МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Естественнонаучный институт
Кафедра «Физики»

Утверждено на заседании кафедры
«Физики»
« 16 » января 2023 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

__________________________Р.Н.Ростовцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлениям подготовки
12.03.01 Приборостроение
15.03.06 Мехатроника и робототехника
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
12.03.04 Биотехнические системы и технологии
24.03.02 Системы управления движением и навигация
12.03.02 Оптотехника
24.03.03 Баллистика и гидроаэродинамика
11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы
15.05.01 Проектирование технологических машин и комплексов
24.05.06 Системы управления летательными аппаратами
17.05.02 Стрелково-пушечное, артиллерийское и ракетное оружие
24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей
24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов
17.05.01, Боеприпасы и взрыватели

Формы обучения: очная, очно-заочная, заочная

Тула 2023 год

Разработчик методических указаний

_______Колмаков Ю.Н., к.ф.-м.н., доцент____

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задания, приведенные в данном пособии, соответствуют содержанию и темам заданий, предлагаемых студентам на контрольных работах, на зачетном занятии и в домашних самостоятельных работах. Они содержат как простые качественные вопросы, не требующие решения уравнений, так и стандартные задачи с использованием производных и интегралов для решения. Наиболее трудные задачи, требующие хорошего знания физики и математики, отмечены значком ($^{\&}$).

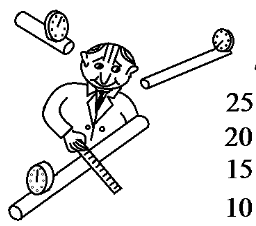
Набор задач приведен с запасом, предусматривающим, что часть задач (по усмотрению преподавателя) будет решена во время практических занятий, а часть – остается для самостоятельной подготовки студента к контрольным работам и зачетному занятию.

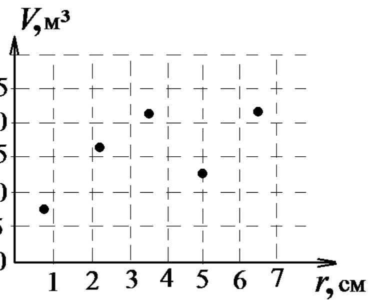
Занятие 1. *Тема*: Роль физики в развитии техники.
Математический аппарат физики: векторы и операции с векторами

1. ВВЕДЕНИЕ.

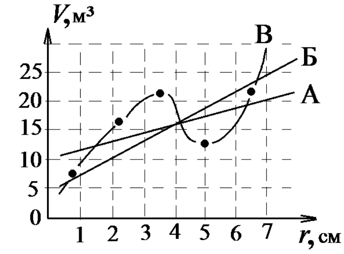
1.1. Физика как наука. Роль физики в развитии техники. Связь физики с математикой. Общая структура и задачи курса физики.

Начнем с примера: некто получил задание, например, определить радиус трубы, по которой за один час будет протекать 10 м^3 воды. С этой целью он измерил показания счетчиков расхода воды в нескольких домах и радиусы труб, по которым в них текла вода. Полученные данные он занес в таблицу





V, м^3	7,5	15,9	21,1	12,8	21,5
r, см	0,8	2,2	3,5	5,0	6,5



и по этим данным попытался построить экспериментальный график зависимости $V(r)$. Что получится в результате?

Ответ: только то, что исследователь показал свою полную некомпетентность и необразованность, так как совершил все возможные ошибки:

– использован неправильный измерительный прибор и неправильную процедуру измерений;

– при измерениях использованы разные измерительные приборы (счетчики расхода воды, которые могут показывать не согласующиеся результаты)

– измерена не та величина (внешний, а не внутренний радиус трубы, по которой течет вода);

– не определены и не согласованы условия, при которых проводились измерения (разность давлений на концах трубы, температура воды и т.п.);

– получено слишком мало данных для практических выводов;

– неправильно обрабатываются экспериментально полученные результаты (по какому из построенных графиков, А, Б или В, будет определяться искомая величина r?);

– ничего не сказано об ошибке (погрешности) полученного результата (удовлетворят ли заказчика результаты, полученные с ошибкой в 50-100%?);

– наконец, экспериментатор просто не знал физику, потому что её законы позволяют сделать правильный вывод без лишних измерений.

В роль физики для специалиста-техника заключается в следующем: дать общее понимание о механизме протекающих в технических системах процессах и снабдить его общими формулами, зависимостями, которые позволяют рассчитать эти процессы без ненужных измерений. Без такого понимания любая, даже бурная, деятельность техника напоминает деятельность миллиона обезьян, которые нажимают клавиши миллиона печатающих устройств (за миллион лет у одной из обезьян, быть может, получится случайно напечатать что-то имеющее смысл).

Физика – практическая наука. Она учит правильно снимать измерения, обрабатывать их, оценивать погрешности и рассчитывать желаемый результат.

Физика – теоретическая наука. Она учит быстро и правильно находить желаемые зависимости между измеряемыми величинами.

Любые зависимости в реальных физических процессах и в технических устройствах функциональны. Переменные, описывающие эти процессы, обязательно связаны функциональной зависимостью $y = f(x)$. Например, объём V жидкости или газа, протекающего по трубе зависит от радиуса трубы r, от её длины l, от разности давлений на концах трубы Δp и от свойств самой жидкости, её вязкости η: $V = f(r, l, \Delta p, \eta) = \dfrac{\pi \Delta p r^4}{8\eta l}$ – формула Пуазейля. Для вычисления совсем не надо измерять скорость течения воды по трубе, которая различна в разных точках. Задача физики – найти подобные зависимости, исследовать их и дать конкретные рекомендации техническим специалистам.

> *Замечание*: **все** зависимости в этом мире функциональны. Словами их выразить нельзя. Истинные связи и зависимости описываются языком математики везде, и в физике, и в технике, и в экономике, и в политике, и в психологии, и в лингвистике. Только тот, кто понимает эти функциональные или статистические зависимости, а не довольствуется словесными рассуждениями, добивается успеха.

Пример 1. Когда можно получить большие дивиденды: продав за год машину ценой в 100000$ за 200000$ или, имея стартовый капитал в 1000 руб и продавая хлеб?

Ответ: конечно во втором случае. Ежедневно покупая хлеб и распродавая его с наценкой 1% можно за год довести свой капитал до $1000 \cdot (1,01)^{365} = 37783$ руб . Если продавать с наценкой в 10%, то в результате за год получится $1000 \cdot (1,1)^{365} = 1,28 \cdot 10^{18}$ руб (придется ограничивать свою торговлю).

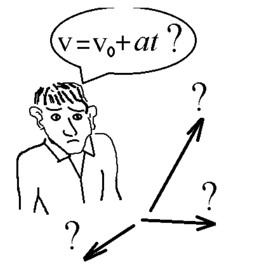
Пример 2. За политика “А” собираются голосовать 98% из N=250 млн избирателей, а за политика “Б” – 2%. Предложите процедуру выборов, когда голосуют все, в соответствии со своими желаниями, без подтасовок, но большинством голосов будет избран политик “Б”.

Ответ: очень просто. Многоступенчатые выборы с правильной нарезкой избирательных групп, когда большинством голосов выбираются делегаты-представители, которые будут голосовать на следующем этапе. На каждом этапе избиратели формируются в группы из 25 человек, в которых 13 будут голосовать за “Б”, а 12 – за “А”. В этих группах будет избран делегат, который голосует в последующем за “Б”.Остальные группы состоят только из избирателей, голосующих за “А”. После первого этапа выборов останется $0,02\cdot N/13$ делегатов, голосующих за “Б” из общего числа $N/25$ выбранных делегатов. После второго этапа выборов $0,02\cdot N/13^2$ делегатов из $N/25^2$ будут голосовать за “Б”. После т $n-$ го этапа голосования число делегатов, голосующих за “Б” станет больше половины из их общего числа: $\frac{0,02\cdot N}{13^n}>\frac{N}{25^n}$, откуда $\left(\frac{25}{13}\right)^n>\frac{1}{2\cdot 0,02}=25$ и $n>\frac{\ln 25}{\ln(25/13)}=4,9$. После $n=5-$ го этапа выборов останется $N/25^5=25$ делегатов, из которых большинство (13 против 12) будет голосовать за “Б”. Пример утрирован, но, зная математику, правильной нарезкой избирательных округов можно добиться победы в голосовании при не слишком значительном разрыве в голосах избирателей.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ФИЗИКИ

2.1. Функции в физике. Исследование функций

Для описания зависимостей используют элементарные функции: степенную x^n, тригонометрическую $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, экспоненциальную $\exp(x)=e^x$, логарифмическую $\ln x$ или $\log x$, обратную тригонометрическую $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и т.п. Это – простые функции. Но функциональная зависимость может быть сложной – комбинацией простых функций, например $f(x)=\sin\left(\exp\left(x^2\right)\right)+\ln\left(x^3\right)$ и т.п. Такую зависимость не всегда просто определить с помощью простых измерений.

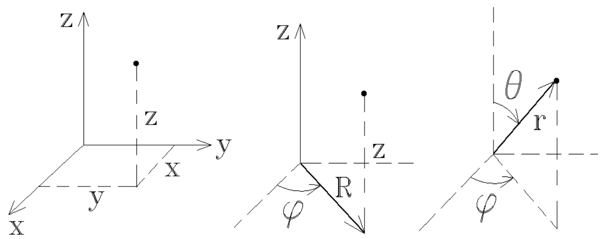


Но функциональные зависимости, как правило, не одномерны. **Любая физическая связь зависит от изменения не одной, а многих переменных.** В первую очередь следует помнить, что все физические процессы происходят в трехмерном пространстве, т.е. зависят от трех пространственных координат x, y, z. Поэтому многие физические величины должны быть как-то направлены в пространстве, т.е. должны быть векторами.

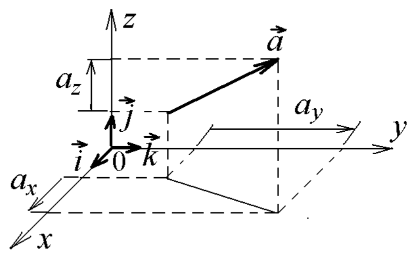
2.2.1. Выбор систем координат. Проекции вектора и длина вектора.

2.2.2. Сложение и вычитание векторов.

Вектор $\vec{a}$ - это отрезок прямой линии, имеющий определенное направление в пространстве. Величина (модуль) вектора – это длина такого отрезка. Чтобы задать (нарисовать) вектор, надо выбрать оси координат, задающих направление в пространстве. Чаще всего используют декартову систему координат , где положение точки задается тремя координатами x, y, z измеренными по трем взаимно перпендикулярным осям; цилиндрическую систему координат, где положение точки задается расстоянием R и z и углом φ $\left(x=R\cos\varphi;\ y=R\sin\varphi\right)$; сферическую систему координат, где положение точки задается удалением r от начала координат 0 и углами φ и θ $\left(x=r\sin\theta\cos\varphi;\ y=r\sin\theta\sin\varphi;\ z=r\cos\theta\right)$ (см. рисунок).



Дальше мы будем пользоваться декартовой системой координат. Направление трех взаимно перпендикулярных осей x, y, z задают тремя взаимно перпендикулярными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленными вдоль этих осей. Они имеют единичную длину и называются ортами декартовой системы координат. Любой вектор $\vec{a}$ записывают в виде



$$\boxed{\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z},$$

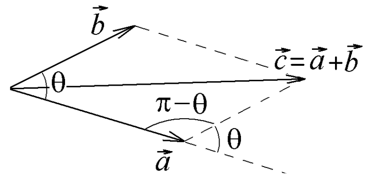
где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат (см. рисунок). Проекции вектора – это скалярные величины, не имеющие направления, однако они имеют знак. Проекция a_x положительна, если угол между вектором $\vec{a}$ и соответствующим ортом $\vec{i}$ острый $\left(<90^{\mathrm{o}}\right)$ ($\vec{a}$ направлен **вдоль** оси *x*), и проекция a_x отрицательна, если угол между вектором $\vec{a}$ и соответствующим ортом $\vec{i}$ тупой $\left(>90^{\mathrm{o}}\right)$ ($\vec{a}$ направлен **против** оси *x*). Если этот угол равен 90^{o} и вектор $\vec{a}$ перпендикулярен оси x, то соответствующая проекция равна нулю $\left(a_x=0\right)$.

Длина вектора $\vec{a}$ (она же называется величиной или модулем вектора) следует из теоремы Пифагора:

$$\boxed{a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

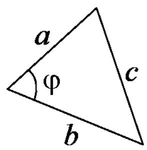
Чтобы сложить два вектора $\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z$ и $\vec{b}=\vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z$, надо сложить их проекции:

$$\boxed{\vec{c}=\vec{i}c_x+\vec{j}c_y+\vec{k}c_z=\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}\left(a_x+b_x\right)+\vec{j}\left(a_y+b_y\right)+\vec{k}\left(a_z+b_z\right)}\ .$$



Величина (модуль) суммы двух векторов будет равна

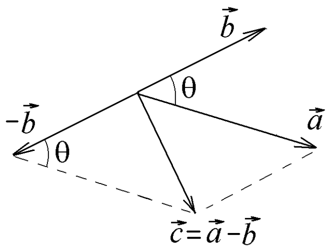
$\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(a_x+b_x\right)^2+\left(a_y+b_y\right)^2+\left(a_z+b_z\right)^2}}$. Но часто при сложении векторов проще складывать векторы геометрически, используя правило параллелограмма:



Удобно воспользоваться теоремой косинусов: если известны две стороны треугольника a, b и угол между ними φ, то квадрат противоположной стороны $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$.

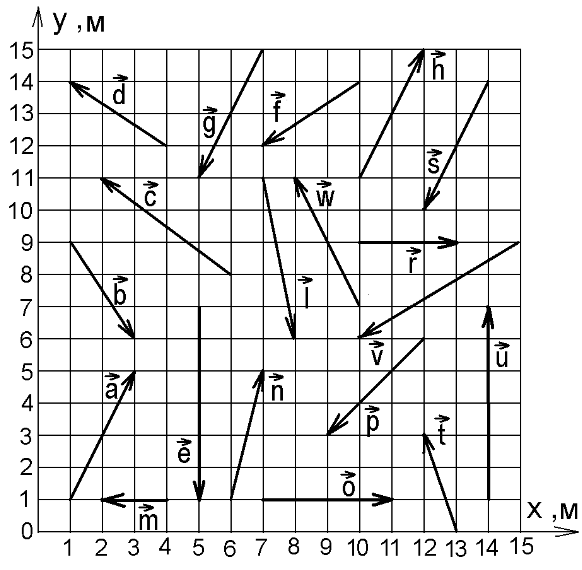
В физике полагается измерять углы не в градусах, а в радианах. $\pi=3{,}1415926...$ радиан равны 180^{o} . Соответственно, 1 радиан = $57{,}3^{\text{o}}$. Тогда величина суммы двух векторов, как видно из треугольника на рисунке, равна $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\underbrace{\cos\left(\pi-\theta\right)}_{=-\cos\theta}}$ или $\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}$, где $\theta-$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

При вычитании векторов вычитаются их проекции: $\boxed{\vec{c}=\vec{i}c_x+\vec{j}c_y+\vec{k}c_z=\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}\left(a_x-b_x\right)+\vec{j}\left(a_y-b_y\right)+\vec{k}\left(a_z-b_z\right)}$.



Величина (модуль) разности двух векторов будет равна

$\boxed{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2+\left(a_z-b_z\right)^2}}$. Как и раньше, удобно вычесть векторы геометрически (см. рисунок). Для этого надо просто поменять направление вычитаемого вектора $\vec{b}$, меняя его знак и знак всех его проекций, а потом сложить полученный вектор $-\vec{b}$ с вектором $\vec{a}$ по правилу параллелограмма.



Пример: на следующем рисунке нарисованы разные векторы. Найти величину суммы и величину разности векторов $\vec{b}$ и $\vec{h}$.

С учетом направления заданных векторов их проекции равны $b_x=2$ м ; $b_y=-3$ м ; $h_x=2$ м ; $h_y=4$ м . Тогда

$$\left|\vec{b}+\vec{h}\right|=\sqrt{\left(b_x+h_x\right)^2+\left(b_y+h_y\right)^2}=\sqrt{\left(2+2\right)^2+\left(-3+4\right)^2}=\sqrt{17}=4{,}12\text{ м};$$

$$\left|\vec{b}-\vec{h}\right|=\sqrt{\left(b_x-h_x\right)^2+\left(b_y-h_y\right)^2}=\sqrt{\left(2-2\right)^2+\left(-3-4\right)^2}=\sqrt{49}=7\text{ м}.$$

Задания:

Найти величину суммы и разности векторов $\vec{w}$ и $\vec{l}$; $\vec{d}$ и $\vec{t}$; $\vec{c}$ и $\vec{u}$ (или любой другой пары векторов по указанию преподавателя).

2.2.3. Скалярное произведение векторов. Вычисление угла между векторами.

Вектор можно умножить на любую скалярную функцию или число C . При этом все проекции вектора умножаются на это число, он не меняет направления, а его длина возрастает в C раз:

$$\boxed{C\vec{a}=\vec{i}Ca_x+\vec{j}Ca_y+\vec{k}Ca_z}\ ,\quad \boxed{\left|C\vec{a}\right|=C\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\ .$$

Но можно перемножать векторы. Скалярным произведением любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, получаемая суммированием произведений проекций векторов: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv\left(\vec{a}\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$.

Одновременно скалярное произведение можно вычислить, зная угол θ между векторами и их величины: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta}$.
Если приравнять эти выражения, можно определить угол между векторами, зная их проекции на оси координат:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}\ .$$

Пример: найдем величину косинуса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на рисунке, для которых проекции $b_x=2$ м ; $b_y=-3$ м ; $a_x=2$ м ; $a_y=4$ м . Тогда $\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}=\dfrac{2\cdot2+4\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}}=-0{,}496$ (на рисунке видно, что этот угол $\theta = \arccos(-0,496) = 119,7^{o}$ тупой).

Задания:

Найти величины углов между векторами $\vec{w}$ и $\vec{l}$; $\vec{d}$ и $\vec{t}$; $\vec{c}$ и $\vec{u}$ на рисунке (или любой другой пары векторов по указанию преподавателя).

2.2.4. Векторное произведение двух векторов и его направление.

<u>Векторным произведением</u> любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который вычисляется как определитель матрицы, у которой первую строчку составляют орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вторую строчку – проекции первого вектора, третью строчку – проекции второго вектора. Надо просто запомнить правила вычисления такой комбинации:

$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\underbrace{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)}_{=\left[\vec{a},\vec{b}\right]_x} + \vec{j}\underbrace{\left(a_z b_x - a_x b_z\right)}_{=\left[\vec{a},\vec{b}\right]_y} + \vec{k}\underbrace{\left(a_x b_y - a_y b_x\right)}_{=\left[\vec{a},\vec{b}\right]_z}}.$$

Чтобы не путать обозначения, векторное произведение принято обозначать квадратными скобками, а скалярное произведение – круглыми скобками. Множители, стоящие при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ будут соответствующими проекциями векторного произведения на оси координат.

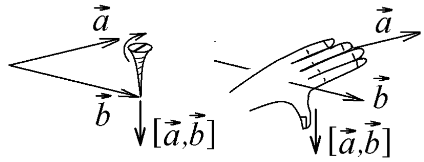
Заметим, что при изменении порядка векторов скалярное произведение не изменяется, а векторное произведение меняет знак: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$; $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

Величина (модуль) векторного произведения выражается через величины векторов и синус угла θ между ними: $\boxed{\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = ab\sin\theta}$. Косинус этого же угла выражался через скалярное произведение векторов.

Векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – это вектор, направленный перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направление этого вектора можно определить двумя простыми правилами:

Векторное произведение $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – это вектор, направленный перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направление этого вектора можно определить двумя простыми правилами:

1) правило “винта” – винт ставится в конец второго вектора $\vec{b}$ и вращается по направлению первого вектора $\vec{a}$. Винт будет или закручиваться, или выкручиваться. Направление движения винта совпадает с направлением вектора;
2) правило “левой руки” – четыре пальца левой руки направляют вдоль первого вектора $\vec{a}$, второй вектор $\vec{b}$ входит в ладонь. Большой палец показывает направление вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (см. рисунок).



Пример: найдем величину векторного произведения и синус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на рисунке, для которых проекции $b_x = 2$ м ; $b_y = -3$ м ; $a_x = 2$ м ; $a_y = 4$ м . Так как $a_z = b_z = 0$, то из приведенной выше формулы $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right) = \vec{k}\left(2\cdot(-3) - 4\cdot 2\right) = -14\vec{k}$. Как и следовало ожидать, этот вектор направлен против оси *z*, перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащим в плоскости *xy*. Его величина $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\| = 14$ м^2 .

$\sin\theta = \dfrac{\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{2^2 + 4^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 0,868$. Если учесть результат предыдущего примера, то

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (0,868)^2 + (-0,496)^2 \simeq 1$

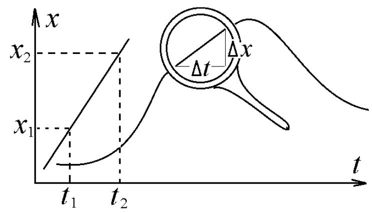
Задания:

Найти векторные произведения векторов $\vec{w}$ и $\vec{l}$; $\vec{d}$ и $\vec{t}$; $\vec{c}$ и $\vec{u}$ на рисунке. Найти синусы углов между этими векторами. (или любой другой пары векторов по указанию преподавателя)

Занятие 2. *Тема*: Математический аппарат физики: производные в физике, производные от элементарных функций

2.3. Вычисление производных от функций.
2.3.1. Определение производных. Производные от координаты и скорости.

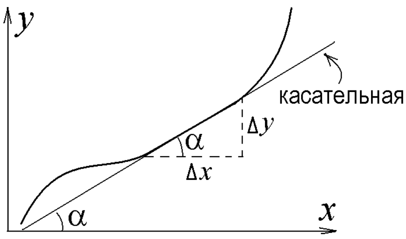
2.3.2. Производные от элементарных функций.



Рассмотрим движение частицы вдоль оси x. Если она движется равномерно с постоянной скоростью $(x = \mathrm{v}_x t)$, то график зависимости координаты x от времени t – прямая линия, а скорость можно вычислить по формуле $\mathrm{v}_x = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Но что делать, если этот график – кривая линия и скорость v_x меняется со временем?

За очень малое время Δt частица смещается на очень малое расстояние Δx, но график зависимости x от t за такое время практически не отличается от прямой, как показано на рисунке. Поэтому можно применить формулу равномерного движения: $\mathrm{v}_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)$. Такое выражение называется <u>производной функции $x(t)$ по переменной</u> t. Бесконечно малые изменения величин Δx и Δt называются <u>дифференциалами</u> величин x и t.

Производные необходимы для вычислений физических величин в том случае, когда описывающие их функции зависят от меняющихся переменных и сами меняются **по любому закону**.



Точно так же определяется производная любой функции $y = f(x)$ переменной x. Производную обозначают штрихом, указывая внизу (индексом) переменную, по которой берется производная. Но в физических задачах её лучше обозначать как отношение дифференциалов: $\boxed{y_x{}' = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Из рисунка виден <u>геометрический смысл производной</u>:

> $y_x{}'$ – это тангенс угла между касательной к графику функции $y = y(x)$ и осью x в той точке, в которой вычисляется производная.

Можно вычислить производную от производной. Например, вычислить производную от полученной функции скорости: $a_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta \mathrm{v}_x}{\Delta t}\right) = \dfrac{d\,\mathrm{v}_x}{dt}$. Это – ускорение частицы.

Повторные производные принято обозначать двойными штрихами или следующим обозначением в дифференциалах: $(y_x{}')_x{}' = y''_{xx}$ или $\dfrac{d(dy/dx)}{dx} = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ (читают эту математическую запись так: **производная второго порядка от функции** y **по переменной** x или “дэ два игрек по дэ икс дважды”).

Производные от простых функций можно не вычислять, а использовать их выражения из следующей таблицы (всюду $\alpha = \mathrm{const}$ – **любая постоянная величина,** когда $\alpha = 1$ функции будут элементарными):

Функция	Производная функции	Функция	Производная функции
$y = \alpha = \mathrm{const}$	$y' = (\mathrm{const})' = 0$	$y = \mathrm{tg}(\alpha x)$	$y' = (\mathrm{tg}(\alpha x))' = \dfrac{\alpha}{\cos^2(\alpha x)}$
$y = x^{\alpha}$	$y' = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = \mathrm{ctg}(\alpha x)$	$y' = (\mathrm{ctg}(\alpha x))' = -\dfrac{\alpha}{\sin^2(\alpha x)}$
$y = e^{\alpha x} \equiv \exp(\alpha x)$	$y' = (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$	$y = \arcsin(\alpha x)$	$y' = (\arcsin(\alpha x))' = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x)^2}}$
$y = \alpha^x$	$y' = (\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$	$y = \arccos(\alpha x)$	$y' = (\arccos(\alpha x))' = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x)^2}}$
$y = \ln(\alpha x)$	$y' = (\ln(\alpha x))' = \dfrac{1}{x}$	$y = \mathrm{arc\,tg}(\alpha x)$	$y' = (\mathrm{arc\,tg}(\alpha x))' = \dfrac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}$
$y = \sin(\alpha x)$	$y' = (\sin(\alpha x))' = \alpha\cos(\alpha x)$	$y = \mathrm{arc\,ctg}(\alpha x)$	$y' = (\mathrm{arc\,ctg}(\alpha x))' = -\dfrac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}$
$y = \cos(\alpha x)$	$y' = (\cos(\alpha x))' = -\alpha\sin(\alpha x)$		

Следует помнить простые правила:

1) при вычислении производной от функции, умноженной на константу, константа выносится за знак производной: $\boxed{(\alpha y(x))' = \alpha y'}$ или $\boxed{\dfrac{d(\alpha y(x))}{dx} = \alpha\dfrac{dy}{dx}}$;

2) производная от суммы или разности двух или нескольких функций равна сумме или разности их производных: $\boxed{\left(y_1(x) \pm y_2(x) \pm \ldots\right)' = \left(y_1(x)\right)' \pm \left(y_2(x)\right)' \pm \ldots}$.

Задания:

1) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = 16t^5 - 8t^4 + 6t^3 - 24t^2 + 20t + 200$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 1 с.

Ответ: 38 м/с.

2) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = 2\cos(t) + 3\sin(t)$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 1 с.

