (не интересует)}$$

$$C = 0$$

$$X'' = 0$$

$$X = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X'(l) = C_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (не интересует)}$$

$$C < 0 \quad C = -\lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$k^2 + \lambda^2 = 0; k_{1,2} = \pm \lambda i$$

$$X = \widetilde{C}_1 \cos(\lambda x) + \widetilde{C}_2 \sin(\lambda x)$$

$$X(0) = \widetilde{C}_1 = 0$$

$$X'(l) = \lambda \widetilde{C}_2 \cos \lambda l = 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{C}_2}{\cos \lambda l} = 0$$

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi}{l} \left( \frac{1}{2} + n \right), n = \overline{0, \infty}$$

$$C = C_n = -\lambda_n^2 = -\frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{1}{2} + n \right)^2$$

$$X(x) = \widetilde{C}_2 \sin \lambda_n x$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi}{l} \left( \frac{1}{2} + n \right)$$

$$I_T: T'' - a^2 CT = 0$$

$$T'' + a^2 \lambda_n^2 T = 0$$

$$k^2 + a^2 \lambda_n^2 = 0$$

$$k_{1,2} = \pm a \lambda_n i$$

$$T_n(t) = a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t$$

$$\forall n T_n(t) X_n(x) = V_{1,n}$$

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t) \sin \lambda_n x$$

Из начальных условий:

$$V_1|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1,n} \sin \lambda_n x$$

$$u_{1,n} = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) \sin \lambda_n x dx$$

$$V_{1,t}|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} ab_n \lambda_n \sin \lambda_n x = u_2(x)$$

$$ab_n \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_2(x) \sin \lambda_n x dx$$

$$b_n = \frac{2}{a \lambda_n l} \int_0^l u_2(x) \sin \lambda_n x dx \Rightarrow V_1 \text{ найдено}$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$\gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0$$

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \lambda_n x dx$$

$$\begin{cases} \gamma_n'' + a^2 \lambda_n^2 \gamma_n = f_n(t) \\ \gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_n(t) \Rightarrow V_2$$

Пример 1(конкретный):

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= 4u_{xx} - 8t + t^2 \cos 3x, 0 < x < \pi \\
 u|_{t=0} &= \sin^2 x \\
 u_t|_{t=0} &= x^2 + \cos 4x \\
 u_x|_{x=0} &= 0 \\
 u_x|_{x=\pi} &= 2\pi t \\
 u &= v + \omega \\
 \omega: \omega_x|_{x=0} &= 0 \\
 \omega_x|_{x=\pi} &= 2\pi t \Rightarrow \omega = x^2 t \\
 u &= V + x^2 t \\
 V_{tt} + 0 &= 4(v_{xx} + 2t) - 8t + t^2 \cos 3x \\
 V_{tt} &= 4V_{xx} + t^2 \cos 3x \\
 u|_{t=0} &= (V + x^2 t)|_{t=0} = \sin^2 x \\
 u_t|_{t=0} &= (v + x^2 t)_t|_{t=0} = x^2 + \cos 4x \\
 V_t|_{t=0} &= \cos 4x \\
 V_{tt} &= 4V_{xx} + t^2 \cos 3x \\
 V|_{t=0} &= \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
 V_t|_{t=0} &= \cos 4x \\
 V_x|_{x=0} &= 0 \\
 V_x|_{x=\pi} &= 0 \\
 V &= V_1 + V_2 \\
 V_1: V_{1tt} &= 4V_{1xx} \\
 V_1|_{t=0} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
 V_{1t}|_{t=0} &= \cos 4x \\
 V_{1x}|_{x=0} &= 0 \\
 V_{1x}|_{x=\pi} &= 0 \\
 V_1 &= T(t)X(x) \\
 T''X &= 4TX''; 4TX \\
 \frac{T''}{4T} &= \frac{X''}{X} = C \\
 I_T T'' - 4CT &= 0 \\
 II_X \left\{ \begin{array}{l} X'' - CX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{array} \right. \\
 C > 0: C &= \lambda^2 (\lambda > 0) \\
 X'' - \lambda X &= 0 \\
 k_{1,2} &= \pm \lambda \\
 X &= \tilde{C}_1 ch(\lambda x) + \tilde{C}_2 sh(\lambda x) \\
 X'(0) = \tilde{C}_2 \lambda &= 0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0 \\
 X'(\pi) = \tilde{C}_1 \lambda sh(\lambda \pi) &= 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (не интересует)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= 0, X'' = 0 \\
X &= \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2 \\
X'(0) &= \widetilde{C}_1 = 0 \\
X(\pi) &= \widetilde{C}_1 = 0 \\
X(x) &= \widetilde{C}_2 = 1 \text{ (произвольно)} \\
X_0 &= 1 \\
C < 0; C &= -\lambda^2 (\lambda > 0) \\
X'' + \lambda^2 X &= 0 \\
k_{1,2} &= \pm \lambda i \\
X &= \widetilde{C}_1 \cos \lambda x + \widetilde{C}_2 \sin \lambda x \\
X'(0) &= \lambda \widetilde{C}_2 = 0 \Rightarrow \widetilde{C}_2 = 0 \\
X'(\pi) &= -\lambda \widetilde{C}_1 \sin \lambda \pi = 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{C}_1}{\sin \lambda \pi} = 0 \\
&\quad \lambda \pi = \pi n \\
\lambda &= \lambda_n = n; n = \overline{1, \infty} \\
C &= C_n = -\lambda_n^2 = -n^2 \\
X(x) &= \widetilde{C}_1 \cos \lambda_n x (\widetilde{C}_1 = 1) \Rightarrow \\
C &= 0 \Rightarrow X_n(x) = \cos nx \\
C &= -n^2 \Rightarrow X_0 = 1 \\
X_n &= \cos nx, n \geq 1 \Rightarrow X_n = \cos nx, n = \overline{1, \infty} \\
I_T: T'' - 4CT &= 0 \\
C &= -n^2 = -\lambda_n^2, n = \overline{1, \infty} \\
T'' + 4n^2 T &= 0 \\
T'' + 4\lambda_n^2 T &= 0 \\
k_{1,2} &= \pm 2ni \\
T_n(t) &= a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt \\
C &= 0 \\
T'' &= 0 \\
T_0 &= a_0 + b_0 t
\end{aligned}$$

