МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Политехнический институт
Кафедра «Промышленная автоматика и робототехника»

Утверждено на заседании кафедры
«Промышленная автоматика
и робототехника»
«17» января 2023 г., протокол № 2

И.о. заведующего кафедрой
______________________________О.А. Ерзин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
«Надёжность технологических машин»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
15.03.02 Технологические машины и оборудование

с направленностью (профилем)
Информационно-измерительные и управляющие системы технологических машин

Формы обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 150302-01-23

Тула 2023 год

Разработчик:

Прейс В.В., профессор, д-р техн. наук, профессор ____________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Лабораторная работа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЁЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

1. Цель работы: приобретение навыков расчёта параметров распределения характеристик надёжности и их доверительных границ; приобретение навыков выравнивания эмпирических распределений.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить задание.
4. Выполнить расчёты.

Для получения зачёта по выполненной работе необходимо предъявить аккуратно оформленный отчёт, дать ответы на контрольные вопросы и на вопросы по выполненным расчётам.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы,
- цель работы,
- ответы на контрольные вопросы,
- задание, расчёты.

4. Теоретическая часть

4.1. Общие сведения

Отказ — событие, заключающееся в полной или частичной утрате технологической машиной работоспособности. Отказы делят на *отказы функционирования,* при которых выполнение своих функций рассматриваемым элементом или объектом прекращается (например, поломка зубьев шестерни), и *отказы параметрические,* при которых некоторые параметры технологической машины изменяются в недопустимых пределах (например, потеря точности).

Причины отказов делятся на случайные и систематические.

Случайные причины — это непредусмотренные перегрузки, дефекты материала и погрешности изготовления, не обнаруженные контролем, ошибки обслуживающего персонала или сбои системы управления.

Систематические причины — это закономерные явления, вызывающие постепенное накопление повреждений из-за влияния температуры, нагрузки, трения, функциональных воздействий (засорения, залипания, утечки) и т.д..

В соответствии с этими причинами и характером развития и проявления отказы делят на *внезапные* (поломки от перегрузок, заедания), *постепенные по развитию* и *внезапные по проявлению* (усталостные разрушения, короткие замыкания из-за старения изоляции), *постепенные* (износ, старение, коррозия, залипание).

Постепенные отказы представляют собой выходы параметров за границы допуска в процессе эксплуатации или хранения. Внезапные отказы из-за своей неожиданности более опасны, чем постепенные.

Внезапные отказы определяются случайными неблагоприятными сочетаниями нескольких факторов. Из-за этого рассеяние ресурсов (ресурс – наработка от начала эксплуатации или возобновления эксплуатации после ремонта до предельного состояния) по критерию усталости, оцениваемое отношением наибольшего ресурса к наименьшему, например, для подшипников достигает 40, для зубчатых передач 10. . .15.

Рассеяние ресурсов по износу также весьма значительно.

Причиной рассеяния ресурсов являются существенное рассеяние действующих нагрузок, рассеяние характеристик материалов и деталей, рассеяние зазоров и натягов, которые при изготовлении получаются как разности сопрягаемых размеров, и т.д.

Поэтому в расчетах надежности многие параметры технологических машин должны рассматриваться *случайными величинами*, т. е. такими, которые могут принять то или иное значение, неизвестное заранее. Они могут быть непрерывного или прерывного (дискретного) типа.

Для каждого числа $\boldsymbol{x}$ в диапазоне изменения случайной величины $\boldsymbol{X}$ существует определенная вероятность $\mathbf{P(X<x)}$, что $\mathbf{X}$ не превосходит $\mathbf{x}$. Эта зависимость $\mathbf{F\ (x)=P\ (X<x)}$ называется *функцией распределения* или *функцией вероятности случайной величины* $\mathbf{X}$.

Функция $\mathbf{F(x)}$ является неубывающей функцией $\mathbf{x}$ (монотонно возрастающей для непрерывных случайных величин и ступенчато возрастающей для дискретных). В пределах изменения величины $\mathbf{X}$ она изменяется от 0 до 1.