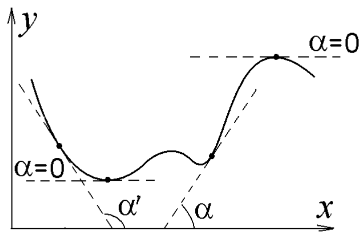
Ответ: -0,062 м/с.

3) Функция y зависит от переменной x по закону $y = 2\exp(x) - 3\operatorname{tg} x + 4\ln x$. Найти значение производной этой функции при $x = 1$.

Ответ: -0,84.

Занятие 3. Тема: Математический аппарат физики: производные от сложных функций и правила их вычисления, экстремум функций

2.3.3. Условия экстремума функций



Проведем несколько касательных к графику функции $y = y(x)$ (на рисунке они обозначены штриховыми линиями). В точках, где функция y растет с ростом переменной x, угол наклона касательной к оси x меньше 90^{o} и производная $y_x{}' = \operatorname{tg}\alpha > 0$, а в тех точках, где функция y убывает с ростом переменной x $\left(\alpha' > 90^{\mathrm{o}}\right)$, её производная $y_x{}' = \operatorname{tg}\alpha' < 0$. Т.е. с помощью производной можно анализировать поведение функции:

> если производная положительна, то в этой точке функция возрастает, а если отрицательна – то убывает с ростом переменной.

Точки, где функция достигает максимального или минимального значения называются <u>точками экстремума</u>. Как видно из рисунка, в этих точках угол наклона касательных к оси x равен нулю и производная функции тоже равна нулю: $y_x{}' = \operatorname{tg} 0^{\mathrm{o}} = 0$.

> Условием экстремума функции (её максимального или минимального значения) будет равенство нулю её производной:. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = x_m} = 0$, где x_m – точка экстремума

С помощью производной можно также определить какой будет величина функции в точке экстремума. Для этого в этой точке надо вычислить вторую производную от исследуемой функции:

> если $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x = x_m} < 0$, то x_m – точка максимума функции; если $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x = x_m} > 0$, то x_m – точка минимума функции.

Пример: вычислить минимальное и максимальное значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ в области $-1,2 \le x \le 3,2$.

Из условия экстремума $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\left(x^3\right)}{dx} - 3\dfrac{d\left(x^2\right)}{dx} - 9\dfrac{d(x)}{dx} = 3x^2 - 6x - 9 = 0$. Решение этого квадратичного уравнения – точки экстремума $x_{m1} = 3$ и $x_{m1} = -1$. Вторая производная от вычисленной функции первой производной $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(3x^2 - 6x - 9\right) = 6x - 6$. Она равна $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_{m1}} = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$ (условие минимума) в точке $x = x_{m1} = 3$, где исследуемая функция имеет минимальное значение $y_{\min} = x_{m1}{}^3 - 3x_{m1}{}^2 - 9x_{m1} = -27$. И $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_{m2}} = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0$ (условие максимума) в точке $x = x_{m2} = -1$, где исследуемая функция имеет максимальное значение $y_{\max} = x_{m2}{}^3 - 3x_{m2}{}^2 - 9x_{m2} = +5$.

Задания:

1) Вычислить минимальное и максимальное значение функции $y = 3x^3 - 3x^2 - 3x$ в области $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Ответ: -3; 0,556.

2.3.4. Правила вычисления производных от произведения или частного двух функций. Примеры из кинематики прямолинейного движения.

Часто производную приходится вычислять от произведения или от частного двух или более функций. В этом случае надо пользоваться следующими правилами:

1) <u>производная от произведения</u> $f(x)\cdot g(x)$ равна $\boxed{(fg)' = f(g)' + g(f)'}$ или $\boxed{\dfrac{d(fg)}{dx} = f\dfrac{dg}{dx} + g\dfrac{df}{dx}}$ (первая функция, умноженная на производную второй функции, плюс вторая функция, умноженная па производную первой);

2) <u>производная от частного</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ равна $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g(f)' - f(g)'}{g^2}}$ или $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\dfrac{df}{dx} - f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}}$ (знаменатель, умноженный на производную числителя, минус числитель, умноженный на производную знаменателя, и все деленное на квадрат знаменателя).

Пример 1: координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \left(4t^2 - 3t\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 2 с.

Производную можно вычислять по любой переменной согласно записанным правилам. Надо только вместо переменной x в данном примере использовать переменную t. Так как $\mathrm{v}_x = \dfrac{dx}{dt}$, то по правилу вычисления производной от произведения функций $\mathrm{v}_x = \left(4t^2 - 3t\right)\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\dfrac{d}{dt}\left(4t^2 - 3t\right) = \left(4t^2 - 3t\right)\cdot\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\cdot\left(4\cdot 2t - 3\right)$. После подстановки $t = 2$ получаем $\mathrm{v}_x = 13$ м/с.

Замечание: во всех заданиях аргументами тригонометрических функций будут углы, выраженные **в радианах**, что надо учитывать при использовании калькуляторов!

Пример 2: координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \dfrac{3 - 2t^2}{2 - 3t^2}$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 2 с.

Воспользуемся правилом вычисления производной от частного:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3 - 2t^2}{2 - 3t^2}\right) = \frac{\left(2 - 3t^2\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(3 - 2t^2\right) - \left(3 - 2t^2\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(2 - 3t^2\right)}{\left(2 - 3t^2\right)^2} = \frac{\left(2 - 3t^2\right)\cdot(-2\cdot 2t) - \left(3 - 2t^2\right)\cdot(-3\cdot 2t)}{\left(2 - 3t^2\right)^2}.$$

После подстановки $t = 2$ получаем $\mathrm{v}_x = 0{,}2$ м/с.

Задания:

1) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \dfrac{2t - 3}{3t^2 - 2t + 3}$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 2 с.

Ответ: 0,099 м/с.

2) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \dfrac{2\cdot\exp(t)}{3t + 1}$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 1 с. Ответ округлить до трех значащих цифр.

Ответ: 1,36 м/с.

3) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \dfrac{\mathrm{tg}(t)}{\cos t}$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 1 с. Ответ округлить до трех значащих цифр.

Ответ: 11,7 м/с.

2.3.5. Вычисление производной от сложной функции. Примеры.

До сих пор вычислялись производные от простейших (элементарных) функций. Но исследуемая функция может быть <u>сложной</u> (функция f, зависящая от другой функции g): $y = f\left(g\left(x\right)\right)$. В этом случае пользуемся следующим правилом: обозначаем вторую функцию-аргумент новой переменной, например $g\left(x\right) = z$. Тогда производная сложной функции будет произведением производных от двух простых функций: $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right) = \dfrac{df\left(z\right)}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx} = \left.\dfrac{df\left(z\right)}{dz}\right|_{z=g(x)}\cdot\dfrac{dg\left(x\right)}{dx}}$.

Заметьте, как просто выводится эта формула, если записывать производную через дифференциалы, которые были добавлены и в числителе, и в знаменателе!

Пример 1: вычислить производную функции $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}}$.

Эту функцию можно представить как $f\left(z\right) = z^{-1/2}$, где $z = x^2 \pm \alpha^2$. Тогда в соответствии с записанным правилом $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d\left(z^{-1/2}\right)}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2}z^{-1/2-1}\dfrac{d\left(x^2 \pm \alpha^2\right)}{dx} = -\dfrac{1}{2}\left(x^2 \pm \alpha^2\right)^{-3/2}\cdot 2x = -\dfrac{x}{\left(x^2 \pm \alpha^2\right)^{3/2}}$.

Пример 2: вычислить производную функции $f\left(x\right) = \sin\left(\exp\left(x\right)\right)$ в точке $x = 1$.

Согласно правилу вычисления производной от сложной функции $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d\left(\sin z\right)}{dz}\cdot\dfrac{d\left(\exp\left(x\right)\right)}{dx}$, где $z = \exp\left(x\right)$. Поэтому $\dfrac{df}{dx} = \cos z\cdot\exp\left(x\right) = \cos\left(\exp\left(x\right)\right)\cdot\exp\left(x\right)$. После подстановки $x = 1$ получаем $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=1} = -2,48$.

Пример 3: вычислить производную функции $f\left(x\right) = \ln\left(\sin\left(x^2 - 2x\right) + x^3\right)$ в точке $x = 1$.

Согласно правилу вычисления производной от сложной функции

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\ln z}{dz}\cdot\frac{d\left(\sin\left(x^2 - 2x\right) + x^3\right)}{dx} = \frac{d\ln z}{dz}\cdot\left(\frac{d\left(\sin u\right)}{du}\cdot\frac{d\left(x^2 - 2x\right)}{dx} + \frac{d\left(x^3\right)}{dx}\right),$$ где $u = x^2 - 2x$; $z = \sin\left(x^2 - 2x\right) + x^3$.

Используя производные элементарных функций, приведенные в таблице, находим

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{z}\cdot\left(\cos u\cdot\left(2x - 2\right) + 3x^2\right) = \frac{1}{\sin\left(x^2 - 2x\right) + x^3}\cdot\left(\cos\left(x^2 - 2x\right)\cdot\left(2x - 2\right) + 3x^2\right),$$ что дает $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=1} = 18,92$.

Задания:

1) Координата точки, движущейся по прямой линии, меняется со временем t по закону $x = \left(2t + 1\right)\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\right)^2$, где x и t измеряются в метрах и секундах соответственно. Вычисляя производную, найти значение проекции скорости v_x этой точки (в м/с) в момент времени t = 1 с. Ответ округлить до трех значащих цифр.

Ответ: – 1,36 м/с.

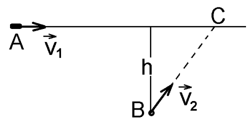
2) Вычислить производную функции $f\left(x\right) = \sin\left(\ln\left(x\right)\right)$ в точке $x = 1$.

Ответ: 1.

3) Вычислить производную функции $f\left(x\right) = \ln\left(\ln\left(x\right)\right)$ в точке $x = 2$.

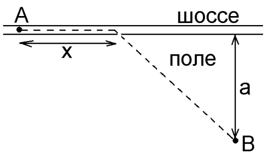
Ответ: 0,721.

4) Находясь на расстоянии h = 90 м от прямого участка шоссе, человек увидел на некотором удалении такси, приближающееся к нему по шоссе со скоростью v_1= 46,8 км/час. Человек бежит со скоростью v_2= 18 км/час в такую точку C на шоссе, в которой он окажется с максимальным опережением по времени по отношению к такси. Сколько секунд будет бежать человек до точки C?



Ответ: 19,5 с

5) Спортсмен-ориентировщик должен бежать из пункта A, находящегося на прямом асфальтированном шоссе, в пункт B, расположенный посреди песчаного поля на расстоянии a = 3 км от шоссе. Скорость бега спортсмена по шоссе v_1= 5 м/с, а по полю v_2= 3 м/с. Расстояние по прямой между пунктами AB = 5 км. Пробегая расстояние x по шоссе, спортсмен сворачивает в поле (см. рисунок). За какой наименьший промежуток времени он может добежать из пункта A в пункт B?



Ответ: 1600 сек

Занятие 4. *Тема*: Математический аппарат физики: интегралы и их использование в физике; интегралы от элементарных функций

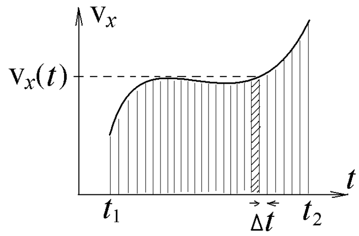
2.4. Вычисление интегралов.

2.4.1. Определение интеграла как площади под кривой графика. Пример кинематики неравномерного и не равноускоренного движения.

2.4.2. Первообразная функция и её производная.

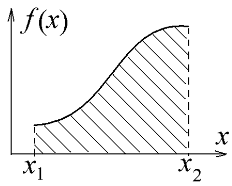
2.4.3. Понятие о неопределенном и определенном интеграле.

2.4.4. Интегралы от элементарных функций.



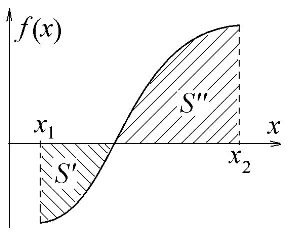
Рассмотрим теперь обратную задачу кинематики: по известному закону изменения скорости $v_x(t)$ частицы надо определить пройденное ею расстояние x. Если $v_x = \text{const}$, то задача решается просто: $x = v_x t$. Но что делать, если скорость все время меняется со временем?

Разобьём интервал времени на очень малые отрезки от t до $t+\Delta t$, за которые скорость частицы практически не успевает измениться и может считаться постоянной. Тогда можно использовать формулу равномерного движения $\Delta x = v_x(t)\Delta t$ – путь, который пройдет частица вдоль оси x за время Δt. Из рисунка видно, что этот путь равен площади узенького заштрихованного прямоугольника под кривой графика. Складывая все такие элементарные пути, находим суммарное перемещение частицы за конечное время $t_1 \le t \le t_2$. **Оно равно площади под графиком скорости** $v_x(t)$. Такая площадь или функция $x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum \Delta x$ называют интегралом от функции $v_x(t)$ по переменной t и обозначают символом интеграла . $x = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt$.



Мы определили <u>геометрический смысл интеграла</u> от любой функции $f(x)$ по <u>переменной интегрирования x</u>, как площади под графиком функции $f(x)$ (заштрихована на рисунке):

$\boxed{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \text{площадь под графиком подынтегральной функции}}$. Эта площадь зависит от пределов изменения переменной интегрирования $x_1 \le x \le x_2$, поэтому записанный выше интеграл называется <u>определенным</u>. Для определенного интеграла обязательно указываются <u>пределы интегрирования</u> x_1 и x_2.



Заметим, что функция $f(x)$ может принимать отрицательные значения. Поэтому площадь заштрихованной области S' под осью x $(f<0)$ надо взять отрицательной, а площадь заштрихованной области S'' над осью x $(f>0)$ - положительной. Результат интегрирования для функции, изображенной на рисунке слева запишется как $\boxed{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = S'' - S'}$.

Результат интегрирования всегда выражается в виде некоторой функции $F(x)$, которую называют <u>первообразной функцией</u>. Вычисленный определенный интеграл записывают в виде разности первообразных функций для конечного и начального значения переменной интегрирования: $\boxed{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = F(x_2) - F(x_1)}$ (обратите внимание на принятую форму записи границ интегрирования перед вычислением этой разности).

В физических и технических задачах обычно встречаются определенные интегралы, поскольку надо найти решение в определенный момент времени или при определенном значении другой переменной.

Но можно оставить верхний предел интегрирования неопределенным: $\int\limits_{x_1}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_1)$, т.е. интересоваться, какой будет площадь под графиком функции $f(x)$ для любого интервала изменения переменной x. Такой интеграл называется <u>неопределенным</u> и вычисляется с точностью до постоянного слагаемого (<u>постоянной интегрирования</u>): $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + \text{const}}$. Пределы у неопределенного интеграла не указываются. Сравнивая записи двух интегралов видим, что $\text{const} = -F(x_1)$, константа определяется из начальных условий интегрирования (заданием начальной точки x_1).

Математическая операция интегрирования обратна операции вычисления производной, потому что производная от первообразной функции всегда равна подынтегральной функции (функции, для которой вычисляется интеграл): $\boxed{\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)}$.

Интегралы простейших (элементарных) функций не надо вычислять, их можно найти в справочниках, и они приведены в следующих таблицах.

Таблица 1. Неопределенные интегралы (α – любой постоянный коэффициент, C – постоянная интегрирования)

Подынтегральная функция	Неопределенный интеграл	Функция	Производная функции
$y = \alpha = \text{const}$	$\int \alpha\, dx = \alpha x + C$	$y = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha x)}$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2(\alpha x)} = \dfrac{\text{tg}(\alpha x)}{\alpha} + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$y = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$y = \dfrac{1}{\sin^2(\alpha x)}$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2(\alpha x)} = -\dfrac{\text{ctg}(\alpha x)}{\alpha} + C$, $x \neq \pi n$; где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$y = e^{\alpha x} \equiv \exp(\alpha x)$	$\int e^{\alpha x}\, dx = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \arcsin(x/\alpha) + C$ где $-\alpha < x < \alpha$.
$y = \alpha^x$, $\alpha > 0$ и $\alpha \equiv 1$	$\int \alpha^x\, dx = \dfrac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{\alpha^2 + x^2}\right\| + C$
$y = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right\| + C$ где $x^2 > \alpha^2$.
$y = \sin(\alpha x)$	$\int \sin(\alpha x)\, dx = -\dfrac{\cos(\alpha x)}{\alpha} + C$	$y = \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2}$	$\int \dfrac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\text{arctg}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) + C$
$y = \cos(\alpha x)$	$\int \cos(\alpha x)\, dx = \dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + C$	$y = \dfrac{1}{\alpha^2 - x^2}$	$\int \dfrac{dx}{\alpha^2 - x^2} = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\left\|\dfrac{\alpha + x}{\alpha - x}\right\| + C$

Таблица 2. Определенные интегралы (α – любой постоянный коэффициент)

Подынтегральная функция	Неопределенный интеграл	Функция	Производная функции
$y = \alpha = \text{const}$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} \alpha\, dx = \alpha(x_2 - x_1)$	$y = \dfrac{1}{x}$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} \dfrac{dx}{x} = \ln\left\|\dfrac{x_2}{x_1}\right\|$
$y = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} x^\alpha dx = \dfrac{x_2^{\alpha+1} - x_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$y = \sin(\alpha x)$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} \sin(\alpha x)\, dx = \dfrac{\cos(\alpha x_1) - \cos(\alpha x_2)}{\alpha}$
$y = e^{\alpha x} \equiv \exp(\alpha x)$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{\alpha x}\, dx = \dfrac{e^{\alpha x_2} - e^{\alpha x_1}}{\alpha}$	$y = \cos(\alpha x)$	$\int\limits_{x_1}^{x_2} \cos(\alpha x)\, dx = \dfrac{\sin(\alpha x_2) - \sin(\alpha x_1)}{\alpha}$

Так же, как и при вычислении производной, следует помнить простые правила:

1) при вычислении интеграла от функции, умноженной на константу, константа выносится за знак интеграла:

$$\boxed{\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx};$$

2) интеграл от суммы или разности двух или нескольких функций равна сумме или разности интегралов:

$$\boxed{\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm ...\right) dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_1(x)\, dx \pm ...}.$$

Задания:

1) Частица начала свое движение вдоль оси x из начала координат, и проекция ее скорости на ось x зависит от времени по закону $v_x(t) = At^2 - Bt^3$, где A = 4 м/с³, B = 5 м/с⁴. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = 1$ с?

Ответ: 1,08 м.

2) Частица начала свое движение вдоль оси x из начала координат, и проекция ее скорости на ось x зависит от времени

по закону $v_x(t) = A\sin\left(\frac{t}{\tau}\right) - B\cos\left(\frac{t}{\tau}\right)$, где A = 2 м/с, B = 3 м/с, $\tau = 1$ с. Найти координату x частицы в момент времени $t = 1$ с?

Ответ: -1,61 м.

3) Вычислить интеграл от функции $y = 5\exp(-2x) + 2\sin 4x$ в пределах $0 \le x \le 1$

Ответ: 2,99 м.

Занятие 5. *Тема*: Математический аппарат физики: интегралы и производные от векторных функций и их применение в кинематике

2.4.5. Правила вычисления интегралов от сложных функций: замена переменных и правило интегрирования по частям. Примеры из кинематики.

Для вычисления интегралов от более сложных функций надо помнить два метода.

1) Метод замены переменных.

Интегрирование сложных функций можно упростить и свести к интегралам от простых функций, приведенных в таблицах, если сделать замену переменной. Общего рецепта здесь нет и замена переменной зависит от конкретного вида подынтегральной функции. Но при замене дифференциала под знаком интеграла надо помнить, что дифференциал функции (новой переменной) вычисляется с помощью её производной:

$$\boxed{df(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx = f_x' \cdot dx}$$

Пример 1: вычислить интеграл от функции $f(x) = x^3 \exp\left(x^4\right)$ в пределах $0 \le x \le 1$.

Замечаем, что $x^3 dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{1}{4}d\left(x^4\right)$. Поэтому, делая замену переменной $y = x^4$ под знаком интеграла и выноса за знак интеграла постоянный множитель 1/4, получим $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left(x^4\right)x^3 dx = \frac{1}{4}\int\limits_{y_1}^{y_2} \exp(y)dy$. **В пределах интегрирования тоже надо сделать замену переменной**: $y_1 = x_1{}^4 = 0$, $y_2 = x_2{}^4 = 1^4 = 1$. Получился интеграл от простой функции, который находим в таблице: $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \exp(y)dy = \frac{\exp(1) - \exp(0)}{4} = 4,296$.

Пример 2: вычислить интеграл от функции $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^4 x}$ в пределах $2 \le x \le 4$.

Замечаем, что $\frac{dx}{x} = \frac{d}{dx}(\ln x)\cdot dx = d(\ln x)$. Поэтому, делая замену переменной $y = \ln x$ под знаком интеграла и подставляя новые пределы интегрирования $y_1 = \ln x_1 = \ln 2 = 0,693$ и $y_2 = \ln x_2 = \ln 4 = 1,386$, находим

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\ln^4 x}\frac{dx}{x} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\ln x)^{-4} d(\ln x) = \int\limits_{y_1}^{y_2} y^{-4}dy = \left.\frac{y^{-4+1}}{-4+1}\right|_{y=y_1}^{y=y_2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y_2^3} - \frac{1}{y_1^3}\right) = 0,876.$$

Пример 3: вычислить интеграл от функции $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ в пределах $0,5 \le x \le 1$.

Замечаем, что $\cos x \cdot dx = \frac{d}{dx}(\sin x)\cdot dx = d(\sin x)$. Поэтому, делая замену переменной $y = \sin x$ под знаком интеграла и подставляя новые пределы интегрирования $y_1 = \sin x_1 = \sin 0,5 = 0,479$ и $y_2 = \sin x_2 = \sin 1 = 0,841$ (аргументы – в радианах), находим $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sin^2 x}\cos x \cdot dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (\sin x)^{-2} d(\sin x) = \int\limits_{y_1}^{y_2} y^{-2}dy = \left.\frac{y^{-2+1}}{-2+1}\right|_{y=y_1}^{y=y_2} = -\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right) = 0,899$.

2) Метод интегрирования по частям

Другой полезный метод заключается в том, что подынтегральное выражение разбивают на произведение функции $u(x)$ дифференциала $dv(x)$, т.е. $f(x)dx = u(x)\cdot dv(x)$, для которых всегда можно записать формулу

$$\boxed{\int\limits_{x_1}^{x_2} u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} v(x)du(x)}.$$

При этом новый интеграл в правой части иногда вычисляется намного проще, чем интеграл в левой части.

Пример 1: вычислить интеграл от функции $f(x) = x^8 \ln x$ в пределах $0 \le x \le 1$.

Выбираем $u(x) = \ln x$, $dv(x) = x^7 dx = d\left(\dfrac{x^8}{8}\right)$, откуда $v(x) = \dfrac{x^8}{8}$. Тогда, согласно записанному выше правилу,

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \underbrace{\ln x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{x^7 dx}_{=dv(x)} = \underbrace{\ln x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\left(x^8/8\right)}_{=v(x)}\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^8}{8}}_{=v(x)} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x}}_{=du(x)} = \frac{2^8}{8}\ln 2 - \frac{1}{8}\int_1^2 x^7 dx = 32\ln 2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{2^8 - 1^8}{8} = 18,2\,.$$

Пример 2: вычислить интеграл от функции $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ в пределах $0 \le x \le 1$.

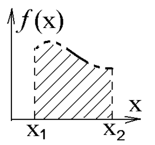
Делаем замену переменной $y = \sqrt{x}$. Тогда $x = y^2$ и $dx = d\left(y^2\right) = 2y\,dy$. Новый интеграл

$$\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = 2\int_0^1 \underbrace{y}_{=u} \cdot \underbrace{\cos y\,dy}_{=dv} = \underbrace{2y \cdot \sin y}_{=u\cdot v}\Big|_{y=0}^{y=1} - 2\int_0^1 \underbrace{\sin y}_{=v} \cdot \underbrace{dy}_{=du} = 2\cdot\sin 1 + 2\cos y\Big|_{y=0}^{y=1} = 2\left(\sin 1 + \cos 1 - 1\right) = 0,764$$

Замечание: проверить полученные ответы можно заглянув в справочник Г.Б.Двайт “Таблицы интегралов и другие математические формулы” М.: “Наука”, любой год издания, где приведены результаты интегрирования всех функций.

Задания:

1) Вычислить площадь под кривой функции *f*(x) на интервале $x_1 \le x \le x_2$ (заштрихована на рисунке), если *f*(x) = x·sin(x^2), x_1 = 1, x_2 = 2. Результат округлить до трёх значащих цифр.

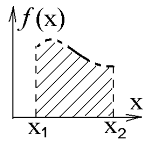


Ответ: 0,597

2) Вычислить интеграл от функции *f*(x) = cos(x)·$\sin^4$(x) – sin(x), на интервале $0 \le x \le 1$. Результат округлить до трёх значащих цифр.

Ответ: – 0,375

3) Вычислить площадь под кривой функции *f*(x) на интервале $x_1 \le x \le x_2$ (заштрихована на рисунке), если *f*(x) = cos(x)·exp(sin(x)), x_1 = 0, x_2=1. Результат округлить до трёх значащих цифр.



Ответ: -1,32 (что означает знак “-”?)

4) Используя метод интегрирования по частям, вычислить величину интеграла $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, где *f*(x) = (x+2)·exp(x); x_1 = 1, x_2 = 2. Результат округлить до трёх значащих цифр.

Ответ: 16,7

5) Используя метод интегрирования по частям, вычислить величину интеграла $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, где $f(x) = \sqrt{x}\cdot\exp(-x)$; x_1 = 0, x_2 = 1. Результат округлить до трёх значащих цифр.

Ответ: 0,632

2.5. Векторные функции. Производные и интегралы от векторных функций. Примеры из кинематики.

Производные и интегралы от векторных функций вычисляются так же, как и для скалярных функций. Надо только разложить любой вектор на составляющие (проекции) и воспользоваться правилом вычисления производных и интегралов для суммы функций. Пусть $\vec{a}(t) = \vec{i}a_x(t) + \vec{j}a_y(t) + \vec{k}a_z(t)$. Тогда

$$\boxed{\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \vec{i}\,\frac{da_x(t)}{dt} + \vec{j}\,\frac{da_y(t)}{dt} + \vec{k}\,\frac{da_z(t)}{dt}}\,,\quad \boxed{\int \vec{a}(t)\,dt = \vec{i}\int a_x(t)dt + \vec{j}\int a_y(t)\,dt + \vec{k}\int a_z(t)dt}$$

Задания:

1) Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону $\vec{v}(t) = \vec{i}\cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j}\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2$, где *A* = 3 м/с, *B* = 4 м/с, $\tau = 1$ с, $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. На какое расстояние от начала координат удалится частица в момент времени $t = 1$ с?