Общее решение  $V_1$ :

$$\begin{aligned}
V_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos nx = T_0 X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n \\
&= a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt) \cos nx \\
&\quad \text{Определяем } a_n, b_n \\
V_1|_{t=0} &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
a_0 &= \frac{1}{2}; a_2 = -\frac{1}{2}; a_n = 0, n = 1, 3, 4, 5, \dots, \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_t|_{t=0} &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2n \cos nx = \cos 4x \\
n &= 4 \quad b_n 2n = 1 \\
b_4 &= \frac{1}{8}; \quad b_n = 0, n \neq 4, n > 0 \\
V_1(x, t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 8t \cos 4x \\
V_2: V_{tt} &= 4V_{xx} + t^2 \cos 3x \\
v_2|_{t=0} &= 0 \\
V_{2t}|_{t=0} &= 0 \\
V_{2x}|_{x=0} &= 0 \\
V_{2x}|_{x=\pi} &= 0 \\
V_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t) \cos nx
\end{aligned}$$

$$\gamma(0) = \gamma'(\pi) = 0$$

$$\gamma_n = 0, n \neq 3$$

$$v_2 = \gamma_2(t) X_2(x) = \gamma_2(t) \cos 3x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_3'' + 4 * 3^2 \gamma_3 = t^2 \\ \gamma_3(0) = \gamma'(0) \end{array} \right.$$

$$T'' + 4n^2 T = 0$$

$$\gamma_3 = \gamma_{3 \text{ одн}} + \overline{\gamma_3}$$

$$\gamma_{3 \text{ одн}} = \overline{C}_1 \cos 6t + \overline{C}_2 \sin 6t$$

$$\overline{\gamma_3} = At^2 + Bt + C$$

$$\overline{\gamma_3}' = 2At + b$$

$$\overline{\gamma_3}'' = 2A$$

$$2A + 4 * 3^2 (At^2 + Bt + C) = t^2$$

$$36A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{36}$$

$$B = 0$$

$$2A + 36C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3 = \widehat{C}_1 \cos 6t + \widehat{C}_2 \sin 6t + \frac{1}{36}t^2 - \frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3(0) = \widehat{C}_1 - \frac{2}{36^2} = 0 \Rightarrow \widehat{C}_1 = \frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3'(0) = 6\widehat{C}_2 = 0 \Rightarrow \widehat{C}_2 = 0$$

