

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«26» января 2023 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Теория пластичности»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

с направленностью (профилем)  
**Механика деформируемого твердого тела**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-23

Тула 2023

## Разработчик методических указаний

**Разработчик:**

Лавит И.М., проф., д.ф.-м.н., доц.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



---

(подпись)

Методические указания содержат задачи по различным разделам дисциплины «Теория пластичности». Названия и номера пунктов соответствуют рабочей программе по дисциплине «Теория пластичности».

### 1.1. Необратимые деформации. Пластичность и ползучесть

Модуль Юнга материала стержня равен  $E$ , предел текучести равен  $\sigma_y$ . Стержень растягивается до напряжения  $\sigma > \sigma_y$ . В первом случае нагружения стержень немедленно разгружается. Максимальная деформация стержня под нагрузкой равна  $\varepsilon_1$ . Во втором случае стержень некоторое время выдерживается под нагрузкой и только потом разгружается. Максимальная деформация стержня под нагрузкой равна  $\varepsilon_2$ . Какое из этих двух значений больше и почему? Для обоих случаев найдите остаточные деформации, пластические деформации и деформации ползучести.

### 1.2. Диаграмма одноосного нагружения тела. Активное нагружение и разгрузка

В данном состоянии для упругопластической среды выполнен критерий текучести  $f(p_{ij}, \chi) = 0$  и напряжения изменяются со скоростью  $\dot{p}_{ij}$ . Показать, что

при  $\frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} < 0$  пластические деформации не изменяются, т. е.  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , и имеет место неравенство

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} < 0;$$

такой процесс называется *разгрузкой*;

### 1.3. Предел текучести. Упрочнение

В экспериментах со стальным образцом обнаружено, что предел текучести при чистом сдвиге равен  $23 \text{ кН/см}^2$ . Найти предел текучести при чистом растяжении, считая, что сталь подчиняется критерию текучести Мизеса

## 2.1. Упругие и неупругие деформации и скорости деформаций

Для упругопластической среды с критерием текучести Мизеса, дифференцируя по времени равенство

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

и используя закон Гука и ассоциированный закон, получить *уравнения Прандтля-Рейсса*

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{p}_{ij}^{(d)} + \dot{\lambda} p_{ij}^{(d)}, \quad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} p_{kk}.$$

## 2.2. Поверхность нагружения

В упругопластической среде с упрочнением происходит пластическое течение:  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0$ . Выразить множитель  $\dot{\lambda}$  в ассоциированном законе через скорость изменения напряжений  $\dot{p}_{ij}$ .

Обратите внимание, что для идеальнопластической среды этого сделать нельзя. Почему?

## 2.3. Уравнение энергетического баланса и неравенство Клаузиуса-Дюгема для упругопластического тела

Вывести неравенство Планка для упругопластического тела из неравенства Клаузиуса-Дюгема. Что можно сказать о работе напряжений при пластическом деформировании?

## 2.4. Закон состояния. Термодинамические ограничения закона состояния

В теории пластического потенциала вектор приращения пластической деформации перпендикулярен поверхности нагружения (текучести) в любой регулярной точке; доказать, что если удовлетворяется критерий Мизеса, то выполняются уравнения  $d\varepsilon_I^P / s_I = d\varepsilon_{II}^P / s_{II} = d\varepsilon_{III}^P / s_{III}$ .

## 2.5. Постулат Друкера. Выпуклость поверхности нагружения. Обоснование ассоциированного закона течения

Диаграмма одноосного растяжения стержня, построенная в координатах  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ ,  $\sigma = P / F_0$ , где нулем обозначены начальные значения длины и площади поперечного сечения стержня, имеет участок, предшествующий разрыву, где  $d\varepsilon > 0$ , а  $d\sigma < 0$ . Как этот экспериментальный факт согласуется с постулатом Друкера?