Ответ: 2,01 м.

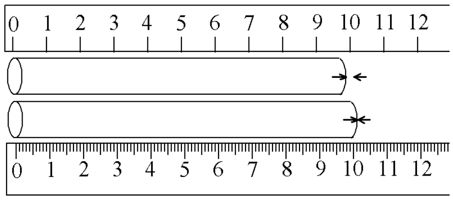
2) Частица начала свое движение из точки с координатами $x_0 = 4$ м, $y_0 = z_0 = 0$ со скоростью, которая зависит от времени по закону $\vec{v}(t) = \vec{i}\cdot A\dfrac{t}{\tau} + \vec{j}\cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$, где *A* = 2 м/с, *B* = 3 м/с, $\tau = 1$ с, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найти удаление частицы от начала координат в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: 5 м.

Занятие 6. *Тема*: Обработка экспериментальных данных: Погрешность измерительных приборов, погрешность метода измерения, погрешность измеряемых величин

3. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

3.1. Измерения в физическом эксперименте. О необходимой точности измерений.



При измерении любой величины необходимо оценивать ошибку (погрешность) результата измерения. Нельзя, например, просто сказать, что измеренная длина какого-то предмета равна 10 см. На рисунке видно, что эту длину измеряли разными линейками с разной ценой деления шкалы. Нижняя, миллиметровая линейка дает более точный результат. Верхняя, где деления шкалы размечены в сантиметрах, измеряет не так точно, что видно из реальной разности длин двух измеренных предметов. Поэтому длина, измеренная по нижней линейке будет равна 10,0 см. Лишний ноль несет информацию о результате измерения. Он говорит о том, что измерения производились с точностью до 0,1 см (1 мм). Верхняя линейка измеряет только в сантиметрах.

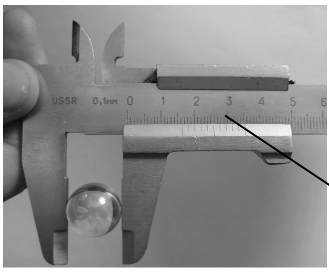
Но нижняя линейка тоже не точна. Для обработки деталей, резьбовых соединений, надо измерять диаметры с точностью до долей миллиметра и поэтому всегда надо знать с какой точностью (или с какой погрешностью) проводилось измерение.

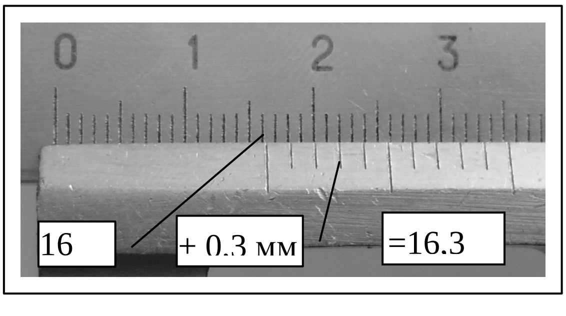
Ошибка (погрешность) измерения всегда равна половине цены деления шкалы измерительного прибора.

Для нижней линейки такая ошибка равна $\Delta l = 0,5$ мм и измеренную длину следует записать (или помнить) как $l = 10,00 \pm 0,05$ см (число знаков после запятой должно совпадать для складываемых чисел). Этот результат не означает, что длина точно равна 10,00 см, она определена с точностью в 0,5 мм. Для верхней линейки результат измерения $l = 10,0 \pm 0,5$ см , и относительная ошибка в измерении сразу достигает $\frac{0,5 \text{ см}}{10,0 \text{ см}} \cdot 100\% = 5\%$. При измерении более точной нижней линейкой, она равна 0,5%.

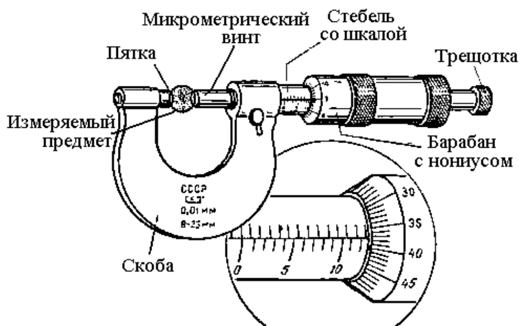
Какой должна быть точность измерения – зависит от цели, для которой оно проводится. Рост человека никто не измеряет в миллиметрах и достаточно сантиметровой линейки. Резьбовые соединения сопрягаются с точностью в 0,01 мм и для их измерения не подходит даже миллиметровая линейка. Нужны более точные измерительные приборы.

3.2. Измерительные приборы. Десятичные приставки к измеряемым величинам. Шкала измерительного прибора. Определение цены деления шкалы.





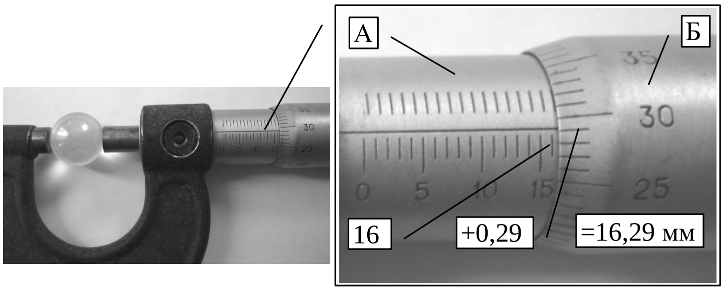
Более точное измерение длины производят с помощью штангенциркуля. Под миллиметровой линейкой этого прибора находится шкала нониуса, обычно состоящая из 10 делений. Измеряемый предмет зажимают между губками штангенциркуля (левая фотография). Самая крайняя левая риска шкалы нониуса показывает размер предмета в миллиметрах. На фотографии справа видно, что она находится между 16-м и 17-м делением миллиметровой шкалы, т.е. размер предмета находится в пределах от 16 до 17 мм. Далее надо найти риску нониуса, которая точно совпадает с риской миллиметровой шкалы. На фотографии видно, что это четвертая по порядку риска, которую отделяют от левой крайней риски 3 деления. Цена деления шкалы нониуса – 0,1 мм. Поэтому измеряемый размер равен $16 \cdot 1 + 3 \cdot 0,1 = 16,3$ мм . Штангенциркуль измеряет линейный размер предмета с точностью до 0,1 мм (цена деления нониуса). Погрешность измерения этого прибора $\Delta l = \frac{0,1 \text{ мм}}{2} = 0,05$ мм .



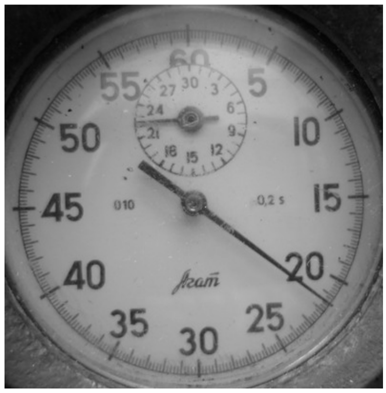
Ещё точнее измерения делают с помощью микрометра. Измеряемый предмет зажимают между неподвижной пяткой и микрометрическим винтом, который можно передвигать, вращая барабан с нониусом. Барабан следует вращать за самую крайнюю деталь – трещотку. Как только микрометрический винт достигнет поверхности тела, барабан начнет прокручиваться, чтобы не сжимать и не деформировать измеряемый предмет, а трещотка затрещит. Размер предмета в миллиметрах находят по шкале на стебле микрометра (на рисунке видно, что этот размер находится в пределах от 12 до 13 мм). Круговая шкала нониуса разбита на 50 делений. Цена одного деления нониуса – 0,01 мм. Деление на нониусе, совпадающее с линией миллиметровой шкалы на стебле – это добавок в сотых долях миллиметра. На рисунке видно, что линия находится между 37-м 38-м делением нониуса, т.е. к 12 мм по миллиметровой шкале надо добавить $37 \cdot 0,01 = 0,37$ мм .

Выше миллиметровой шкалы сделаны риски, делящие каждый миллиметр пополам. Если такая промежуточная риска выше миллиметровой шкалы видна, то к результату добавляют 0,5 мм, если не видна, то не добавляют. На рисунке она видна, поэтому размер измеряемого предмета $12+0,5+37\cdot 0,01=12,87$ мм . На фотографиях ниже – не видна и диаметр измеряемого шарика $16+0+29\cdot 0,01=16,29$ мм .

Цена деления нониуса 0,01 мм, поэтому погрешность измерения микрометра $\Delta l=\dfrac{0,01\ \text{мм}}{2}=0,005$ мм .



Измерение времени с помощью секундной стрелки часов имеет явно недостаточную точность. Для примера – некто решил измерить глубину колодца, сбросив в него камень и измерив время падения. По его часам – это время равно 4 с, а вычисленная глубина $h=\dfrac{gt^2}{2}\approx 80$ м . Но погрешность в измерении времени падения по часам $\Delta t=1\ \text{с}/2=0,5$ с . Приведет к ошибке в измерении глубины $\Delta h=\dfrac{g\left(t+\Delta t\right)^2}{2}-\dfrac{gt^2}{2}\approx 20$ м (кроме того, экспериментатор может засечь начало падения камня с дополнительной ошибкой).



Поэтому время следует измерять специальными измерительными приборами – секундомерами. Простейший механический секундомер показан на фотографии справа. Маленькая стрелка вверху показывает время в секундах. Большой круг большая стрелка пробегает за 1 минуту. Секундные деления разделены на 5 более мелких делений, так что погрешность данного прибора $\Delta t=0,2\,\text{с}/2=0,1$ с . Время, показываемое секундомером 22 минуты 21,4 с.

Более точный секундомер показан на фотографии слева. Маленькая стрелка внизу показывает время в секундах. Большой круг разделен на 100 делений по 0,01 с каждое. Время, показываемое секундомером 6,21 с. Погрешность данного прибора $\Delta t=0,01\ \text{с}/2=0,005$ с .

Видим, что любое измерение надо производить прибором, дающим необходимую точность. Но измеряемые величины могут иметь очень малую или очень большую величину в используемой для расчетов международной системе единиц СИ (например, измеряемый ток равен 0,000002 А, а скорость света 300000000 м/с).

Чтобы получить результат в единицах СИ надо время измерять в секундах, длину – в метрах, массу – в килограммах, силу тока – в амперах, напряжение – в вольтах, температуру – в градусах Кельвина и т.п.

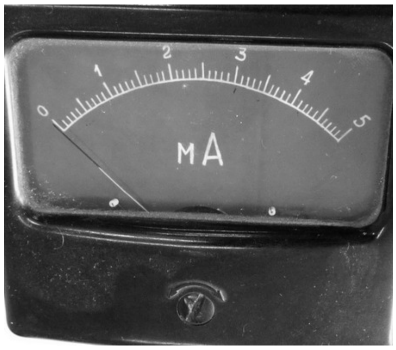
Чтобы не писать слишком много нулей, эти величины используют с приставками. Проиллюстрируем применение приставок для одной из основных единиц измерения – метра:

Приставка	пика(метр)	нано(метр)	микро(метр)	милли(метр)	санти(метр)	деци(метр)
обозначение	пм	нм	мкм	мм	см	дм
величина	1 пм $=10^{-12}$ м	1 нм $=10^{-9}$ м	1 мкм $=10^{-6}$ м	1 мм $=10^{-3}$ м	1 см $=10^{-2}$ м	1 дм $=10^{-1}$ м
Приставка	тера(метр)	гига(метр)	мега(метр)	кило(метр)	гекто(метр)	дека(метр)
обозначение	Тм	Гм	Мм	км	гм	дам
величина	1 Тм $=10^{12}$ м	1 Гм $=10^{9}$ м	1 Мм $=10^{6}$ м	1 км $=10^{3}$ м	1 гм $=10^{-2}$ м	1 дам $=10^{1}$ м

Аналогично обозначаются и другие единицы измерения. Но следует помнить, что на приборе часто они обозначены не в буквах русского алфавита: 1 mA = 1 мА $=10^{-3}$ А - 1 миллиампер; 1 μA = 1 мкА $=10^{-6}$ А - 1 микроампер и т.п.

Латинская буква m обозначает приставку “милли”, а греческая буква μ - приставку “микро”.

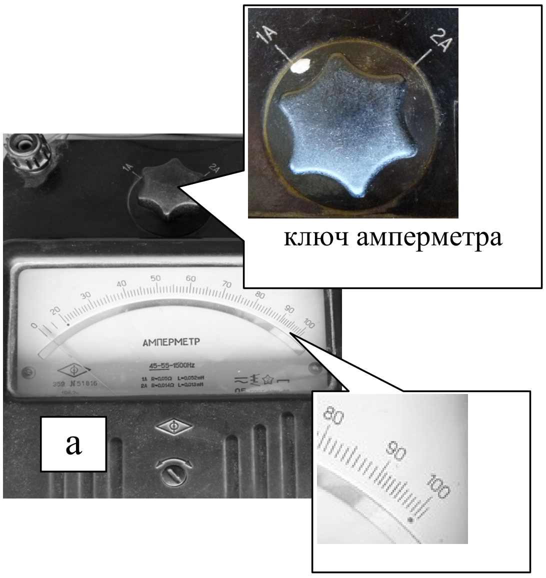
Обычно приставки обозначены на измерительном приборе. Например, на рисунке справа показан миллиамперметр, с помощью которого можно измерить ток до 5 мА (предел шкалы измерения). Видно, что шкала прибора разделена на 50 маленьких делений. Цена каждого деления 0,1 мА, а погрешность измерения прибора $\Delta I = 0,05$ мА. Регулировочный винт “в” внизу служит для установки стрелки прибора на 0 при отсутствии тока.

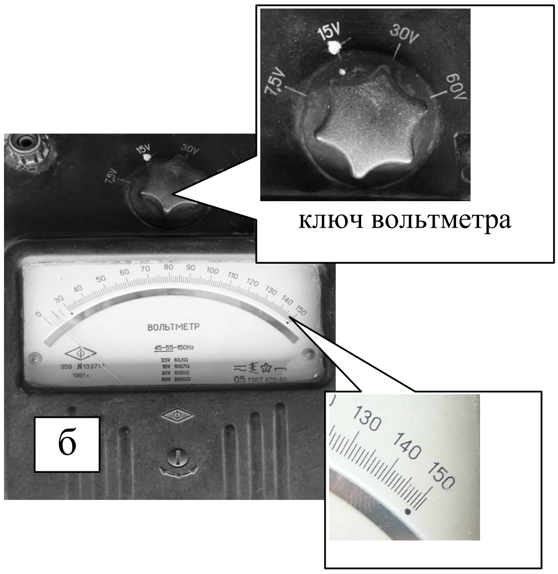


Задание 1: определите погрешность измерения микроамперметра на рисунке б слева.

Пределы измерения шкалы прибора можно изменять поворотом ключа. На фотографии а) слева показан ключ амперметра, позволяющий установить диапазон измерительной шкалы, разделенной на 100 делений либо равным 1 А, либо равным 2 А. В первом случае цена деления прибора равна 1/100 = 0,01 А, во втором – 2/100 = 0,02 А.

Задание 2: определить цену деления и погрешность измерений вольтметра, показанного на фотографии б) справа.

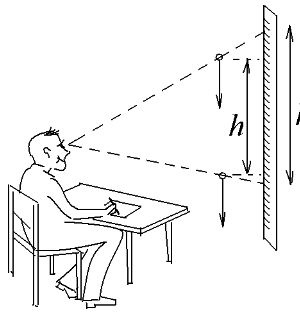




3.3. Погрешности приборов. Систематические ошибки в процессе измерения.

Следует учитывать, что ни один прибор не работает идеально, даже простая в изготовлении линейка. Сравните миллиметровую шкалу нескольких купленных в магазине линеек, и убедитесь, что нанесенные на них деления хоть незначительно, но различаются, различаются даже размеры между рисками, нанесенными на одну линейку. Работая с таким прибором, мы будем получать неточные результаты даже при идеально проведенном измерении. Подобные погрешности, зависящие от конкретного неточно настроенного прибора или неудачно выбранной процедуры измерения называются систематическими.

Пример: экспериментатору было лень измерять расстояние h, проходимое падающим шариком, стоя, и он делал это сидя. В результате вместо истинного расстояния h он каждый раз измерял расстояние h' с огромной систематической ошибкой, связанной с неправильно выбранной процедурой измерений.



Иногда систематическая ошибка не зависит от добросовестности экспериментатора. Это касается, например, процедуры измерения коротких интервалов времени любым, даже самым точным секундомером. Физиологическая реакция запаздывания на событие (включения секундомера в нужный момент) у отдельных людей достигает $0,2 \div 0,3$ сек.

Что делать в таком случае? Измерить сумму большого числа одинаковых величин и разделить на их число.

Пример: истинный период колебаний (время одного колебания) маятника равен T = 0,8 с. Чтобы измерить его достаточно точно помощью даже обычных наручных часов с секундной стрелкой, надо измерить время 100 колебаний $\tau = 0,8 \cdot 100 = 80$ с. Ошибка измерения $\Delta\tau = 1\text{ с}/2 = 0,5$ с. Тогда ошибка измерения T равна всего $\Delta T = \Delta\tau/100 = 0,005$ с.

Задание: как, имея для измерений только обычную миллиметровую линейку, определить толщину листа бумаги с погрешностью $\Delta h < 0,0001$ мм ?

3.4. Погрешность единичного измерения. Погрешность заданной величины. Понятие о значащих цифрах результата измерений. Вычисления с приближенными числами.

Как показали, погрешность единичного измерения, если не учитывать систематические ошибки, равна половине цены деления шкалы измерительного прибора.

Но полученные результаты измерения надо обрабатывать, подставлять в формулы, производить вычисления.

Пример: студент, зная высоту обрыва $h = 100$ м, с помощью хорошего секундомера определил время падения с него камня $t = 4,51$ с, и решил найти ускорение свободного падения. С помощью калькулятора он вычислил, что $g = 2h/t^2 = 9,832793349$ м/с^2.

Большое число знаков после запятой совсем не говорит о точности результата. Калькулятор не обязан думать вместо студента. Он производит вычисления с введенными числами, не обращая внимания на то, что и высота h, и время t были заведомо определены с какими-то погрешностями и результат вычисления тоже содержит погрешность.

Все результаты вычислений следует округлять до трех значащих цифр.

Значащие цифры числа начинаются от первой ненулевой цифры. Так число 1,00534 содержит шесть значащих цифр, а число 0,00534 – три значащих цифры.

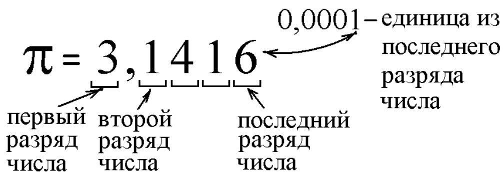
Правило округления: цифры, мѐньшие 5, округляются в сторону уменьшения числа, а бóльшие или равные 5 – в сторону увеличения числа.

Примеры округления до трех значащих цифр: $1,246 \approx 1,25$ (в сторону увеличения числа); $16,24 \approx 16,2$ (в сторону уменьшения числа); $1,00534 \approx 1,01$ (в сторону увеличения числа); $1,00354 \approx 1,00$ (в сторону уменьшения числа, обратите внимание, что нули, стоящие после ненулевой цифры тоже являются значимыми).

Правило вычисления: ответ надо получать с точностью до четырех значащих цифр и округлять последнюю цифру.

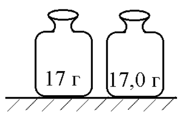
При этом надо следить, чтобы все величины, входящие в формулы были округлены одинаково, до трех значащих цифр. Если подставить в формулу $h = gt^2/2$ величину ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2, то даже при очень точном измерении времени t получим значительную ошибку, связанную с большой погрешностью числа g.

Погрешность заданной величины (заданного числа) равна половине единицы из последнего разряда числа.



Пусть, например, число π задано с точностью до пяти значащих цифр. Последний разряд соответствует последней цифре этого числа. Погрешность его задания будет равна $\Delta\pi = 0,0001/2 = 0,00005$. Но с такой точностью число π задавать не имеет смысла, если остальные числа имеют три значащих цифры. Поэтому и число π можно задать с такой же точностью $\pi = 3,14$ и с погрешностью $\Delta\pi = 0,01/2 = 0,005$.

Используемая при вычислениях величина ускорения свободного падения должна быть равна $g = 9,81$ м/с^2 с погрешностью $\Delta g = 0,01/2 = 0,005$ м/с^2.



Часто величины, необходимые при расчетах, не измеряются, а приводятся как справочные данные или как результат измерений, проделанных ранее. Например, на двух гирьках нанесена величина их массы. Эти значения **не одинаковы**, на что указывает лишний ноль! Левая гирька взвешивалась с точностью до одного грамма и поэтому её истинная масса может лежать в пределах $16,50 \le m \le 17,49$ г, что при округлении дает 17 г. Правая гирька взвешивалась с точностью до 0,1 г и для неё $16,95 \le m' \le 17,04$ г.

Погрешность заданной величины также равна половине единицы из последнего разряда.

Для левой гирьки она равна $\Delta m = 1\text{ г}/2 = 0,5$ г, для правой – $\Delta m' = 0,1\text{ г}/2 = 0,05$ г.

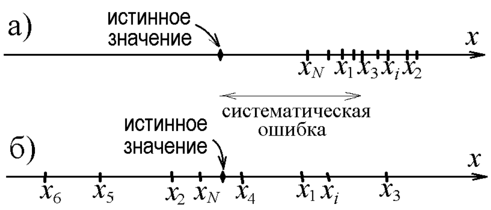
Относительной погрешностью называется отношение погрешности измерения величины к её измеренному значению, умноженное на 100%. Для левого грузика на рисунке относительная погрешность задания массы равна $\frac{\Delta m}{m} \cdot 100\% = \frac{0,5}{17} \cdot 100\% = 2,94\%$. Для правого грузика она будет в 10 раз меньше: $\frac{\Delta m'}{m'} \cdot 100\% = \frac{0,05}{17,0} \cdot 100\% = 0,294\%$

Ошибкой будет при измерении длины, которая оказалась равной одному метру, записать значение $l = 1$ м, т.е. задать величину длины с точностью до одной значащей цифры. Для человека, не проводившего измерения, такая цифра в техническом описании будет означать, что длину измеряли линейкой с метровым расстоянием между делениями шкалы. Погрешность измерения для него будет равна $\Delta l = 1/2 = 0,5$ м, а относительная погрешность станет неудовлетворительной (50%). Но если записать $l = 1,00$ м, т.е. определить длину с точностью до трех значащих цифр, то он поймет, что длину измеряли сантиметровой линейкой, погрешность измерения $\Delta l = 0,01/2 = 0,005$ м, а относительная погрешность 0,5%.

Вывод: результаты всех измерений, по возможности, следует приводить с точностью не менее чем до трех значащих цифр, как и результаты всех вычислений и значения всех используемых констант.

3.5. Многократные измерения физической величины. Случайные ошибки измерения.

3.6. Средняя величина результата измерения. Вычисление среднеквадратичного отклонения и доверительного интервала. Абсолютная и относительная погрешность результатов измерения.

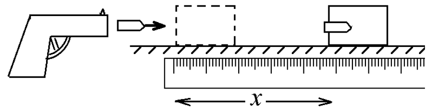


Однократное измерение величины x может быть совершено с большой ошибкой. Поэтому для надежности измерение проводят N раз (многократно). Будем отмечать результаты таких измерений x_i, $i = 1, 2, ..., N$ на оси x.

На верхнем рисунке а) показаны результаты измерений, проведенных с систематической ошибкой: все измеренные значения близки (говорят о большой **кучности** измерений по аналогии со стрельбой, когда все пули попадают в мишень близко друг от друга, кучно). На нижнем рисунке б) систематической ошибки нет, результаты измерений попадают в ту область, где находится истинной значение измеряемой величины x, но сделаны они **с большим разбросом** из-за того, что при измерениях делаются случайные ошибки.

Величину случайной ошибки предугадать нельзя, но чем аккуратнее и внимательнее делаются измерения, тем меньше будет величина каждой случайной ошибки. Например – нельзя идеально точно нажать кнопку секундомера в момент начала какого-то процесса. Всегда включение будет или чуть опережать, или чуть запаздывать; нельзя абсолютно точно совместить начальную риску шкалы линейки с краем измеряемого предмета и т.п.

Можно ли при таком случайном разбросе результатов измерения сделать вывод о значении измеряемой величины? Можно!



Пример: рассмотрим измерение расстояния x, на которое смещается первоначально покоившееся тело, в которое попадает пуля. Опыт проводился $N = 8$ раз, и каждый раз миллиметровой линейкой была измерена разная величина смещения:

№ измерения i	1	2	3	4	5	6	7	8	$\langle x \rangle$ (в см)
смещение x_i (в см)	4,8	5,2	6,1	5,7	4,9	5,7	6,3	5,1	5,48
$x_i - \langle x \rangle$ (в см)	–0,68	–0,28	0,62	0,22	–0,58	0,22	0,82	–0,38	
$\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2$ (в см^2)	0,214	0,078	0,384	0,048	0,336	0,048	0,672	0,144	

Прежде всего, вычисляется среднее значение измеряемой величины: $\boxed{\langle x \rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N}{N}}$.

Для данных, приведенных в таблице, получаем $\langle x \rangle = 5,475$ см $\approx 5,48$ см.

Затем вычисляются отклонения измеренных значений от среднего $x_i - \langle x \rangle$ (третья строчка таблицы, часть этих отклонений будет отрицательна, а часть – положительна). Квадраты этих отклонений всегда не отрицательны (четвертая строчка таблицы).

Среднеквадратичное отклонение измеренных значений вычисляют по формуле

$$\boxed{S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \langle x \rangle\right)^2 + \left(x_2 - \langle x \rangle\right)^2 + ... + \left(x_N - \langle x \rangle\right)^2}{N-1}}}.$$

В нашем примере получаем $S_x = 0,524$ см. Чем меньше величина S_x, тем больше кучность измерений x_i и меньше их разброс, отклонение от истинного значения величины x.

Наконец, по формуле $\boxed{\Delta x = S_x / \sqrt{N}}$ находят доверительный интервал. Это – **размер ошибки измерения**, вызванный **случайными** отклонениями измеренных значений от истинного. В нашем случае $\Delta x = 0,185$ см.