Производная от функции распределения по текущей переменной $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{dF(x)}}{\mathbf{dx}}$ называется *плотностью распределения.* Она характеризует частость повторений данного значения случайной величины.

В ряде случаев достаточно характеризовать распределение случайной величины некоторыми числовыми величинами:

- *математическим ожиданием* (средним значением), *модой* и *медианой,* характеризующими положение центров группирования случайных величин по числовой оси,
- *дисперсией, средним квадратическим отклонением, коэффициентом вариации,* характеризующими рассеяние случайной величины.

Математическое ожидание (среднее значение) $\mathbf{m_x}$ — основная и простейшая характеристика случайной величины $\mathbf{X}$.

Значение математического ожидания, определяемое по результатам наблюдений, как для дискретных, так и для непрерывных величин, называют *оценкой* математического ожидания или оценкой среднего значения $\mathbf{x}$:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{x_i} = \frac{1}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{g_i x_i}\ ,$$

где $\mathbf{N}$ — общее число наблюдений;

$\mathbf{x_i}$ — значение случайной величины;

$\mathbf{g_i}$ — число одинаковых значений $\mathbf{x_i}$.

Черта над обозначением случайной величины означает среднее значение. При достаточно большом числе наблюдений полагают, что $\mathbf{m_x} = \mathbf{\bar{x}}$.

В вероятностных задачах математическое ожидание определяют в зависимости от плотности распределения $\mathbf{f(x)}$ (для непрерывных величин) или вероятности $\mathbf{p_i}$ появления значения $\mathbf{x_i}$ (для дискретных величин):

$$\mathbf{m_x} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}, \qquad \mathbf{m_x} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{p_i} \cdot \mathbf{x_i}.$$

Дисперсия случайной величины — математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

Оценка дисперсии случайной величины — среднее значение квадрата разности между значениями случайной величины и ее средним значением, определяемое по результатам наблюдений, как для дискретных, так и для непрерывных величин:

$$\mathbf{D_x^*} = \frac{1}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} (\mathbf{x_i} - \mathbf{\bar{x}})^2.$$

Оценку математического ожидания и оценку дисперсии случайной величины удобно находить после построения её полигона распределения.

Полигон распределения – это график, показывающий связь значений случайной величины с частотами их появления.

В вероятностных задачах дисперсию определяют:

– для непрерывных случайных величин $\mathbf{D_x} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \mathbf{m_x})^2 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}$;

– для дискретных случайных величин $\mathbf{D_x} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} (\mathbf{x} - \mathbf{m_x})^2 \cdot \mathbf{p_i}$.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Так как удобнее пользоваться характеристикой рассеяния, имеющей ту же размерность, что и случайная величина, то введена характеристика — среднее квадратическое отклонение: $\mathbf{S_x} = \sqrt{\mathbf{D_x}}$. Для оценки рассеяния с помощью безразмерной (относительной) величины используют *коэффициент вариации:* $\mathbf{v_x} = \mathbf{S_x} / \mathbf{m_x}$.

Квантилью называют значение случайной величины, соответствующее заданной вероятности.

Квантиль, соответствующая вероятности 0,5, называется *медианой*. Площадь под графиком функции плотности распределения делится медианой пополам.

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение или, иначе, то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна.

Для симметричного модального (т. е. имеющего один максимум) распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают.

Постепенные отказы часто называют износовыми.

Для постепенных отказов нужны законы распределения времени безотказной работы, которые дают вначале низкую плотность распределения, затем максимум и далее падение, связанное с уменьшением числа работоспособных элементов.

В связи с многообразием причин и условий возникновения постепенных отказов для описания надежности применяют несколько законов распределений, которые устанавливают путем аппроксимации результатов испытаний или наблюдений в эксплуатации. Наиболее универсальным, удобным и широко применяемым для практических расчетов является *нормальное распределение*.

Распределение случайной величины подчиняется нормальному закону, если на её изменение оказывают влияние многие примерно равнозначные факторы.

Нормальному распределению подчиняется наработка до отказа многих восстанавливаемых и невосстанавливаемых изделий, размеры и ошибки измерений деталей и т. д.