### 3.1. Инварианты тензора напряжений. Аргументы функции нагружения

Показать, что

значения функций, определяющих критерии текучести Мизеса и Треска,

можно выразить через второй и третий инварианты дивидатора тензора напряжений

$$J_2^{(d)} = p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)}, \quad J_3^{(d)} = p_{ij}^{(d)} p_{jk}^{(d)} p_{ki}^{(d)}$$

### 3.2. Условие текучести Мизеса. Условие текучести Треска

Показать, что критерий текучести Треска имеет следующий физический смысл: величина касательной составляющей усилия по некоторой площадке достигает значения  $\tau_s$ .

### 4.1. Эффект Баушингера. Изотропное и трансляционное упрочнение

Рассмотреть знакопеременное одноосное нагружение стержня, если задан линейный закон изотропного упрочнения и если задан линейный закон трансляционного упрочнения. Как эти законы упрочнения согласуются с эффектом Баушингера?

### 4.2. Идеальная пластичность. Теорема о разгрузке

Консольно защемленный стержень нагружается изгибающим моментом, приложенным к свободному торцу, затем разгружается. Считая материал стержня идеально пластическим, найти остаточные деформации и напряжения. Можно ли утверждать, что в данном случае пластические и остаточные деформации – это одно и то же?

### 4.3. Простое (однопараметрическое) и сложное (комбинированное) нагружение

Материал трубчатого образца описывается соотношениями модели пластического течения с критерием текучести Мизеса и изотропным упрочнением. Нагружение начинается с недеформированного состояния и проводится так, что отлична от нуля только одна компонента  $p_{z\varphi} \equiv \sigma$  тензора напряжений в цилиндрической системе координат

Показать, что среди компонент тензора деформаций только одна —  $\varepsilon_{z\varphi} \equiv \varepsilon$  — отлична от нуля.

#### 4.4. Деформационная теория пластичности. Теорема о простом нагружении

*Простым нагружением* называется процесс, при котором все компоненты девиатора тензора напряжений изменяются пропорционально монотонно возрастающему параметру  $\tau$ :

$$p_{ij}^{(d)} = \tau s_{ij}^o, \quad s_{ij}^o = \text{const.}$$

Показать, что для упругопластического материала с критерием текучести Мизеса и изотропным упрочнением при любом простом нагружении, начинающемся с недеформированного состояния,

„направляющие тензоры“ девиаторов тензора деформаций и тензора напряжений совпадают, т. е.

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{(d)}}{\varepsilon_I} = \frac{p_{ij}^{(d)}}{p_I}, \quad \text{где } p_I = \sqrt{p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)}}, \quad \varepsilon_I = \sqrt{\varepsilon_{ij}^{(d)} \varepsilon_{ji}^{(d)}}.$$

#### 5.1. Упругопластическое деформирование. Уравнения равновесия, граничные условия, связь между напряжениями и деформациями

Упругопластическая среда, подчиняющаяся критерию текучести Мизеса, движется в условиях плоской деформации в декартовой плоскости  $(x_1, x_2)$ . Считая начальное состояние ненапряженным, показать, что

если среда несжимаема, то выполнено

$$p_{33} = \frac{p_{11} + p_{22}}{2}$$

и критерий текучести Мизеса принимает вид

$$(p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2 = 4k^2, \quad k = \sigma_s / \sqrt{3}.$$

#### 5.2. Малоцикловая усталость. Поверхностное упрочнение деталей

Консольно защемленный стержень изгибается силой, приложенной на свободном конце. Материал стержня – упругопластический с линейным упрочнением.

а) Стержень разгрузили и нагрузили в противоположном направлении. Найдите предельную нагрузку.

б) Стержень многократно нагружается знакопеременной нагрузкой. Найдите зависимости деформации от нагрузки для разных точек стержня.

в) Для задач а) и б) исследуйте влияние упрочнения на выявленные эффекты.