Если измеренная величина попадала в интервал $\boxed{\langle x \rangle - \Delta x \le x \le \langle x \rangle + \Delta x}$ или $\boxed{x = \langle x \rangle \pm \Delta x}$,

то такому результату **можно доверять**, можно считать, что данное измерение (**при большом числе** N проделанных измерений) было выполнено правильно. Если результат последующего измерения не попадает в этот интервал, то он вызывает сомнения, ему не доверяют. В рассматриваемом примере смещение тела при попадании пули должно лежать в пределах доверительного интервала $x = 5,48 \pm 0,19$ см или $5,29 \le x \le 5,67$ см.

Заметьте, что среднее значение и ошибку измерения записывают с одинаковой точностью, с одинаковым числом цифр после запятой. Неправильно записать $x = 5,48 \pm 0,185$ см, так как в этом случае ошибка вычислена более точно, чем результат измерения.

Чтобы более наглядно оценить величину ошибки в %, вычисляют относительную погрешность измерения

$$\boxed{E_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%}.$$

В нашем примере $E_x = 3,38\%$ (оцените, много это или мало?).

По приведенным формулам рассчитывают среднее значение $\langle x \rangle$, среднеквадратичное отклонение S_x, доверительный интервал Δx и относительную погрешность измерения E_x для любых измеряемых величин x.

Замечание: в этих формулах не учитывалась ошибка, вызванная округлением чисел (ошибка округления $\Delta x_{\text{окр}}$), а также систематическая ошибка $\Delta x_{\text{сист}}$. Они также вносят вклад в доверительный интервал

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{\text{случайн}}\right)^2 + \left(\Delta x_{\text{окр}}\right)^2 + \left(\Delta x_{\text{сист}}\right)^2}\ .$$

Но систематическую ошибку при измерениях надо сразу выявлять и устранять, а ошибку округления можно сделать малой, если делать измерения величин x_i (по возможности) и все вычисления с точностью не менее трех-четырех значащих цифр. Тогда ошибка округления становится малой по сравнению со случайной погрешностью измерений, и её в дальнейшем не будем учитывать.

Задания:

3.7. Косвенные погрешности. Вычисление погрешности для функции от измеряемых и заданных величин.

Полученные результаты для измеренных и заданных величин $x, y, z, ...$ подставляются в формулы и проводятся вычисления каких-то функций $f(x, y, z, ...)$. Так как все подставленные величины известны с погрешностями $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$, то и вычисленная величина будет определена с ошибкой, которая называется косвенной ошибкой или косвенной погрешностью Δf. Это – ошибка для вычисляемой величины f, а не для величины, измеряемой напрямую. Для её расчета имеется общая формула:

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z\right)^2 + ...}}\ .$$

В этой формуле стоят производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, которые называются частными производными. Они вычисляются для функций, зависящих от нескольких переменных $x, y, z, ...$, и, в отличие от обычных производных функции одной переменной $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, обозначаются не прямыми символами d, а круглыми символами ∂. Вычисляется частная производная, например, по переменной x, точно так же, как и обычная производная, но в предположении, что остальные переменные $y, z, ...$ фиксированы и не могут меняться, т.е. являются постоянными:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial x} = \left.\frac{df(x,y,z,...)}{dx}\right|_{y,z,...=\text{const}},\quad \frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial y} = \left.\frac{df(x,y,z,...)}{dy}\right|_{x,z,...=\text{const}},\ ...}$$

Пример 1: $f = \alpha\left(x^2 + y^3\right)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha\frac{d\left(x^2 + \text{const}\right)}{dx} = 2\alpha x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\frac{d\left(\text{const} + y^3\right)}{dy} = 3\alpha y^2$.

Пример 2: $f = \alpha x^2 y^3$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha y^3\frac{d\left(x^2\right)}{dx} = 2\alpha x y^3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha x^2\frac{d\left(y^3\right)}{dy} = 3\alpha x^2 y^2$

Относительная погрешность вычисления функции $f(x, y, z, ...)$ также задается в процентах: $\boxed{E_f = \frac{\Delta f}{f}\cdot 100\%}$, где величина функции f получается подстановкой в неё всех средних значений измеренных переменных и всех заданных величин: $\boxed{f = f\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, ...\right)}$. Результат вычислений записывается с учетом найденной ошибки:

$$\boxed{f = f\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, ...\right) \pm \Delta f}\ .$$

Пример 3: радиус круга был измерен много раз, и была получена величина среднего значения радиуса $\langle R\rangle = 10,5$ см и доверительного интервала (ошибки измерения) $\Delta R = 0,6$ см. Вычислить величину площади круга.

Площадь вычисляется по формуле $S = \pi R^2$, где надо задать также число π. Если принять $\pi = 3,14$, то погрешность задания $\Delta\pi = 0,01/2 = 0,005$. Тогда $S = \pi\cdot\langle R\rangle^2 = 3,14\cdot(10,5\ \text{см})^2 = 346,185\ \text{см}^2 \approx 346\ \text{см}^2$.

Ошибка вычисления $\Delta S = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\pi R^2\right)}{\partial R}\cdot\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\pi R^2\right)}{\partial\pi}\cdot\Delta\pi\right)^2} = \sqrt{\left(2\pi\langle R\rangle\cdot\Delta R\right)^2 + \left(\langle R\rangle^2\cdot\Delta\pi\right)^2}$, что после подстановки чисел дает $\Delta S = 39,5678\ \text{см}^2 \approx 39,6\ \text{см}^2$, т.е. $S = 346 \pm 40\ \text{см}^2$, а относительная ошибка $E_S = \left(\Delta S / S\right)\cdot 100\% = 11,4\%$.

Относительные ошибки вычисляемых величин всегда больше относительных ошибок при прямых измерениях. Но при правильно проведенных экспериментах они не должны превышать 20-30%.

Заметим также, что взяв точное значение $\pi = 3{,}141592654...$ получим $\Delta\pi = 0$ и $\Delta S = 39{,}5841$ см^2. Ошибка вычисления практически не изменилась, потому что заданную константу записали с точностью до трех значащих цифр.

Задание: экспериментатор 20 раз бросал камень с крыши здания под углом $\alpha = 45^{\mathrm{o}}$ к горизонту, считая, что начальная скорость камня $\mathrm{v}_0 = 8{,}0$ м/с. Среднее время от момента бросания камня до его падения на землю оказалось равным $\langle t \rangle = 3{,}6$ с, а доверительный интервал $\Delta t = 0{,}5$ с. Вычислить высоту здания h и найти относительную ошибку E_h (в %) такого вычисления.

Занятие 7. *Тема*: Обработка экспериментальных данных: правила построения графиков и вычисления погрешности серии измерений

3.8. Графическое представление результатов измерений и вычислений. Правила масштабирования графиков. Оформление осей графика. Правила построения графика по экспериментально найденным точкам с указанием доверительных интервалов.

Как правило, результаты проведенных измерений представляются наглядно: в виде графиков, диаграмм, таблиц и.т.п. Это надо делать правильно.

В таблицах не пишут слишком малые или слишком большие числа с большим числом нулей. Для этого используют рассмотренные ранее приставки. Но если результаты желательно записать в системе СИ, то используют множители 10^n. Например, $x = 12500000$ м $= 12{,}5$ Мм $= 1{,}25 \cdot 10^7$ м, $m = 0{,}000056$ кг $= 56$ мкг $= 5{,}6 \cdot 10^{-5}$ кг.

Если отдельное число записано с помощью такого множителя, то перед запятой должна стоять единственная цифра: Неправильная запись: $m = 56 \cdot 10^{-6}$ кг. Правильная запись $m = 5{,}6 \cdot 10^{-5}$ кг.

Все измеренные величины должны приводиться в таблицах с размерностями, но размерность и множители 10^n не надо записывать для каждого числа. Перед строкой или столбцом чисел в таблице надо указать символ величины, её размерность и множитель 10^n. Это означает, что все приводимые числа умножаются на этот множитель и имеют указанную размерность.

Пример правильно составленной таблицы, в которую записаны результаты измерения зависимости величины тока I, текущего через транзистор, от величины приложенного напряжения U:

I, мкА	2,87	2,98	3,22	3,38	3,56	3,77	3,98	4,12	4,30
U, мВ	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7.8	8,0

Эта же таблица, где все данные приведены в системе СИ:

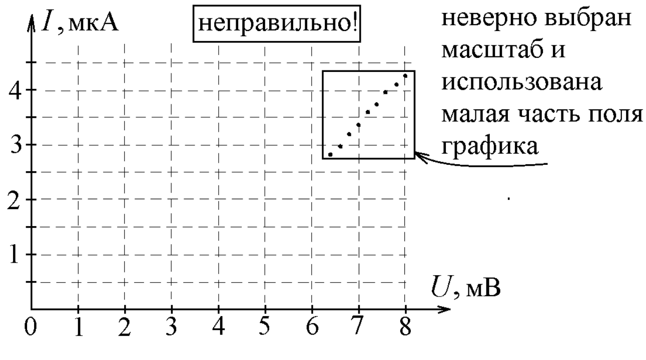
$I, \times 10^{-6}$ А	2,87	2,98	3,22	3,38	3,56	3,77	3,98	4,12	4,30
$U, \times 10^{-3}$ В	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7.8	8,0

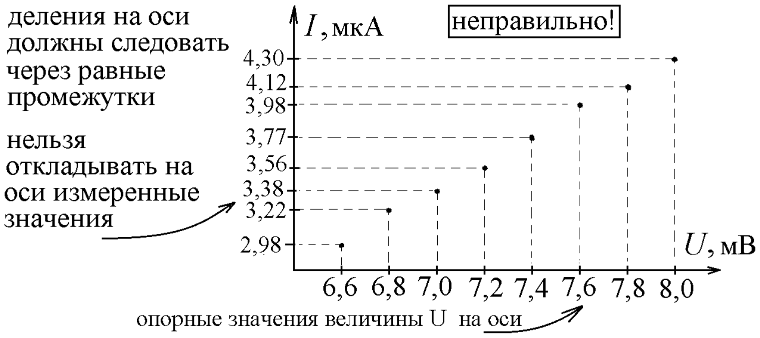
То же самое справедливо при построении графиков:

на каждой оси надо указать символ величины, её размерность и множитель 10^n. Это означает, что все значения, отложенные вдоль этой оси, умножаются на множитель 10^n и имеют указанную размерность.

Покажем ошибки, которые часто допускают при построении графиков. Во-первых – это **неправильно выбранный масштаб**, когда началом отсчета осей графика выбирается нулевое значение. В этом случае, например, для данных, приведенных в таблице, график зависимости тока от напряжения будет занимать очень малую область листа. Большая часть листа останется пустой, а по маленькому графику трудно будет установить какие-либо следствия.

Если это не указано специально, то масштаб, указываемый на осях графика **надо начинать с минимального значения отображаемой величины и заканчивать максимальным значением**. Тогда график займет все поле листа.



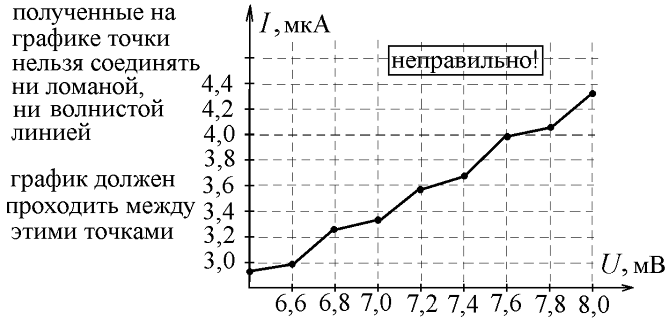


На осях графика нельзя откладывать значения заданных величин, для которых строится график, как это сделано на рисунке слева. Нельзя на осях графика откладывать опорные значения через любые неравные промежутки.

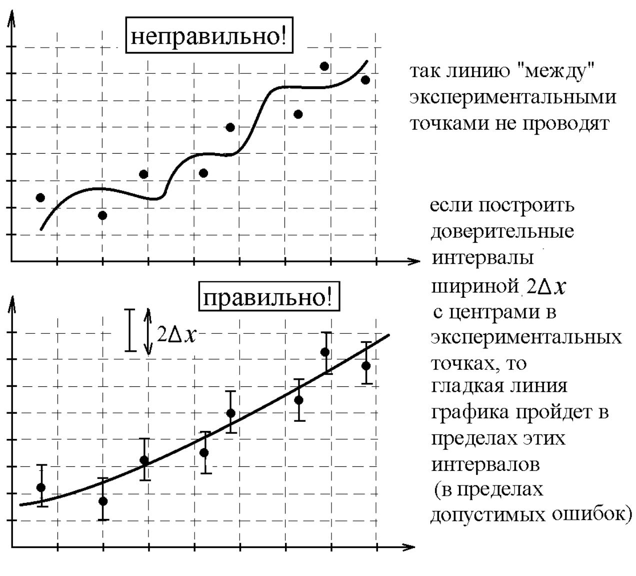
Интервалы опорных значений величин, отмеченных на графике **должны быть одинаковыми**, как это сделано на оси абсцисс.

Если график строится на листе миллиметровки или на любом листе "в клеточку", то **между двумя опорными значениями на оси координат должно быть 2,4,5 или 10 клеточек**. Тогда между ними легко найти любое промежуточное значение.

Построенные на графике точки нельзя соединять ломаной или любой другой линией, изгибая её, как показано на рисунке справа. Как правило, любые зависимости отображаются гладкими кривыми, изменяющимися плавно. Отклонение точек на графике от такой плавной кривой – это результат сделанных ошибок измерения или вычисления.

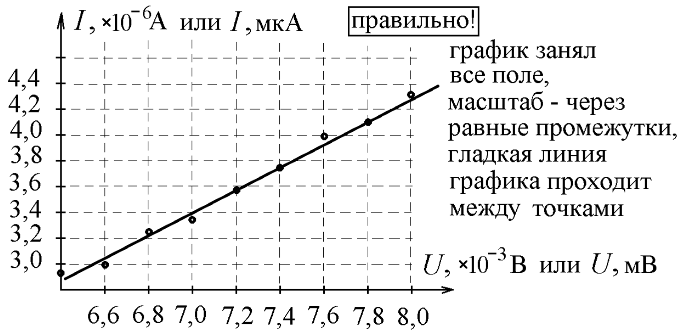


Линию графика надо проводить **между** экспериментальными точками. Если известно, что зависимость должна быть линейной, то надо провести прямую между точками с помощью линейки. Если вид зависимости неизвестен, то проводят плавную кривую.



Если экспериментальные точки явно не ложатся на такую кривую (рисунок слева), надо построить на графике отрезки доверительных интервалов шириной $2\Delta x$ с центрами в нанесенных точках. Эти интервалы показывают пределы допускаемых ошибок. Кривая графика должна проходить в пределах доверительных интервалов.

Правильно построенный график приведен на рисунке ниже.

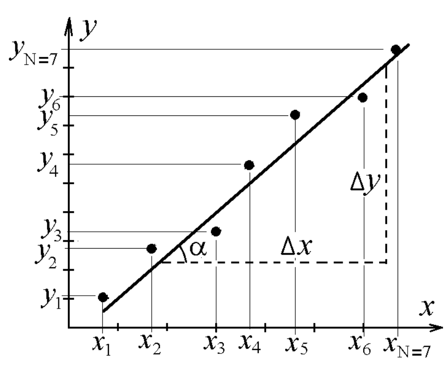


3.9. Определение погрешности экспериментально найденных линейных зависимостей методом парных точек.

3.10. Построение графика и вычисление доверительных интервалов методом парных точек на примере заданных результатов измерений физических величин связанных линейной зависимостью.

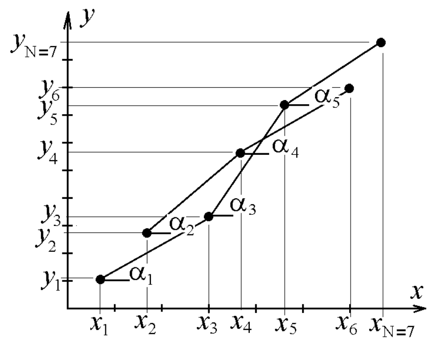
До сих пор мы находили погрешности однократно или многократно измеренной величины при одних и тех же условиях измерения, когда, в идеале, должно получиться одно правильное значение. Теперь рассмотрим случай измерения зависимости двух величин, для которой строится график. В общем случае зависимость отображаемая графиком, анализируется методом наименьших квадратов. Мы исследуем более простой метод парных точек, предназначенный для анализа линейной зависимости $y = kx$, которая определяется величиной коэффициента k. Задача – найти этот коэффициент по построенному графику.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		x_N
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		y_N



Так как $\Delta y = k\Delta x$, то $\boxed{k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha}$, где Δy и Δx - катеты треугольника, гипотенузой которого будет прямая линия, проведенная между экспериментальными точками, т.е. коэффициент k - это тангенс угла наклона α такой линии к оси x.

Но насколько точно мы провели эту линию? Если её немного повернуть по часовой стрелке или против, она по-прежнему пройдет между точек графика, но угол α и коэффициент k изменятся. С какой точностью получается ответ?



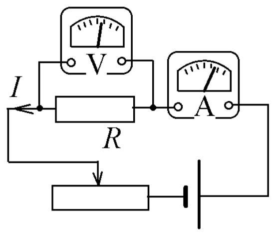
Чтобы ответить на этот вопрос, соединим отрезками парные точки (через одну или через две) и найдем тангенсы углов наклона этих отрезков к оси x (на левом рисунке точки соединены через одну):

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}; \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}; \quad k_3 = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{y_5 - y_3}{x_5 - x_3}; \ldots;$$

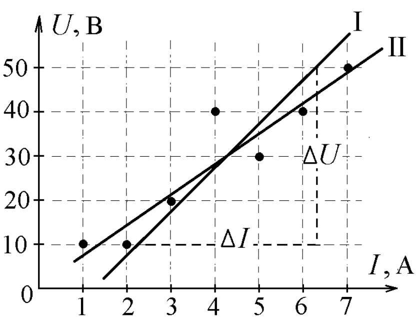
$k_{N-2} = \operatorname{tg}\alpha_{N-2} = \dfrac{y_N - y_{N-2}}{x_N - x_{N-2}}$, где N – число измеренных значений величины x (или y). Какие-то углы наклона α_i будут больше, какие-то – меньше, но в среднем дадут правильное значение, которое ищем по приведенным выше формулам среднего $\boxed{\langle k \rangle = \sum\limits_{i=1}^{N-2} k_i \Big/ (N-2) = \dfrac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{N-2}}{N-2}}$. Для нахождения ошибки находим среднеквадратичное отклонение $\boxed{S_k = \sqrt{\dfrac{1}{N-3} \sum\limits_{i=1}^{N-2} \left(k_i - \langle k \rangle\right)^2}}$ и доверительный интервал $\boxed{\Delta x = \dfrac{S_k}{\sqrt{N-2}}}$.

Итог: по измеренным с погрешностью значениям переменных x и y, связанных линейной зависимостью $y = kx$, можно сделать вывод о величине коэффициента k: $\boxed{k = \langle k \rangle \pm \Delta k}$, а также оценить относительную погрешность вычисления этого коэффициента $\boxed{E_k = \left(\Delta k / \langle k \rangle\right) \cdot 100\%}$.

Пример: падение напряжения U на сопротивлении R связано с протекающим током I **линейной** зависимостью $U = RI$ (закон Ома).
Для определения величины сопротивления R были измерены значения напряжения при разных значениях тока и занесены в следующую таблицу:



номер измерения i	1	2	3	4	5	6	7
ток I, А	1	2	3	4	5	6	7
напряжение U, В	10	10	20	40	30	40	50



Заметим, что измерения проводились очень небрежно, с огромными ошибками. Это видно по экспериментальным точкам на построенном графике зависимости $U = U(I)$, которые совсем не ложатся на прямую линию. На этом графике (рисунок слева) между точками проведены две прямые линии I и II. Но они дают разный результат для величины $R = \Delta U / \Delta I$, так как угол наклона этих линий к оси I различен. Из отношения катетов ΔU и ΔI (показанных на рисунке для линии I) находим $R_{\text{I}} \simeq 9{,}7$ Ом, $R_{\text{II}} \simeq 6{,}7$ Ом. Какой ответ верен?

Воспользуемся методом парных точек, занося результаты вычисления в следующую таблицу

номер i	R_i, Ом	$R_i - \langle R \rangle$, Ом	$\left(R_i - \langle R \rangle\right)^2$, Ом^2
1	$R_1 = \dfrac{U_3 - U_1}{I_3 - I_1} = \dfrac{20-10}{3-1} = 5$	$5 - 7 = -2$	4
2	$R_2 = \dfrac{U_4 - U_2}{I_4 - I_2} = \dfrac{40-10}{4-2} = 15$	$15 - 7 = 8$	64
3	$R_3 = \dfrac{U_5 - U_3}{I_5 - I_3} = \dfrac{30-20}{5-3} = 5$	$5 - 7 = -2$	4
4	$R_4 = \dfrac{U_6 - U_4}{I_6 - I_4} = \dfrac{40-40}{6-4} = 0$	$0 - 7 = -7$	49
	$R_5 = \dfrac{U_7 - U_5}{I_7 - I_5} = \dfrac{50-30}{7-5} = 10$	$10 - 7 = 3$	9
	$\langle R \rangle = \dfrac{5+15+5+0+10}{5} = 7{,}00$		$\sum\limits_{i=1}^{5} \left(R_i - \langle R \rangle\right)^2 = 130$

По данным, занесенным в таблицу, находим доверительный интервал

$$\Delta R = \frac{S_R}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{i=1}^{N=5} \left(R_i - \langle R \rangle\right)^2} = $$
$$= 2{,}55 \text{ Ом}.$$

Ошибки измерения были очень большими, относительная погрешность вычисления R равна

$$E_R = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle} \cdot 100\% = 36{,}4\%,$$

но, тем не менее, результат получен:

$$R = \langle R \rangle \pm \Delta R = 7{,}00 \pm 2{,}55 \text{ Ом}.$$

В таких пределах должно находиться истинная величина сопротивления R (сравните с результатами R_{I} и R_{II}, полученными для графиков I и II, построенных без анализа).

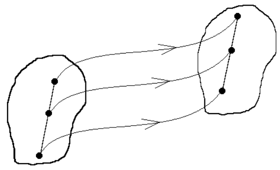
Задания: обязательное для выполнения задание для самостоятельной работы по указанию преподавателя.

Занятие 8. *Тема*: Характеристики кинематики поступательного движения

4. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

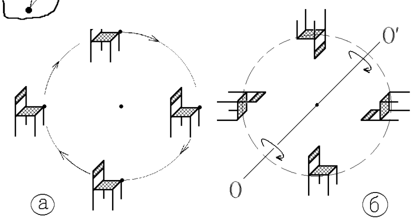
4.1. Представление произвольного движения в виде суммы поступательного и вращательного движения. Примеры

Любое движение можно свести к сумме поступательного движения и вращения относительно некоторой оси.



Поступательным движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям. Поэтому для описания поступательного движения достаточно рассмотреть движение единственной точки или частицы.

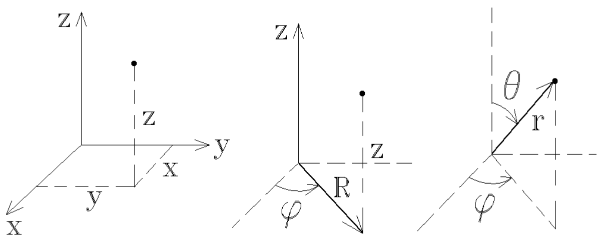
При вращении вокруг закрепленной оси все точки тела движутся по окружностям, имеющим общую ось.



Пример: движение стула на рис. а не будет вращательным. Это поступательное криволинейное движение по окружности, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям. На рис. б изображено вращательное движение стула: все его точки описывают окружности вокруг общей оси вращения OO', но радиусы этих окружностей различны.

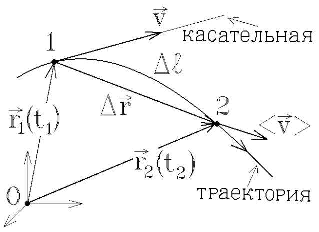
Задания: каким будет движение кабинки колеса обозрения в парке аттракционов? Движение Луны вокруг Земли? Движение Земли вокруг Солнца?

4.2. Выбор системы отсчета. Радиус-вектор. Траектория движения частицы. Вектор скорости. Зависимость скорости и радиус-вектора в случае произвольного криволинейного движения (использование производной и интеграла в задачах кинематики поступательного движения).



Чтобы записать закон поступательного или вращательного движения, надо определить координаты движущегося тела (частицы), вводя систему координат: декартову, цилиндрическую или сферическую. Дальше мы будем пользоваться декартовой системой координат, которое задает систему отсчета.

Сначала рассматриваем поступательное движение частицы, положение которой задается её радиус-вектором $\vec{r}$. Геометрическое место концов радиус-вектора представляет кривую, называемую траекторией. Зависимость радиус-вектора частицы от времени $\vec{r}=\vec{r}(t)$ называется кинематическим законом движения (это уравнение траектории).

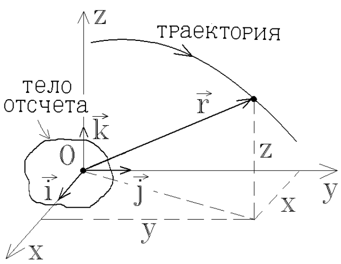


Изменение радиус-вектора $\vec{r}$ за время Δt называется перемещением: $\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$. Вектор перемещения совпадает по величине с хордой, проведенной из точки 1 в точку 2. Длина дуги траектории между этими точками Δl называется путем. Для бесконечно малого временного интервала dt соответствующее бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ направлено по касательной к траектории в точке 1, а его величина (модуль) равна пути: $|d\vec{r}|=dl$.

Скоростью частицы называется векторная величина, равная производной от радиус-вектора по времени иопределяемая равенством $\boxed{\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}}$. Скорость $\vec{v}$ всегда направлена по касательной к траектории.

Величина скорости, $\boxed{v=|\vec{v}|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{dl}{dt},}$ равна производной от пути по времени. Иногда используется понятие средней скорости: отношения перемещения к интервалу времени, за которое оно происходит $\langle\vec{v}\rangle=\Delta\vec{r}/\Delta t$.

Таким образом, зная кинематический закон движения, можно простым дифференцированием по времени найти скорость в любой момент времени (прямая задача кинематики). Наоборот, зная начальные координаты $\vec{r}_0$ в начальный момент времени $t_0=0$, можно найти траекторию движения частицы $\vec{r}(t)$ (обратная задача кинематики): $\boxed{\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_0^t\vec{v}dt}$.



