МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Политехнический институт
Кафедра «Промышленная автоматика и робототехника»

Утверждено на заседании кафедры
«Промышленная автоматика
и робототехника»
«17» января 2023 г., протокол № 2

И.о. заведующего кафедрой
____________________________О.А. Ерзин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ)
ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
(МОДУЛЮ)
«Надёжность технологических машин»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
15.03.02 Технологические машины и оборудование

с направленностью (профилем)
Информационно-измерительные и управляющие системы технологических машин

Формы обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 150302-01-23

Тула 2023 год

Разработчик:

<u>Прейс В.В., профессор, д-р техн. наук, профессор</u> ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Практическое занятие №1

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН

1. Цель и задачи: закрепление основных понятий теории вероятностей и навыков непосредственного подсчёта вероятностей надёжности работы деталей и узлов технологических машин.

2. План выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, вычисления.

4. Теоретическая часть.

4.1. Основные понятия теории вероятностей. Непосредственный подсчёт вероятностей.

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A обозначается **P(** A***)*,** P или *p*.

Достоверным называется событие *U*, которое в результате опыта непременно должно произойти: вероятность **P**(U) = 1.

Невозможным называется событие *V*, которое в результате опыта не может произойти: вероятность такого события **P**(*V*) = 0.

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 < \mathbf{P}(A) < 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными,* если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными,* если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются *случаями* («шансами»).

Случай называется *благоприятным событию,* если появление этого случая влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

$$\mathbf{P(A)=\frac{m}{n}}$$

где $\mathbf{n}$ - общее число случаев;

$\mathbf{m}$ - число случаев, благоприятных событию *A*.

4.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и *B* называется событие *C,* состоящее в появлении хотя бы одного из событий *A* или *B*.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и *B* называется событие *C,* состоящее в совместном появлении события *A* и события *B*.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$.

В случае, когда события *A и B* совместны, вероятность их суммы выражается формулой $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$,

где $\mathbf{AB}$ — произведение событий $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\mathbf{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

В случае, когда события A_i совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$\mathbf{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i} P(A_i)-\sum_{i,j} P(A_iA_j)+}$$
$$\mathbf{+\sum_{i,j,k} P(A_iA_jA_k)-...+(-1)^{n-1}P(A_iA_2A_3...A_n)}$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов i, j, ..., k, взятых по одному, по два, по три и т. д.

Если события $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице: $\mathbf{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1}$.

Событие $\mathbf{\overline{A}}$ называется *противоположным* событию **A**, если оно состоит в непоявлении события **A**.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathbf{P(A)+P(\overline{A})=1}.$$

Условной вероятностью события А *при наличии* В называется вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло. Эта вероятность обозначается $\mathbf{P}(A \mid B)$.

События A и B называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A); \quad \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B).$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)$$

или

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Для независимых событий A и B

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий

$$\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\ldots\mathbf{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

В случае, когда события независимы, т.е. появление любого числа из них не меняет вероятностей появления остальных,

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbf{A}_i)$$

4.3. Формула полной вероятности и формула Бейеса

Если об обстановке опыта можно сделать $\mathbf{n}$ исключающих друг друга предположений (гипотез) $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}, \ldots, \mathbf{H_n}$, и если событие **A** может появиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события **A** вычисляется по *формуле полной вероятности*:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{H_1})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_1}) + \mathbf{P}(\mathbf{H_2})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_2}) + \ldots\mathbf{P}(\mathbf{H_n})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_n}),$$

или

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbf{H_i})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_i})$$

где $\mathbf{P(H_i)}$ — вероятность гипотезы $\mathbf{H_i}$,

$\mathbf{P(A|\ H_i)}$ — условная вероятность события **A** при этой гипотезе.

Если до опыта вероятности гипотез были $\mathbf{P(H_1)}, \mathbf{P(H_2)}, \ldots, \mathbf{P(H}_n\mathbf{)}$, а в результате опыта появилось событие **A**, то с учетом этого события «новые», т.е. условные, вероятности гипотез вычисляются по *формуле Бейеса:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{H_i}|\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{H_i})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_i})}{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbf{H_i})\mathbf{P}(\mathbf{A}|\mathbf{H_i})}, \quad \mathbf{i = 1, 2, \ldots, n}.$$

Формула Бейеса дает возможность «пересмотреть» вероятности гипотез с учетом наблюденного результата опыта.

4.4. Повторение опытов

Опыты называются *независимыми,* если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-то события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Частная теорема о повторении опытов.

Если производится **n** независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью **p** появляется событие **A**, то вероятность $\mathbf{P_{m,n}}$ того, что событие **A** произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой

$$\mathbf{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}}, \quad \mathbf{m = 0,1,...,n}$$

где $\mathbf{q = 1 - p}$.

Формула выражает *биномиальное распределение вероятностей.*

Вероятность хотя бы одного появления события **A** при **n** независимых опытах в одинаковых условиях равна

$$\mathbf{R_{1,n} = 1 - q^n}.$$

Из *общей* теоремы о повторении опытов следует: вероятность хотя бы одного появления события **A** при **n** независимых опытах в различных условиях равна

$$\mathbf{R_{1,n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i},$$

где $\mathbf{q_i = 1 - p_i}$, $\mathbf{p_i}$ - вероятность события **A** в **i**-м опыте (**i** = 1, 2,..., **n**),

Для любых условий (как одинаковых, так и различных)

$$\mathbf{\sum_{m=1}^{n} P_{m,n} = 1}.$$

Вероятность $\mathbf{R_{k,n}}$ того, что при **n** опытах событие **A** появится не менее **k** раз, выражается формулой

$$\mathbf{\sum_{m=0}^{n} P_{m,n} = 1}.$$

$$\mathbf{R_{k,n} = \sum_{m=k}^{n} P_{m,n}} \quad \text{или} \quad \mathbf{R_{k,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,n}}$$

4.5. Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной (прерывной) случайной величиной называется случайная величина, принимающая отделенные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Непрерывной случайной величиной (в широком смысле слова) называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь разные формы.

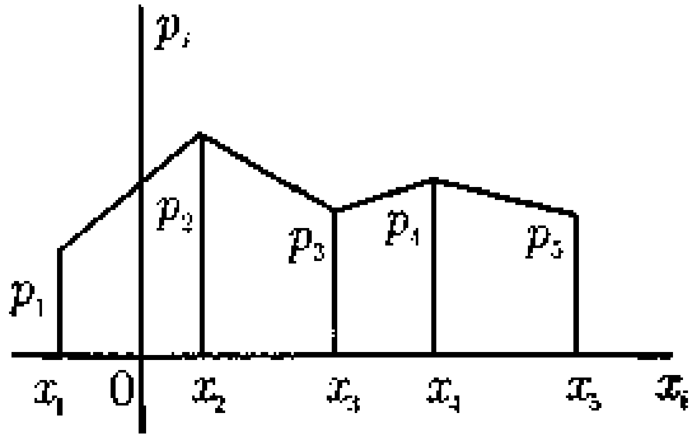
Ряд распределения

Рядом распределения дискретной случайной величины *X* называется таблица, где перечислены возможные (различные) значения этой случайной величины $x_1, x_2,..., x_n$ с соответствующими им вероятностями:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

где $\mathbf{p_i = P(X = x_i)}$, $\quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i = 1}$.

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения:*



Функция распределения

Функцией распределения случайной величины **X** называется функция **F(x),** выражающая вероятность того, что **X** примет значение, меньшее чем **x**:

$$\mathbf{F(x) = P(X < x)}.$$

Функция **F(x)** есть неубывающая функция: **F(-∞) = 0, F(+∞) = 1**.

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева.

Если функция распределения F(x) везде непрерывна и имеет производную, случайная величина называется непрерывной.

Если функция распределения F (x) на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы, случайная величина называется смешанной.

Плотность распределения

Плотностью распределения непрерывной случайной величины называется функция f(x) = F'(x).

Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна, f(x) > 0, и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{1}.$$

График плотности f(x) называется кривой распределения.

Элементом вероятности для случайной величины **X** называется величина f**(x)** · **dx**, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок **dx**, примыкающий к точке **x.**

Функция распределения **F(x)** выражается через плотность распределения формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

Вероятность попадания случайной величины *X* на участок от α до β (включая α) выражается формулой

$$\mathbf{P}(\alpha \le \mathbf{X} < \beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha).$$

Если случайная величина x непрерывна, то **P**$(X = \alpha) = 0$ и

$$\mathbf{P}(\alpha < \mathbf{X} < \beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha).$$

Вероятность попадания на участок от α до β для непрерывной случайной величины выражается формулой

$$\mathbf{P}(\alpha < \mathbf{X} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$\mathbf{M}[\mathbf{X}] = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i p_i}$ - для дискретных случайных величин;

$\mathbf{M}[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ - для непрерывных случайных величин.

Математическое ожидание обозначают: $\mathbf{M}[\mathbf{X}] = \mathbf{m_x}$.

Дисперсия случайной величины *X* вычисляется по формулам:

$\mathbf{D}[\mathbf{X}] = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} (\mathbf{x_i} - \mathbf{m_x})^2 \mathbf{p_i}$ - для дискретной случайной величины;

$\mathbf{D}[\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \mathbf{m_x})^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ - для непрерывной случайной величины.

Дисперсия **D** [X] кратко обозначается D_x.