### 5.3. Жестко-пластическое тело. Основные уравнения

Показать, что определяющие соотношения жестко-идеальнопластической среды с критерием текучести Мизеса (ассоциированный закон) эквивалентны соотношениям

$$p_{ij}^{(d)} = \begin{cases} \sqrt{2k} \frac{e_{ij}}{\sqrt{e_{kl}e^{kl}}}, \lambda \geq 0, & \text{если } e_{ij} \neq 0 \\ \text{любые, удовлетворяющие} & \text{если } e_{ij} = 0. \\ \text{условию } p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)} \leq 2k^2, & \end{cases}$$

Здесь  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций. На основе этой модели сконструировать определяющие соотношения несжимаемой *жестковязкопластической среды*, которые сохраняли бы ту же область жесткого поведения

### 5.4. Приложение теории к вычислению предельных нагрузок и математическому моделированию технологических процессов обработки металлов давлением

Бесконечно длинная труба, имеющая внутренний радиус  $a$  и внешний радиус  $b$ , нагружается изнутри давлением  $p$ , монотонно возрастающим от нуля. Материал трубы считать упругоидеальнопластическим, подчиняющимся критерию текучести Мизеса и несжимаемым — в законе Гука  $K = \infty$ .

Показать, что в некотором диапазоне давлений  $p_0 \leq p \leq p_*$  это уравнение имеет единственное решение для радиуса в промежутке от внутреннего до внешнего радиуса трубы, а при других значениях давления не имеет решений. Найти величины  $p_0, p_*$ .

### 6.1. Постановка упругопластических задач

Рассмотрите задачу о деформировании заземленного стержня растягивающей силой и приложенным на свободном конце изгибающим моментом. Можно ли утверждать, что решение задачи полностью определяется максимальными значениями силы и момента?

### 6.2. Метод упругих решений. Различные модификации метода (метод начальных напряжений, метод переменной жесткости), области их применения

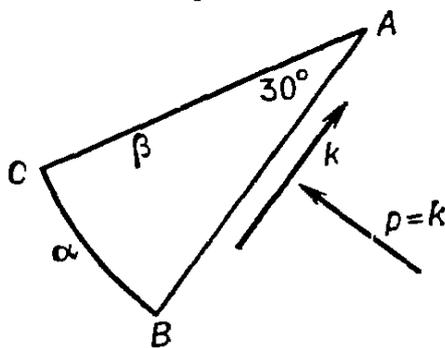
Бесконечно длинный круговой цилиндр (внутренний радиус —  $a$ , наружный —  $b$ ) нагружается внутренним давлением  $p$ . Цилиндр находится в состоянии плоской деформации. Материал цилиндра идеально-пластический. Модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , предел текучести  $\sigma_y$ . Определить зависимость радиального перемещения внутренней поверхности цилиндра от давления  $p$  во всем диапазоне его изменения.

### 7.1. Устойчивость сжатого стержня. Решения Энгессера-Кармана и Шенли

Решите задачу о внецентренном сжатии стержня с прямоугольным поперечным сечением. Материал стержня – упругопластический с линейным упрочнением. Используйте метод упругих решений. Попробуйте определить критическую нагрузку. К чему она ближе: к решению Энгессера-Кармана или решению Шенли?

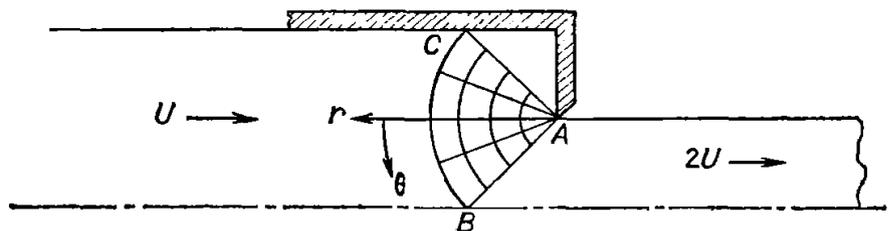
### 8.1. Основные уравнения плоской деформации жестко-пластического тела. Линии скольжения, их свойства

Линии скольжения образуют веерообразную область с углом раствора  $30^\circ$ ;  $\alpha$ -линии — дуги окружностей,  $\beta$ -линии — радиусы. Давление на линии  $AB$  равно  $k$ . Найти давление на линии  $AC$ .