Плотность нормального распределения времени наработки $\mathbf{t}$ имеет вид

$$\mathbf{f(t)} = \frac{1}{\mathbf{S}\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{t}-\mathbf{m_t})^2}{2\mathrm{S}^2}}.$$

Распределение имеет два независимых параметра: математическое ожидание $\mathbf{m_t}$ и среднее квадратическое отклонение $\mathbf{S}$. Значения параметров оценивают по результатам испытаний по формулам

$$\mathbf{m_t} \approx \bar{\mathbf{t}} = \frac{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{t_i}}{\mathbf{N}}, \qquad \mathbf{S} \approx \mathbf{s} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{N}}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}}(\mathbf{t_i} - \bar{\mathbf{t}})^2},$$

где $\bar{\mathbf{t}}$ и $\mathbf{s}$ - оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Сближение параметров и их оценок увеличивается с увеличением числа испытаний **N**.

Математическое ожидание определяет на графике положение петли, а среднее квадратическое отклонение - ширину петли.

Кривая плотности распределения тем острее и выше, чем меньше **S**. Она начинается от $\mathbf{t} = -\infty$ и распространяется до $\mathbf{t} = +\infty$.

Это не является существенным недостатком, особенно если $\mathbf{m_t} \geq \mathbf{3S}$, так как площадь, очерченная уходящими в бесконечность ветвями кривой плотности, выражающая соответствующую вероятность отказов, очень мала. Так, вероятность отказа за период времени до $\mathbf{m_t}$ **- 3S** составляет всего 0,135% и обычно не учитывается в расчетах. Вероятность отказа до $\mathbf{m_t}$ **- 2S** равна 2,175%.

Сравнивая изделия с одинаковой средней наработкой до отказа $\mathbf{m_t}$ и разным средним квадратическим отклонением **S**, нужно подчеркнуть, что хотя при больших **S** и имеются экземпляры с большой долговечностью, но чем меньше **S**, тем лучше изделия.

Операции с нормальным распределением проще, чем с другими, поэтому им часто заменяют другие распределения. При малых коэффициентах вариации

S/m$_t$ нормальное распределение хорошо заменяет биномиальное, пуассоново и логарифмически нормальное.

4.2. Методика определения параметров и закона распределения случайной величины

Работа выполняется в следующей последовательности:

– строят полигон распределения случайной величины;
– рассчитывают оценку математического ожидания и оценку дисперсии случайной величины;
– рассчитывают доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии случайной величины;
– рассчитывают теоретические частоты (плотность распределения) случайной величины;
– проверяют гипотезу о выбранном законе распределения случайной величины.

5. Контрольные вопросы

1. Что называется отказом?
2. Какие отказы называются отказами функционирования?
3. Какие отказы называются параметрическими отказами?
4. Назовите причины отказов.
5. Какие причины отказов называются случайными?
6. Какие причины отказов называются систематическими?
7. Как подразделяют отказы в соответствии с их причинами и характером развития и проявления?
8. Что представляют собой постепенные отказы?
9. Чем определяются внезапные отказы?
10. На что это влияет?
11. Перечислите причины рассеяния ресурсов?
12. Какие параметры технологических машин в расчетах надежности должны рассматриваться случайными величинами?
13. Что называется функцией распределения или функцией вероятности случайной величины **X?**
14. Что называется плотностью распределения?
15. Что характеризует плотностью распределения?
16. Какие числовые величины характеризуют положение центров группирования случайных величин по числовой оси?
17. Какие числовые величины характеризуют рассеяние случайной величины?
18. Что называется оценками математического ожидания и дисперсии случайной величины?
19. Что называется полигоном?
20. Для чего введена характеристика — среднее квадратическое отклонение?
21. Что называется квантилью?
22. Что называется медианой?
23. Что называется модой случайной величины?
24. Для какого распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают?

25. Что определяют на графике плотности нормального распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение?
26. Какое распределение используют при расчёте доверительных интервалов математического ожидания?
27. Какое распределение используют при расчёте доверительных интервалов дисперсии?
28. Какие критерии чаще всего используют для проверки гипотезы о законе распределения?
29. Какие уровни значимости установлены для того, чтобы принять или забраковать гипотезу о законе распределения при помощи этих критериев?