Средним квадратическим отклонением случайной величины *X* называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_{\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{D_x}}.$$

Дискретная случайная величина *X* называется *распределенной по биномиальному закону,* если ее возможные значения 0,1,..., **n,** а вероятность того, что **X** =**m**, выражается формулой

$$\mathbf{P(X=m)=P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}},$$
$$\mathbf{0<p<1;\quad q=1-p}.$$

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, равно $\mathbf{m_x = np}$, а дисперсия $\mathbf{D_x = npq}$.

Дискретная случайная величина *X* называется *распределенной по закону Пуассона,* если ее возможные значения 0, 1, 2,..., **m**, ..., а вероятность того, что **X= m**, выражается формулой

$$\mathbf{P(X=m)=P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a}},$$

где **a** > 0 — параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона: $m_x = a$; $D_x = a$.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Плотностью (интенсивностью) потока называется среднее число событий в единицу времени.

Поток событий называется *потоком без последействия,* если вероятность появления на любом участке времени того или иного числа событий не зависит от того, какое число событий попало на другие, не пересекающиеся с данным участки.

Поток событий называется *ординарным,* если вероятность появления на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Ординарный поток событий без последействия наз. *пуассоновским.*

Если события образуют пуассоновский поток, то число событий, попадающих на любой участок $(\mathbf{t_o}, \mathbf{t_o}+\boldsymbol{\tau})$, распределено по закону Пуассона:

$$\mathbf{P(X=m)=P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a}}$$

где **a** — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$\mathbf{a}=\int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t_0}+\tau}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t})\mathbf{dt},$$

где $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{t})$ - плотность потока.

Если $\lambda(t)$ = const, пуассоновский поток называется «стационарным пуассоновским» или *простейшим* потоком.

Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок длины $\boldsymbol{\tau}$, распределено по закону Пуассона с параметром a = $\boldsymbol{\lambda\tau}$.

Расстояние **T** между двумя соседними событиями в простейшем потоке есть непрерывная случайная величина, распределенная по показательному закону, с плотностью

$$\mathbf{f(t)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \textbf{при} \quad \mathbf{t<0}\\ \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{t}} & \textbf{при} \quad \mathbf{t>0}.\end{cases}$$

Для случайной величины **T**, распределенной по показательному закону:

$$\mathbf{m_t = \frac{1}{\lambda}, \ D_t = \frac{1}{\lambda^2}.}$$

Непрерывная случайная величина X называется *равномерно распределенной* в интервале (α , β), если её плотность распределения в этом интервале постоянна:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\beta - \alpha} & \textbf{при} \quad \mathbf{x} \in (\alpha, \beta) \\ \mathbf{0} & \textbf{при} \quad \mathbf{x} \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

где запись $\mathbf{x} \in (\alpha, \beta)$ означает: «х лежит на участке от α до β».

Математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины равны

$$\mathbf{m_x} = \frac{\alpha + \beta}{\mathbf{2}}; \ \mathbf{D_x} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{\mathbf{12}}.$$

Непрерывная случайная величина **X** называется *распределенной по нормальному закону,* если ее плотность распределения равна

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}.$$

Математическое ожидание этой случайной величины равно $m_x = m$, а дисперсия $D_x = \sigma^2$.

4.6. Числовые характеристики функций случайных величин

Если *X* — дискретная случайная величина с рядом распределения

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

а величина **Y** связана с **X** функциональной зависимостью $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$, то математическое ожидание величины **Y** равно

$$\mathbf{m_y = M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i},$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$\mathbf{D_y = D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_y]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2}.$$

Если **X** — непрерывная случайная величина с плотностью распределения **f(x)**, а $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{X})$, то математическое ожидание величины **Y** равно

$$\mathbf{m_y = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i) f(x) dx},$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$\mathbf{D_y = D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_i) - m_y]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_i)]^2 f(x) dx - m_y^2}$$

Теорема сложения математических ожиданий

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}]=\mathbf{M}[\mathbf{X}]+\mathbf{M}[\mathbf{Y}];$$

и вообще

$$\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}[\mathbf{X}_i].$$

Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин

$$\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{b}$$

где a_i и b — не случайные коэффициенты,
равно той же линейной функции от их математических ожиданий:

$$\mathbf{m}_y=\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{b}\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{m}_{x_i}+\mathbf{b},$$

$$\mathbf{m}_{x_i}=\mathbf{M}[\mathbf{X}_i],\qquad \mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{n}.$$

Теорема умножения математических ожиданий

Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ равно произведению их математических ожиданий

$$\mathbf{M}[\mathbf{XY}]=\mathbf{M}[\mathbf{X}]\mathbf{M}[\mathbf{Y}].$$

Если $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ — независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий

$$\mathbf{M}\left[\prod_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\right]=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{M}[\mathbf{X}_i].$$

Теорема сложения дисперсий

Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ равна сумме их дисперсий

$$\mathbf{D}[\mathbf{X}+\mathbf{Y}]=\mathbf{D}[\mathbf{X}]+\mathbf{D}[\mathbf{Y}],$$

и вообще, для некоррелированных случайных величин $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$

$$\mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}[\mathbf{X}_i].$$

Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

$$\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}$ — не случайные величины,
в случае, когда величины X_1, X_2, ..., X_n не коррелированны, равна

$$\mathbf{D_y = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]}.$$

Функция нескольких случайных аргументов $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n})$ называется «почти линейной», если во всем диапазоне практически возможных значений аргументов она может быть с достаточной для практики точностью линеаризована (приближенно заменена линейной). Это означает, что

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n}) \approx \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}}) + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dx_i}}\right)_{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{X_i - m_{x_i}}),$$

где $\left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dx_i}}\right) = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}})}{\mathbf{dx_i}}$ - частная производная функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n})$ по аргументу $\mathbf{x_i}$, в которую вместо каждого аргумента подставлено его математическое ожидание.

Математическое ожидание почти линейной функции $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n})$ приближенно вычисляется по формуле

$$\mathbf{m_y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}})$$

Дисперсия почти линейной функции в случае, когда случайные аргументы $X_1, X_2, ..., X_n$ не коррелированны, приближенно вычисляется по формуле

$$\mathbf{D_y} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{dx_i}}\right)^2 \mathbf{D_{x_1}},$$

где $\mathbf{D_{x_i}}$ — дисперсия случайной величины X_i,.

4.7. Законы распределения функций случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей.

Если $\mathbf{X}$ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\mathbf{f(x)}$, а случайная величина $\mathbf{Y}$ связана с нею функциональной зависимостью

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента $\mathbf{X}$,
то плотность распределения случайной величины $\mathbf{Y}$ выражается формулой

$$\mathbf{g(y) = f(\boldsymbol{\psi}(y)) \cdot |\boldsymbol{\psi}'(y)|},$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — функция, обратная по отношению к $\boldsymbol{\varphi}$.

Плотность распределения суммы двух случайных величин $\mathbf{Z = X + Y}$ выражается любой из формул

$$\mathbf{g(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x, z - x)dx}, \qquad \mathbf{g(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(z - y, y)dx}$$

где $\mathbf{f(x, y)}$ — плотность распределения системы $\mathbf{(X, Y)}$.

В частности, когда случайные величины $\mathbf{X, Y}$ независимы, т.е.

$$\mathbf{f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)},$$

то плотность равна

$$\mathbf{g(z)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f_1(x) \cdot f_2(z-x)dx}$$

или

$$\mathbf{g(z)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f_1(z-y) \cdot f_2(y)dy}.$$

В этом случае закон распределения суммы $\mathbf{g(x)}$ называется *композицией* законов распределения слагаемых $\mathbf{f_1(x), f_2(y)}$.

Если случайные величины, подчиненные нормальному закону, подвергать любому линейному преобразованию, то будут получаться снова случайные величины, распределенные нормально.

В частности, если случайная величина **X** распределена нормально с параметрами $\mathbf{m_x}$, $\mathbf{a_x}$ то случайная величина

$$\mathbf{Y = aX + b}$$

где **a**, **b** — неслучайны,

распределена нормально с параметрами $\mathbf{m_y = am_x + b}$; $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{y} = |\mathbf{a}|\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{x}$.

При композиции двух нормальных законов: $\mathbf{f_1(x)}$ с параметрами $\mathbf{m_x}$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{x}$ и $\mathbf{f_2(y)}$ с параметрами $\mathbf{m_y}$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{y}$ получается нормальный закон с параметрами

$$\mathbf{m_z = m_x + m_y}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{x}^2 + \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{y}^2}.$$

Линейная функция от нескольких независимых нормально распределенных случайных величин $\mathbf{X_1, X_2, ..., X_n}$

$$\mathbf{Z} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i X_i + b},$$

где $\mathbf{a_i}$, b — неслучайные коэффициенты,

также имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$\mathbf{m_z} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i m_{x_i} + b}; \qquad \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{z} = \sqrt{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i^2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x_i}}^\mathbf{2}},$$

где $\mathbf{m_{xi}}$, $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{xi}$ — параметры случайной величины $\mathbf{X_i}$, (**i** =1, ..., n).

5. Контрольные вопросы.

1. Что называется случайным событием?
2. Что называется вероятностью события?
3. Дайте определение достоверного события.
4. Дайте определение невозможного события.
5. Что называется полной группой событий?
7. Какие события называются несовместными?
8. Какие события называются равновозможными?
9. Что называется суммой нескольких событий?
10. Что называется произведением нескольких событий?
11. Какие опыты называются независимыми?
12. Какая величина называется случайной?
13. Что называется законом распределения случайной величины?