### 8.2. Линеаризация. Простые напряженные состояния

При штамповке с вытяжкой без трения через квадратную матрицу, приводящей к уменьшению сечения на пятьдесят процентов, линии скольжения заполняют веерообразную область, которая состоит из радиальных прямых —  $\beta$ -линий и дуг окружностей —  $\alpha$ -линий (рис. ). Найти компоненты скорости вдоль этих линий



### 8.3. Осесимметричное поле. Граничные условия для напряжений. Основные краевые задачи

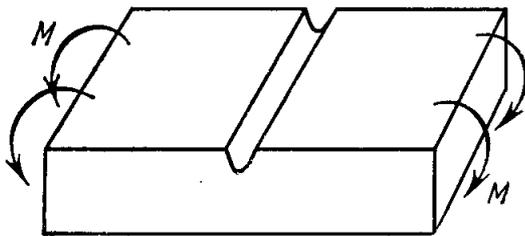
Бесконечно длинный круговой цилиндр (внутренний радиус —  $a$ , наружный —  $b$ ) нагружается внутренним давлением  $p$ . Цилиндр находится в состоянии плоской деформации. Материал цилиндра жестко-пластический, упрочнением пренебрегаем. Предел текучести  $\sigma_y$ . Построить линии скольжения и найти предельное значение давления  $p$ .

#### 8.4. Численный метод решения. Определение поля скоростей

Считая известным решение предыдущей задачи, определить, используя уравнения Гейрингер, поле скоростей. Что можно сказать о согласовании полей напряжений и скоростей?

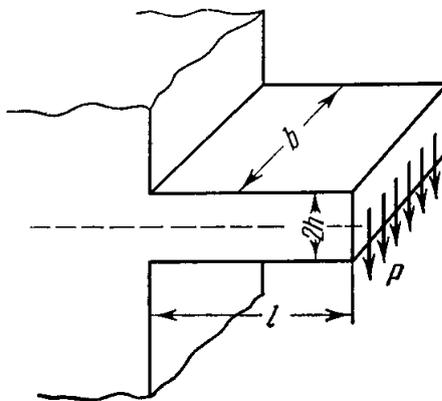
#### 9.1. Изгиб полосы, ослабленной вырезом

Решить задачу об изгибе полосы (см. рис.). Найти предельное значение изгибающего момента.



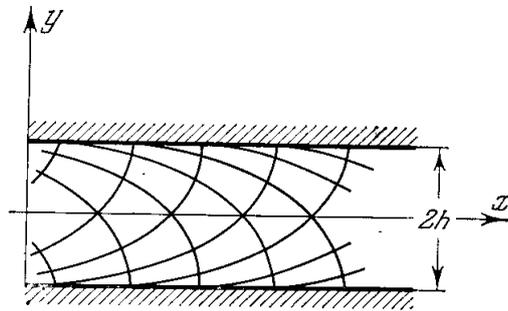
#### 9.2. Изгиб короткой консоли силой. Вдавливание плоского штампа

Решить задачу об изгибе короткой консоли (см. рис.). Найти предельное значение нагрузки.



### 9.3. Кли́н под действием одностороннего давления. Сжатие слоя между жесткими плитами

Решить задачу о сжатии слоя жесткими шероховатыми плитами (см. рис.). Найти предельное значение нагрузки.



### 10.1. Плоское напряженное состояние. Осесимметричная деформация

Рассмотреть упруго-пластическое состояние быстро вращающегося круглого диска постоянной толщины при условии текучести Треска — Сен-Венана. При какой угловой скорости достигается чисто пластическое состояние?

10.2. Условие полной пластичности. Напряженное состояние в шейке растягиваемого образца.

Проанализировать допущения, на которых основано решение Давиденкова-Спиридоновой (см. рис.). Получить численное решение упругопластической задачи о напряженном состоянии в шейке методом упругих решений.