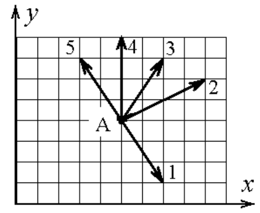
Положение частицы в любой момент времени определяется тремя ее координатами $x,\ y,\ z$, которые зависят от времени, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, и являются проекциями радиус-вектора на оси координат: $\boxed{\vec{r}(t)=\vec{i}x(t)+\vec{j}y(t)+\vec{k}z(t)}$,

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы, или орты декартовой системы координат.

Произвольное движение частицы можно рассматривать как сумму независимых движений по координатным осям $x,\ y,\ z$: $\boxed{\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt},\ \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt},\ \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt}}$. Величиной (модулем) скорости будет $\boxed{\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}$. Наоборот, зная проекции скорости, можно найти координаты движущейся частицы в любой момент времени:

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_x(t)dt,\quad y(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{v}_y(t)dt,\quad z(t) = z_0 + \int_0^t \mathrm{v}_z(t)dt}\ .$$

Задания:



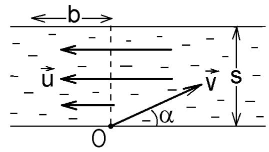
1) Радиус-вектор частицы изменяется во времени по закону $\overline{r} = -4\overline{i} + 4t^4 \cdot \overline{j}$.
В момент времени $t = 1$ с частица оказалась в точке А (рисунок справа). Каким будет правильное направление скорости частицы в этот момент времени?

2) Из точки с радиусом-вектором $\overline{r}_0 = 16\overline{i} - 8\overline{j}$ начала свое движение частица. Ее скорость изменяется по закону $\overline{\mathrm{v}} = 4t^4 \cdot \overline{i} + 2t^3 \cdot \overline{j}$. Через сколько секунд частица пересечет ось $0x$?

Ответ: через 2 с.

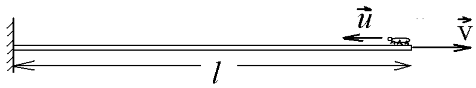
3) Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec{r}\left(t\right) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где где $A = B = C = 2$ м, $\tau = 1$ с . Чему равен тангенс угла между вектором скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и осью z в момент времени $t = 1$ с?

Ответ: 0,75.



4[&]) Скорость течения реки равна u = 1 м/с. Ширина реки s = 24 м. Пловец, имеющий скорость v = 0,8 м/с относительно воды плывет против течения под таким углом α к берегу (см. рисунок), и переплывает реку с наименьшим сносом b относительно исходной точки О. Найти этот наименьший снос b.

Ответ: $b_{\min}$ = 18 м



5[&]) Левый конец идеального резинового шнура, который может растягиваться до бесконечности прикреплен к стенке. Правый конец начинают тянуть со скоростью $\mathrm{v} = 1$ м/с . Одновременно жук, сидевший на правом конце начинает ползти по шнуру к стенке со скоростью $u = 20$ см/с относительно шнура. Начальная длина шнура $l = 1$ м . За какое время жук доползет до стенки?

Ответ: за 147 секунд

Занятие 9. Тема: Кинематика криволинейного поступательного движения

4.3. Вычисление перемещения и пути, пройденного частицей.

Перемещение частицы из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2$ (расстояние между этими точками) имеет величину $\boxed{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}}$.

Пройденный частицей за время t путь определяется модулем её скорости $\boxed{s(t) = \int_0^t \mathrm{v}(t)dt = \int_0^t \sqrt{\mathrm{v_x}^2 + \mathrm{v_y}^2 + \mathrm{v_z}^2}dt}$

Задания:

1) Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону $\vec{\mathrm{v}}\left(t\right) = \left(\vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где $A = B = 1$ м/с, $\tau = 1$ с. Какой путь проделает частица за время $t = 1$ с?

Ответ: 0,283 м.

2) Частица начала свое движение из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = -\vec{j} \cdot C$ со скоростью, которая зависит от времени по закону $\vec{\mathrm{v}}\left(t\right) = \vec{i} \cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, где $A = B = 1$ м/с, $C = 0{,}5$ м, $\tau = 1$ с . Найти расстояние между частицей и началом координат в момент времени $t = 1$ с .

Ответ: 0,320 м.

4.4. Ускорение. Зависимость ускорения и скорости в случае произвольного криволинейного движения (использование производной и интеграла в задачах кинематики поступательного движения).

Производная скорости частицы по времени, т.е. вектор $\boxed{\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$ называется ускорением частицы. Зная скорость частицы, можно простым дифференцированием по времени найти её ускорение в любой момент времени. Наоборот, зная ускорение частицы, а также её начальную скорость $\vec{v}_0$ частицы можно найти вектор скорости частицы в любой момент времени: $\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int\limits_0^t \vec{a}dt}$. В проекциях на оси координат эти уравнения имеют вид

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.} \qquad \boxed{v_x(t) = v_{0x} + \int\limits_0^t a_x dt,\ \ v_y(t) = v_{0y} + \int\limits_0^t a_y dt,\ \ v_z(t) = v_{0z} + \int\limits_0^t a_z dt}\ .$$

Модулем (величиной) скорости и ускорения будут $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$ и $\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$.

Задания:

1) Начальная скорость частицы равна $\vec{v}_0 = -16\bar{i} - 9\bar{j}$, а ускорение меняется во времени по закону $\bar{a} = 4t^3\cdot\bar{i} + 8t^2\cdot\bar{j}$. Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси $0y$?

Ответ: через 1,5 с.

2) Через сколько секунд ускорение частицы будет перпендикулярно оси y, если радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec{r}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j}\cdot\left(B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4 - A\left(\frac{t}{\tau}\right)^6\right) + \vec{k}\cdot C\cdot\sin\omega t$, $\tau = 1$ с, $A = B = C = 1$ м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

Ответ: 0,632 с

3) Скорость частицы зависит от времени по закону $\vec{v}(t) = \vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, где $A = B = 1$ м/с, $\tau = 1$ с. Через сколько секунд ускорение частицы будет направлено под углом 30° к оси y?

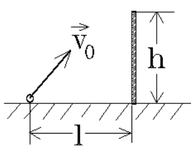
Ответ: 0,385 с

4) Частица движется по закону $\vec{r}(t) = \vec{i}At + \vec{j}(Bt - Ct^2) + \vec{k}E$, где A = 50 м/с, B = 200 м/с, C = 25 м/с^2, E = 100 м. Найти угол α между векторами скорости и ускорения частицы в момент времени t = 3 с. Получить уравнение траектории частицы и указать положение частицы на траектории в момент времени t = 3 с.

Ответ: $\alpha = 135^o$; $y = \frac{B}{A}x - \frac{C}{A^2}x^2$ -- парабола.

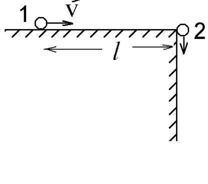
5) Камень бросили под углом α = 45° к горизонту с начальной скоростью v_o = 10 м/с с вершины башни. Камень упал на землю на расстоянии s = 30 м от подножия башни. Какова высота h башни? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: 60 м.



6) Маленькая лягушка находится на расстоянии l = 1 м от стенки и прыгает с начальной скоростью v_0 = 4 м/с. Стенку какой наибольшей высоты может перепрыгнуть лягушка? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: $h_{max} = \frac{v_0{}^2}{2g} - \frac{gl^2}{2v_0{}^2} = 48{,}75$ см.



6) В момент $t = 0$ шар “2” начинает падать без начальной скорости с вертикального обрыва, а шар “1” начинает скользить с постоянной скоростью v = 10 м/с по горизонтальной поверхности по направлению к шару “2”. Трение отсутствует. Чему было равно первоначальное расстояние l между шарами в момент $t = 0$, если известно, что шар “2” будет находиться на наименьшем расстоянии от шара “1” спустя промежуток времени t =2 с после начала движения? Принять g = 10 м/с^2.

Ответ: l = 60 м

4.5. Задачи кинематики движения с меняющимися со временем скоростью и ускорением.

Пример: в случае равноускоренного движения $a_x = \text{const}$ получаем

$$v_x = v_{0x} + a_x\int\limits_0^t dt = v_{0x} + a_x t \ \ ;\ x = x_0 + \int\limits_0^t (v_{0x} + a_x t)\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Задания:

1) В начальный момент t = 0 частица находилась в начале координат и имела начальную скорость $\vec{v}_0 = -\vec{j}v_0$, где

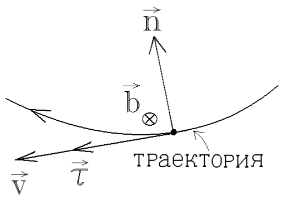
$v_0 = 2{,}5$ м/с. Далее частица двигалась с ускорением $\vec{a} = \vec{i}At + \vec{j}B$, где $A = 3$ м/с^3, $B = 1$ м/с^2. На каком удалении от начала координат окажется частица в момент времени $t = 2$ с ?

Ответ: $l = 5$ м

2) Частица начала свое движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0 = (\vec{i} - \vec{j}) \cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $\vec{a}(t) = \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, где $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $\tau = 1$ с. Чему равна величина скорости частицы в момент времени $t = 1$ с?

Ответ: 2,24 м/с.

4.6. Нормальное и тангенциальное ускорение. Радиус кривизны траектории. Задачи кинематики криволинейного поступательного движения.

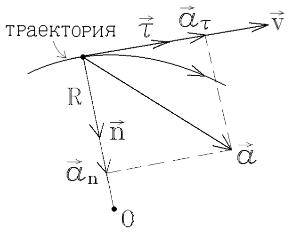


Свяжем с плоской траекторией движения частицы естественную систему координат, из взаимно перпендикулярных осей: касательной (единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль вектора скорости частицы) и нормали (единичный вектор $\vec{n}$, направленный к центру кривизны траектории). По определению $\vec{\tau} \perp \vec{n}$ и $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$. Отсюда следует $\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}}$. (вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории).

Чтобы найти ускорение, возьмем производную от этого произведения по времени (вектор $\vec{\tau}$ имеет единичную величину, но поворачиваясь в пространстве, зависит от времени): $\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Первое слагаемое направлено по касательной к траектории и называется тангенциальным (касательным) ускорением: $\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}}$. Его модуль $\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$ равен производной от величины скорости по времени, поэтому **тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине**.

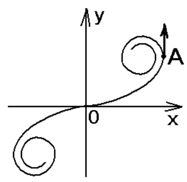
Второе слагаемое направлено по нормали к траектории, **характеризует изменение скорости по направлению** и называется нормальным ускорением: $\boxed{\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{n}.}$ Здесь R – радиус окружности, которую можно вписать в данную кривую линию траектории. Он называется радиусом кривизны траектории. Модуль нормального ускорения равен $\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$ (заметим, что в случае движения частицы по окружности – это хорошо известное центростремительное ускорение.)



Таким образом, полное ускорение частицы $\vec{a}$ всегда можно разложить на **две** составляющие: тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ и нормальное ускорение $\vec{a}_n$: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$, причем величина (модуль) полного ускорения $\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$. В частности, при движении частицы по прямой линии $R \to \infty$, $\vec{a}_n = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_\tau$. А при равномерном движении частицы по окружности $\vec{a}_\tau = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_n$.

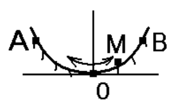
Задания:

1) По какой траектории будет двигаться частица в случае $a_\tau > 0$ и $a_n = \text{const}$?

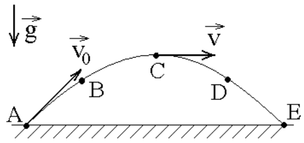


2) На рисунке справа изображена плоская кривая, называемая клотоидой (спиралью Корню). Точка A движется вдоль этой кривой в направлении, указанном стрелкой, с постоянной по величине скоростью. Что происходит при этом с величиной её полного ускорения?

3) Скорость частицы изменяется во времени по закону $\vec{v} = 2t \cdot \vec{i} + 3t \cdot \vec{j}$. Во сколько раз будут отличаться величины тангенциального ускорения частицы в моменты времени $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с?



4) Материальная точка М свободно без трения скользит в поле силы тяжести по гладким стенкам симметричной ямы (A и B – наивысшие точки подъема). Как направлен вектор полного ускорения материальной точки в точках A, B и O?



5) Камень бросили под углом к горизонту со скоростью v_0. Его траектория в однородном поле тяжести изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет. Что можно сказать о нормальном a_n и тангенциальном a_τ ускорениях на участках AC и CE? Будет ли их величина расти или уменьшаться? Чему равны a_n и a_τ в точке C? Что можно сказать о знаке проекции тангенциального ускорения на направление $\vec{\tau}$?

6) Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м со скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $\mathrm{v} = A \cdot (t/\tau)^2$, где $\tau = 1$ с, A = 2 м/с. Найти тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частиц, а также отношение нормального и тангенциального ускорения частицы через время $t = 2$ с.

Ответы: 8; 8

7) Кузнечик прыгает с некоторой начальной скоростью под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту. Определить радиус кривизны его траектории сразу после прыжка, если в верхней точке траектория имеет радиус кривизны R = 40 см.

Ответ: $R(t = 0) = R/\cos^3\alpha = 3{,}2$ м.

8[&]) Частица, движущаяся с небольшой скоростью v_0 по окружности радиуса R, начинает ускоряться так, что величина её тангенциального ускорения равна величине нормального ускорения. Найти зависимости скорости частицы от пройденного пути и от времени.

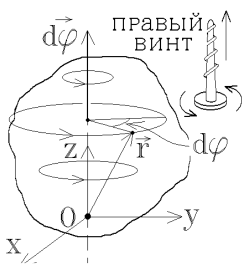
Ответ: $v = v_0\exp(s/R)$; $v = v_0R/(R - v_0t)$, где $t < R/v_0$.

Занятие 10. *Тема*: Кинематика вращательного движения

5. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

5.1. Угловые кинематические переменные. Векторы угла поворота, угловой скорости и углового ускорения. Неаддитивность поворотов относительно разных осей вращения.

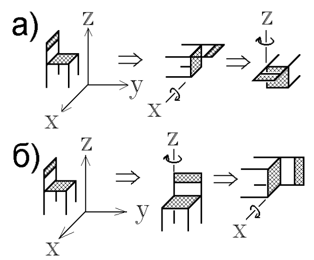
5.2. Зависимость угла поворота, угловой скорости и углового ускорения в случае произвольного вращательного движения вокруг неподвижной оси (использование производной и интеграла в задачах кинематики вращательного движения).



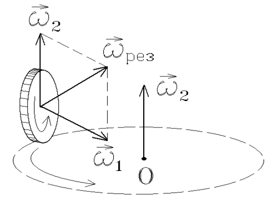
За время dt происходит поворот тела на угол $d\varphi$. Поэтому вместо линейных характеристик вводятся угловые характеристики: поворот тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ характеризуется вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$, направленным по оси вращения по правилу правого винта. Быстрота изменения угла поворота характеризуется <u>вектором угловой скорости</u> $\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$, направленным так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$, т.е. по оси вращения по правилу правого винта.

Еще одна кинематическая характеристика вращательного движения – <u>вектор углового ускорения</u> $\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$. Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении и противоположен ему при замедленном вращении.

Замечание. Если поменять местами порядок двух перемещений, то результат не изменится: $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1$, а результат сложения двух конечных углов поворота (двух последовательных вращений) зависит от их порядка (от последовательности вращений): $\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2 \neq \vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_1$. Например, рассмотрим два последовательных поворота предмета (стула) по часовой стрелке на угол $\pi/2$. На рис. а изображен вначале поворот стула вокруг оси x, а затем – вокруг оси z. На рис. б стул вначале вращают вокруг оси z, а затем – вокруг оси x. Конечные положения стула заметно отличаются друг от друга, т.е. $\vec{\varphi}$ является необычным вектором. Тем не менее, бесконечно малые углы поворота можно складывать векторно: $d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 \approx d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1$, так как при изменении порядка сложения бесконечно малых векторов результат будет отличаться на бесконечно малую второго порядка $O\left((d\varphi)^2\right)$, которой можно пренебречь. Поэтому можно складывать векторы угловой скорости и углового ускорения: $\vec{\omega}_{рез} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, $\vec{\varepsilon}_{рез} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$.



Пример: диск катится по кругу по горизонтальной плоскости, совершая вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг своей собственной оси и с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси O.



Размерности угловых величин: $[\varphi] =$ рад, $[\omega] =$ рад/с = с$^{-1}$, $[\varepsilon] =$ рад/с^2 = с$^{-2}$. **Угол поворота в системе СИ необходимо задавать в радианах**.

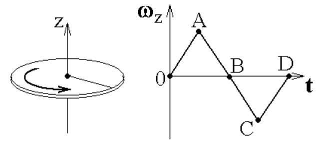
В простейших случаях, особенно при вращении вокруг закрепленной оси, можно ограничиться проекциями угловых векторов на ось вращения, вдоль которой направляют ось z: $\boxed{\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}}$, $\boxed{\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$.

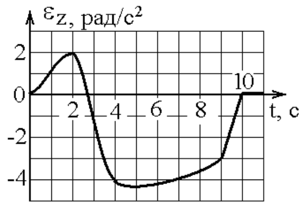
Как и в случае кинематики поступательного движения, можно решить обратную задачу, и по по заданному как функция времени угловому ускорению $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ и начальным условиям $(\omega_z(t = 0) = \omega_0$ и $\varphi(t = 0) = \varphi_0)$ с помощью интегралов найти кинематический закон вращения: $\boxed{\omega_z(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon_z(t)\,dt}$, $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z(t)\,dt.}$

Пример: формулы равнопеременного вращения ($\varepsilon_z = \text{const}$) аналогичны формулам равноускоренного поступательного движения: $\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z t^2/2$.

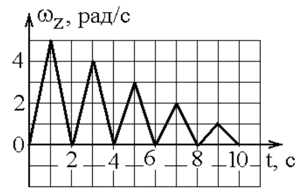
Задания:

1) Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости так, как показано на рисунке. На каких участках графика зависимости $\omega_z(t)$ вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен против оси z ?

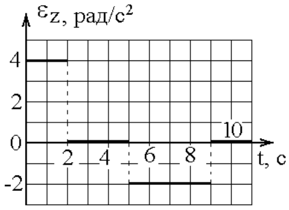




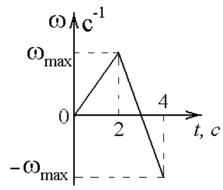
2) Твердое тело из состояния покоя начинает вращаться вокруг оси Z с угловым ускорением, проекция которого изменяется во времени, как показано на графике слева. В какой момент времени угловая скорость вращения тела достигнет максимальной величины?



3) Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике справа. В какой момент времени угол поворота тела относительно начального положения будет максимальным?



4) В начальный момент времени t = 0 твердому телу придали угловую скорость $\omega_z = 4$ рад/с вокруг оси Z и в дальнейшем тело испытывает угловое ускорение, проекция которого изменяется со временем, как показано на графике слева. В какой момент времени угол поворота тела относительно начального положения будет максимальным?



5) Диск вращается с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком. Найти максимальный угол поворота диска (в радианах) в интервале времени от $t = 0$ до $t = 4$ с, если $\omega_{max} = 2$ $с^{-1}$, а также угол, на который повернется диск в момент $t = 4$ с .

Ответ: 3 рад, 2 рад.

6) Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси так, что угол его поворота зависит от времени по закону $\varphi = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 - B\left(\frac{t}{\tau}\right)^5$, где A = 20 рад, B = 3 рад, $\tau = 1$ с. Через сколько секунд диск остановится?

Ответ: через 2 с.

7) Диск радиуса $R = 1$ м начал вращаться вокруг своей оси без начальной скорости с угловым ускорением, зависящим от времени по закону $\varepsilon = A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$ где A = 36 рад/с², $\tau = 1$ с. На какой угол (в радианах) он повернется за время $t = 1$ с?

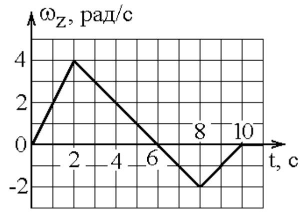
Ответ: 0,5 рад.

8) Колесо начинает вращаться вокруг своей оси с угловым ускорением $\varepsilon = 4$ рад / с ^{2} . Через какой промежуток времени угол между вектором скорости и вектором ускорения точки на ободе колеса станет равным $\alpha = 45^0$?

Ответ: через 0,5 с.

9) Равнозамедленно вращающийся шкив повернулся на угол $\varphi = 4$ рад к тому моменту, когда его угловая скорость уменьшилась в три раза. Найти величину углового ускорения шкива. Его начальная скорость $\omega_0 = 6$ рад/ с .

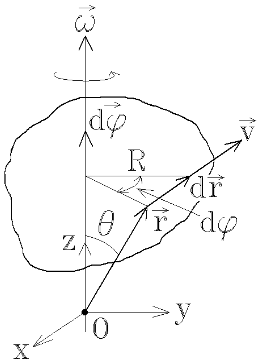
Ответ: $\varepsilon = 4\omega_0{}^2/9\varphi = 4$ рад/с^2 .



10) Тело начинает вращаться вокруг оси z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике слева. На какой угол относительно начального положения окажется повернутым тело через 8 секунд?

Ответ: 10 рад.

5.3. Связь кинематических переменных при поступательном и вращательном движении.

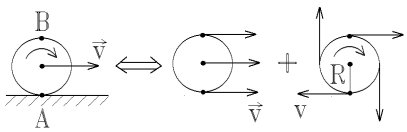


Рассмотрим произвольную точку в твердом теле, которое вращается вокруг закрепленной оси. Из рисунка видно, что величина бесконечно малого перемещения (или путь) точки будет равен $|d\vec{r}| = Rd\varphi = r\,\sin\theta\, d\varphi$. Это величина векторного произведения $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\,,\,\vec{r}\,]$. Разделив эту формулу почленно на dt, получим $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right]$ или $\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}\,]}$. Это связь линейной и угловой скоростей. Величины этих скоростей связаны простым соотношением $\boxed{v = |\vec{v}| = \omega R}$, где R – расстояние от выделенной точки до оси вращения.

Взяв производную от этой формулы по времени, получим $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt},\ \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega},\ \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$ или $\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,] + [\vec{\omega}, \vec{v}\,]$. Первое слагаемое направлено по касательной к траектории и является тангенциальным ускорением $\boxed{\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\,,\,\vec{r}\,]}$. Его величина связана с величиной углового ускорения формулой $\boxed{\alpha_\tau = \varepsilon R}$.

Второе слагаемое направлено к центру вращения и является нормальным ускорением: $\boxed{\vec{a}_n = [\vec{\omega},\ [\vec{\omega},\ \vec{r}\,]]}$,

Величина нормального ускорения связана с величиной угловой скорости: $\boxed{a_n = \omega^2 R = v^2/R}$. Полное ускорение при вращении частицы по окружности с радиусом R имеет величину $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.



Пример: качение колеса со скоростью v без проскальзывания можно представить в виде суммы двух движений, поступательного со скоростью $\vec{v}$ и вращательного с угловой скоростью $\omega = v/R$ вокруг оси колеса. При этом нижняя точка колеса неподвижна ($v_A = 0$), т.е. сцеплена с дорогой, а скорость верхней точки $v_B = 2v$. Если колесо будет быстрее двигаться поступательно, чем вращаться, то оно начнет **проскальзывать** (скорость точки А на рисунке будет направлена вправо). При более быстром вращении колесо **пробуксовывает** (точка А движется влево).

Задания:

1) Чему равна величина скорости самой левой точки катящегося без проскальзывания колеса (см. рисунок выше)?

2)Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t) = 2\pi\left(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 12t + 24\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. В какой момент времени величина тангенциального (касательного к траектории) ускорения частицы будет минимальна?

Ответ t = 1 с.

3) Частица движется по окружности с радиусом $R = 10$ см в соответствии с уравнением $\varphi(t) = 2\pi\left(t^3 - 4t^2 + 6t - 12\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Чему равна величина скорости частицы в момент времени $t = 3$ с ?

Ответ: 5,65 м/с.

4) Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 10$ см так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$, где A = 1 рад, $\tau = 1$ с. Найти тангенциальное ускорение частицы через время $t = 1$с после начала движения.

Ответ: 4,2 м/с^2.

5) Частица движется по окружности с радиусом $R = 1$ м в соответствии с уравнением $\varphi(t) = 2\pi\left(t^3 - 4t^2 + 6t - 12\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Чему равна величина полного ускорения частицы в момент времени $t = 2$ с ?

Ответ: 160 м/с^2.

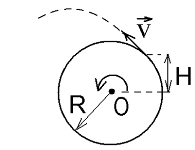
6) Покоившаяся частица начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 16$ см с угловым ускорением, которое зависит от времени по закону $\varepsilon = A\cdot\left(\frac{t}{\tau}\right)^7$. Найти нормальное ускорение частицы через время $t = 1$с, если $\tau = 1$ с. A = 3 с$^{-2}$.

Ответ: 2,25 м/с^2.

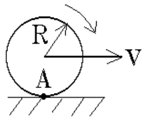
7) Покоившееся колесо начинает вращаться равноускоренно вокруг своей оси, и за время t = 2,5 с его угловая скорость достигает величины $\omega = 0{,}3$рад/с , а ускорение точки на ободе колеса становится равным a = 0,06 м / с^2. Найти радиус колеса?

Ответ: 40 см .

8[&]) Колесо радиуса R = 0,5 м равномерно вращается вокруг закрепленной горизонтально оси О. Скорость точки на ободе колеса при этом равна v = 5 м/с. На какой высоте H над уровнем оси должна оторваться от обода колеса прилипшая капля воды, чтобы взлететь над колесом на максимальную высоту? Принять g = 10 м/с^2.



Ответ: 10 см



9[&]) Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью v. В начальный момент времени $t_0 = 0$ точка A на ободе колеса соприкасалась с плоскостью. Найти скорость точки A в моменты времени: а) t = = t_0 = 0 ; б) t = πR/v ; в) t = πR/(2v) ; г) t= πR/(3v) .

Ответ: а) $v_A = 0$; б) $v_A = 2v$; в) $v_A = \sqrt{2}\,v$; г) $v_A = 2v\sin(vt/2R) = v$.

Занятие 11. *Тема*: Законы динамики поступательного движения

6. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
6.1. Первый закон Ньютона и существование инерциальных систем отсчета.
6.2. Понятие о материальной точке. Импульс.
6.3. Силы в задачах механики: сила тяжести, вес, сила нормальной реакции, сила упругости, сила трения скольжения и трения покоя, сила вязкого трения.
6.4. Второй закон Ньютона (уравнение движения для материальной точки).
6.5. Третий закон Ньютона и условия его применимости.