$$\gamma_3(t) = \frac{2}{36^2} \cos 6t + \frac{1}{36}t^2 - \frac{2}{36^2}$$

$$V_2 = \frac{2}{36^2} (\cos 6t + 18t^2 - 1) \cos 3x$$

$$u = \omega + V_1 + V_2$$

Пример 2(3-е граничное условие):

$$u_{tt} = 9u_{xx}, 0 \leq x \leq 2$$

$$u|_{t=0} = x$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$(u - u_x)|_{x=2} = 0$$

$$(u \equiv v_1)$$

$$u = T(t)X(x)$$

$$T''X = 9TX'' \quad (: 9TX)$$

$$\frac{T''}{9T} = \frac{X''}{X} = C$$

$$I_T T'' - 9CT = 0$$

$$H_X \begin{cases} X'' - CX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(2) - X'(2) = 0 \end{cases}$$

$$1 \text{ случай } C > 0; C = \lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$X = \tilde{C}_1 ch(\lambda x) + \tilde{C}_2 sh(\lambda x)$$

$$X(0) = \tilde{C}_1 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = \tilde{C}_2 sh(2\lambda) - \lambda \tilde{C}_2 ch(2\lambda) = 0$$

$$\tilde{C}_2 (sh(2\lambda) - \lambda ch(2\lambda)) = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

$$sh(2\lambda) - \lambda ch(2\lambda) = 0 \quad (: ch(2\lambda)) \Rightarrow$$

$$th(2\lambda) = \lambda$$

Нашлась точка (можно посмотреть графически)  $\lambda^*$ , удовлетворяющая

уравнению  $th(2\lambda) = \lambda$

$$X = \tilde{C}_2 sh(\lambda^* x)$$

$$\tilde{C}_2 = 1 \text{ (сами)}$$

$$X^*(x) = sh(\lambda^* x) \quad (th(2\lambda^*) = \lambda^*)$$

$$C = (\lambda^*)^2$$

$$2 \text{ случай: } C = 0 \Rightarrow X'' = 0$$

$$X = \tilde{\tilde{C}}_1 x + \tilde{\tilde{C}}_2$$

$$X(0) = \tilde{\tilde{C}}_2 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = 2\tilde{\tilde{C}}_1 - \tilde{\tilde{C}}_1 = \tilde{\tilde{C}}_1 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

$$3 \text{ случай: } C < 0; C = -\lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X = \widehat{C}_1 \cos \lambda x + \widehat{C}_2 \sin \lambda x$$

$$X(0) = \widehat{C}_1 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = \widehat{C}_2 \sin 2\lambda - \lambda \widehat{C}_2 \cos 2\lambda = 0$$

Отсюда либо  $\widehat{C}_2 = 0$ , что приводит к тривиальному решению, которое нас не интересует, либо  $\sin 2\lambda - \lambda \cos 2\lambda = 0$ . Поделив на косинус, получим следующее уравнение

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \lambda$$

Графически можно показать, что это уравнение имеет бесконечное число решений, которые нельзя найти аналитически. Мы их просто обозначаем  $\lambda_n$  и далее работаем с этим буквенным обозначением.

Таким образом:

$$X = \widehat{C}_2 \sin \lambda_n x$$

$\widehat{C}_2 = 1$  (сами)

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x$$

Далее решаем уравнение относительно функции  $T(t)$

$$\text{Для } C = (\lambda^*)^2$$

$$T'' - 9(\lambda^*)^2 T = 0$$

$$T = a^* \operatorname{ch}(3\lambda^* t) + b^* \operatorname{sh}(3\lambda^* t)$$

$$\text{Для } C = -\lambda_n^2;$$

$$T'' + 9\lambda_n^2 T = 0$$

$$T_n = a_n \cos 3\lambda_n t + b_n \sin 3\lambda_n t$$

$$\begin{aligned} u &= T^* X^* + \sum_n T_n X_n \\ &= \left( a^* \operatorname{ch}(3\lambda^* t) + b^* \operatorname{sh}(3\lambda^* t) \right) \operatorname{sh}(\lambda^* x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 3\lambda_n t + b_n \sin 3\lambda_n t) \sin \lambda_n x \end{aligned}$$