14. Что называется функцией распределения случайной величины?
15. Что называется плотностью распределения непрерывной случайной величины?
16. Каким свойством обладает плотность распределения?
17. Что называется математическим ожиданием случайной величины?
18. Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины?
19. Какая непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону?
20. Чему равно математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины распределенной по нормальному закону?
21. Сформулируйте теорему сложения математических ожиданий.
22. Сформулируйте теорему умножения математических ожиданий.
23. Сформулируйте теорему сложения дисперсий.
24. Если случайные величины, подчиненные нормальному закону, подвергать любому линейному преобразованию, то будут получаться снова случайные величины, распределенные ………………(продолжите).

6. Задания.

1. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора; ненормальный — в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном — 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t

2. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого.

Найти вероятность того, что за время t :

а) откажет хотя бы один узел;
б) откажет ровно один узел;
в) откажут ровно два узла;
г) откажет не менее двух узлов.

Практическое занятие №2
ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАДЁЖНОСТИ

1. Цель занятия: изучение способов планирования экспериментов, приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. План выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, расчёты.

4. Теоретическая часть.

Под планированием экспериментов понимают математически обоснованный выбор оптимального плана их проведения.

Основным требованием при организации любого эксперимента является минимизация времени и числа испытаний при сохранении требуемой достоверности результатов. Форма представления результатов должна быть удобна для последующих расчетов, как обычных, так и вероятностных. Последнее предъявляет условия к проведению испытаний. Если ранее в эксперименте можно было ограничиваться определением только средних значений исследуемой величины, то с внедрением вероятностных методов расчета необходимо изучать рассеяние и оценку достоверности полученных результатов.

Часто проводят многофакторные испытания, т. е. испытания, учитывающие влияние многих факторов. Эксперимент может быть сложным и дорогим. В связи с этим необходим поиск оптимального плана проведения испытаний.

Планирование эксперимента на основе теории вероятностей и математической статистики позволяет подобрать такие планы.

Резкое сокращение числа испытаний при планировании эксперимента достигается за счет использования известных или предполагаемых математических зависимостей (в частности, вида искомой функции) и, главное, за счет целенаправленного одновременного варьирования изучаемых факторов. Эффективность планирования тем выше, чем сложнее изучаемый объект.

Объект исследования рассматривают как систему рис. 1, у которой известны входной и выходной параметры, но не известно внутреннее устройство. Входные параметры называют <u>факторами</u>, выходной параметр — <u>откликом</u>. Факторы рассматривают как детерминированные (постоянные) величины $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2},\ldots,\mathbf{x_k}$, отклик — как случайную величину $\mathbf{Y}$. Обычно полагают, что закон распределения $\mathbf{Y}$ известен из теоретических соображений или экспериментальных исследований.

Рис.1. Схема эксперимента

Уравнение, связывающее отклик с факторами $\mathbf{Y} = \varphi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2},\ldots,\mathbf{x_k})$, называют функцией отклика.

4.1. Цель эксперимента.

Цель эксперимента состоит в оценке наиболее простым способом функции отклика. Такой эксперимент называют интерполяционным, основанным на интерполяции — нахождении функции по некоторым ее значениям.

Более сложным является экстремальный эксперимент, предназначенный для определения оптимума. Целью экстремальных экспериментов является поиск экстремума функции отклика.

При экспериментальных исследованиях работоспособности и надежности машин наиболее распространен интерполяционный эксперимент. С его помощью можно изучить влияния факторов (нагруженности, концентрации напряжений, шероховатости поверхности и т. д.) на долговечность, на предельные по критерию прочности напряжения, рассчитать надежность деталей и машин.

Вид функции отклика (линейная, степенная, логарифмическая и т. д.) или математическую модель объекта исследования устанавливают, исходя из физических представлений о самом объекте или на основе опыта предыдущих исследований.

При отсутствии таких сведений функцию отклика представляют результатом ее разложения в ряд Тейлора, т. е. используют модель в виде полинома. В простейшем случае выбирают полином первого порядка, линейный по всем переменным

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \sum \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{x}_i,$$

где $\boldsymbol{\beta}_0$ и $\boldsymbol{\beta}_i$ — коэффициенты функции.

Функция отклика несколько усложняется, если необходимо учитывать взаимодействие факторов

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \sum \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{x}_i + \sum \boldsymbol{\beta}_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j.$$

Для описания области, близкой к оптимуму, выбирают полином второго порядка

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \sum \boldsymbol{\beta}_i \mathbf{x}_i + \sum \boldsymbol{\beta}_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j + \sum \boldsymbol{\beta}_{ii} \mathbf{x}_i^2.$$

Для полиномиальных зависимостей, найденных на основе экспериментов вместо величины $\mathbf{Y}$, вводится оценка ее среднего значения $\hat{\mathbf{Y}}$, соответственно вместо коэффициентов $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\beta}_i$, $\boldsymbol{\beta}_{ij}$, $\boldsymbol{\beta}_{ii}$ — их оценка $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_{ij}$, $\mathbf{b}_{ii}$. Например, при оценке функции отклика (эмпирического уравнения регрессии) в виде полинома второго порядка имеем

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{b_0} + \sum \mathbf{b_i x_i} + \sum \mathbf{b_{ij} x_i x_j} + \sum \mathbf{b_{ii} x_i^2}\ .$$

Коэффициенты полинома (коэффициенты регрессии) соответствуют частным производным в точке, вокруг которой функция отклика разлагается в ряд Тейлора.

Если при выборе модели нет оснований отдать предпочтение одной из трех указанных выше функций, то начинать надо с простейшей — линейной функции. По результатам испытаний проверяют адекватность модели, т. е. ее соответствие реальности.

В случае отрицательного результата переходят к более сложной модели, например, к модели, учитывающей взаимодействие факторов. Желательно, чтобы при таком переходе ранее выполненные испытания полностью учитывались при составлении нового плана эксперимента, т. е. чтобы план был композиционным.

4.2. Отбор факторов.

Отбор факторов, подлежащих исследованию, обусловлен целью эксперимента. Однако надо учитывать, что на отклик (выходной параметр) оказывает влияние большое число других факторов, среди которых есть и неуправляемые.

В процессе экспериментов исследуемые факторы варьируют, остальные поддерживают на постоянном уровне. Чтобы исключит, влияние неуправляемых факторов, им задают среднее значение или их рандомизируют, т. е. делают случайными. Рандомизация усредняет по всем опытам действие неуправляемых факторов. Наиболее простой способ рандомизации — случайная последовательность проведения всех опытов.

Значения (уровни) факторов задают в относительных (кодированных) величинах. Максимальный уровень фактора +1, минимальный -1 и средний 0. В общем случае кодированное значение фактора равно

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{0{,}5}(\mathbf{X}_{\max} + \mathbf{X}_{\min})}{\mathbf{0{,}5}(\mathbf{X}_{\max} - \mathbf{X}_{\min})},$$

где $\mathbf{X}_{\max}$, $\mathbf{X}_{\min}$ — максимальное и минимальное значения фактора, т. е. пределы его варьирования в эксперименте;

$\mathbf{X}$ —значение фактора.

Для качественных факторов (марка стали, вид термообработки, качество покрытий и т. д.) строят условные порядковые шкалы устанавливающие соответствие уровней качественных показателе числам натурального ряда, т. е. производят кодирование. Например, для качественного фактора, учитывающего наличие в эксперименте сталей двух плавок, назначают два уровня: один, равный +1 (сталь первой плавки), второй -1 (сталь второй плавки) В дальнейшем с ним поступают так же, как и с количественны фактором.

К исследуемым факторам предъявляют следующие требования:

- управляемость — возможность установления и поддержание фактора на выбранных уровнях;

- независимость — возможность устанавливать фактор на выбранном уровне вне зависимости от уровней других факторов,
- совместимость — все комбинации факторов осуществимы и безопасны.

4.3. Планирование эксперимента.

Планирование эксперимента в основном сводится к выбору числа уровней факторов и определению значения (уровня) каждого фактора в опыте.

Выбранное число уровней **p** в сочетании с числом факторов **k** определяют число возможных опытов **N**, которое равно $\mathbf{N = p^k}$. Если каждый опыт повторяется **m** раз, то число образцов соответственно равно **mN**. Число повторений **m** может быть выбрано по таблицам на основе задания допустимой ошибки и доверительной вероятности.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Для линейной модели достаточно варьирование факторов на двух уровнях. В этом случае имеем ПФЭ типа $\mathbf{2^k}$.

Графически план такого эксперимента для двух факторов можно представить в координатах кодированных значений факторов $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ (рис. 2).

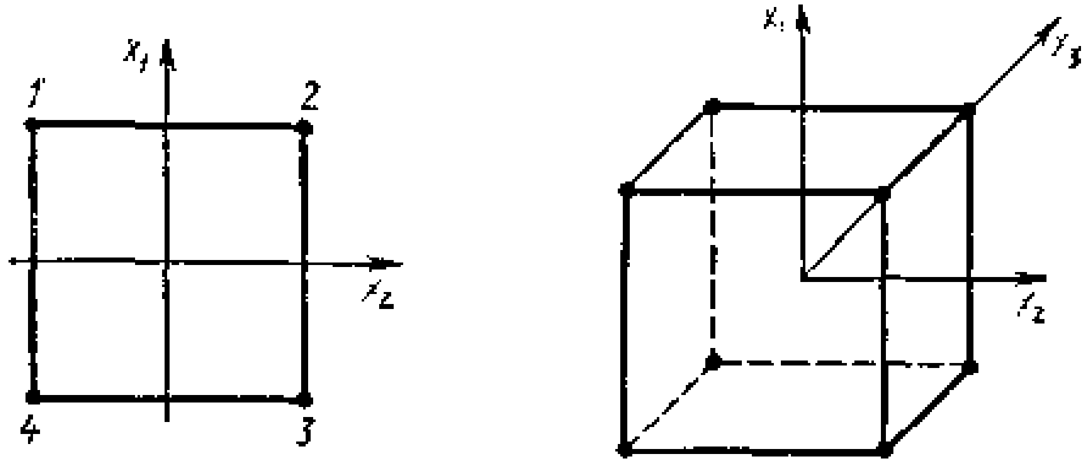


Рис. 2. План полного двухфакторного эксперимента (слева).