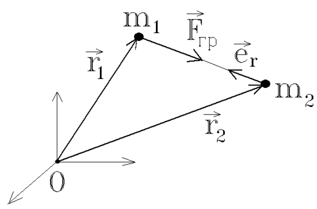
Материальное тело с массой m, **размерами которого в данных условиях можно пренебречь**, называется материальной точкой. Движение материальной точки характеризуется вектором импульса $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$. Входящая в это выражение масса характеризует свойство тела сопротивляться изменению своего движения – инерцию. Чем больше m, тем труднее ускорить или затормозить тело.

Задание:

1) при каких условиях материальной точкой можно или нельзя считать отдельный атом? человека? планету?

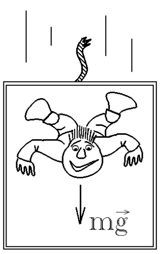
2) два одинаковых пластилиновых шара скользят с одинаковыми по величине скоростями v и сталкиваются друг с другом. Можно ли записать для их импульсов равенство $mv + mv = (m+m)\,v'$, (v'– их скорость после столкновения)?

Причиной любого изменения импульса или изменения движения материальной точки (или физического тела) является взаимодействие с другими телами. Количественную меру такого взаимодействия называют силой. В разных случаях оно происходит по-разному, поэтому существует множество видов сил, и каждый вид описывается своим силовым законом. Рассмотрим силы, наиболее часто встречающиеся в задачах механики.



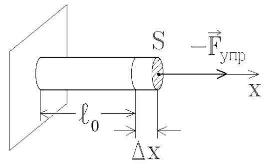
1. Гравитационная сила (сила притяжения между двумя частицами) определяется законом всемирного тяготения Ньютона $\vec{F}_{гр} = -G\dfrac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей частицы. Если частицу m_2 поместить в начало координат О, то этот закон примет вид: $\vec{F}_{гр} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

Гравитационную силу притяжения частицы планетой записывают также в виде $\boxed{\vec{F}_{гр} = m\vec{g}}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения ($g = 9{,}81$ м/с^2) .



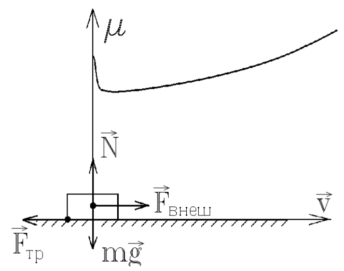
2.Вес – это вертикальная сила, с которой тело действует на опору или подвес. Как правило, она по величине равна силе $\vec{N}$ нормальной реакции опоры.

Пример: в свободно падающем лифте вес пассажира равен нулю (состояние невесомости), хотя гравитационная сила тяжести $m\vec{g}$ на него по-прежнему действует.

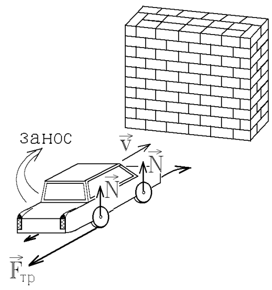


3.Сила упругости определяется законом Гука: $\boxed{F_{упр\,x} = -k\,\Delta x}$, где Δx – смещение точки приложения силы относительно положения равновесия, k – коэффициент жесткости. Строго говоря, закон Гука действует только при малых деформациях:. $\Delta x / l_0 \ll 1$. Однако, существуют силы, не связанные с деформацией упругого тела и имеющие общий вид: $\boxed{F_x = -k\,x}$, где $k = \text{const}$, а x – смещение от положения равновесия (не обязательно малое). Такие силы называют квазиупругими.

4. Силы трения весьма разнообразны. Если лежащее на твердой поверхности тело тянуть вдоль поверхности со все большим усилием, то вначале оно не перемещается из-за возникающей силы трения покоя, направленной противоположно внешней силе. Эта сила трения зависит от прилагаемой внешней силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$ и может иметь величину от нуля до некоторого максимального значения $F_{\text{тр max}}$. Если $F_{\text{внеш}} > F_{\text{тр max}}$, то тело начинает скользить, и на него уже действует сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$, или по модулю $\boxed{F_{\text{тр}} = \mu N}$.



Здесь N – нормальная реакция опоры, μ – коэффициент трения скольжения, который зависит от материала тела и поверхности, и, что очень важно, от относительной скорости тела.



Задание: с помощью приведенной на рисунке зависимости μ от v объяснить причину заноса автомобиля при резком торможении (см. рисунок справа) в том случае, когда водитель резко выворачивает руль вправо.

Когда тело скользит по жидкому слою смазки или движется в жидкой или газообразной среде, то на него действует сила вязкого трения. Во многих случаях ее можно считать пропорциональной относительной скорости тела и направленной против движения: $\boxed{\vec{F}_{\text{вяз}} = -\eta\vec{v}}$, где коэффициент η зависит от свойств среды и размеров тела.

Уравнения движения, позволяющие найти траекторию движения материальной точки, зная действующие на неё силы, определяются тремя законами Ньютона.

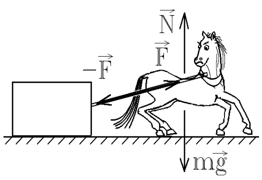
1-й закон Ньютона **постулирует** существование инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью. Во всех таких системах уравнения движения и законы механики совершенно одинаковы.

2-й закон Ньютона формулируется так: скорость изменения импульса частицы (материальной точки) в инерциальной системе отсчета равна результирующей силе, действующей на частицу: $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{F}_i\ .}$ Это уравнение обычно называют уравнением движения. Так как частица имеет постоянную массу, то подстановка $\vec{p} = m\vec{v}$ в уравнение движения приводит к формуле: $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i}$.

3-й закон Ньютона утверждает, что силы взаимодействия двух частиц равны по величине, противоположны по направлению и направлены по прямой, соединяющей частицы, т.е. $\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}\ .}$ Строго говоря, в такой формулировке этот закон справедлив только при взаимодействии покоящихся тел или тел, находящихся в контакте.

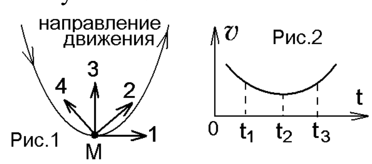
Задания:

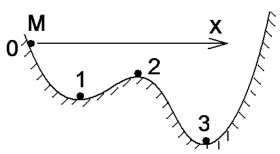
1) приведите пример, когда при движении тел 3-й закон Ньютона будет нарушен.



2) Лошадь тянет груз с такой же силой, с какой груз тянет лошадь. Объясните, почему груз трогается с места? Почему при малом усилии лошади не удается сдвинуть груз, а при большом – удается? Как надо тянуть груз, чтобы сдвинуть его при наименьшем усилии?

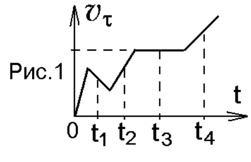
3)Материальная точка М движется по параболе (рис.1) в направлении, указанном стрелками. График изменения величины (модуля) её скорости приведен на рис.2. На рис.1 показано положение точки М в момент времени t_1. Укажите на этом рисунке направление силы, действующей на точку М в этот момент времени t_1.

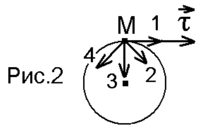


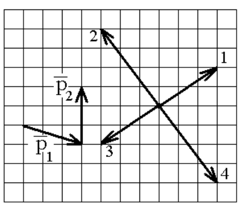


4) Материальная точка М под действием силы тяжести начинает без трения скользить по гладкой поверхности, сечение которой в вертикальной плоскости показано на рисунке слева. В какой точке (или точках) проекция на горизонтальную ось x действующей на точку М результирующей силы равна нулю?

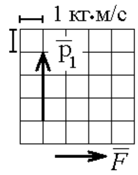
5) Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{v}$. На рис.1 показан график зависимости проекции скорости v_τ на орт $\vec{\tau}$, направленный вдоль скорости $\vec{v}$. На рис.2 укажите направление силы, действующей на точку М в момент времени t_1.







6) Импульс тела $\vec{p}_1$ изменился под действием короткого удара и стал равным $\vec{p}_2$, как показано на рисунке справа. В каком направлении (1,2,3,4) действовала сила?



7) Теннисный мяч летел с импульсом $\vec{p}_1$ (масштаб и направление указаны на рисунке). В перпендикулярном направлении на короткое время Δt = 0,1 с на мяч подействовал порыв ветра с постоянной силой F = 40 Н. Какова стала величина импульса p_2 после того, как ветер утих?

Ответ: 5 $\text{кг}\cdot\text{м/с}$

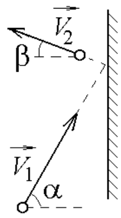
8) Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону

$\vec{p}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^5+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где $\tau=1$ с, $A=B=1\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$. Найти тангенс угла между осью y и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t=1$ с.

Ответ: 1,2.

9) Частица движется в плоскости так, что ее импульс зависит от времени по закону $\vec{p}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, где $\tau=1$ с $A=B=1\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$. Найти модуль силы, действующей на частицу в момент времени $t=2$ с.

Ответ: 12,6 Н



10) Небольшой шарик массы m летит со скоростью v_1 = 4 м/с под углом α = 60° к горизонту и падает на вертикальную стену. После неупругого удара он отскакивает со скоростью v_2 = 3 м/с под углом β =30° к горизонту. Время соударения τ = 0,001 с. Найти отношение величины (модуля) средней силы нормальной реакции со стороны стены к величине (модулю) средней силы трения шарика о стену.

Ответ: 2,34.

(Для решения на занятии 11 также могут быть взяты задания занятия 12).

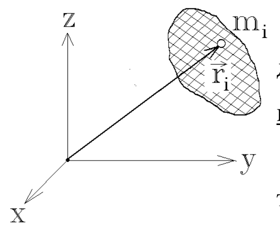
Занятие 12. *Тема*: Применение законов динамики поступательного движения к задачам механики

6.6. Система материальных точек (абсолютно твердое тело и сплошная среда: жидкость, газ). Импульс системы материальных точек.

6.7. Центр масс системы материальных точек и вычисление его координат и скорости.

6.8. Вывод уравнения поступательного движения для системы материальных точек или протяженного тела. Закон движения центра масс.

Любое протяженное тело или систему таких тел всегда можно разбить на столь малые участки с массами m_i, что их размерами можно пренебречь и рассматривать эти участки как частицы (материальные точки). Положение каждой из этих частиц задается радиус-вектором $\vec{r}_i$.



Масса всей системы определяется как $m=\sum\limits_i m_i$. На i-ю частицу системы, вообще говоря, действуют как <u>внешние силы</u> $\vec{F}_i$ со стороны окружающих систему тел или полей, так и сумма <u>внутренних сил</u> $\sum\limits_{j\neq i}\vec{F}_{ij}$ со стороны всех остальных частиц системы. Поэтому уравнение i-й частицы запишется в виде $\dfrac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{F}_i+\sum\limits_{j\neq i}\vec{F}_{ij}$.

Число таких уравнений равно числу частиц в системе. Просуммируем эти уравнения для **всех** частиц системы (т.е. сложим все левые и все правые части). Так как в силу третьего закона Ньютона $\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$, то сумма всех внутренних сил, действующих на все частицы системы, обращается в нуль: $\sum\limits_i\sum\limits_{j\neq i}\vec{F}_{ij}=0$. В результате получаем $\dfrac{d}{dt}\left(\sum\limits_i\vec{p}_i\right)=\sum\limits_i\vec{F}_i$.

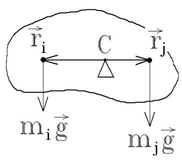
Векторная сумма импульсов всех частиц системы называется <u>полным импульсом системы</u>: $\boxed{\sum\limits_i\vec{p}_i\equiv\sum\limits_i m_i\vec{v}_i=\vec{P}}$.

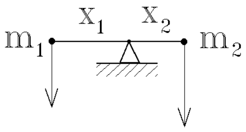
Векторная сумма всех внешних сил является результирующей внешних сил: $\boxed{\sum\limits_i\vec{F}_i=\vec{F}_{\text{внеш}}}$. Таким образом, закон движения системы частиц или закон изменения полного импульса системы читается так: **производная по времени полного импульса системы частиц равна результирующей внешних сил**:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}_{\text{внеш}}}.$$

<u>Центром масс системы</u> называется точка с радиус-вектором $\boxed{\vec{r}_C=\dfrac{\sum m_i\,\vec{r}_i}{m}}$, где сумма берется по всем частицам системы. Из этой формулы следует, что декартовыми координатами центра масс будут

$$\boxed{x_C = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum\limits_i m_i z_i}{m}.}$$





Если силы тяжести, приложенные к каждой частице системы, направлены в одну сторону, то центр масс совпадает с центром тяжести, как видно из рисунка слева, где начало координат O совпадает с центром масс, $\vec{r}_C = 0$ и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Умножив это равенство на ускорение свободного падения, получим условие равновесия весов, в которых точка опоры помещена в центр тяжести: $\sum m_i g\, \vec{r}_i = 0$, ($m_1 g\, x_1 = m_2\, g\, x_2$).

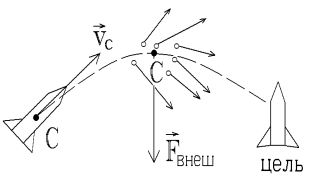
Взяв производную по времени от $\vec{r}_C$, получим: $\dfrac{d\vec{r}_C}{dt} \equiv \vec{v}_C = \dfrac{1}{m}\dfrac{d}{dt}\sum\limits_i m_i \vec{r}_i = \dfrac{1}{m}\sum\limits_i m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_i m_i\, \vec{v}_i = \dfrac{1}{m}\sum\limits_i \vec{p}_i$

или $$\boxed{m\vec{v}_C = \sum_i m_i\, \vec{v}_i = \vec{P}},$$

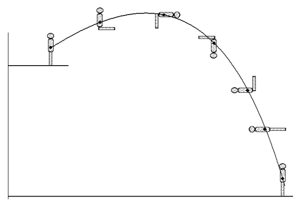
т.е. **полный импульс системы равен произведению ее массы на скорость центра масс $\vec{v}_C$.**

Получили уравнение движения или 2-й закон Ньютона для поступательного движения любого физического тела или системы тел: $\boxed{\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(m\vec{v}_C\right) = m\,\vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внеш}}}$.

Центр масс системы движется как частица, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена результирующая всех **внешних** сил. Для описания поступательного движения достаточно записать и решить уравнение движения центра масс.



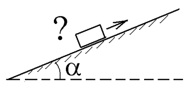
Примеры: летящие цели проще поразить не прямым попаданием ракеты, а облаком осколков, полученных при её подрыве. Центр масс C этого облака будет продолжать лететь по той траектории, по которой летел до взрыва центр масс ракеты. Точно так же, прыгнув с вышки, пловец может совершать любые кульбиты и повороты вокруг центра масс, который будет лететь по той же траектории, что и брошенный камень – по параболе.



Задания:

1) В ящике, стоящем на очень гладком льду, находятся кошка и мышь. Их беготня приводит к беспорядочным движениям ящика, хотя сумма внешних сил, действующих на ящик равна нулю и он должен сохранять состояние покоя или равномерного движения. Почему?

2) Тот же **полностью закрытый** и стоявший на столе **неподвижно** ящик вдруг начал двигаться. Возможно ли это? Если да, то какая внешняя сила заставляет ящик сдвинуться с места? Каким образом можно заставить закрытый ящик ползти вверх по наклонной плоскости? Почему начинает двигаться стоявший на месте пешеход?



3) На краю неподвижной тележки массы M = 320 кг и длины l = 12 м стоял человек массы m = 80 кг. На какое расстояние переместится тележка, если человек перейдёт на её противоположный край? Трением тележки о горизонтальную поверхность пренебречь. Ответ: на 2,4 м .

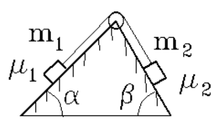
4) Найти потенциальную энергию и высоту центра масс вертикального столба высоты H = 9 м с сечением S = 40 см ^{2}, если плотность материала столба меняется с высотой h по закону $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{h}{2H}\right)$, где $\rho_0 = 4$ кг/м^3.

Ответ: $h_C = 4$ м ; $U = \rho_0 S H^2 g/3 = 4{,}24$ Дж.

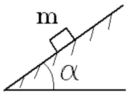
6.9. Решение задач динамики поступательного движения: скольжение по наклонной плоскости, система блоков (полиспаст) и т.п.

Задания:

1) На вершине неподвижной призмы с углами $\alpha = 30^0$ и $\beta = 60^0$ установлен невесомый шкив, который может вращаться без трения. Через него перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы с массами $m_1 = m_2 = m = 1$ кг. Коэффициенты трения грузов о плоскости призмы $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0{,}2$. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити.

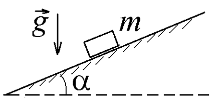


Ответ: $a = 0{,}455$ м/с^2; $T = 7{,}06$ Н.

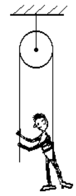


2) Коэффициент трения тела о наклонную плоскость, образующую угол $\alpha = 45^0$ с горизонтом, равен $\mu = 0{,}5$. При каком другом угле наклона плоскости величина силы трения тела о плоскость не изменится?

Ответ: при $\alpha' = \arcsin(\mu\cos\alpha) = 20{,}7^0$.

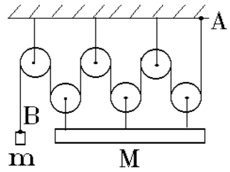


3) На наклонной плоскости находится груз массы m. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость $\mu = 0,8$. При угле наклона $\alpha = 60^{\circ}$ на тело действует сила трения $F_{\text{тр}} = 4\text{Н}$ Чему равна величина силы трения, действующей на груз пр угле наклона плоскости $\alpha = 30^{\circ}$? Ответ: 5 Н.



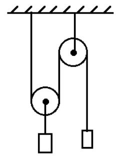
4) Через невесомый блок перекинут невесомый шнур, к концу которого привязан человек массы m = 60 кг. С какой силой человек должен тянуть за другой конец шнура, чтобы подниматься вверх?

Ответ: $F \geq mg/2 = 294$ Н.

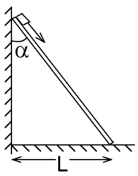


5) Полиспаст (устройство для подъёма грузов) состоит из N = 6 невесомых блоков, через который перекинут невесомый шнур, один конец A которого прикреплён к потолку, а к другому концу B подвешен груз массы m = 60 кг. К подвижным блокам полиспаста подвешен груз массы M = =300 кг. Найти величину и направление ускорения груза M.

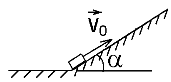
Ответ: a = g/41 ; вверх!



6) Невесомая нерастяжимая нить одним концом прикреплена к потолку и перекинута через два невесомых блока, как показано на рисунке. К свободному концу нити, свисающему с блока с закрепленной осью, и к оси свободного блока привязаны грузы с суммарной массой $\Sigma m = 4,8$ кг. Массы грузов подобраны так, чтобы сила натяжения нити была максимальной. Найти эту максимальную величину силы натяжения нити. Трением при вращении блоков пренебречь, принять $g = 10$ м/с^2. Ответ: $F_{\max} = 16$ Н



7) К вертикальной стене прислонена доска, упирающаяся нижним концом в пол на расстоянии $L = 6,1798$ м от стены. Из верхней точки по доскам без начальной скорости соскальзывает небольшое тело, причем коэффициент трения между этим телом и материалом доски равен $\mu = 0,5$. Длина доски и её угол α с вертикалью таковы, что тело соскальзывает на пол за наименьшее возможное время $t_{\min}$. Принимая $g = 10$ м/с^2, найти это время $t_{\min}$. Ответ: $t_{\min} = 2$ с



8) Небольшую шайбу толкают вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0= 5 м/с. Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,75$, а угол α, под которым плоскость наклонена к горизонту таков, что шайба проходит до остановки минимальный путь s. Найти этот путь, принимая $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $s_{\min} = 1$ м

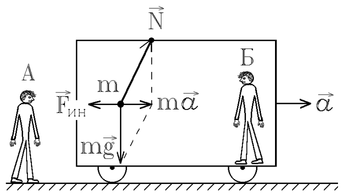
6.10. Законы динамики в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции.

Неинерциальной системой отсчета называется любая система отсчета, **движущаяся с ускорением относительно инерциальной системы отсчета.**

В неинерциальной системе отсчета в уравнении движения к сумме внешних сил надо добавить силу инерции.

$$\boxed{\frac{d\vec{p}\,'}{dt} = m\vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_{i\,\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{ин}}.}$$

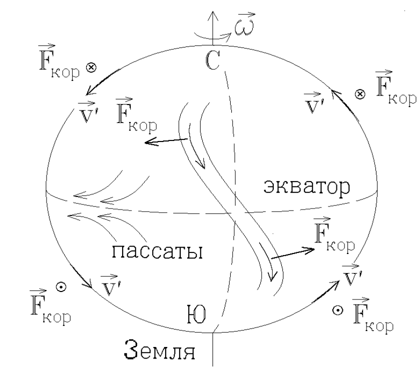
Силу инерции найти просто. Она равна массе тела, умноженной на ускорение неинерциальной системы отсчета $\vec{a}_0$, взятое со знаком “минус”: $\boxed{\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0}$. Силы инерции отличаются от "обычных" сил тем, что они обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. Они существуют только в неинерциальных системах отсчета и направлены противоположно ускорению системы! Но, с другой стороны, у них есть удивительное свойство, роднящее их с гравитационной силой – всем телам, независимо от их массы, они сообщают **одинаковое** ускорение!



Пример: груз на подвесе в вагоне, движущемся с ускорением $\vec{a}$, покоится, и уравнение его движения в неинерциальной системе, связанной с вагоном $0 = m\vec{g} + \vec{N} + \underbrace{\vec{F}_{\text{ин}}}_{=-m\vec{a}}$. Для неподвижного наблюдателя А в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей этот же груз движется с ускорением $\vec{a}$: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Уравнения одинаковы, т.е. закон Ньютона можно писать как в инерциальной, так и в неинерциальной системе. Выбирают ту, которая более удобна.

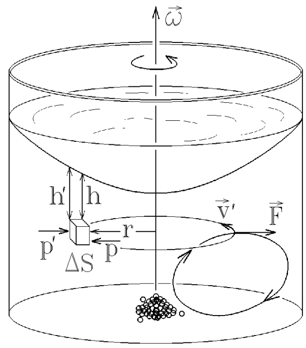
Примерами сил инерции будет **<u>центробежная</u>** <u>сила</u> инерции, $\boxed{\vec{F}_{\text{цб}} = -m\left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]}$, действующая на все тела, находящиеся во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ системе отсчета и имеющие нормальное (**центростремительное**) ускорение $\vec{a} = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]$ (на вращающейся карусели). Если тело движется в такой вращающейся системе со скоростью $\vec{v}\,'$, то действует <u>кориолисова сила</u> инерции $\boxed{\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\left[\vec{v}\,',\ \vec{\omega}\right]}$, направленная перпендикулярно скорости $\vec{v}\,'$.

При движении со скоростью $v' = 5$ км/час пешехода с массой $m = 60$ кг по вращающейся со скоростью $\omega = 2\pi/86400$ с$^{-1}$ Земле, на него действует очень малая кориолисова сила с максимальной величиной $F_{\text{кор}} = 2m\omega^2 v' \approx 0,012$ Н. Но в летящем со скоростью $v' = 1000$ км/час самолете эта сила, толкающая человека вбок, может возрасти до ощутимой величины $2,4$ Н.



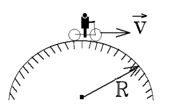
Из-за кориолисовой силы пассаты (ветры, дующие от тропиков к экватору) в обоих полушариях будут отклоняться к западу, а текущие реки будут отклоняться в северном полушарии к правому берегу, а в южном – к левому. То же происходит и с водой, текущей по трубам. По той же причине вытекающая в сливное отверстие вода закручивается в воронку в одну сторону в северном и в другую – в южном полушарии.

Еще один пример – вращение жидкости в сосуде. Уравнение движения можно записать для любой "частицы" жидкости – бесконечно малого кубика с поперечным сечением ΔS, который вместе с жидкостью вращается с угловой скоростью ω. Центростремительное ускорение этого кубика создается, главным образом, силами гидростатического давления: $\Delta m\omega^2 r = p'\Delta S - p\Delta S = \rho g\left(h' - h\right)\Delta S$. Отсюда следует, что $h' > h$, и поверхность вращающейся жидкости должна принимать форму воронки-параболоида. По той же причине поверхность текущей воды в месте поворота будет наклонена в сторону поворота.



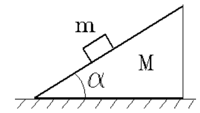
Из-за сил вязкого трения жидкость практически не движется вблизи дна сосуда, т.е. с высотой скорость вращения увеличивается. Если перейти в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся со средней скоростью жидкости $\langle\vec{\omega}\rangle$, то в этой системе верхние слои жидкости будут двигаться со скоростью $\vec{v}'$, опережая вращение системы, а нижние слои будут отставать. Кориолисовы силы приведут к появлению поперечных циркулярных потоков, как показано на рисунке. Такие потоки собирают чаинки в аккуратную кучку в центре стакана и они же будут размывать один из берегов реки в месте ее изгиба и наносить ил на другой, пологий берег.

Задания:



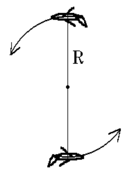
1) Велосипедист катится по выпуклой поверхности с радиусом R= 20 м со скоростью v = 10 м/с. Чему равен его вес в верхней точке поверхности, если масса велосипедиста m = 80 кг? Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: 400 Н.



2) На абсолютно гладкой горизонтальной поверхности лежит клин массы М = 2 кг с углом $\alpha = 45^0$. На клин положили тело массы m =1 кг. Трение отсутствует. Найти ускорение клина.

Ответ: 1,96 м/с^2.



3) Модель самолёта в аттракционе вращается с частотой $\nu = 30$ оборотов в минуту в вертикальной плоскости, совершая “мёртвую петлю“ с радиусом R = 5 м. Во сколько раз сила, прижимающая человека к сиденью самолёта в нижней точке, больше такой же силы в верхней точке?

Ответ: в 1,5 раза.

6.11. Применение законов динамики к движению деформируемой среды. Сила давления струи жидкости.

Задания:

1) За минуту из крана, находящегося на высоте h = 40 см над ванной, с начальной скоростью v_0 = 1 м/с вытекает 3 литра воды. С какой силой струя воды давит на дно ванной? Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $F_{давл} = 0{,}15$ Н.

