

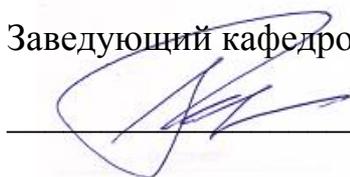
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
« 26 » января 2023 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ  
ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО  
ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**"Методы математической физики"**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

с направленностью (профилем)  
**Механика деформируемого твердого тела**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-23

**Тула 2023 год**

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**  
**фонда оценочных средств (оценочных материалов)**

**Разработчик:**

Кузнецов А.В., доцент, к.ф.-м.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

## 1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций и индикаторов их достижения представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

## 2. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

### 5 семестр

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.1)**

1. Определить тип уравнения  $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 5x^2 u_{yy} = 0$

2. Решить уравнение  $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$

3. Привести уравнение к каноническому виду  $u_{xx} + 4u_{xy} - 6u_{yz} + 2u_{xz} + 5u_{yy} = 0$

4. Решить одномерную задачу Коши  $u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin x$ ;  $u|_{t=0} = e^{-x}$ ;  $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$

5. При какой размерности пространства для решения задачи Коши для волнового уравнения используется формула Пуассона?

6. Решить трехмерную задачу Коши

$$u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin(x - 2y + 2z)$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos(y - z)$$

$$u_t|_{t=0} = x^2 yz$$

7. Каков принцип и конкретные действия перехода от задачи Коши для полубесконечной струны  $x > 0$ , к задаче Коши для бесконечной струны при условии, что на границе  $u_x|_{x=0} = 0$ ?

8. Сформулировать лемму Дюамеля для волнового уравнения

9. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

10. Определить при каких  $C$  существуют собственные функции следующей задачи Штурма-Лиувилля  $y'' + 2y' = Cy$  и найти их.  
 $y(0) = y'(0) = 0$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.2)**

1. Привести пример линейного, квазилинейного и сугубо нелинейного уравнения второго порядка

2. Написать задачу Коши, решением которой является функция

$$u = \frac{1}{2}((x + 4t)^3 + (x - 4t)^3)$$

3. Привести уравнение к каноническому виду  $4u_{xx} + 4u_{xy} - 2u_{yz} - u_{zz} = 0$

4. Какой канонический вид имеет эллиптическое уравнение?

5. Привести уравнение к каноническому виду  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

6. Решить двумерную задачу Коши

$$u_{tt} = 4\Delta u + x^4 y^2 t^2$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos 3y$$

$$u_t|_{t=0} = 3x^2 + 8xy - 6y^2$$

7. Написать формулу Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения

8. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - 2x^2 - 2t + t \cos \frac{x}{2}$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}$$

$$u_t|_{t=0} = x^2$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi^2 t$$

9. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = \sin y \sin 2\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \sin 2y,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin \pi x.$$

10. Как связаны уравнение Пуассона и уравнение Лапласа?

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.3)**

1. При каком условии уравнение  $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$  будет являться уравнением эллиптического типа?

2. Привести уравнение к каноническому виду  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

3. Привести уравнение к каноническому виду  $yu_{xx} + 4xu_{yy} = 0, \quad x < 0, y > 0$ .

4. Написать формулу Даламбера решения задачи Коши

5. Написать задачу Коши, которой удовлетворяет функция  $u = \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau \sin y dy d\tau$

6. Привести пример задачи Штурма-Лиувилля, решением которой являются функции ортогональные с весом отличным от 1.

7. Провести обнуление граничных условий  $u_x|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t$ .

$$u_{tt} - 2u_t = \Delta u - 2u_x + e^{2t} X_1 Y_3$$

8. Решить задачу  $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

9. Написать задачу Коши, решением которой является функция  $u = \sin 3t \cos 2x \sin(y - 2z)$

10. Решить уравнение Пуассона.

$$\Delta u = \sin 3\pi x \sin y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = \sin 5y, \quad u|_{x=2} = 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin 3\pi x.$$

## 6 семестр

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор компетенции ПК-3.1) сформированности достижения**

1. Напишите представление функции Бесселя в виде ряда.
2. Следствие для гармонических функций из формулы Грина.
3. Найти функцию  $P_5^2(\cos\theta)$ .
4. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} &= 2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ u|_{r=2} &= \cos \theta.\end{aligned}$$

5. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{49}{x^2}u \\ u|_{t=0} &= \frac{1}{2}J_7(\mu_4^{(7)}x) \\ u_t|_{t=0} &= 0 \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0.\end{aligned}$$

6. Напишите рекуррентную формулу для функций Бесселя.
7. В чем суть метода отражения нахождения функции Грина для полуплоскости?
8. Найти первообразную  $\int \frac{J_0(x)dx}{J_1(x)}$
9. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} &= e^{-4x+3y}.\end{aligned}$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + x + t \sin 2x \\ u|_{t=0} &= \sin x \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t\end{aligned}$$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.2)**

1. Напишите формулу для вычисления производной функции Бесселя с понижением порядка функции Бесселя.

2. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.

3. В какой задаче математической физики при разделении переменных возникает уравнение Эйлера?

4. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u - 2u_y + e^{2t} X_2 Y_4$$

$$u|_{t=0} = X_2 Y_2$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

5. Решить поставленную задачу

$$u_t = 5u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = e^{-x^2-x}.$$

6. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = r \cos 5\varphi, \quad 1 < r < 2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{r=1} = \sin 6\varphi,$$

$$u|_{r=2} = 1.$$

7. Напишите уравнение, которому удовлетворяют многочлены Лежандра.

8. Найти первообразную  $\int \frac{J_1(x) dx}{J_0(x)}$

9. Решить поставленную задачу

$$u_t = \Delta u + e^{2t} \sin 2x \cos 2y, \quad R^2,$$

$$u|_{t=0} = e^{-4x+y}.$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin x$$

$$u|_{t=0} = \sin 3x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.3)**

1. Какова цель введения функции Неймана?
2. Найти первообразную  $\int x^3 J_0(x) dx$
3. Запишите формулу Родрига для нахождения многочленов Лежандра.
4. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx},$$
$$u|_{t=0} = xe^{-x^2}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$
$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

6. Принцип получения решения уравнения Лапласа для шара из решения для шарового слоя.
7. От какой переменной зависит решение в случае радиальной симметрии?
8. Найдите функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что  $u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$

9. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad x > 0,$$
$$u|_{x=0} = \frac{2y+4}{y^2+4}.$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$
$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

### 3. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

#### 5 семестр

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.1)**

1. Определить тип уравнения  $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 5x^2 u_{yy} = 0$

2. Решить уравнение  $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$

3. Привести уравнение к каноническому виду  $u_{xx} + 4u_{xy} - 6u_{yz} + 2u_{xz} + 5u_{yy} = 0$

4. Решить одномерную задачу Коши  $u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin x$ ;  $u|_{t=0} = e^{-x}$ ;  $u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$

5. При какой размерности пространства для решения задачи Коши для волнового уравнения используется формула Пуассона?

6. Решить трехмерную задачу Коши

$$u_{tt} = 64u_{xx} + \sin 8t \sin(x - 2y + 2z)$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos(y - z)$$

$$u_t|_{t=0} = x^2 yz$$

7. Каков принцип и конкретные действия перехода от задачи Коши для полубесконечной струны  $x > 0$ , к задаче Коши для бесконечной струны при условии, что на границе  $u_x|_{x=0} = 0$ ?

8. Сформулировать лемму Дюамеля для волнового уравнения

9. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx} + x + t \sin 2x$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t$$

10. Определить при каких  $C$  существуют собственные функции следующей задачи Штурма-Лиувилля  $y'' + 2y' = Cy$  и найти их.  
 $y(0) = y'(0) = 0$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.2)**

1. Привести пример линейного, квазилинейного и сугубо нелинейного уравнения второго порядка

2. Написать задачу Коши, решением которой является функция

$$u = \frac{1}{2}((x + 4t)^3 + (x - 4t)^3)$$

3. Привести уравнение к каноническому виду  $4u_{xx} + 4u_{xy} - 2u_{yz} - u_{zz} = 0$

4. Какой канонический вид имеет эллиптическое уравнение?

5. Привести уравнение к каноническому виду  $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

6. Решить двумерную задачу Коши

$$u_{tt} = 4\Delta u + x^4 y^2 t^2$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \cos 3y$$

$$u_t|_{t=0} = 3x^2 + 8xy - 6y^2$$

7. Написать формулу Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения

8. Решить поставленную задачу

$$u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - 2x^2 - 2t + t \cos \frac{x}{2}$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{5x}{2}$$

$$u_t|_{t=0} = x^2$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi^2 t$$

9. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = \sin y \sin 2\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = \sin 2y,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin \pi x.$$

10. Как связаны уравнение Пуассона и уравнение Лапласа?