$$u|_{t=0} = 3\lambda^* b^* \operatorname{sh}(\lambda x) + \sum_{n=1}^{\infty} 3\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = 0 \Rightarrow b^* = b_n = 0$$

$$u|_{t=0} = a^* \operatorname{sh}(\lambda^* x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = x$$

$$a_n = \frac{\int_0^2 x \rho(x) X_n dx}{\int_0^2 \rho(x) X_n^2 dx}$$

$$X'' + p(x)X' + qX = -CX$$

$p = 0$  в нашем случае

Весовая функция (вес)  $\rho = e^{\int -p dx} = 1$

$$a_n = \frac{\int_0^2 x \sin \lambda_n x dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_n x dx}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin \lambda_n x dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - \cos 2\lambda_n x) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n x \right) \Big|_0^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 3\lambda_n = 1 - \frac{2 \sin 2\lambda_n \cos \lambda_n}{4\lambda_n} = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\lambda_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x \sin \lambda_n x \, dx &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^2 x d \cos \lambda_n x = -\left(\frac{x}{\lambda_n} \cos \lambda_n x - \frac{1}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x\right) \Big|_0^2 \\
&= -\frac{2}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin 2\lambda_n = [\sin 2\lambda_n - \lambda_n \cos 2\lambda_n = 0] \\
&= -\frac{1}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n \\
a_n &= \frac{-\frac{1}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\lambda_n}
\end{aligned}$$

Аналогично можно найти

$$a^* = \frac{\int_0^2 x sh(\lambda^* x) \, dx}{\int_0^2 sh^2(\lambda^* x) \, dx} = \frac{\frac{1}{\lambda^*} ch(2\lambda^*)}{1 - \frac{1}{2} ch^2(2\lambda^*)}$$

Теперь можно написать ответ:

$$u = (a^* ch(3\lambda^* t)) sh(\lambda^* x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 3\lambda_n t) \sin \lambda_n x$$

3.

### Пример для резонансного случая.

$$\Delta u = r^3 \sin 5\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u \Big|_{r=2} = 4$$

$$u \Big|_{r=3} = \sin \varphi$$

Если искать решение так же, как в предыдущем примере, то получится следующее:

$$u_r = \omega = Ar^\alpha \sin 5\varphi, \quad A = const$$

Для этой функции потребуем выполнение уравнения

$$\Delta \omega = \omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r + \frac{1}{r^2} \omega_{\varphi\varphi} = r^3 \sin 5\varphi \quad (2)$$

Тогда получим

$$A\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \sin 5\varphi + A\alpha r^{\alpha-2} \sin 5\varphi - 25Ar^{\alpha-2} \sin 2\varphi = r^3 \sin 5\varphi$$

Далее, сократив на  $\sin 5\varphi$  имеем

$$Ar^{\alpha-2}(\alpha^2 - 25) = r^3.$$

Откуда  $r^{\alpha-2} = r^3$

$$\alpha - 2 = 3$$

$$\alpha = 5.$$

Сократив на  $r^3$  получаем

$$A(\alpha^2 - 25) = 0 \cdot A = 1$$

Естественно, что полученное соотношение не имеет смысла. То есть значения  $A$  не существует.

Но это не означает, что задача не решается. Единственный вывод, который отсюда следует, что решение  $\omega$  нужно искать в другом виде.

Просто мы считали, что  $A$  константа. В результате получили, что такой константы не существует.

Значит ищем теперь решение в виде

$$u_\varphi = \omega = A(r)r^\alpha \sin 5\varphi$$

Найденное значение  $\alpha = 5$  используем, то есть

$$u_\varphi = \omega = A(r)r^5 \sin 5\varphi$$

Остается определить функцию  $A(r)$ .