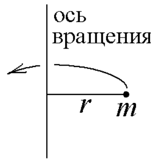
Занятие 13. Тема: Основы динамики вращательного движения

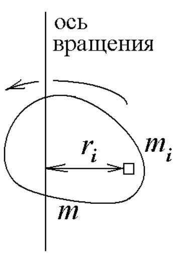
7. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

7.1. Момент инерции. Моменты инерции тел с симметрией вращения (диск, шар, обод колеса).

Масса m - это мера инерции при поступательном движении. При вращательном движении мерой инерции будет <u>момент инерции</u> I. Чем больше величина I, тем труднее раскрутить массивное тело или затормозить его вращение.

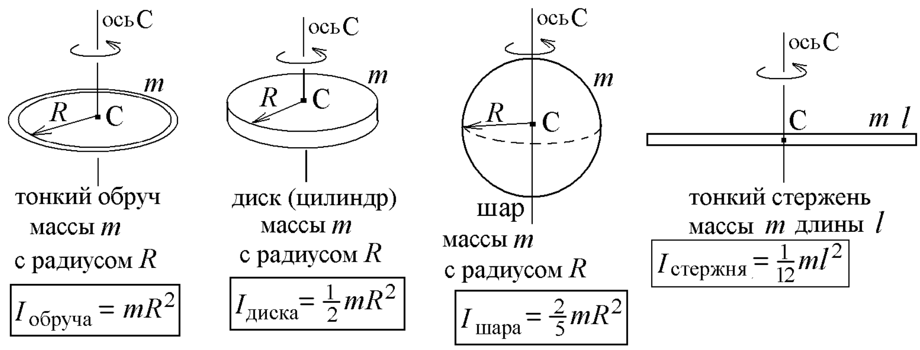
<u>Моментом инерции материальной точки</u> (частицы) называется произведение её массы m на квадрат расстояния r до оси вращения. Моменты инерции складываются так же, как и массы. Поэтому разбиваем протяженное вращающееся тело на **маленькие участки**, которые можно считать материальными точками с массами m_i.





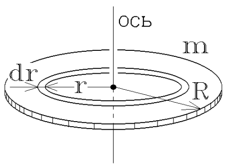
Момент инерции физического тела равен сумме произведений масс составляющих его материальных точек на квадраты расстояний до оси вращения $\boxed{I_{\text{физ тела}} = \sum_i m_i r_i^2}$.

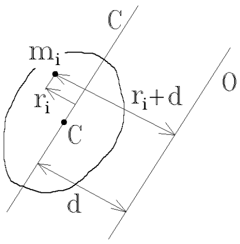
Проще всего определить моменты инерции симметричных тел, вращающихся вокруг оси симметрии, проходящей через их центр масс С:



Пример: вычислить момент инерции диска массы m и радиуса R относительно оси симметрии, проходящей через центр масс С.

Разобьём сплошной диск на бесконечно узкие кольца радиуса r с толщиной dr. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r \cdot dr$, а отношение его массы dm к массе всего диска равно отношению их площадей: $\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S_{\text{диска}}} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$, откуда $dm = m\frac{2rdr}{R^2}$. Выделенное кольцо имеет такой же момент инерции, что и тонкий обруч: все его материальные точки находятся на одинаковом расстоянии r от оси и момент инерции выделенного кольца $dI = dm \cdot r^2$. Сумма моментов инерции всех колец, составляющих диск, является интегралом $I = \int dI = \int\limits_0^R dm\, r^2 = \frac{2m}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4}$, откуда $I_{\text{диска}} = \frac{1}{2}mR^2$.



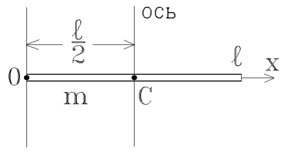


Если момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс, известен, то можно вычислить момент инерции относительно любой параллельной оси О, проходящей на расстоянии d от центра масс. Как видно из рисунка, расстояния произвольной частицы твердого тела m_i от обеих осей равны соответственно r_i и $r_i + d$. Поэтому

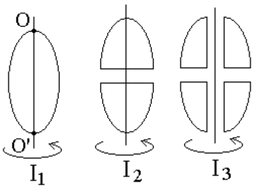
$I_0 = \sum\limits_i m_i(r_i + d)^2 = \sum\limits_i m_i r_i^2 + 2\sum\limits_i m_i r_i d + \sum\limits_i m_i d^2$. Второе слагаемое в полученном выражении обращается в нуль в силу того, что $d = \text{const}$ и $2\sum\limits_i m_i r_i d = 2d\sum\limits_i m_i r_i = 2mr_C = 0$ (r_C – расстояние от оси С до центра масс). Поэтому $\boxed{I_0 = I_C + md^2}$, - это соотношение называется <u>теоремой Штейнера</u>:

момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

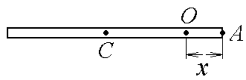
Пример: Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его край О равна $I_{0\ \text{стержня}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$.



Задания:

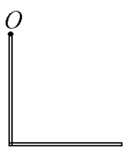


1) Три одинаковые детали сделаны в виде эллипса из плоского листа металла. Две детали разрезали: одну - пополам вдоль оси симметрии, а вторую - на четыре одинаковые части. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси ОО' (см. рис.). Выберите правильное соотношение между моментами инерции этих деталей относительно оси ОО': $I_1 < I_2 = I_3$? $I_1 < I_2 < I_3$? $I_1 = I_2 < I_3$? $I_1 > I_2 > I_3$?



2) Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы m = 1 кг и длиной l = 1 м проходят две параллельные оси. Одна проходит через конец стержня A, а другая через точку O, лежащую на расстоянии x = 0,2 м от точки A. Во сколько раз отличаются моменты инерции стержня I_A и I_O?

Ответ: в 1,92 раз.

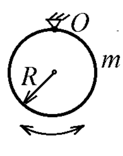


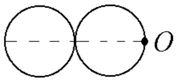
3) Два одинаковых однородных тонких стержня массой m = 1 кг и длиной l = 1 м каждый приварили концами перпендикулярно друг к другу. Через конец одного из стержней проходит ось O, перпендикулярная плоскости стержней. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O.

Ответ: 1,677 кг·м^2.

4) Диск с массой $m = 400$ г и с радиусом $R = 20$ см совершает колебания вокруг закрепленной оси О, проходящей через край диска. Найти момент инерции диска относительно этой оси.

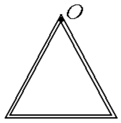
Ответ: 0,024 кг·м^2.





5) Два одинаковых диска массой m = 1 кг и радиусом R = 1 м каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через точку O (см. рисунок).

Ответ: 11 кг·м^2.

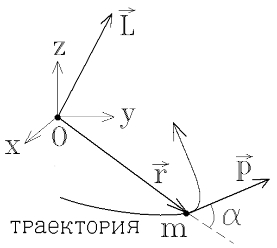


6) Деталь в виде равностороннего треугольника сварили из трех одинаковых однородных тонких стержней массы m = 1 кг и длины l = 1 м каждый. Найти момент инерции детали относительно оси O, проходящей через вершину треугольника перпендикулярно плоскости детали.

Ответ: 1,5 кг·м^2

7.2. Момент силы и его направление.

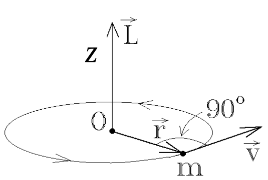
7.3. Момент импульса. Момент импульса движущейся материальной точки относительно выбранной оси и момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

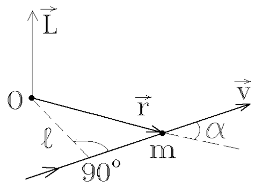


Пусть частица движется по некоторой траектории и в данный момент времени ее радиус-вектор равен $\vec{r}$, а импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Кроме импульса, существует еще одна векторная характеристика движения – момент импульса.

<u>Моментом импульса</u> частицы относительно точки О называется векторное произведение радиус-вектора на импульс частицы: $\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]}$, где радиус-вектор $\vec{r}$ проведен из точки О к частице. Векторное произведение в декартовых осях координат считается по формуле

$$\vec{L} = [\vec{r},\ \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}, \text{ или } \vec{L} = \vec{i}\underbrace{\left(yp_z - zp_y\right)}_{=L_x} + \vec{j}\underbrace{\left(zp_x - xp_z\right)}_{=L_y} + \vec{k}\underbrace{\left(xp_y - yp_x\right)}_{=L_z}.$$





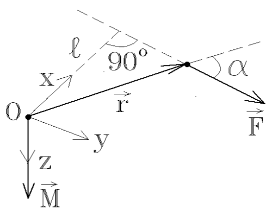
Момент импульса определен как для криволинейного, так и для прямолинейного движения: на правом рисунке показана частица, частица, движущаяся по прямой; для нее $L = mvr\sin\alpha = mvl$.; на левом рисунке частица вращается по окружности радиуса r со скоростью v или с угловой скоростью $\omega = v/r$ – для нее $L = pr\sin 90^o = mvr = mr^2\omega$.

Но $I = mr^2$ – момент инерции частицы при вращении вокруг оси z, проходящей через точку О. Поэтому $L_{\text{мат точки}} = I\omega$. Если вокруг оси вращается с угловой скоростью ω физическое тело, состоящее из множества материальных точек, то их моменты импульса (или моменты инерции) складываются:

Момент импульса частицы относительно закрепленной оси равен произведению ее момента инерции на угловую скорость вращения: $\boxed{L_z = I\omega}$.

Возьмем производную по времени от выражения для момента импульса частицы, как от произведения двух функций: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}[\vec{r},\ \vec{p}] = \left[\dfrac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{p}\right] + \left[\vec{r},\ \dfrac{d\vec{p}}{dt}\right] = \underbrace{[\vec{v},\ \vec{p}]}_{=0} + \left[\vec{r},\ \dfrac{d\vec{p}}{dt}\right]$. (первое слагаемое равно нулю, как векторное произведение параллельных векторов $\vec{v}$ и $\vec{p} = m\vec{v}$). А так как $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ в силу второго закона Ньютона, то $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}.}$

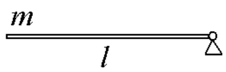
Вектор, равный векторному произведению радиус-вектора на силу, $\vec{M} = \left[\vec{r},\ \vec{F}\right]$ называется <u>моментом силы</u> (радиус-вектор $\vec{r}$ проведен из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$) Вектор момента силы $\vec{M}$ перпендикулярен к векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$ и вычисляется по правилу векторного произведения



$$\vec{M} = \left[\vec{r},\ \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \text{ или } \vec{F} = \vec{i}\underbrace{\left(yF_z - zF_y\right)}_{=M_x} + \vec{j}\underbrace{\left(zF_x - xF_z\right)}_{=M_y} + \vec{k}\underbrace{\left(xF_y - yF_x\right)}_{=M_z}.$$

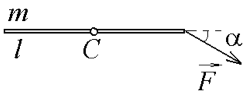
Но величина (модуль) момента силы, согласно определению векторного произведения, $\left|\vec{M}\right| == rF\sin\alpha$ или $\boxed{M = lF.}$ Кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $l = r\sin\alpha$ называется <u>плечом силы</u>. Величина момента силы равна произведению силы на плечо.

Задания:



1) Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l= 1 м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. В оси действует момент сил трения М$_{\text{тр}}$. = 1 Н·м. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без толчка. Найдите угловое ускорение в начальный момент времени. g = 10 м/с^2.

Ответ: 12 рад/с^2.



2) Тонкий однородный стержень массы m= 1 кг и длины l = 1 м может вращаться в горизонтальной плоскости без трения вокруг вертикальной оси C, проходящей через середину стержня. К концу стержня в плоскости вращения под углом α = 30° к стержню прикладывают силу F =1 Н. Чему равно угловое ускорение стержня в начальный момент времени.

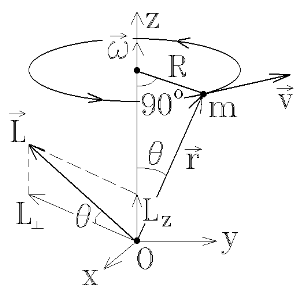
Ответ: 3 рад/с^2.

3) Маленький шарик поместили в точку с радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C$, где A = 1 м, B = 2 м, C = 3 м. В некоторый момент на шарик подействовали силой $\vec{F} = \vec{i} \cdot D + \vec{j} \cdot E + \vec{k} \cdot G$, где D = 3 Н, E = 4 Н, G = 5 Н. Найти проекцию момента силы относительно начала координат на ось z.

Ответ: –2 Н·м.

Занятие 14. *Тема*: Уравнение динамики вращательного движения и его применение к задачам механики

7.4. Основное уравнение динамики вращательного движения и его применение к решению задач механики.

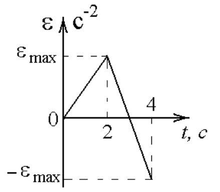


Пусть закрепленная ось вращения z проходит через точку О. Сила $\vec{F}$, приложенная к телу, может только вращать тело вокруг закрепленной оси. Из рисунка слева видно, что при вращении по кругу даже одной материальной точки m вектор её момента импульса $\vec{L}$, перпендикулярный к векторам $\vec{r}$ и $\vec{p}$, не направлен вдоль оси вращения z. Но уже получено, что $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}$ и поэтому $\boxed{\dfrac{dL_z}{dt} = M_z}$. При вращении вокруг закрепленной оси z любого физического тела с моментом инерции I это уравнение запишется как $\boxed{\dfrac{dL_z}{dt} = \dfrac{d(I\omega)}{dt} = I\varepsilon = \sum M_{внеш\ z}}$ и называется <u>основным уравнением динамики вращательного движения</u> (или 2-м законом Ньютона для вращательного движения). Сравните его с уравнением динамики поступательного движения $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{внеш}$.

Задания:

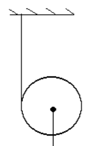
1) С какой целью на гоночных машинах-болидах, участвующих в гонках Формулы 1, мощный и тяжелый двигатель устанавливается посередине машины?

2) Некоторое тело вращается вокруг закрепленной оси без трения. Его момент импульса относительно оси вращения зависит от времени по закону $L = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4$, где τ =1 с, $A = 1\,\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. Спустя время t =1 с тело имеет угловое ускорение ε = 1 рад/с^2. Найти момент инерции тела. Ответ: 4 кг·м^2.



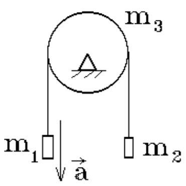
3) Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловым ускорением, зависимость от времени которого задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. Найти момент импульса тела в момент времени $t = 4$ с, если $\varepsilon_{\max} = 3$ с$^{-2}$. $I = 2$ кг·м^2

Ответ: 6 Н·м·с



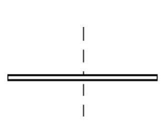
4) Нить, намотанная на цилиндр, прикреплена к потолку. Найти ускорение падения такого цилиндра под действием силы тяжести.

Ответ: a = 2g/3 = 6,54 м/с^2.



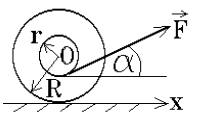
5) Невесомая нить перекинута через сплошной цилиндрический блок массы m, способный вращаться вокруг горизонтальной закреплённой оси симметрии. К концам нити привязаны грузы m_1 = 2m и m_2 = m; масса блока m_3 = m, а его радиус равен R. Найти величину момента сил трения в оси блока, если нить движется с ускорением a = g / 7.

Ответ: $M_{тр}$ = mgR / 2.



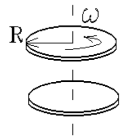
6) Найти угловую скорость, с которой начал вращаться вокруг вертикальной закреплённой оси тонкий стержень массы m = 200 г и длины l = 80 см, лежащий на горизонтальной плоскости. Ось проходит через середину стержня, и в оси вращения возникает постоянный момент сил трения $M_{тр}$= 0,15 Н·м. Повернувшись на угол $\varphi = 8$ рад, стержень останавливается.

Ответ: $\omega_0 = 15$ рад/с.



7) Катушку радиуса R, массы m, момент инерции которой относительно горизонтальной оси равен I, тянут за нить с силой F под углом α к горизонту. Радиус намотки нити r. Найти проекцию ускорения катушки на горизонтальную ось x. Катушка катится без проскальзывания.

Ответ: $a_x = \dfrac{FR^2}{I + mR^2}\left(\cos\alpha - \dfrac{r}{R}\right)$.



8[&]) На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный диск радиуса R. На него осторожно положили другой такой же диск, раскрученный до угловой скорости ω_0. Коэффициент трения между дисками равен μ. Через какой промежуток времени t диски начнут вращаться с одной и той же угловой скоростью?

Ответ: $t = 3R\omega_0/(8\mu g)$.

Занятие 15. *Тема*: Законы сохранения импульса и момента импульса и их использование в задачах механики

8. Законы сохранения
8.1. Роль законов сохранения в физике
8.2. Закон сохранения и изменения импульса.
8.3. Закон сохранения момента импульса.
8.4. Применение законов сохранения импульса и момента импульса в задачах механики. Столкновения тел.

Возникает вопрос: почему одни физические величины во всех протекающих процессах сохраняются, а другие – нет. Ответ в том, что законы сохранения имеют более глубокие причины, чем уравнения динамики (законы Ньютона). Каждому закону сохранения, каждой сохраняющейся величине соответствует какая-то симметрия, инвариантность в нашем мире. Так

--закон сохранения энергии следует из инвариантности времени: при одинаковых условиях все измерения, все процессы должны быть одинаковыми в любой момент времени;

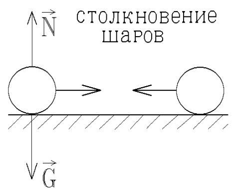
-- закон сохранения импульса следует из инвариантности пространства относительно сдвига: все уравнения физики на изменятся, если передвинуть начало системы отсчета (системы координат);

-- закон сохранения момента импульса следует из инвариантности пространства относительно поворота: все уравнения физики на изменятся, если повернуть систему отсчета (повернуть оси координат на любой угол).

Можно показать, что уравнения динамики (законы Ньютона) являются следствиями законов сохранения. Но используя законы сохранения можно решить задачи механики более просто, чем используя уравнения движения.

Уравнение движения (2-й закон Ньютона) можно записать и прочитать по-иному, если ввести еще одно понятие – импульс силы за время dt: это $\vec{F}\,dt$. Тогда, интегрируя по времени от t_1 до t_2, получаем: $\boxed{\vec{P}_2 - \vec{P}_1 \equiv \Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внеш}}\,dt}$, т.е.

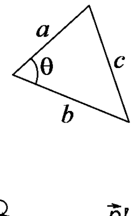
изменение (приращение) полного импульса системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу внешних сил за то же время.



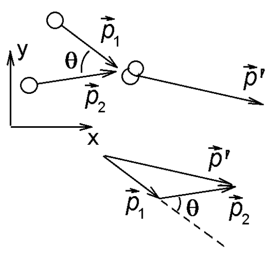
Если все внешние силы, действующие на систему, уравновешиваются, т.е. $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ то система называется замкнутой. Для нее $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$ или $\boxed{\vec{P} = \text{const}}$ – **полный импульс замкнутой системы сохраняется**. Это – закон сохранения импульса.

Если $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но $F_{\text{внеш}\ x} = 0$, то сохраняется только проекция импульса на соответствующую ось: $P_x = \text{const}$, что также широко используется в приложениях.

Часто $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но действие внешних сил длится столь малое время $\Delta t \to 0$, что импульс не успевает заметно измениться: $\Delta\vec{P} = \vec{F}_{\text{внеш}}\,\Delta t \to 0$. В этих случаях (**быстрое столкновение, взрыв** и т.п.) также можно применять закон сохранения импульса.



Заметим, что закон сохранения импульса имеет **векторный вид**: $\sum \vec{p}_{\text{начальн}} = \sum \vec{p}_{\text{конечн}}$. Векторы импульсов, как и векторы сил надо складывать по правилу параллелограмма. При этом не обязательно приравнивать проекции импульсов на оси координат. При сложении векторов удобно пользоваться теоремой косинусов: если известны две стороны a, b и угол между ними θ, то квадрат противоположной стороны $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$.



Пример: два пластилиновых шара имели импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, летели под углом θ, столкнулись и слиплись. Найти величину импульса после столкновения.

Решение 1 (проекции на оси координат)

$$\begin{cases} p_{1x} + p_{2x} = p'_x; \\ p_{1y} + p_{2y} = p'_y; \end{cases} \text{ и } p' = \sqrt{(p'_x)^2 + (p'_y)^2}.$$

Решение 2 (теорема косинусов)

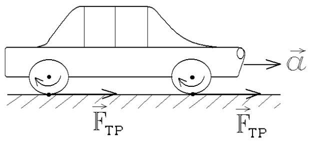
$$p' = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\pi - \theta)}.$$

Точно так же из уравнения динамики вращательного движения $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}}$ следует

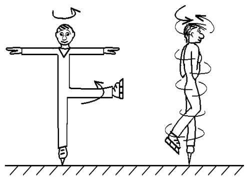
закон изменения момента импульса $\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 \equiv \Delta\vec{L} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_{\text{внеш}}\, dt}$ и <u>закон сохранения момента импульса</u>:

Момент импульса системы $\vec{L}$ сохраняется, если сумма моментов действующих на неё внешних сил равна нулю или же действие внешних сил длится столь малое время $\Delta t \to 0$, что момент импульса не успевает заметно измениться: $\Delta\vec{L} = \vec{M}_{\text{внеш}}\, \Delta t \to 0$ (**столкновение, взрыв** и т.п.).

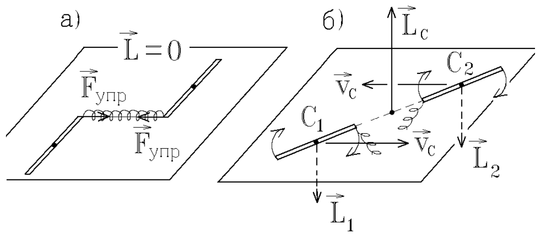
Задания:



1. По какой причине стоящий на месте автомобиль начинает двигаться с ускорением? Будут ли его ускорять силы трения, приложенные к колесам? Почему автомобиль останавливается при выключении двигателя, хотя колеса вращаются в ту же сторону и направление сил трения не меняется?



2) Почему изменяется угловая скорость вращения фигуриста, когда он вытягивает руки в сторону или прижимает руки к туловищу.



3) Два стержня соединены растянутой невесомой пружинкой и прижаты к гладкой горизонтальной поверхности (рис. а). Отпускаем стержни, и когда пружинка сожмется, пережигаем ее. Оба стержня будут вращаться по часовой стрелке (рис. б). Но силы упругости направлены вдоль одной линии, их суммарный момент равен нулю, и первоначально равный нулю момент импульса системы измениться не может. Изменится ли момент импульса системы после пережигания пружинки?

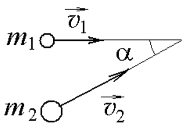
4) Частица движется в плоскости под действием силы, которая зависит от времени по закону $\vec{F}(t) = \vec{i} \cdot A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^9 + \vec{j} \cdot B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^7$,

где A, B – постоянные величины, $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найти модуль изменения импульса за интервал времени $0 < t < 1$ с, если $\tau = 1$ с. A = 2 Н, B = 3 Н.

Ответ: 0,425 кг*м/с.

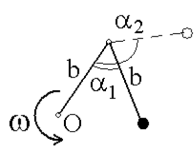
5) Два пластилиновых шарика с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 3$ м/с соответственно. Они сталкиваются и слипаются. Найти величину скорости слипшихся шариков после столкновения.

Ответ: 2,40 м/с

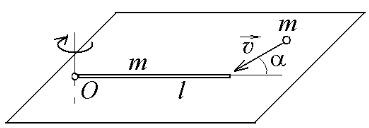


6) Два пластилиновых шарика с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г, двигавшихся под углом $\alpha = 60^{\circ}$ друг к другу со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 3$ м/с соответственно, столкнулись и слиплись. Найти величину скорости слипшихся шариков после столкновения.

Ответ: 2,91 м/с

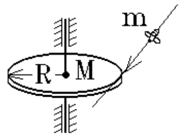


7) Два невесомых стержня длины b соединены под углом α_1 = 60° и вращаются без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси O с угловой скоростью ω = 6 рад/с. На конце одного из стержней прикреплен очень маленький массивный шарик. В некоторый момент угол между стержнями самопроизвольно увеличился до α_2 = 120°. С какой угловой скоростью стала вращаться такая система? Ответ: 2 рад/с.



8) На горизонтальной плоскости лежит в покое тонкий однородный стержень массы m =100 г и длины l = 1 м, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O. Под углом α =30° к стержню в той же плоскости движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m =100 г со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к концу стержня. Найти угловую скорость вращения ω системы после столкновения.

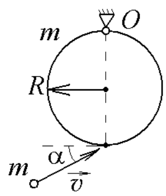
Ответ: 0,375 рад/с.



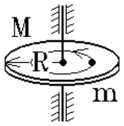
9) Пчела, летевшая со скоростью v = 1 м/с по касательной к ободу лёгкого горизонтального диска массы M = 4 г и радиуса R = 10 см, садится на обод диска. После этого диск начал вращаться с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с. Чему равна масса m пчелы?

Ответ: m = 2 г.

10) Тонкий однородный диск массы m = 1 кг и радиуса R = 1 м висит неподвижно и может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его край O. Под углом α =30° к горизонтали в плоскости вращения диска движется маленький пластилиновый шарик такой же массы m = 1 кг со скоростью v = 1 м/с. Шарик прилипает к нижней точке неподвижно висящего диска. Найти угловую скорость вращения, которую система приобретает после столкновения.

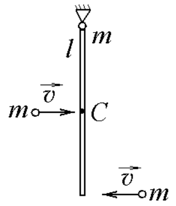


Ответ: 0,315 рад/с.



11) На расстоянии r = R /2 от оси покоящегося горизонтального диска массы M и радиуса R сидит жук массы m . С какой угловой скоростью начнёт вращаться диск, если жук поползёт по окружности радиуса r с постоянной скоростью v относительно диска? Трением в оси диска пренебречь.

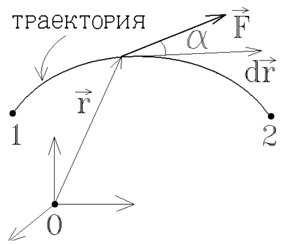
Ответ: $\omega = 2mv/(2MR + mR)$.



12) Тонкий однородный стержень массы m = 1 кг и длины l = 1 м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. С разных сторон на стержень горизонтально в той же плоскости налетают два одинаковых пластилиновых шарика той же массы m = 1 кг с одинаковыми скоростями v = 1 м/с. Первый шарик застревает в центре стержня, второй – в нижнем конце одновременно с первым. Найти величину угловой скорости вращения, которую система приобретает после столкновения. Ответ: 0,316 рад/с;

Занятие 16. *Тема*: Закон сохранения и изменения механической энергии

8.5. Работа силы и момента сил. Мощность.