Рис. 3. План полного трехфакторного эксперимента (справа).

Условия проведения опытов соответствуют вершинам квадрата: для первого опыта $\mathbf{x_1} = +1$, $\mathbf{x_2} = -1$; второго $\mathbf{x_1} = +1$, $\mathbf{x_2} = +1$; третьего $\mathbf{x_1} = -1$, $\mathbf{x_2} = +1$; четвертого $\mathbf{x_1} = -1$, $\mathbf{x_2} = -1$. Номера опытов назначены произвольно.

Таблица 1

№ опыта	Факторы		№ опыта	Факторы	
	x_1	x_2		x_1	x_2
1	+	-	3	-	+
2	+	+	4	-	-

План эксперимента можно задавать таблицей, называемой матрицей плана. Матрица плана ПФЭ типа $\mathbf{2^2}$ представлена табл. 1. В таблице принято сокращенное обозначение уровней факторов: вместо +1 и -1 обозначаем + и -.

Более исчерпывающая информация об эксперименте представляется матрицей планирования эксперимента. Для ПФЭ типа $\mathbf{2^2}$ матрица планирования представлена табл. 2 и включает матрицу плана эксперимента, значения фиктивного фактора $\mathbf{x_0}$, эффект взаимодействия факторов $\mathbf{x_1x_2}$ (при необходимости его учета) и значения отклика.

Таблица 2

№ опыта	Факторы			Эффект взаимодействия	Отклик	
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	Повторы	Среднее значение
1	+	+	-	-	y_{11}, y_{12}	$\bar{y}_1$
2	+	+	+	+	y_{21}, y_{22}	$\bar{y}_2$
3	+	-	+	-	y_{31}, y_{32}	$\bar{y}_3$
4	+	-	-	+	y_{41}, y_{42}	$\bar{y}_4$

Матрица плана трехфакторного эксперимента (в табл. 6 выделена серым цветом) образуется от матрицы плана двухфакторного эксперимента, повторенного дважды: один раз — при нижнем уровне, а второй раз — при верхнем уровне третьего фактора $\mathbf{x_3}$.

Графически (рис. 3) план полного факторного эксперимента типа $\mathbf{2^3}$ можно представить вершинами куба, построенного в координатах кодированных значений факторов.

Матрица планирования для трехфакторного эксперимента, функция отклика которого соответствует полиному второго порядка, показана в табл. 3.

Таблица 3

№ опыта	Факторы				Эффекты взаимодействия				Отклик	
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Повторы	Среднее значение
1	+	+	-	-	-	-	+	+	$y_{11}, y_{12}, \dots$	$\bar{y}_1$
2	+	+	+	-	+	-	-	-	$y_{21}, y_{22}, \dots$	$\bar{y}_2$
3	+	-	+	-	-	+	-	+	$y_{31}, y_{32}, \dots$	$\bar{y}_3$
4	+	-	-	-	+	+	+	-	$y_{41}, y_{42}, \dots$	$\bar{y}_4$
5	+	+	-	+	-	+	-	-	$y_{51}, y_{52}, \dots$	$\bar{y}_5$
6	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_{61}, y_{62}, \dots$	$\bar{y}_6$
7	+	-	+	+	-	-	+	-	$y_{71}, y_{72}, \dots$	$\bar{y}_7$
8	+	-	-	+	+	-	-	+	$y_{81}, y_{82}, \dots$	$\bar{y}_8$

<u>Основные свойства</u> планов полного факторного эксперимента типа $\mathbf{2^k}$ следующие.

Симметричность плана относительно центра эксперимента (начала координат кодированных переменных) выражается равенством нулю сумм кодированных значений **i**-го (**i** = l, 2, . . ., **k**) фактора по всем опытам, т. е. $\sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0$.

Условия нормировки, означающие, что ПФЭ предусмотрено два уровня **+1** и **-1**, т. е. $\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = N$.

Ортогональность плана предполагает равенство нулю суммы попарно переменных факторов x_{iu} и x_{ju}, т. е. **i**-го j-го факторов в u-ом опыте

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} = 0, \quad \text{где } i \neq j; \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Ротатабельность — точность предсказания значений выходного параметра одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента.

Для линейной модели число коэффициентов, подлежащих определению, равно числу факторов **k** плюс единица (свободный член). Если учесть, что число опытов ПФЭ равно 2^k, то очевидна большая избыточность опытов. В этом случае пользуются дробным факторным экспериментом (ДФЭ), эффективность которого увеличивается с ростом числа факторов **k**. Основа построения ДФЭ — замена в матрице планирования наиболее слабого эффекта взаимодействия (произведения факторов) новым фактором. Какой из эффектов взаимодействия наиболее слабый, т. е. менее всего влияет на величину выходного параметра, решает экспериментатор на основании физических представлений об исследуемом объекте. Например, планируя ДФЭ для трех факторов, используют матрицу планирования двухфакторного эксперимента, где эффект взаимодействия x_1x_2 заменяют фактором x_3 (табл. 4).

Однако в ДФЭ оценки коэффициентов функции отклика не будут раздельными. Из табл. 4 видно, что столбцы для x_1 и x_2x_3 одинаковы, следовательно, оценка коэффициента β_1, обозначаемая через b_1, смешана с коэффициентами β_1 и β_{23}, т. е. $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$. Аналогично находим смешение для оценок b_2 и b_3: $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$; $b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$.

Таблица 4

№ опыта	Матрица плана ДФЭ			Эффекты взаимодействия		
	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$
1	+	-	-	-	-	+
2	+	+	+	+	+	+
3	-	+	-	-	+	-
4	-	-	+	+	-	-

Отметим, что смешение оценок не отразится на результатах, если проверка адекватности подтвердит правомерность выбора линейной модели, следовательно, возможность пренебрежения эффектами взаимодействия.

В силу ортогональности матриц планирования эксперимента формулы для определения оценок b_0, b_i и b_j неизвестных коэффициентов β_0, β_i, β_j функции отклика (полинома первого порядка) предельно просты:

$$\mathbf{b_0} = \frac{\sum\limits_{u=1}^{N} \bar{y}_u}{N}; \qquad \mathbf{b_i} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u; \qquad \mathbf{b_{ij}} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}x_{ju}\bar{y}_u,$$

где x_{iu}, x_{ju} — величина **i**-го и **j**-го факторов ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$) в **u**-м опыте.

Среднее значение отклика $\bar{y}_u$ в **u**-м опыте определяется по формуле

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m} y_{uq}$$

где **m** — число повторов опыта;

y_{uq} — текущее значение отклика в **u**-и опыте при **q**-м повторе.

Для квадратичных моделей, когда функция отклика описывается полиномом второго порядка, необходимо увеличить число уровней фактора до трех. Полный факторный эксперимент на трех уровнях предусматривает проведение $N=3^k$ опытов (**k** — число факторов), что намного больше, чем число неизвестных коэффициентов модели. Существенное сокращение числа опытов получают в композиционных планах, ядром которых являются планы линейных моделей. К плану ПФЭ типа 2^k добавляют опыты в центре эксперимента (нулевые точки) и на расстоянии α от центра («звездные» точки). Таким образом, по оси координат каждого фактора получают пять значений (уровней): $-\alpha$, -1, 0, $+1$, $+\alpha$.

Длина «плеча» α и число опытов в центре плана зависят от требований, предъявляемых к плану. Требование ортогональности приводит к ортогональным центральным композиционным планам (ОЦКП); требование ротатабельности — к ротатабельным центральным композиционным планам (РЦКП). В случае, когда по чисто техническим причинам значения фактора не могут выходить за пределы заданной области эксперимента, т.е. $|\alpha|<1$, применяют композиционные планы типа b_m, в которых α равно единице.

Для ортогонального центрального композиционного плана (рассмотрением которого ограничиваемся) число опытов в центре равно единице, а величину плеча α выбирают в зависимости от числа факторов **k**. Так, при **k** равном 2; 3; 4; 5, значения плеча α соответственно выбирают 1; 1, 215; 1,414; 1,547.