6. Задание

Вариант № …….

Исходные данные: длительности наработки **t** (в часах) до отказа узла технологической машины.

Определить: параметры и закон распределения наработки до отказа узла технологической машины.

Лабораторная работа

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

1. Цель работы: приобретение навыков применения метода корреляционного анализа для определения характеристик надёжности технологических машин.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить задание.
4. Выполнить расчёты.

Для получения зачёта по выполненной работе необходимо предъявить аккуратно оформленный отчёт, дать ответы на контрольные вопросы и на вопросы по выполненным расчётам.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы,
- цель работы,
- ответы на контрольные вопросы,
- задание,
- расчёты.

4. Теоретическая часть

4.1. Общие сведения

В связи с тем, что теория надежности оперирует со случайными величинами, в ней широко используют вероятностные стохастические зависимости вместо функциональных.

Две случайные величины являются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от значения, которое приняла другая. Например, предел выносливости материала детали и теоретический коэффициент концентрации напряжений в опасном сечении детали.

Величины являются *функционально зависимыми*, если при известном значении одной можно точно указать значение другой. Так связаны, например, напряжение и деформация в упругодеформируемых деталях.

Величины являются связанными *вероятностной (стохастической) зависимостью*, если известному значению одной величины соответствует не конкретное значение, а закон распределения другой.

Вероятностные зависимости имеют место, когда величины зависят не только от общих для них, но и от других разных случайных факторов.

Вероятностные зависимости характеризуют тенденции изменения одной случайной величины в зависимости от изменения другой. Они могут быть более или менее тесными в пределах отсутствия зависимости и функциональной зависимости (пример вероятностной связи – зависимость между массой и ростом человека).

В технике вероятностные связи распространены очень широко. Например, связи между характеристиками материалов и между параметрами отдельных узлов машины.

Изучение вероятностных зависимостей между случайными величинами — предмет корреляционного анализа (от лат. correlatio — соотношение).

Полная информация о вероятностной связи двух случайных величин представляется совместной плотностью распределения **f(x, y)** или условными плотностями распределения **f(x/y), f(y/x)**, т. е. плотностями распределения случайных величин **X** и **Y** при задании конкретных значений **y** и **x** соответственно.

Совместная плотность и условные плотности распределения связаны следующими соотношениями:

$$\mathbf{f(x,y) = f(y/x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy},$$

$$\mathbf{f(x,y) = f(x/y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx}.$$

Для независимых случайных величин совместная плотность распределения **f(x, y)** равна произведению плотностей распределения **X** и **Y**:

$$\mathbf{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}.$$

Основными характеристиками вероятностных зависимостей являются корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционный момент (или момент связи) двух случайных величин **X** и **Y** — это математическое ожидание произведения центрированных случайных величин:

для дискретных случайных величин

$$\mathbf{K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x) \cdot (y_j - m_y) \cdot p_{ij}},$$

для непрерывных случайных величин

$$\mathbf{K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) \cdot f(x,y) \cdot dx \cdot dy},$$

где $\mathbf{m_x}$ и $\mathbf{m_y}$ - математические ожидания величин **X** и **Y**,

$\mathbf{p_{ij}}$ - вероятность отдельных значений $\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{y_j}$.

Корреляционный момент одновременно характеризует связь между случайными величинами и их рассеяние. По своей размерности он соответствует дисперсии для независимой случайной величины.

Если случайные величины независимы, то корреляционный момент равен нулю, так как его можно представить как произведение центральных моментов величин **X** и **Y**, которые равны нулю.

Если хотя бы одна из случайных величин имеет малое рассеяние, то корреляционный момент мал даже при тесной зависимости между случайными величинами. Поэтому для выделения характеристики связи между случайными величинами переходят к коэффициенту корреляции

$$\rho = \mathbf{K}_{xy}\frac{1}{\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y},$$

где $\mathbf{S}_x$ и $\mathbf{S}_y$ - средние квадратические отклонения случайных величин.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты зависимости между случайными величинами и может изменяться в пределах $-1 \le \rho \le 1$.