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.3)**

1. При каком условии уравнение  $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$  будет являться уравнением эллиптического типа?

2. Привести уравнение к каноническому виду  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

3. Привести уравнение к каноническому виду  $yu_{xx} + 4xu_{yy} = 0$ ,  $x < 0, y > 0$ .

4. Написать формулу Даламбера решения задачи Коши

5. Написать задачу Коши, которой удовлетворяет функция  $u = \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \tau \sin y dy d\tau$

6. Привести пример задачи Штурма-Лиувилля, решением которой являются функции ортогональные с весом отличным от 1.

7. Провести обнуление граничных условий  $u_x|_{x=0} = 2t$ ,  $u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t$ .

$$u_{tt} - 2u_t = \Delta u - 2u_x + e^{2t} X_1 Y_3$$

8. Решить задачу  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u_t|_{t=0} = 0$

$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0.$$

9. Написать задачу Коши, решением которой является функция  $u = \sin 3t \cos 2x \sin(y - 2z)$

10. Решить уравнение Пуассона.

$$\Delta u = \sin 3\pi x \sin y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u|_{x=0} = \sin 5y, \quad u|_{x=2} = 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = \sin 3\pi x.$$

## 6 семестр

### Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор компетенции ПК-3.1) сформированности индикатор достижения

1. Напишите представление функции Бесселя в виде ряда.
2. Следствие для гармонических функций из формулы Грина.
3. Найти функцию  $P_5^2(\cos\theta)$ .
4. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} &= 2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \\ u|_{r=2} &= \cos \theta.\end{aligned}$$

5. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{49}{x^2}u \\ u|_{t=0} &= \frac{1}{2}J_7(\mu_4^{(7)}x) \\ u_t|_{t=0} &= 0 \\ |u|_{x=0}| &< \infty, \quad u|_{x=1} = 0.\end{aligned}$$

6. Напишите рекуррентную формулу для функций Бесселя.
7. В чем суть метода отражения нахождения функции Грина для полуплоскости?
8. Найти первообразную  $\int \frac{J_0(x)dx}{J_1(x)}$
9. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + e^t \sin 2x \cos 3y, \quad R^2, \\ u|_{t=0} &= e^{-4x+3y}.\end{aligned}$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + x + t \sin 3x \\ u|_{t=0} &= \sin 3x \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t\end{aligned}$$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.2)**

1. Напишите формулу для вычисления производной функции Бесселя с понижением порядка функции Бесселя.

2. Сформулировать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.

3. В какой задаче математической физики при разделении переменных возникает уравнение Эйлера?

4. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u - 2u_y + e^{-t} X_2 Y_1 \\u|_{t=0} &= X_1 Y_1 \\u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0.\end{aligned}$$

5. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= 2u_{xx}, \\u|_{t=0} &= e^{-2x^2-x}.\end{aligned}$$

6. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}\Delta u &= r \cos \varphi, \quad 1 < r < 2, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{r=1} &= \sin 2\varphi, \\ u \Big|_{r=2} &= 0.\end{aligned}$$

7. Напишите уравнение, которому удовлетворяют многочлены Лежандра.

8. Найти первообразную  $\int \frac{J_0(x) dx}{J_1(x)}$

9. Решить поставленную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + e^t \sin x \cos y, \quad R^2, \\ u \Big|_{t=0} &= e^{-3x-4y}.\end{aligned}$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + x + t \sin x \\ u \Big|_{t=0} &= \sin 2x \\ u \Big|_{x=0} &= 0, \quad u \Big|_{x=\pi} = \pi t\end{aligned}$$

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-3 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-3.3)**

1. Какова цель введения функции Неймана?

2. Найти первообразную  $\int x^4 J_1(x) dx$

3. Запишите формулу Родрига для нахождения многочленов Лежандра.

4. Решить поставленную задачу

$$u_t = u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = xe^{-x^2}.$$

5. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u + 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_3 Y_1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$

6. Принцип получения решения уравнения Лапласа для шара из решения для шарового слоя.

7. От какой переменной зависит решение в случае радиальной симметрии?

8. Найдите функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что

$$u|_{r=1} = \sin^2 \varphi$$

9. Решить поставленную задачу

$$\Delta u = 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{x=0} = \frac{2y-1}{y^2+9}.$$

10. Решить поставленную задачу методом Фурье

$$u_t = \Delta u - 2u_x$$

$$u|_{t=0} = X_2 Y_1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0.$$