Вычисляем производные

$$\omega_r = A'(r)r^5 \sin 5\varphi + 5A(r)r^4 \sin 5\varphi$$

$$\omega_{rr} = A''(r)r^5 \sin 5\varphi + 10A'(r)r^4 \sin 5\varphi + 20A(r)r^3 \sin 5\varphi$$

$$\omega_{\varphi\varphi} = -25A(r)r^5 \sin 5\varphi$$

и подставляем все в уравнение (2).

$$A''(r)r^5 \sin 5\varphi + 10A'(r)r^4 \sin 5\varphi + 20A(r)r^3 \sin 5\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}(A'(r)r^5 \sin 5\varphi + 5A(r)r^4 \sin 5\varphi) - \frac{1}{r^2}25A(r)r^5 \sin 5\varphi = r^3 \sin 5\varphi$$

Сократив на  $\sin 5\varphi$  и  $r^3$  получим

$$A''(r)r^2 + 10A'(r)r + 20A(r)r^3 + (A'(r)r + 5A(r)) - 25A(r) = 1$$

$$\text{или } A''(r)r^2 + 11A'(r)r = 1$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение домножим обе его части на  $r^9$ .

Тогда  $A''(r)r^{11} + 11A'(r)r^{10} = r^9$  и левую часть можно свернуть как производную произведения

$$(A'(r)r^{11})' = r^9.$$

Интегрируем

$$A'(r)r^{11} = \int r^9 dr = \frac{r^{10}}{10} + C_1.$$

Так как мы хотим найти хоть какое-нибудь решение, то самый простой способ взять константу как можно проще.

А именно берем  $C_1 = 0$ . Тогда, сократив на  $r^{10}$  получим

$$A'(r) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{r}.$$

Еще раз интегрируем и получаем

$$A(r) = \frac{1}{10} \cdot \ln r + C_2.$$

Опять же для простоты вида функции  $A(r)$  берем  $C_2 = 0$  и тогда получаем

$$A(r) = \frac{1}{10} \cdot \ln r, \text{ откуда}$$

$$u_u = \omega = A(r)r^5 \sin 5\varphi = \frac{1}{10} \cdot r^5 \ln r \cdot \sin 5\varphi$$

Далее действуем также, как и в предыдущем примере:  
ищем решение исходной задачи в виде

$$u = v + \omega .$$

Функция  $v$  является решением следующей задачи  
 $\Delta v = 0, 2 < r < 3$

$$v|_{r=2} = u|_{r=2} - \omega|_{r=2} = 4 - \frac{1}{10} 2^5 \ln 2 \cdot \sin 5\varphi$$

$$v|_{r=3} = u|_{r=3} - \omega|_{r=3} = \sin \varphi - \frac{1}{10} 3^5 \ln 3 \cdot \sin 5\varphi$$

Далее воспользуемся тем, что общее решение уравнения Лапласа для кольца уже получено

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) = & A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ & + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi \end{aligned}$$

Ищем коэффициенты. Они находятся из следующих систем:

$$\begin{cases} A_0 \ln 2 + B_0 = 4 \\ A_0 \ln 3 + B_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 2 + D_1 2^{-1} = 0 \\ B_1 3 + D_1 3^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_5 2^5 + D_5 2^{-5} = -\frac{1}{10} 2^5 \ln 2 \\ B_5 3^5 + D_5 3^{-5} = -\frac{1}{10} 3^5 \ln 3 \end{cases}$$

Системы можно решить и найти значения коэффициентов.

Надеясь, что каждый из вас подобные системы может решить и поскольку выражения для коэффициентов получатся достаточно плохие, то при решении подобных задач контрольной и зачета достаточно будет записать системы для нахождения коэффициентов, не решая их. То есть то, что уже у нас написано. И учитывая, что все остальные коэффициенты равны нулю, записываем результат.

Решение исходной задачи

$$u = v + \omega = A_0 \ln r + B_0 +$$

$$+ (B_1 r + D_1 r^{-1}) \sin \varphi + (B_5 r^5 + D_5 r^{-5}) \sin 5\varphi + \frac{1}{10} r^5 \ln r \cdot \sin 5\varphi$$

На контрольной задача будет содержать два слагаемых в правой части, например:

$$\Delta u = r \sin 2\varphi + r^3 \sin 5\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u|_{r=2} = \sin 3\varphi$$

$$u|_{r=3} = \cos \varphi$$

Одно слагаемое -- резонансный случай, а другое -- не резонансный. Соответственно функция  $\omega$  будет представлять собой два слагаемых.  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , каждое из которых ищется отдельно. Одно для уравнения

$$\Delta \omega_1 = (\omega_1)_{rr} + \frac{1}{r}(\omega_1)_r + \frac{1}{r^2}(\omega_1)_{\varphi\varphi} = r \sin 2\varphi$$

другое для уравнения

$$\Delta \omega_2 = (\omega_2)_{rr} + \frac{1}{r}(\omega_2)_r + \frac{1}{r^2}(\omega_2)_{\varphi\varphi} = r^3 \sin 5\varphi.$$

Соответственно  $\omega_1$  находится как в примере предыдущей лекции, а  $\omega_2$  как в настоящем примере.