Значения $\rho = 1$ и $\rho = -1$ свидетельствуют о функциональной зависимости, значение $\rho = 0$ свидетельствует о некоррелированности случайных величин. Для независимых случайных величин также $\rho = 0$.

Рассматривают корреляцию как между величинами, так и между событиями, а также множественную корреляцию, характеризующую связь между многими величинами и событиями.

При более подробном анализе вероятностной связи определяют условные математические ожидания случайных величин $\mathbf{m}_{y/x}$ и $\mathbf{m}_{x/y}$, т. е. математические ожидания случайных величин **Y** и **X** при заданных конкретных значениях **x** и **y** соответственно.

Зависимость условного математического ожидания $\mathbf{m}_{y/x}$ от **x** называют - регрессией **Y** по **X.** Зависимость $\mathbf{m}_{x/y}$ от **y** соответствует регрессии **X** по **Y**.

Для нормально распределенных величин **Y** и **X** уравнение регрессии **Y** по **X** имеет вид

$$\mathbf{m}_{y/x} = \mathbf{m}_y + \rho\frac{\mathbf{S}_y}{\mathbf{S}_x}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x),$$

для регрессии **X** по **Y**

$$\mathbf{m}_{x/y} = \mathbf{m}_x + \rho\frac{\mathbf{S}_x}{\mathbf{S}_y}(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y),$$

где ρ - коэффициент корреляции;

$\mathbf{m}_x$, $\mathbf{m}_y$ и $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$ - математические ожидания и средние квадратические отклонения случайных величин **X** и **Y** соответственно.

Важнейшей областью применения корреляционного анализа к задачам надежности является обработка и обобщение результатов эксплуатационных наблюдений.

Результаты наблюдения случайных величин **Y** и **X** представляют парными значениями $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{x}_i$ **i**-ого наблюдения, где $\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$; **n** - число наблюдений.

Оценку **r** коэффициента корреляции ρ определяют по формуле

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})\cdot(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})}{(\mathbf{n}-1)\cdot \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{s}_y},$$

где $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ - оценки математических ожиданий $\mathbf{m}_x$ и $\mathbf{m}_y$ соответственно, т. е. средние из **n** наблюдений значений

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum \mathbf{x_i}, \qquad \bar{\mathbf{y}}_\mathbf{i} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum \mathbf{y_i},$$

$\mathbf{s_x}$, $\mathbf{s_y}$ - оценки средних квадратических отклонений $\mathbf{S_x}$ и $\mathbf{S_y}$ соответственно:

$$\mathbf{s_x} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{n}-1}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i}-\bar{\mathbf{x}})^2}\,; \qquad \mathbf{s_y} = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{n}-1}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y_i}-\bar{\mathbf{y}})^2}\,.$$

Обозначив оценку условных математических ожиданий $\mathbf{m_{y/x}}$, $\mathbf{m_{x/y}}$ соответственно через $\tilde{\mathbf{y}}$ и $\tilde{\mathbf{x}}$, уравнения эмпирической регрессии $\mathbf{Y}$ по $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}$ по $\mathbf{Y}$ записывают в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\frac{\mathbf{s_y}}{\mathbf{s_x}}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}),$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{r}\frac{\mathbf{s_x}}{\mathbf{s_y}}(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}).$$

4.2. Методика корреляционного анализа

Корреляционный анализ между двумя случайными величинами состоит из этапов:

1. Сбор статистической информации о характеристиках надёжности.
2. Предварительная обработка статистической информации и составление корреляционной таблицы.
3. Расчёт коэффициента корреляции и корреляционного отношения.
4. Проверка гипотезы равенства коэффициента корреляции корреляционному отношению и вывод уравнения регрессии.
5. Анализ уравнения регрессии.