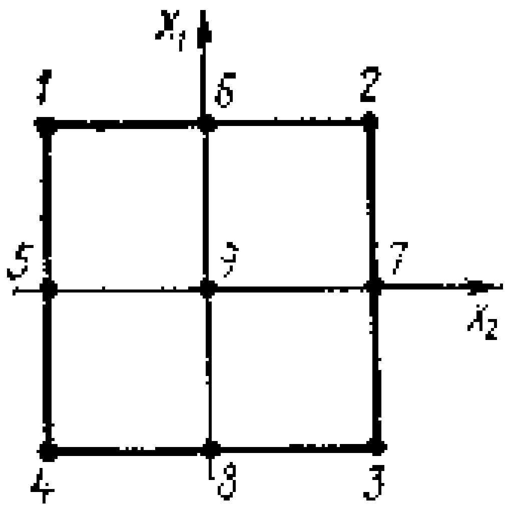


Рис. 4. План двухфакторного эксперимента для нелинейной модели

Для двух факторов план ОЦКП эксперимента представлен матрицей в табл. 8 и графически на рис. 9, где вершины квадрата в координатах кодированных значений x_1 и x_2 обозначают опыты плана ПФЭ типа 2^k или ядро плана, к которому добавлена нулевая очка (центр плана) и четыре «звездных», расположенных на середине сторон квадрата.

Номера опытов на рис. 4 соответствуют номерам строк табл. 5.

Таблица 5

№ опыта	Факторы		Примечания
	x_1	x_2	
1	+	-	Ядро плана
2	+	+	
3	-	+	
4	-	-	
5	**0**	-	«Звездные» точки
6	+	**0**	
7	**0**	+	
8	-	**0**	
9	**0**	**0**	Нулевая точка

Для трех факторов план ОЦКП эксперимента, составленный аналогично двухфакторному, приведен в табл. 6.

Таблица 6

№ опыта	Факторы			Примечания
	x_1	x_2	x_3	
1	+	-	-	Ядро плана
2	+	+	-	
3	-	+	-	
4	-	-	-	
5	+	-	+	
6	+	+	+	
7	-	+	+	
8	-	-	+	
9	**-1,215**	**0**	**0**	«Звездные» точки»
10	**+ 1,215**	**0**	**0**	
11	**0**	**-1,215**	**0**	
12	**0**	**+ 1,215**	**0**	
13	**0**	**0**	**- 1,215**	
14	**0**	**0**	**+ 1,215**	
15	**0**	**0**	**0**	Нулевая точка

Геометрически план может быть представлен кубом, вершины которого соответствуют опытам ПФЭ типа $\mathbf{2^k}$, к которым добавляют шесть «звездных» точек, расположенных на расстоянии α от середины ребер куба и одну нулевую точку в центре куба.

Оценки $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{b_{ij}}$, $\mathbf{b_{ii}}$ ($\mathbf{i}$ =1,2, .. . , $\mathbf{k}$; $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$) неизвестных коэффициентов функции отклика (полинома второго порядка) β_0, β_i, β_{ij}, β_{ii} определяют по следующим зависимостям:

$$\mathbf{b_i}=\frac{\sum\limits_{u=1}^{N}\mathbf{x_{iu}\bar{y}_u}}{\sum\limits_{u=1}^{N}\mathbf{x_{iu}^2}};\qquad \mathbf{b_{ij}}=\frac{\sum\limits_{u=1}^{N}\mathbf{x_{iu}x_{ju}\bar{y}_u}}{\sum\limits_{u=1}^{N}(\mathbf{x_{iu}x_{ju}})^2};\qquad \mathbf{b_{ii}}=\frac{\sum\limits_{u=1}^{N}\left(\mathbf{x_{iu}^2}-\Theta\right)\cdot\mathbf{\bar{y}_u}}{\sum\limits_{u=1}^{N}\left(\mathbf{x_{iu}^2}-\Theta\right)^2};$$

$$\mathbf{b_0}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{u=1}^{N}\mathbf{\bar{y}_u}-\Theta\sum_{u=1}^{N}\mathbf{b_{ii}};\qquad \Theta=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{u=1}^{N}\mathbf{x_{iu}^2}\ \text{при любом } \mathbf{i}=1, 2,\dots, \mathbf{k}.$$

В экстремальных экспериментах поиск оптимума поочередным варьированием переменных требует проведения очень большого количества опытов. Поэтому целесообразно применять метод крутого восхождения, который заключается в следующем. Для некоторой начальной точки поверхности отклика ставят интерполяционный эксперимент. Число опытов невелико и достаточно для описания небольшого участка поверхности отклика полиномом первого порядка. Вектор-градиент этого полинома (функции отклика) определяет направление наиболее короткого (крутого) пути к экстремуму.

Движение по поверхности отклика в направлении градиента начинают от начальной точки. Шаг движения или изменения значений фактора при переходе к следующему опыту устанавливают в зависимости от степени влияния фактора на отклик. Значение отклика, называемого в экстремальных экспериментах критерием оптимизации или целевой функцией, изменяется от опыта к опыту. Совпадение или незначительное отличие результатов двух соседних опытов означает достижение области, близкой к стационарной. В этой области ставят заключительный интерполяционный эксперимент/

4.4. Статистический анализ.

Статистический анализ результатов испытаний необходим для оценки достоверности эксперимента и включает следующие этапы.

1. Проверка воспроизводимости или постоянства дисперсии отклика сводится к проверке гипотезы об однородности дисперсий $\mathbf{S_1^2}$, $\mathbf{S_2^2}$, …,$\mathbf{S_N^2}$, найденных по результатам **N** опытов.

Дисперсия отклика $\mathbf{S_u^2}$ для **u**-го опыта равна

$$\mathbf{S_u^2}=\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\left(\mathbf{y_{uq}}-\mathbf{\bar{y}_u}\right)^2}{\mathbf{m-1}},\qquad \mathbf{u}=1, 2, \dots, \mathbf{N},$$

где $\mathbf{y_{uq}}$ - отклик **u**-го опыта при **q**-ом повторе,

m - число повторов опыта.

Вычисляем экспериментальное значение критерия Кохрена, т. е. отношение максимальной $\mathbf{S_{\max}^2}$ из **N** дисперсий к сумме всех дисперсий

$$\mathbf{G}=\frac{\mathbf{S_{\max}^2}}{\sum\limits_{u=1}^{N}\mathbf{S_u^2}}.$$

Гипотеза об однородности дисперсии подтверждается, если вычисленное значение критерия не превышает критического значения, определенного по таблицам, в зависимости от числа степеней свободы $\mathbf{k_1} = \mathbf{m}-1$, $\mathbf{k_2} = \mathbf{N}$ и доверительной вероятности $\mathbf{P_{дов}}$.

Критерий Кохрена применяют при одинаковом для каждого опыта числе повторов. В более общем случае используют критерий Бартлета.

2. Адекватность модели, т. е. пригодность ранее принятой функции отклика для описания реального объекта исследования, проверяют по отношению дисперсий адекватности и воспроизводимости.

Дисперсию воспроизводимости или оценку дисперсии отклика определяем по формуле

$$\mathbf{S_y^2} = \frac{1}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{S_u^2}.$$

Дисперсию адекватности определяем по формуле

$$\mathbf{S_{ад}^2} = \frac{\mathbf{m} \sum_{\mathbf{u}=1}^{\mathbf{N}} \left(\bar{\mathbf{y}}_\mathbf{u} - \hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{u}\right)^2}{\mathbf{N} - (\mathbf{k} + 1)},$$

где $\mathbf{k}$ - число факторов;

$\hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{u}$ - расчетная оценка среднего значения отклика в $\mathbf{u}$-м опыте, вычисляемая по соответствующему полиному.

Например, для линейной модели

$$\hat{\mathbf{Y}}_\mathbf{u} = \mathbf{b}_0 + \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{k}} \mathbf{b_i x_{iu}}$$

где $\mathbf{x_{iu}}$ - значение $\mathbf{i}$-го фактора в $\mathbf{u}$-ом опыте.

Экспериментальное значение $\mathbf{F}$-критерия (критерия Фишера) равно

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{S_{ад}^2}}{\mathbf{S_y^2}}.$$

Модель считают адекватной, если вычисленное значение $\mathbf{F}$ меньше критического, определенного по таблицам $\mathbf{F}$-распределения, в зависимости от числа степеней свободы $\mathbf{k_1} = \mathbf{N}-(\mathbf{k}-1)$, $\mathbf{k_2} = (\mathbf{m}-1)\mathbf{N}$ и доверительной вероятности $\mathbf{P_{дов}}$.

Для насыщенных планов, в которых число определяемых коэффициентов равно числу опытов, для проверки адекватности проводят дополнительные опыты. Так, для линейной модели дополнительно ставят опыты в центре плана. По расхождению между полученным и расчетным значениями отклика принимают решения об адекватности модели.

При неадекватности модели возможны следующие действия: усложнение модели, достройка плана, преобразование переменных, изменение интервалов варьирования.

3. Значимость коэффициентов модели проверяем по $\mathbf{t}$-критерию Стьюдента. Проверку начинают с вычисления дисперсий коэффициентов.

Для планов дробного и полного факторного эксперимента типа $\mathbf{2^k}$ дисперсии оценок коэффициентов $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{b_{ij}}$ одинаковы и определяются по формуле

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{mN}.$$

Экспериментальное значение критерия Стьюдента равно

$$t = \frac{|b|}{S_b},$$

где $|b|$ - абсолютное значение оценки проверяемого коэффициента, т. е. одного из коэффициентов $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_i}$, $\mathbf{b_{ij}}$.

Коэффициент считают значимым, если вычисленное значение критерия больше, чем критическое значение, выбираемое по таблицам распределения Стьюдента, в зависимости от числа степеней свободы $\mathbf{k = (m—l)N}$ и доверительной вероятности $\mathbf{P_{дов}}$.