Далее так же как в обоих примерах работаем с функцией  $\omega$ .

Что касается задач в круге и внешности круга, то на контрольной их не будет, но могут попасться на зачете. На практике для тренировки будет несколько примеров с нерезонансным случаем. Принцип решения такой же, как и для кольца: с помощью функции  $\omega$  уравнение Пуассона сводится к решению уравнения Лапласа, для которого вид общего решения уже найден. И остается только определить коэффициенты и записать ответ.

4.

Уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta u = -f(x, t) \text{ в } \Omega$$

Плюс граничные условия.

Если на границе области задано значение функции:  $u|_{\partial\Omega} = u_0(x)$ . то задача именуется задачей Дирихле для уравнения Лапласа (Пуассона)

Если на границе области задана производная по нормали к границе:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = u_0(x), \text{ то задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона).}$$

Если на границе задано 3-е граничное условие, то задача не имеет своего названия.

Решение любой из задач для уравнения Пуассона можно представить в виде суммы функций: первая из которых является решением соответствую-

щей задачи для уравнения Лапласа, а вторая решением уравнения Пуассона с нулевым соответствующим условием на границе области.

Но реально удобнее указывается решать уравнение Пуассона несколько подругому.

Идея состоит в том, что найдя какое-нибудь решение уравнения Пуассона  $\omega$  можно свести решение уравнения Пуассона к решению уравнения Лапласа.

Если решая уравнение  $\Delta u = -f(x, t)$  мы найдем некоторую функцию  $\Delta \omega = -f(x, t)$ , то представив  $u = v + \omega$  получим, что  $\Delta v = 0$ . Границные условия на новую неизвестную функцию  $v = \omega - u$  можно найти, поскольку функция  $\omega$  известна, а граничные условия на функцию  $u$  можно взять из условия задачи.

Следует отметить, что получение общего решения уравнения Лапласа никак не связано с условиями на границе.

Уравнение Лапласа для круга, кольца и внешности круга.

Во всех случаях будем рассматривать решения такие, что  $|u(x)| < M$  - огранич.

Кольцо: Переходим к полярным координатам:

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \\ u|_{r=R_1} &= u_1(\varphi) \\ u|_{r=R_2} &= u_2(\varphi)\end{aligned}$$

Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}u &= R(r)\Phi(\varphi) \\ R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' &= 0 \quad / \Phi R \\ \frac{r^2 \left( R'' + \frac{1}{r}R' \right)}{R} &= -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2 \\ u(r, \varphi) &= u(r, \varphi + 2\pi)\end{aligned}$$

$$I. \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\lambda = n, n = \overline{0, \infty}$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$$

При  $n = 0$  имеем одно решение  $\Phi_0(\varphi) = 1$ , при  $n \geq 1$  имеется два независимых решения

$$\Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos n\varphi$$

$$\Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin n\varphi$$

Общее решение при этом будет иметь вид

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

$$II. r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \text{ -- уравнение Эйлера}$$

$$\lambda = 0 \quad rR'' + R' = 0, R' = y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow y = C_1 \frac{1}{r} \Rightarrow R = C_1 \ln r + C_2$$

Два независимых решения  $R_1 = \ln r, R_2 = 1$

При  $\lambda = n$  ищем решение в виде  $R = r^\alpha$ .