5. Контрольные вопросы

1. Две случайные величины являются независимыми, если …
2. Величины являются функционально зависимыми, если …
3. Величины являются связанными вероятностной (стохастической) зависимостью, если …
4. Вероятностные зависимости характеризуют ...
5. Изучение вероятностных зависимостей между случайными величинами –…
6. Полная информация о вероятностной связи двух случайных величин представляется совместной …
7. Совместная плотность и условные плотности распределения связаны следующими соотношениями: …
8. Для независимых случайных величин совместная плотность распределения …
9. Основными характеристиками вероятностных зависимостей являются …
10. Корреляционный момент (или момент связи) двух случайных величин **X** и **Y** — это математическое ожидание …
11. Корреляционный момент одновременно характеризует …
12. По своей размерности он соответствует …
13. Если случайные величины независимы, то корреляционный момент равен …
14. Если хотя бы одна из случайных величин имеет малое рассеяние, то корреляционный момент мал даже при тесной зависимости между случайными вели-

чинами. Поэтому для выделения характеристики связи между случайными величинами переходят …

15. Коэффициент корреляции характеризует … и может изменяться …
16. Значения ρ = 1 и ρ = -1 свидетельствуют о … , значение ρ = 0 свидетельствует о …….. . Для независимых случайных величин ….
17. Что называют условными математическими ожиданиями случайных величин?
18. Что называют регрессией **Y** по **X**?
19. Для нормально распределенных величин **Y** и **X** уравнение регрессии **Y** по **X** имеет вид …

6. Задание

Ресурс технологической машины, т.е. наработку от начала эксплуатации до её первого отказа, обозначим через **X**. После восстановления работоспособности наработку до второго отказа обозначим через **Y**.

X и **Y** являются случайными величинами.

Исследовать влияние **X** на **Y** методом корреляционного анализа.

Лабораторная работа

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

1. Цель работы: приобретение навыков применения метода регрессионного анализа для определения характеристик надёжности технологических машин.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить задание и выполнить расчёты.

Для получения зачёта по выполненной работе необходимо предъявить аккуратно оформленный отчёт, дать ответы на контрольные вопросы и на вопросы по выполненным расчётам.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы,
- цель работы,
- ответы на контрольные вопросы,
- задание,
- расчёты.

4. Теоретическая часть

4.1. Общие сведения

Основной характеристикой вероятностной связи между случайной величиной **Y** и неслучайной величиной **x** является регрессия, т. е. зависимость математического ожидания (среднего значения) $\mathbf{m_y}$ случайной величины **Y** от **x**. График этой зависимости называется *линией регрессии.* Регрессионный анализ - нахождение этой зависимости по экспериментальным точкам.

При анализе предполагают, что точно или приближенно соблюдаются следующие условия:

а) результаты измерений $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, ..., $\mathbf{y_n}$, где **n** — число измерений, представляют собой выборку объемом **n** из нормально распределенной генеральной совокупности значений случайной величины **Y**;

б) дисперсия случайной величины **Y** для любого значения независимой переменной **x** является постоянной;

в) независимая переменная имеет малую ошибку по сравнению с ошибками результатов наблюдений;

г) вид функциональной зависимости среднего значения случайной величины $\mathbf{m_y}$ от **x** предварительно известен на основе каких-либо теоретических или практических зависимостей или выбирают в виде полинома.

4.2. Оценка параметров линейной регрессионной зависимости по методу наименьших квадратов.

Линейная зависимость между величинами или их логарифмами является наиболее распространенной. Уравнение линии регрессии записывают в виде

$$\mathbf{m_y = \beta_o + \beta x}$$

где $\boldsymbol{\beta_o}$, $\boldsymbol{\beta}$ - параметры (коэффициенты) регрессии.

Оценкой линии регрессии является эмпирическая линия регрессии, уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{Y = b_0 + bx},$$

где $\mathbf{Y}$, $\mathbf{b_o}$, $\mathbf{b}$ - оценки величин $\mathbf{m_y}$, $\boldsymbol{\beta_o}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Коэффициенты регрессии $\mathbf{b_o}$ и, $\mathbf{b}$ находят *методом наименьших квадратов,* в основе которого положено требование минимизации квадратов отклонений реализаций (результатов измерений) случайной величины от линии регрессии:

$$\min\left\{\mathbf{u} = \sum(\mathbf{y_i} - \mathbf{Y})^2\right\},$$

или после подстановки $\mathbf{Y = b_0 + bx}$

$$\min\left\{\mathbf{u} = \sum(\mathbf{y_i} - \mathbf{b_o} - \mathbf{bx_i})^2\right\},$$

где $\mathbf{y_i}$ - реализация случайной величины в $\mathbf{i}$-ом опыте;

$\mathbf{x_i}$ - значение независимой переменной в $\mathbf{i}$-ом опыте;

$\mathbf{n}$ - число опытов.