Для квадратичной модели, когда испытания проводят по ортогональному центральному плану, дисперсии оценок коэффициентов модели определяют по следующим зависимостям:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum\limits_{u=1}^{N} x_{iu}^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \qquad S_{b_{ij}}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum\limits_{u=1}^{N} \left(x_{iu} x_{ju}\right)^2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k; \quad i \neq j;$$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{S_{\bar{y}}^2}{\sum\limits_{u=1}^{N} \left(x_{iu}^2 - \Theta\right)^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \qquad S_{b_0}^2 = \frac{1}{N} S_{\bar{y}}^2 + \sum_{i=1}^{k} S_{b_{ii}}^2 \Theta^2,$$

где $S_{\bar{y}}^2$ - общая дисперсия среднего значения отклика определяется по формуле

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{mN} \sum_{u=1}^{N} S_u^2 = \frac{S_y^2}{m}.$$

Далее для каждого из коэффициентов вычисляют **t**-критерий Стьюдента (отношение абсолютного значения коэффициента к его среднему квадратическому отклонению) и сравнивают с табличным значением, найденным в зависимости от числа степеней свободы $\mathbf{k = (m—1)N}$ и доверительной вероятности $\mathbf{P_{дов}}$.

5. Контрольные вопросы

1. Что понимают под планированием экспериментов?
2. Что является основным требованием при организации любого эксперимента?
3. Какие условия предъявляет к проведению испытаний внедрение вероятностных методов расчета?
4. Какие испытания называют многофакторными?
5. За счёт чего достигается резкое сокращение числа испытаний при планировании эксперимента?
6. Что называют факторами при планировании эксперимента?
7. Что называют откликом при планировании эксперимента?

8. Как рассматривают факторы и отклик при планировании эксперимента?
9. Что называется откликом при планировании эксперимента?
10. В чём состоит цель эксперимента при его планировании?
11. В чём заключается интерполяционный эксперимент?
12. В каких случаях функцию отклика представляют результатом ее разложения в ряд Тейлора, т. е. используют модель в виде полинома?
13. В каком случае при выборе модели выбирают полином первого порядка, линейный по всем переменным, и в каком случае выбирают полином второго порядка?
    Напишите их уравнения.
14. Чему соответствуют коэффициенты полинома (коэффициенты регрессии)?
15. В чём заключается проверка адекватности модели?
16. Что называется композиционным планом?
17. Какие факторы оказывают влияние на отклик?
18. Как исключить влияние неуправляемых факторов?
19. Что делает рандомизация?
20. Каков наиболее простой способ рандомизации?
21. Как задают значения (уровни) факторов?
22. Каковы уровни факторов?
23. Как устанавливают уровни варьирования для качественных факторов?
24. Какие требования предъявляют к исследуемым факторам?
    В чём они заключаются?
25. К чему сводится планирование эксперимента?
26. Какой эксперимент называют полным факторным экспериментом (ПФЭ)?
27. Сколько уровней варьирование факторов достаточно для получения линейной модели?
28. Что включает в себя матрица планирования для ПФЭ типа $\mathbf{2^2}$?
29. Как образуется матрица плана трёхфакторного эксперимента?
30. Перечислите основные свойства планов ПФЭ типа 2^k.
31. Что является основой построения дробного факторного эксперимента (ДФЭ)?
32. Назовите недостаток ДФЭ.
33. В каком случае смешение оценок коэффициентов отклика не отразится на результатах ДФЭ?
34. На скольких и на каких уровнях варьируют факторы при необходимости получения квадратичной модели?
35. Для чего проводят экстремальные эксперименты?
36. Какие этапы включает в себя статистический анализ результатов испытаний?
37. К чему сводится проверка постоянства дисперсий?
38. Что называется адекватностью модели?

6.Задание.

Исследовать влияние радиального Δ и углового $\boldsymbol{\gamma}$ смещений осей соединяемых валов на долговечность муфты.

Муфта нагружена номинальным моментом **T,** Н·м, наружный диаметр муфты $\mathbf{D_0}$**,** мм.

6.1. Последовательность выполнения расчётов

На муфту (объект исследования) действуют два фактора: радиальное Δ и угловое $\boldsymbol{\gamma}$ смещения полумуфт.

Требуется оценить функцию отклика, т. е. найти связь между факторами и откликом.

1. Определить кодированные значения факторов.

2. В качестве отклика **Y** принять логарифмы ресурса **lgL**, где **L** —ресурс, выраженный в оборотах муфты.

3. Задать функцию отклика полиномом первого порядка с учетом эффекта взаимодействия.

4. При планировании эксперимента выбрать план полного факторного эксперимента типа $\mathbf{2^2}$.

Число опытов **N** = 4; число повторов каждого опыта **m** = 3; необходимое число образцов равно **mN** = 12 (задано).

Результаты испытаний на долговечность задаются каждому студенту в виде значений логарифмов ресурса.

5. Вычислить среднее значение $\mathbf{y_u}$ и среднее квадратическое отклонение $\mathbf{S_u}$ логарифма ресурса в каждом опыте.

6. По результатам испытаний определяем оценки коэффициентов функций отклика.

7. Получить оценку зависимости среднего значения логарифма ресурса от радиальных и угловых смещений осей соединяемых валов.

8. Проверить однородность дисперсий по критерию Кохрена.

9. Проверить значимость коэффициентов модели по критерию Стьюдента.

10. Сделать выводы об адекватности модели.

Практическое занятие №3
НАДЕЖНОСТЬ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ

1. Цель занятия: изучение методов оценки надёжности соединений с натягом; приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. План выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, расчёты.

4. Теоретическая часть.

4.1. Общие сведения

Соединения деталей с натягом — это напряженные соединения, в которых натяг создается необходимой разностью посадочных размеров насаживаемых одна на другую деталей. Для скрепления деталей используются силы упругости предварительно деформированных деталей.

Соединения можно разделить на две группы:

- соединения деталей по цилиндрическим или коническим поверхностям, причем одна деталь охватывает другую (рис.1); специальные соединительные детали отсутствуют;

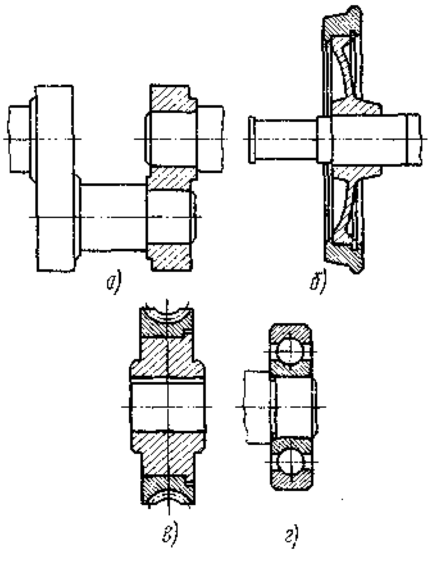


Рис. 1. Соединения с натягом по цилиндрическим поверхностям

- соединения деталей по плоскости с помощью стяжных колец или планок (рис. 2).

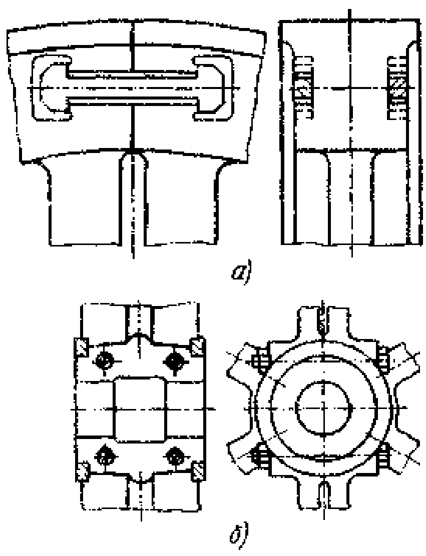


Рис. 2. Соединения половин маховиков по плоскости:
а - с помощью анкеров;
б – с помощью колец

Основное применение имеют соединения первой группы.

Смещение деталей предотвращается силами трения на поверхности контакта деталей.

Общим достоинством соединений с натягом является возможность выполнения их для очень больших нагрузок и хорошее восприятие ими ударных нагрузок.

Цилиндрические и конические соединения просты в изготовлении, обеспечивают хорошее центрирование, не требуют крепежных деталей.

Недостатки:

1) относительная сложность сборки и разборки (особенно внутри неразъемного корпуса), возможность ослабления посадки и повреждения посадочных поверхности при разборке;

2) большое рассеяние сил сцепления в связи с рассеянием действительных посадочных размеров в пределах допусков и коэффициентов трения;

3) трудность неразрушающего контроля.

Цилиндрические соединения с натягом имеют широкое применение при больших, особенно динамических нагрузках и отсутствии необходимости в частой сборке и разборке. Как известно, при динамических нагрузках шпоночные соединения быстро обминаются.

Характерными примерами деталей, соединяемых с натягом, могут служить: кривошипы, пальцы кривошипов, детали составных коленчатых валов (рис. 1, а), венцы зубчатых и червячных колес (рис.1, в), диски турбин, роторы электродвигателей, подшипники качения (рис. 1, г) и т. д.

Характер соединения определяется натягом, который выбирают в соответствии с посадками, установленными стандартной системой допусков и посадок. Применяют посадки с натягом квалитетов 6; 7; 8. Например: H7/u7; H7/s6; H7/r6; H7/p6; H8/x8 и др..

Сопротивления сдвигу при больших натягах достигают 12 МПа.

Для соединения тонкостенных деталей большие натяги неприменимы.