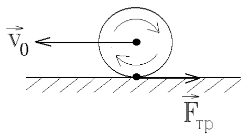


Обычно приходится иметь дело с силой, переменной как по величине, так и по направлению, и действующей на частицу, движущуюся по криволинейной траектории. Направление силы $\vec{F}$ составляет с траекторией угол α (вообще говоря, переменный). За время dt частица переместится на $d\vec{r}$ (рис.3.1), и сила совершит над ней работу, которая по определению равна скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения: $\boxed{dA = \vec{F}\,d\vec{r}.}$ Эту формулу можно записать и по-другому:

$dA = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = F\,dl\cos\alpha = F_l\,dl,$ где F_l - проекция силы на направление траектории, dl – бесконечно малый путь. Выражение для работы при конечном перемещении из точки 1 в точку 2 будет выражаться интегралом: $\boxed{A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}.}$ Если же на тело одновременно действуют несколько сил, то их суммарная работа равна **алгебраической** сумме работ каждой силы, или работе результирующей силы

$$A_{рез} = \int \vec{F}_{рез}\,d\vec{r} = \int \sum_i \vec{F}_i\,d\vec{r} = \sum_i A_i.$$

Знак работы каждой силы в этой сумме зависит от направления векторов $\vec{F}_i$ и $d\vec{r}_i$. Сила совершает положительную работу, когда она направлена "по движению" $(\alpha < \pi/2)$, и отрицательную – когда она направлена "против движения" ($\alpha > \pi/2$). Кроме того, надо учитывать, что $d\vec{r}$ – это **перемещение точки приложения силы**. Например, при качении цилиндра **без проскальзывания** на точку касания цилиндра с плоскостью действует сила трения, но скорость этой точки равна нулю, она не перемещается и поэтому **при качении без проскальзывания сила трения не совершает работу**.



Мощность силы равна работе, совершенной за единицу времени: $P = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ или

$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}}$. Работа измеряется в джоулях (1 Дж = 1 Ньютон·м); мощность измеряется в ваттах (1 Вт = 1 Дж/с).

При повороте тела вокруг неподвижной оси z работу совершает момент силы. При повороте на бесконечно малый угол $d\vec{\varphi}$ работа момента силы равна $\boxed{dA = \vec{M}\,d\vec{\varphi} = M_z d\varphi}$, а при повороте на конечный угол $\boxed{A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\,d\varphi}$. Соответственно, мощность развиваемая моментом силы $P = \dfrac{dA}{dt} = M_z\dfrac{d\varphi}{dt} = M_z\omega$.

Задания:

1) Небольшое тело начало движение из начала координат вдоль горизонтальной оси x под действием силы, направленной под углом α = 30° к оси x. Модуль силы меняется в зависимости от координаты x по закону $F = A\left(\dfrac{x}{b}\right)^3$, где A = 1 Н, b = 1 м . Найти работу этой силы на участке пути от $0 < x < b$.

Ответ: 0,217 Дж.

2) Найти работу, произведенную машиной за промежуток времени $0 < t < 1$ с, если мощность машины зависит от времени по закону $N = A\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^5$, где $\tau = 1$ с, A = 1 Вт.

Ответ: 0,167 Дж.

3) Массивный диск может вращаться вокруг закрепленной оси без трения. Найдите работу момента силы при повороте диска на угол φ_0, если момент сил, действующий на диск, зависит от угла поворота φ по закону $M = A\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2$,

где A = 1 $\text{Н}\cdot\text{м}$, $\varphi_0 = 1$ рад. Ответ: 0,333 Дж.

4[&]) Найти мощность двигателя вертолёта, неподвижно зависшего в воздухе. Масса вертолёта m = 4 т, радиус лопастей винта R = 8 м, плотность воздуха $\rho = 1{,}09$ кг/м^3.

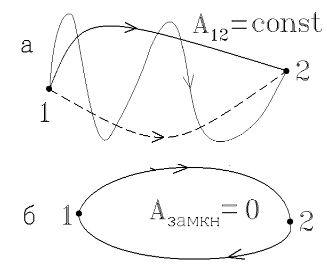
Ответ: $\text{P} = \sqrt{(\text{mg})^3/(\rho\pi\text{R}^2)}$ = 483 кВт.

8.6. Консервативные и неконсервативные силы.
8.7. Потенциальная и кинетическая энергия при поступательном и вращательном движении.

В результате действия силы изменяется скорость частицы. Запишем второй закон Ньютона $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum\vec{F}$ и умножим каждую его часть скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r}$. В итоге получим: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = md\vec{v}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v} =$ $= \sum\vec{F}d\vec{r} = d\,A.$ Но $\vec{v}d\vec{v} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\left(\dfrac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right) = d\left(\dfrac{v^2}{2}\right)$, и поэтому $d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = dA$.

Величину $\boxed{E_{\text{кин}} = \dfrac{mv^2}{2}}$ называют <u>кинетической энергией</u> частицы. **Работа всех сил, действующих на частицу, идет на изменение ее кинетической энергии**, т.е. $dE_{\text{кин}} = dA$ или $E_{\text{кин}\,2} - E_{\text{кин}1} = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = \int\limits_1^2 \sum\vec{F}d\vec{r}.$

Если массивное тело с моментом инерции I вращается вокруг закрепленной оси, то сумма кинетических энергий составляющих его материальных точек $\boxed{E_{\text{кин}} = \sum\limits_i \dfrac{m_i v_i^2}{2} = \sum\limits_i \dfrac{m_i\left(r_i\omega\right)^2}{2} = \dfrac{I\omega^2}{2}}$ Это – <u>кинетическая энергия вращательного движения</u>. Её изменение равно работе моментов сил, вращающих тело: $\boxed{\Delta E_{\text{кин вращ}} = \Delta\left(I\omega^2/2\right) = \int M_z d\varphi}$.



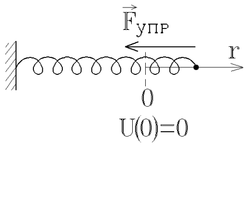
Определение: сила, **работа которой** не зависит от формы и длины пути (от траектории точки приложения силы), называется <u>консервативной силой</u>. Работа консервативной силы по любому замкнутому контуру (частица возвращается в исходную точку) равна нулю.

Работу консервативной силы можно представить, как изменение (убыль) некоторой скалярной функции $E_{\text{пот}}$, зависящей только от положения частицы (тела), которая называется <u>потенциальной энергией</u>:

$$\boxed{dA_{\text{конс}} = \vec{F}_{\text{конс}}d\vec{r} = -dE_{\text{пот}}} \quad \text{или} \quad \boxed{E_{\text{пот}1} - E_{\text{пот}2} = -\Delta E_{\text{пот}} = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\text{конс}}d\vec{r}.}$$

Это - определение потенциальной энергии. Консервативными будут:

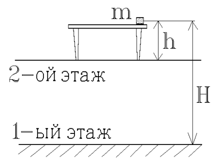
1) сила гравитационного притяжения $F_{\text{грав}} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, для которой потенциальная энергия притяжения двух тел с массами m_1 и m_2 равна $E_{\text{пот грав}}(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$;



2) сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\,\vec{r}$, для которой потенциальная энергия упругой деформации (растяжения пружины с жесткостью k на длину r) равна $E_{\text{пот упр}}(r) = \dfrac{k\,r^2}{2}$.

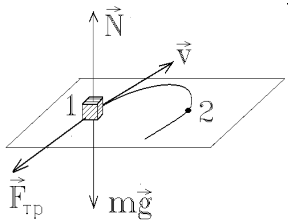
3) сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, для которой потенциальная энергия $E_{\text{пот}} = mgh$.

Заметим, что **потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной**. Так как известна только ее разность, то к выражению $E_{\text{пот}}$ можно добавить или вычесть любую постоянную величину.



Например, потенциальную энергию тела можно вычислять относительно уровня любого этажа здания, относительно уровня моря, относительно центра Земли и т.д.; величина ее при этом, конечно, будет разной, но работа консервативной силы тяжести при перемещении тела m во всех случаях будет одной и той же!

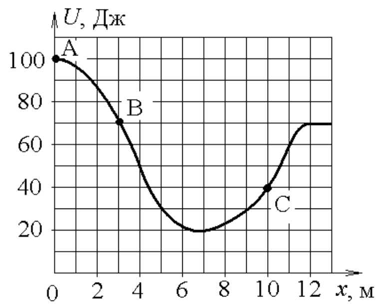
Поэтому в каждом конкретном случае договариваются о начале отсчета потенциальной энергии (в какой именно точке следует считать $E_{\text{пот}} = 0$ из соображений удобства).



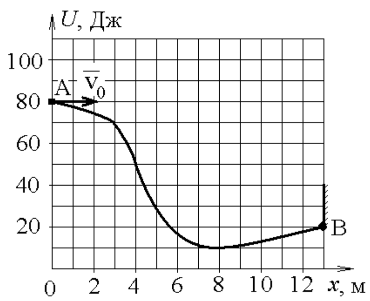
Неконсервативными называются силы, работа которых зависит от длины и формы пути. Отсюда следует, что на замкнутом пути работа неконсервативных сил не равна нулю, и с ними не связана потенциальная энергия.

Примерами неконсервативных сил являются: сила трения скольжения и силы вязкого трения. Так, из рисунка слева видно, что работа силы трения скольжения зависит не от перемещения тела, а от длины пути: $A_{\text{тр}} = -\mu N l$, и не равна нулю при возвращении тела в исходную точку.

Задания:

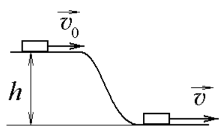


1) Небольшая шайба начинает движение без начальной скорости по гладкой ледяной горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии $U(x)$ шайбы от координаты x изображена на графике слева. Кинетическая энергия шайбы в точке С (укажите правильный ответ):
а) в 2 раза больше, чем в точке В
б) в 2 раза меньше, чем в точке В
в) в 1,75 раза больше, чем в точке В
г)в 1,75 раза меньше, чем в точке В



2) Тело массы m = 10 кг начинает движение со скоростью v_0 = 4 м/с по гладкой ледяной горке из точки А. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Зависимость потенциальной энергии этого тела от координаты x изображена на графике $U(x)$ справа. В точке В тело, ударившись, прилипает к стене. Сколько теплоты выделилось в результате неупругого удара?

Ответ: 140 Дж.

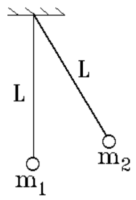


3) Шайба массы m = 1 кг, двигаясь со скоростью v_0 = 1 м/с, соскальзывает с горки высоты h = 1 м. Во время движения над шайбой была совершена работа сил трения $A_{\text{тр}}$ = 1 Дж, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Найти величину скорости шайбы v после соскальзывания с горки.

Ответ: 4,36 м/с.

4) Пластилиновые шары с массами m_1 = 20 г и m_2 = 30 г, летевшие со скоростями v_1 = 40 м/с и v_2 = 20 м/с во взаимно перпендикулярных направлениях, столкнулись и слиплись. Какое тепло выделилось при ударе?

Ответ: 12 Дж.



5) Шары с массами m_1 = m и m_2 = 2m подвешены на нитях одинаковой длины L. Больший отводят на угол $\alpha = 60^0$ и отпускают без начальной скорости. На какую высоту h поднимется меньший шар после центрального удара, если удар а) абсолютно упругий; б) абсолютно неупругий?

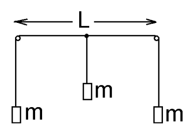
Ответ: а) h = 8L/9 ; б) h = 2L/9 .

6) Скользящий по льду шар налетает на покоившийся шар вдвое большей массы. Удар абсолютно упругий и нецентральный. Величины скоростей шаров после удара одинаковы. Под каким углом α шары разлетаются после удара?

Ответ: $\alpha = 120^0$.

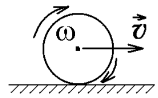
7) Летящая граната разорвалась на два осколка. Масса одного из них вдвое больше массы другого. Оба осколка летят под углом α = 60^0 к направлению движения гранаты до взрыва. Во сколько раз изменяется кинетическая энергия системы в момент взрыва?

Ответ: увеличивается в 4,5 раза.

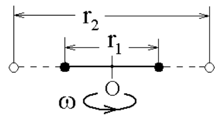


8) Невесомая нерастяжимая нить переброшена через гладкие опоры, находящиеся на одном горизонтальном уровне. Расстояние между опорами L = 3 м. К концам нити и к её средней точке между опорами прикреплены одинаковые грузы массой m = 1 кг каждый. В начальный момент времени система покоилась, как показано на рисунке, а затем её отпустили без начальной скорости, и система пришла в движение. Найти максимальное значение суммарной кинетической энергии всех трёх грузов в процессе этого движения.

Ответ: 4,02 Дж.



9) Цилиндр с массой $m = 0{,}1$ кг и с радиусом $R = 0{,}5$ м катится без проскальзывания и имеет в начальный момент времени кинетическую энергию 800 Дж. Момент сил трения совершил работу 200 Дж. Чему стала равна кинетическая энергия **вращательного** движения цилиндра, продолжающего катиться без проскальзывания? Ответ: 200 Дж.

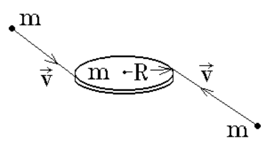


10) Два маленьких массивных шарика закреплены на невесомом длинном стержне на расстоянии r_1 друг от друга. Стержень может вращаться без трения в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей посередине между шариками. Стержень раскрутили из состояния покоя до угловой скорости ω, при этом была совершена работа A_1=1 Дж. Шарики раздвинули симметрично на расстояние $r_2 = 2r_1$ и раскрутили до той же угловой скорости. Какая работа при этом была совершена?

Ответ: 4 Дж.

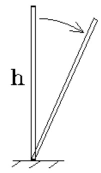
11) В центре горизонтального диска массы m_1 и радиуса R, вращающегося без трения вокруг закреплённой вертикальной оси симметрии с угловой скоростью ω_0, сидит жук массы m_2. Какое тепло выделится, если жук: а) переползёт на край диска, б) перепрыгнет на край диска?

Ответ: $Q = \dfrac{m_1 m_2 R^2 \omega_0^{\,2}}{2(m_1 + 2m_2)}$.



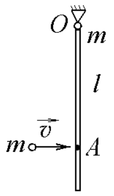
12) На абсолютно гладком льду покоится лёгкий диск радиуса R и массы m. Два маленьких кусочка пластилина той же массы m скользят по льду навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v по касательной к ободу диска и одновременно прилипают к нему. Во сколько раз при этом уменьшается кинетическая энергия всей системы?

Ответ: в 1,25 раза.



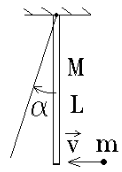
13) Подпиленный у основания тонкий вертикальный столб высоты h = 15 м падает на землю. Чему равна скорость верхней точки столба в момент удара о землю?

Ответ: 21 м/с.

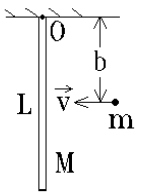


14) Тонкий однородный стальной стержень массы m = 1 кг и длины l = 1 м может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец O. Горизонтально в той же плоскости на стержень налетает стальной шарик той же массы m со скоростью v = 1 м/с и отскакивает со скоростью u = 0,5 м/с после абсолютно упругого удара. Найти угловую скорость вращения стержня после удара.

Ответ: 1,5 рад/с.



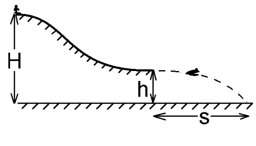
15) В нижний конец подвешенного к потолку неподвижно висящего тонкого стержня массы M и длины L врезается и застревает в нём пуля массы m, летевшая горизонтально со скоростью v. Считая, что m << << M, определить тепло Q, выделившееся при ударе и угол α, на который отклонится стержень с застрявшей в нём пулей. Ответ: $Q = \dfrac{mv^2}{2}\left(1 - \dfrac{3m}{M}\right)$; $\alpha = 2\arcsin\left(\dfrac{mv}{M}\sqrt{\dfrac{3}{2gL}}\right)$.



16) Тонкий массивный стержень длины L и массы M, подвешенный за один из концов, висит неподвижно. На каком расстоянии b от точки подвеса в него должна врезаться и застрять в нём пуля массы m, летевшая горизонтально со скоростью v, чтобы импульс системы при ударе сохранился (в точке подвеса не возникала горизонтальная сила реакции)? Принять m << M.

Варианты этой задачи: какой точкой лома надо бить плашмя по шестерёнке, насаживая её на ось, чтобы рука не чувствовала отдачи? Какой точкой сабли (мачете) надо рубить тростник? Какой точкой жерди надо бить по камню, чтобы с наибольшей лёгкостью переломить жердь?

Ответ: b = 2L / 3



17) Тело начинает скользить без начальной скорости с верхней точки трамплина, которая находится на высоте H = 60 м над поверхностью земли. В точке отрыва поверхность трамплина горизонтальна (см. рисунок). Трением при скольжении тела по трамплину и сопротивлением воздуха пренебречь. При некоторой высоте h точки отрыва горизонтальная длина s дальнейшего полёта тела будет максимальной. Найти величину этой максимальной длины s “прыжка”.

Ответ: s_{max} = 60 м

8.8. Плоское движение в механике.

8.9. Закон сохранения и изменения полной механической энергии и его использование в задачах механики.

Сумма кинетической и потенциальной энергий частицы или системы называется ее <u>полной механической энергией:</u>

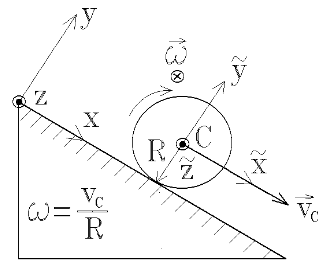
$$\boxed{E_{мех} = E_{кин} + E_{пот}}.$$

Полная механическая энергия системы сохраняется, $\boxed{E_{мех} = \mathrm{const}}$, если в ней действуют только консервативные силы.

Это – <u>закон сохранения полной механической энергии</u>. В этом случае потенциальная энергия превращается в кинетическую и наоборот $\Delta E_{кин} = -\Delta E_{пот}$.

Если в системе действует хотя бы одна неконсервативная сила, то полная механическая энергия не сохраняется. Её изменение равно работе неконсервативной силы: $\boxed{\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{неконс}} = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\text{неконс}} \cdot d\vec{r}}$. В этом случае механическая энергия переходит в другие виды энергии – химическую, тепловую и.т.п. Чаще всего (при действии сил трения) – это тепло Q . Работа неконсервативных сил трения равна изменению механической энергии и равна выделяющемуся теплу:

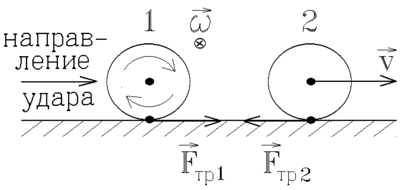
$$\boxed{A_{\text{трения}} = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\text{трения}} \cdot d\vec{r} = E_{\text{мех начальн}} - E_{\text{мех конечн}} = Q} .$$



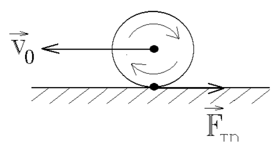
Движение твердого тела, при котором центр масс перемещается в фиксированной плоскости, а ось вращения тела, проходящая через его центр масс, остается перпендикулярной к этой плоскости, называется плоским движением. Типичный пример – качение симметричного тела. Это движение можно является сложением поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Поэтому плоское движение описывается упрощенной системой двух уравнений движения: $\begin{cases} m\vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внеш}} , \\ I\varepsilon = M_z . \end{cases}$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение, складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс: $\boxed{E_{\text{кин плоск}} = \frac{m\text{v}_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}}$.

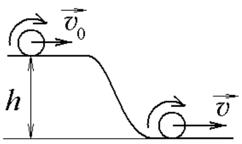
Пример: бильярдные шары не скользят, а катятся по сукну бильярдного стола без проскальзывания. При центральном столкновении покоившемуся шару "2" передается энергия только поступательного движения катившегося шара "1". Поэтому сразу после удара шар "2" начнет скользить, а шар "1" – вращаться на месте (пробуксовывать). Под действием сил трения и их моментов скорость $\vec{\text{v}}$ шара "2" начнет постепенно уменьшаться, а его вращение относительно центра – ускоряться. Для шара "1" – наоборот. В результате оба шара начнут катиться в направлении удара без проскальзывания. Без учета сил трения налетающий шар остановится, а покоившийся начнет скользить со скоростью налетающего шара.



Можно сильно раскрутить легкий шар или мяч так, как показано на правом рисунке, и бросить его на поверхность со скоростью $\vec{\text{v}}_0$. Мяч будет проскальзывать, постепенно остановится и начнет катиться в обратную сторону, возвращаясь к бросившему его человеку.

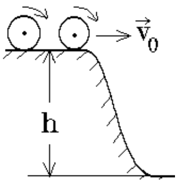


Задания:



1) Тонкий однородный диск массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с горки высоты h, совершая плоское движение. Начальная скорость центра масс диска равна v_0 . Найдите угловую скорость вращения диска после того, как он скатится с горки. Сопротивлением воздуха пренебречь. m = 3 кг, R = 4 м, v_0 = 5 м/с, h = 6 м, g = 10 м/с.

Ответ: 2,56 рад/с

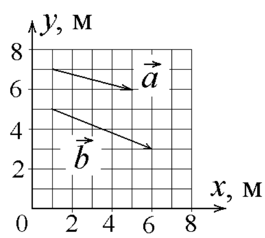


2) По горизонтальной поверхности катятся с одинаковыми скоростями v_0 = 1 м/с цилиндр и шар с одинаковыми массами и радиусами. Они скатываются без скольжения со склона высоты h = 21 см. Во сколько раз скорость шара после скатывания будет больше скорости цилиндра?

Ответ: $\frac{\text{v}_{\text{ш}}}{\text{v}_{\text{ц}}} = \sqrt{\left(\text{v}_0{}^2 + \frac{10}{7}\text{gh}\right)\Big/\left(\text{v}_0{}^2 + \frac{4}{3}\text{gh}\right)} = 1{,}026.$

Зачетное занятие. Итоговая контрольная работа

Пример варианта итоговой контрольной работы (зачетного задания):

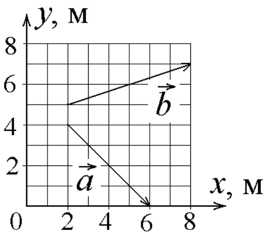


1-1. Найти модуль разности векторов $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, изображенных на рисунке справа. Ответ округлить до двух значащих цифр.

а) 3,6 б) 8 в) 8,1 г) 7,2 д) 1,4 е) 9,9 ж) нет правильного ответа

1-2. Найти косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенными на рисунке справа. Ответ округлить до двух значащих цифр.

а) 0,85 б) –0,87 в) 0,16 г) 0,65 д) 0,75 е) 0,99 ж) нет правильного ответа

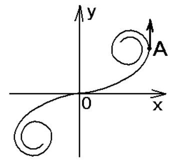


1-3. Найти модуль суммы векторов $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, изображенных на рисунке слева. Ответ округлить до двух значащих цифр.
а) 7,1 б) 11 в) 9,2 г) 10 д) 12 е) 5,7 ж) нет правильного ответа

1-4. Найти модуль векторного произведения $\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|$ для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке слева. Ответ округлить до двух значащих цифр.
а) 11 б) 32 в) 22 г) 31 д) 28 е) 18 ж) нет правильного ответа

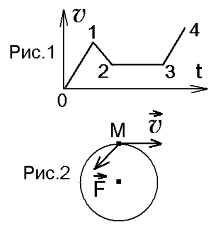
1-5. Найти значение производной от функции $f(x)=\sin(\cos x)+4x^5$ в точке с координатой $x=1$. Ответ – полученное Вами число, округленное до трех значащих цифр.

1-6. На рисунке изображена плоская кривая, называемая клотоидой (спиралью Корню). Точка A движется вдоль этой кривой в направлении, указанном стрелкой, с постоянной по величине скоростью. При этом величина её полного ускорения:



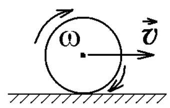
а) равна нулю б) постоянна и не равна нулю
в) увеличивается г) уменьшается

1-7. Величина (модуль) скорости материальной точки M, все время движущейся по окружности, меняется со временем по закону, показанному на рис.1. Какому участку этого графика соответствуют указанные на рис.2 направления скорости $\vec{v}$ и силы $\vec{F}$, действующей на точку M?
а) 0–1 б) 1–2 в) 2–3 г) 3–4

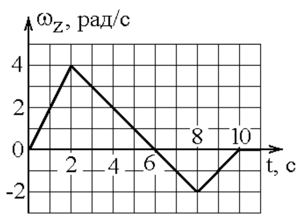


1-8. Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t)=2\pi\left(t^4-4t^3+6t^2-12t+24\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Величина тангенциального (касательного к траектории) ускорения частицы минимальна в момент времени (в секундах), равный:
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) нет правильного ответа

1-9. Тонкий обруч с массой $m=0{,}1$ кг и с радиусом $R=0{,}5$ м катится без проскальзывания и имеет в начальный момент времени кинетическую энергию 800 Дж. Момент сил трения совершил работу 200 Дж. Кинетическая энергия вращательного движения обруча, продолжающего катиться без проскальзывания, стала после этого равна:



а) 1000 Дж б) 600 Дж в) 300 Дж г) 500 Дж
д) нет правильного ответа



1-10. Твердое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. На какой угол относительно начального положения окажется повернутым тело через 8 секунд?
а) 8 рад б) 10 рад в) 12 рад г) 16 рад
д) нет правильного ответа

1-11. Частица движется так, что ее радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4+\vec{k}\cdot C$, где A, B, C – постоянные величины, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найдите тангенс угла, под которым будет направлена скорость v к оси x в момент времени $t=1$ с, если $\tau=1$ с. A = 2 м, B = 3 м, C = 4 м. Ответ – полученное Вами число.

1-12. Частица начала свое движение из начала координат, и ее скорость зависит от времени по закону $\mathrm{v}(t)=\left(\vec{i}\cdot A+\vec{j}\cdot B\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, где A, B – постоянные величины, $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Какой путь проделает частица за время $t=1$ с, если $\tau=1$ с, A = 2 м/с, B = 3 м/с. Ответ – полученное Вами в системе СИ число, округленное до трех значащих цифр.