Известно, что минимум некоторой функции соответствует равенству нулю частных производных по всем неизвестным:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{b_0}} = -2\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y_i} - \mathbf{b_0} - \mathbf{bx_i}) = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{b}} = -2\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y_i} - \mathbf{b_0} - \mathbf{bx_i}) \cdot \mathbf{x_i} = \mathbf{0}.$$

Раскрывая скобки, проводят суммирование и после несложных преобразований получают систему нормальных уравнений

$$\mathbf{nb_0} + \mathbf{b}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{y_i},$$

$$\mathbf{b_0}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i} + \mathbf{b}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i^2} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{y_i} \cdot \mathbf{x_i}.$$

Из решения системы получаем формулы для коэффициентов $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{n}\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i} \cdot \mathbf{y_i}) - \sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i} \cdot \sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{y_i}}{\mathbf{n}\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i^2} - \left(\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i}\right)^2},$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{\mathbf{n}}\left(\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{y_i} - \mathbf{b}\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}\mathbf{x_i}\right).$$

Нелинейная регрессия в простейшей форме описывается квадратическим уравнением

$$\mathbf{m_y = \beta_o + \beta_1 x + \beta_2 x^2}.$$

Соответственно уравнение эмпирической кривой регрессии имеет вид

$$\mathbf{Y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2}.$$

По аналогии с линейной регрессией методом наименьших квадратов составляются нормальные уравнения:

$$\mathbf{b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i},$$

$$\mathbf{b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i},$$

$$\mathbf{b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i}.$$

Решая систему нормальных уравнений, определяют коэффициенты регрессии $\mathbf{b_o}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$.

Такой регрессионный анализ применяют для обработки результатов пассивного эксперимента, т. е. эксперимента, в котором невозможно назначать и поддерживать на выбранном уровне значения неслучайной величины $\mathbf{x}$.

Более эффективным является активный эксперимент, позволяющий применять математическое планирование эксперимента и уменьшать время и число опытов.

5. Контрольные вопросы.

1. Что является основной характеристикой вероятностной связи между случайной величиной и неслучайной величиной?
2. Что называется регрессией?
3. Что называется регрессионным анализом?
4. Какие условия должны соблюдаться при регрессионном анализе?
5. Каким методом находят коэффициенты регрессии и что положено в основу этого метода?

6. Задание.

Методом линейного регрессионного анализа установить зависимость между числом циклов нагружений до разрушения **N** (наработка до отказа) и напряжениями $\boldsymbol{\sigma}$ изгиба в опасном сечении зуба зубчатого колеса.

Библиографический список

1. Острейковский, В. А. Теория надежности : учебник для вузов / В. А. Острейковский .— 2-е изд., испр. - Москва: Высш. шк., 2008 - 464 с. - ISBN 978-5-06-005954-0. — Текст: непосредственный.

2. Половко, А.М. Основы теории надежности: учеб.пособие для вузов / А.М. Половко, С.В. Гуров 2-е изд.,перераб.и доп. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006 - 704с.: ил. – ISBN 5-94157-541-6. — Текст: непосредственный.

3. Решетов, Д.Н. Надежность машин: учеб. пособие для вузов / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев ; под ред. Д.Н. Решетова. - Москва: Высш. шк., 1988 - 238 с.: ил. - ISBN 5-06-001200-X. — Текст: непосредственный.

4. Решетов, Д.Н. Детали машин: учебник для вузов / Д.Н. Решетов. – Москва: Машиностроение, 1989 – 496 с. – ISBN 5-217-00335-9. — Текст: непосредственный.

Содержание

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЁЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН……..3

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН………………………………………………...9

3. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН…………………………………………..14