Способы соединения с натягом:

запрессовкой - простейший и высокопроизводительный способ, обеспечивающий возможность удобного контроля измерением силы запрессовки, но связанный с опасностью повреждения поверхностей и затрудняющий применение покрытий;

нагревом охватывающей детали до температуры ниже температуры отпуска; этот способ обеспечивает повышение точности сцепления более чем в 1,5 раза по сравнению с запрессовкой и особенно эффективный при больших длинах соединений;

охлаждением охватываемой детали - способ, преимущественно применяемый для установки небольших деталей, например втулок в массивные корпусные детали, и обеспечивающий наиболее высокую прочность сцепления;

гидрозапрессовкой - нагнетанием масла под давлением в зону контакта, что резко снижает силу запресовки; наибольшая эффективность гидрозапрессовки и распрессовки - в подшипниковых узлах и конических соединениях.

Расчёт соединения включает определение необходимого натяга для обеспечения прочности сцепления и проверку прочности соединяемых деталей.

Необходимая величина натяга определяется потребным давлением на посадочной поверхности. Давление должно быть таким, чтобы силы трения оказались больше внешних сдвигающих сил.

4.2. Надёжность соединений с натягом

Необходимость исследований и расчета надежности этих соединений вызывается большим рассеянием: натягов, образуемых как разность двух больших близких размеров - диаметров вала и отверстия; коэффициентов трения, зависящих от многих факторов - состояния поверхности, оксидных пленок, случайного попадания масла, а также внешних нагрузок.

Предельный по прочности сцепления момент $\boldsymbol{T}_{\lim}$, Н·м, т. е. момент, который может передать соединение диаметром $\boldsymbol{d}$, мм, длиной $\boldsymbol{l}$, мм, с натягом $\boldsymbol{N}$, мкм, при давлении на посадочных поверхностях $\boldsymbol{p}$, МПа, и коэффициенте трения $\boldsymbol{f}$, равен

$$\boldsymbol{T}_{\lim} = \mathbf{0{,}5} \cdot \mathbf{10}^{-3} \frac{\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{d}^2 \cdot \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{f}}{\boldsymbol{K}}$$

где $\boldsymbol{K}$ = 1,5 — коэффициент, учитывающий возможность уменьшения сил сцепления со временем (от местных обмятий и частичного снятия сил трения).

Давление на посадочной поверхности сплошного вала диаметром $\boldsymbol{d}$, мм со ступицей с наружным диаметром $\boldsymbol{D}$, мм, из материалов с одинаковым модулем упругости $\boldsymbol{E}$, МПа, и одинаковым коэффициентом поперечного сжатия:

$$\boldsymbol{p} = \frac{(\boldsymbol{N} - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{10}^{-3}}{\boldsymbol{d} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\psi})},$$

где $\psi = \dfrac{1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{d}{D}\right)^2}$;

$\boldsymbol{u}$ - поправка на обмятие посадочных поверхностей, зависящая от высоты их микронеровностей $\boldsymbol{Rz}_1$, $\boldsymbol{Rz}_2$, обычно $\boldsymbol{u} = 1{,}2(\boldsymbol{Rz}_1 + \boldsymbol{Rz}_2)$.

Предельный момент $\boldsymbol{T}_{\lim}$ рассматриваем как функцию (произведение) двух случайных величин $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{f}$.

Среднее значение $\overline{\boldsymbol{T}}_{\lim}$ предельного момента $\boldsymbol{T}_{\lim}$ определяется по средним значениям $\overline{\boldsymbol{p}}$ и $\overline{\boldsymbol{f}}$.

По правилу квадратического сложения коэффициентов вариации аргументов, входящих в выражение функции в виде произведения, находим коэффициент вариации предельного момента

$$\boldsymbol{v}_{\lim} = \sqrt{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}^2 + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}^2},$$

где $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}$ - коэффициенты вариации давления и коэффициента трения.

Среднее значение давления $\bar{p}$ вычисляют по вышеприведенной формуле для p, в которую подставляют среднее значение натяга $\bar{N}$.

Коэффициент вариации давления

$$v_p = \frac{S_N}{\bar{N} - u} = v_N \frac{1}{1 - \dfrac{u}{\bar{N}}},$$

где v_N, S_N - коэффициент вариации натяга и среднее квадратическое отклонение натяга.

Если считать поправку на обмятие u пропорциональной натягу N (при малых натягах), то коэффициент вариации давления $v_p = v_N$.

Среднее значение натяга $\bar{N}$ равно разности средних значений отклонений вала $\bar{e}$ и отверстия $\bar{E}$, которые выразить через табличные значения допусков диаметров вала t_e, отверстия t_E и нижнее отклонение диаметра вала ei

$$\bar{N} = \bar{e} - \bar{E} = ei + 0{,}5 \cdot (t_e - t_E).$$

Среднее квадратическое отклонение S_N натяга в обычном предположении, что допуск натяга $t_N = \sqrt{t_e^2 + t_E^2}$ соответствует $6\,S_N$, равно

$$S_N = \frac{1}{6}\sqrt{t_e^2 + t_E^2}.$$

Тогда коэффициент вариации натяга $v_N = \dfrac{S_N}{\bar{N}}$.

При изготовлении вала и отверстия по одинаковым квалитетам точности, т.е. $(t_e = t_E = t)$,

$$\bar{N} = ei, \qquad v_N = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{6 \cdot ei} = 0{,}236\frac{t}{ei}.$$

Коэффициент вариации коэффициента трения в применении к соединениям с натягом обычно колеблется в пределах 0,08...0,125 (в среднем 0,1). Меньшие значения - при сборке с охлаждением. Самые малые значения, выходящие за указанный интервал, - при гидрозапрессовке.

Рассмотрим общую задачу оценки надежности соединения с натягом под действием момента со средним значением $\bar{T}$ и коэффициентом вариации v_T.

Вероятность P_c безотказной работы соединения по критерию прочности сцепления, как обычно, определяем по таблицам нормального распределения в зависимости от квантили u_p, равной

$$u_p = -\frac{\bar{n}_c - 1}{\sqrt{\bar{n}_c^2 v_{\lim}^2 + v_T^2}},$$

где $\bar{n}_c = \dfrac{\bar{T}_{\lim}}{\bar{T}}$ - коэффициент запаса прочности сцепления по средним значениям моментов.

Опасные напряжения возникают у внутренней поверхности охватывающей детали.

Условие прочности

$$\boldsymbol{\sigma}_{экв} < \boldsymbol{\sigma}_{t2},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{экв}$ - наибольшее эквивалентное напряжение;

$\boldsymbol{\sigma}_{t2}$ - предел текучести материала охватывающей детали.

Среднее значение эквивалентного напряжения $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{экв}$ равно

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{экв} = \frac{2\bar{\boldsymbol{p}}}{1-\left(\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{D}}\right)^2}.$$

Коэффициент вариации $\boldsymbol{v}_{экв}$ напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{экв}$ равен коэффициенту вариации $\boldsymbol{v}_{p}$ давления на посадочной поверхности соединения.

Вероятность безотказной работы $\boldsymbol{P}_{n}$ по критерию прочности деталей определяем в зависимости от квантили

$$\boldsymbol{u}_{p} = -\frac{\bar{\boldsymbol{n}}_{n} - 1}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{n}}_{n}^2 \cdot \boldsymbol{v}_{t}^2 + \boldsymbol{v}_{p}^2}},$$

где $\bar{\boldsymbol{n}}_{n} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{t2}}{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{экв}}$ - коэффициент запаса прочности по средним значениям предела текучести $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{t2}$ и напряжения $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{экв}$;

$\boldsymbol{v}_{t}$ - коэффициент вариации предела текучести.

Надежность соединения с натягом, характеризуемую вероятностью безотказной работы $\boldsymbol{P}$, определяем как произведение вероятностей $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{c} \cdot \boldsymbol{P}_{n}$.

5. Контрольные вопросы

1. Какие соединения деталей называются соединениями с натягом?
2. Какие силы используются для скрепления деталей?
3. На какие группы можно разделить соединения с натягом?
4. Чем предотвращается смещение деталей в соединениях с натягом?
5. Что является общим достоинством соединений с натягом?
6. Каковы недостатки соединений с натягом?
7. Какие посадки стандартной системы допусков и посадок наиболее распространены для соединений с натягом?
8. Перечислите способы соединения с натягом.
9. Что включает в себя расчёт соединения?
10. Как определяется необходимая величина натяга?
11. Каким должно быть давление на посадочной поверхности?

6. Задания.

1. Соединение зубчатого колеса со сплошным валом диаметром $\boldsymbol{d}$ = ….. мм соответствует посадке …….

Соединение нагружено вращающим моментом $\boldsymbol{T}$, заданным случайной нормально распределенной величиной со средним значением $\bar{\boldsymbol{T}}$ = …….. Н·м и коэффициентом вариации $\boldsymbol{v}_{T}$ = …….

Определить вероятность безотказной работы соединения по критерию прочности сцепления, если известно:

- верхнее и нижнее отклонения диаметра отверстия зубчатого колеса
  $\mathbf{BO_o}$ = …..... мкм, $\mathbf{HO_o}$ = ..…... мкм,
- верхнее и нижнее отклонения диаметра вала $\mathbf{BO_в}$ =….... мкм, $\mathbf{HO_в}$ = ….... мкм,
- диаметр ступицы зубчатого колеса $\boldsymbol{D}$ = …… мм,
- длина посадочной поверхности $\boldsymbol{l}$ = ….. мм,
- высота микронеровностей посадочных поверхностей $\boldsymbol{Rz}_1$=…мкм, $\boldsymbol{Rz}_2$=… мкм,
- модуль упругости материала (сталь) деталей $\boldsymbol{E}$ = ……. МПа,
- среднее значение коэффициента трения и коэффициент вариации коэффициента трения соответственно равны $\bar{\boldsymbol{f}}$ = ……., $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}$ = ……,
- коэффициент $\boldsymbol{K}$, учитывающий уменьшение со временем давления, $\boldsymbol{K}$ = …...