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

Сокращая  $r^\alpha$  получаем  $\alpha^2 = n^2, \alpha = \pm n$ , то есть имеем два независимых решения

$$R_{(1)} = r^n, R_{(2)} = r^{-n}.$$

Общее решение получается как линейная комбинация этих независимых решений

$$R_n = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}$$

Итак имеем

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \text{ при } n \geq 1$$

$$\Phi_0(\varphi) = A_0 \text{ при } n = 0$$

$$R_n(r) = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}, n \geq 1$$

$$n = 0 \quad R_0(r) = C_{10} \ln r + C_{20}$$

Соответственно при каждом  $n$  получаем решение  $u_n(r, \varphi)$ .

$$u_0(r, \varphi) = \Phi_0 \cdot R_0 = C_{10} \ln r + C_{20} = A_0 \ln r + B_0$$

При  $n \geq 1$

$$u_n(r, \varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^{-n}.$$

Общее решение имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n + \\ + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^{-n}$$

Можно записать иначе

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi \quad (1)$$

По сути -- одно и то же. Смысл в том, что раскрыв скобки мы получим и в том, и в другом линейную комбинацию произведений независимых решений  $\Phi$  и  $R$ . Одна и другая форма записи связаны только со способом группировки слагаемых.

---



---

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

$$\Delta u = 0, \quad R_1 < r < R_2$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u \Big|_{r=R_1} = u_1(\varphi) \\ u \Big|_{r=R_2} = u_2(\varphi) \end{array} \right\} \text{-- кольцо}$$

Для кольца:

$$u \Big|_{r=R_1} = B_0 \ln R_1 + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) +$$

$$+ R_1^{-n} (C_1 \cos n\varphi + D_1 \sin n\varphi) = u_1(\varphi)$$

$$u \Big|_{r=R_2} = B_0 \ln R_2 + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) +$$

$$+ R_2^{-n} (C_2 \cos n\varphi + D_2 \sin n\varphi) = u_2(\varphi)$$

Если вспомнить разложение функции на отрезке  $[-\pi; \pi]$  в ряд Фурье

$$f(\varphi) = u_1(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

то для нахождения коэффициентов используются известные формулы

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

Аналогично и на другой границе

$$g(\varphi) = u_2(\varphi) = \frac{1}{2} g_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^{(c)} \cos n\varphi + g_n^{(s)} \sin n\varphi)$$

Коэффициенты  $A_n, B_n, C_n, D_n$  находим из систем, причем при этом удобнее использовать решение в форме (1)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} f_0^{(c)} = B_0 \ln R_1 + A_0 \\ \frac{1}{2} g_0^{(c)} = B_0 \ln R_2 + A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_n^{(c)} = R_1^n A_n + R_1^{-n} C_n \\ g_n^{(c)} = R_2^n A_n + R_2^{-n} C_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_n^{(s)} = R_1^n B_n + R_1^{-n} D_n \\ g_n^{(s)} = R_2^n B_n + R_2^{-n} D_n \end{cases}$$

Найдя коэффициенты записываем решение в виде (1) с найденными конкретными коэффициентами.

В общем случае получаем решение в виде ряда (1)

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

Для круга:

$$\Delta u = 0, \quad r < R_2$$

$$u|_{r=R_2} = u_0(\varphi)$$

Решение для круга можно получить из решения для кольца, устремив меньший радиус кольца к нулю и учитывая, что решение должно быть ограничено.

При  $R_1 \rightarrow 0$  в общем решении для кольца имеются слагаемые, стремящиеся к бесконечности. В силу ограниченности решения эти слагаемые должны исчезнуть.

А возможно это только в случае, если этих слагаемых в решении просто не будет, то есть

$$B_0 = C_n = D_n = 0.$$

Тогда общее решение уравнения Лапласа для круга примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \\ u|_{r=R_2} &= u_0 = f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi) \Rightarrow \\ A_0 &= \frac{1}{2} f_0^{(c)}, \quad B_n = \frac{1}{R_2^n} f_n^{(s)}, \quad A_n = \frac{1}{R_2^n} f_n^{(c)} \end{aligned}$$

Внешность круга.

$$\Delta u = 0, \quad r > R_1$$

$$u|_{r=R_1} = u_0(\varphi).$$

Аналогично решению для круга решение для внешности круга получим устремляя больший радиус кольца к бесконечности.

Соответственно при  $R_2 \rightarrow \infty$  в общем решении для кольца будут слагаемые стремящиеся к бесконечности. В силу ограниченности решения они должны исчезнуть. Это произойдет, если этих слагаемых не будет. То есть

$$B_0 = A_n = B_n = 0$$

и решение для внешности круга будет выглядеть следующим образом

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} u|_{r=R_1} &= u_0 = f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi) \\ A_0 &= \frac{1}{2} f_0^{(c)}, \quad C_n = R_1^n f_n^{(c)}, \quad D_n = R_1^n f_n^{(s)} \end{aligned}$$

Пример решения задачи

$$\Delta u = r \sin 2\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u|_{r=2} = \sin 3\varphi$$

$$u|_{r=3} = \cos \varphi$$

Найдем частное решение уравнения Пуассона.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = r \sin 2\varphi$$

Из структуры оператора Лапласа в полярных координатах следует, что это решение можно искать в виде

$$u_r = \omega = Ar^\alpha \sin 2\varphi.$$

Подставив это выражение в уравнение Пуассона получим

$$A\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} \sin 2\varphi + A\alpha r^{\alpha-2} \sin 2\varphi - 4Ar^{\alpha-2} \sin 2\varphi = r \sin 2\varphi$$

далее, сократив на  $\sin 2\varphi$  получим

$$\cdot Ar^{\alpha-2}(\alpha^2 - 4) = r.$$

Откуда  $r^{\alpha-2} = r$

$$\alpha - 2 = 1$$

$$\alpha = 3.$$

Таким образом  $A(\alpha^2 - 4) = A(3^2 - 4) = 1$  и  $A = \frac{1}{5}$ .

Значит  $\omega = \frac{1}{5}r^3 \sin 2\varphi$ .

Далее ищем решение исходной задачи в виде

$$u = v + \omega.$$

Функция  $v$  является решением следующей задачи

$$\Delta v = 0, \quad 2 < r < 3$$

$$v|_{r=2} = \sin 3\varphi - \omega|_{r=2} = \sin 3\varphi - \frac{1}{5}2^3 \sin 2\varphi$$

$$v|_{r=3} = \cos \varphi - \omega|_{r=3} = \cos \varphi - \frac{1}{5}3^3 \sin 2\varphi$$

Общее решение уравнения Лапласа для кольца уже получено

$$v(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

Остается найти коэффициенты. Они найдутся из следующих систем

$$\begin{cases} B_2 2^2 + D_2 2^{-2} = -\frac{2^3}{5} \\ B_2 3^2 + D_2 3^{-2} = -\frac{3^3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_3 2^3 + D_3 2^{-3} = 1 \\ B_3 3^3 + D_3 3^{-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 2 + C_1 2^{-1} = 0 \\ A_1 3 + C_1 3^{-1} = 1 \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

Решение исходной задачи

$$u = u(r, \varphi) = (A_1 r + C_1 r^{-1}) \cos \varphi + \\ + (B_2 r^2 + D_2 r^{-2}) \sin 2\varphi + (B_3 r^3 + D_3 r^{-3}) \sin 3\varphi + \frac{1}{5} r^3 \sin 2\varphi$$

5.

**Уравнение Лапласа в шаровом слое для случая радиальной симметрии.**

Уравнением Лапласа называется уравнение

$$\Delta u = 0,$$

$$u = u(r); \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$a) \begin{array}{l} u|_{r=R_1} = A \\ u|_{r=R_2} = B \end{array} \quad \partial) \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R_1} = A \\ u|_{r=R_2} = B \end{array} \quad b) \begin{array}{l} u|_{r=R_1} = A \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R_2} = B \end{array} \quad e) \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R_1} = A \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R_2} = B \end{array}$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0$$

$$v = u_r$$

$$v_r + \frac{2}{r} v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{r} dr$$

$$\ln|v| = -2 \ln|r| + C_1$$

$$v = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow u = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Отсюда видно, что выполнение условия (e) невозможно.

Примеры:

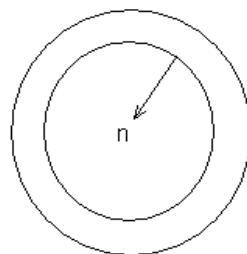
$$a) \begin{array}{l} u|_{r=1} = 2 \\ u|_{r=2} = 3 \end{array} \quad u = \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow u = -\frac{2}{r} + 4$$

$$6) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{r=1} = 2 \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$u \Big|_{r=2} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{C_1}{1} = 2 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{2}{r} + 2$$



$$b) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{r=1} = 2 \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2}$$

$$u \Big|_{r=2} = 3$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{-C_1}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -12 \\ C_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow u = -\frac{12}{r} + 14$$