2. Определить вероятность безотказной работы соединения с натягом по критерию прочности охватывающей детали (ступицы колеса). Характеристики соединения приведены в предыдущем задании.

Среднее значение предела текучести материала охватывающей детали $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}_2}$ = ….. МПа, коэффициент вариации $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{t}}$ = …..

Практическое занятие №4
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЗАКОНАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АРГУМЕНТОВ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ НАДЕЖНОСТИ

1. Цель занятия: изучение методов определения закона распределения функций по законам распределения аргументов в применении к задачам надёжности; приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. План выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, расчёты.

4. Теоретическая часть.

В теории надежности исследование законов распределения и расчет параметров распределений функций нужны для оценки надежности систем по параметрам надежности элементов.

4.1. Распределение функций одного аргумента.

Одним из типичных примеров этого расчета в области прочности является определение закона распределения напряжения в опасном сечении детали по закону распределения нагрузки.

Пусть задана плотность распределения $\mathbf{f_1(x)}$ случайной величины **X** и требуется определить плотность распределения $\mathbf{f_2(y)}$ случайной величины **Y**, являющейся известной монотонной функцией $\boldsymbol{\varphi}$ от **X**, т. е. $\mathbf{Y=\varphi(X)}$.

Вероятность попадания случайной величины **Y** на элементарный отрезок **dy** равна вероятности попадания на **dx** случайной величины **X**, т. е.

$$\mathbf{Bep\ (y < Y < y + dy) = Bep\ (x < X < x + dx)}$$

или

$$\mathbf{f_2(y)dy = f_1(x)dx}.$$

Тогда плотность распределения случайной величины **Y** принимает положительные значения, определяемые по формуле

$$\mathbf{f_2(y) = f_1(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_1[\psi(y)]\cdot\left|\frac{d[\psi(y)]}{dy}\right|}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\psi(y)}$ — функция обратная заданной функции $\boldsymbol{\varphi(x)}$.

Рассмотрим линейную функцию

$$\mathbf{Y=a+bX},$$

где **a** и **b** - константы.

Находим обратную функцию

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Y} - \mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

и ее производную

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dy}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}.$$

Искомая функция плотности случайной величины **Y** определяется

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mathbf{b}}\mathbf{f}_1\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right).$$

В случае нормального распределения случайного аргумента **X** плотность распределения $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ равна

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_\mathbf{x}\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{x})^2}{2\sigma_\mathbf{x}^2}},$$

где $\mathbf{m_x}$ и $\mathbf{D}_x = \sigma_\mathbf{x}^2$ - параметры распределения (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины **X**;

$\sigma_\mathbf{x}$ - среднее квадратическое отклонение случайной величины **X**.

Тогда плотность распределения для **Y**

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mathbf{b}\sigma_\mathbf{x}\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{[\mathbf{y} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{m}_\mathbf{x})]^2}{2\mathbf{b}^2\sigma_\mathbf{x}^2}}.$$

Последнее выражение показывает, что случайная величина **Y**, являющаяся линейной функцией нормально распределенного аргумента, распределяется по нормальному закону с параметрами: $\mathbf{m_y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{m_x}$ и $\mathbf{D_y} = \mathbf{b}^2\mathbf{D_x} = \mathbf{b}^2\sigma_\mathbf{x}^2$.

4.2. Распределение функции нескольких аргументов.

Прямой аналитический метод заключается в непосредственном определении интегрированием (по общим зависимостям теории вероятностей) плотности распределения функции по выражениям функции плотности распределений аргументов. Однако результат в конечной форме может быть получен только в некоторых частных случаях.

Рассмотрим один простейший случай — композицию двух законов распределения, т. е. закон распределения суммы **Z** двух независимых случайных величин **X** и **Y** при известных плотностях их распределений $\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_2(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\mathbf{f}_2(\mathbf{z} - \mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}_1(\mathbf{z} - \mathbf{y})\mathbf{f}_2(\mathbf{y})\mathbf{dy}.$$

В случае нормальных распределений случайных величин **X** и **Y**

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_\mathbf{x}^2\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{x})^2}{2\sigma_\mathbf{x}^2}} \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma_\mathbf{y}\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_\mathbf{y})^2}{2\sigma_\mathbf{y}^2}}$$

их композиция имеет также нормальный закон распределения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z})=\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{z}})^2}{2\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}^2}},$$

где $\mathbf{m_x}$, $\mathbf{m_y}$, $\mathbf{m_z}$ -математические ожидания случайных величин **X, Y** и **Z**;

$$\mathbf{m_z}=\mathbf{m_x}+\mathbf{m_y};$$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^2=\mathbf{D_x}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^2=\mathbf{D_y}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}^2=\mathbf{D_z}$ - дисперсии случайных величин **X, Y** и **Z**;

$$\mathbf{D_z}=\mathbf{D_x}+\mathbf{D_y};$$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}$ - средние квадратические отклонения величин **X, Y** и **Z**.

Установить закон распределения функции можно также обычными методами математической статистики по отдельным числовым значениям функции, вычисленным по отдельным числовым значениям функций из ряда случайных чисел, например методом статистического (имитационного, Монте-Карло) моделирования.

Из-за сложности общих аналитических методов определения закона распределения функций по законам распределения аргументов широкое практическое применение также метод определения параметров распределения функции на основе ее линеаризации в достаточно узких пределах изменения аргументов.

Для этого функция раскладывается в ряд Тейлора с сохранением первых двух членов. Предполагается, что функция непрерывная и дифференцируемая. В этом случае для функции $\mathbf{Y}=\boldsymbol{\varphi}\,(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_n})$ математическое ожидание

$$\mathbf{m_y}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m}_{\mathbf{x}_1}, \mathbf{m}_{\mathbf{x}_2}, \ldots, \mathbf{m}_{\mathbf{x}_\mathbf{n}}), \qquad (5)$$

дисперсия

$$\mathbf{D_y}=\sum\left(\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dX_i}}\right)^2_{\mathbf{m}_{\mathbf{x_i}}}\cdot\mathbf{D}_{\mathbf{x_i}}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{X_n}$ — независимые случайные величины;

$\mathbf{m}_{\mathbf{x}_1}, \mathbf{m}_{\mathbf{x}_2}, \ldots, \mathbf{m}_{\mathbf{x}_\mathbf{n}}$ - их математические ожидания;

$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_1}, \mathbf{D}_{\mathbf{x}_2}, \ldots, \mathbf{D}_{\mathbf{x}_\mathbf{n}}$ - их дисперсии.

Индекс у производной $\left(\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dX_i}}\right)^2_{\mathbf{m}_{\mathbf{x_i}}}$ означает, что ее числовое значение определяют при $\mathbf{x_i}=\mathbf{m}_{\mathbf{x_i}}$.

Если математические ожидания аргументов не совпадают с их номинальными значениями, указываемыми в технической документации, то параметры распределения функции можно определить через номинальные значения функции $\mathbf{y_н}$ и аргументов $\mathbf{x_{1н}}$, $\mathbf{x_{2н}}$, …, $\mathbf{x_{nн}}$ и значения частных производных функций при номинальных значениях аргументов.

Тогда

$$m_y = y_н + \sum\left(\frac{dY}{dX_i}\right)_{x_{iн}} \cdot (x_{iн} - m_{xi}), \qquad D_y = \sum\left(\frac{dY}{dX_i}\right)^2_{x_{iн}} \cdot S^2_{x_i}.$$

5. Контрольные вопросы.

1. Какова последовательность нахождения плотности распределения функции одного аргумента?
2. По какому закону распределяется случайная величина, являющаяся линейной функцией нормально распределенного аргумента?
3. Что называется композицией двух законов распределения?
4. Какой закон распределения имеет композиция двух нормальных законов распределения?
5. Что называется квантилью?

6. Задания.

1. Контактные напряжения σ_H на рабочих поверхностях зубьев прямо пропорциональны корню квадратному крутящего момента **T**, т. е. $\sigma_H = b\sqrt{T}$, где **b** - коэффициент пропорциональности.

Определить плотность распределения контактных напряжений, если крутящий момент является случайной величиной распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием m_T и средним квадратическим отклонением σ_T.

2. Случайная величина – время безотказной работы устройства подчинена экспоненциальному закону с плотность распределения

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Одна из характеристик **Y** работы устройства связана с **t** зависимостью

$$Y = \varphi(t) = \ldots\ldots$$

Определить плотность распределения характеристики **Y**.

3. Несущая способность детали **R** и действующая нагрузка **F** распределены по нормальному закону.

Определить плотность распределения функции **Z = R— F**.

Вычислить вероятность **P(Z > 0)**, называемую вероятностью неразрушения или вероятностью безотказной работы, если математические ожидания несущей способности и нагрузки соответственно равны

m_R = …..... Н, m_F =…...... Н,

средние квадратические отклонения **R** и **F** соответственно равны

σ_R = ……. Н, σ_F =…….. Н,

4. Оценить методом линеаризации числовые характеристики коэффициента запаса прочности **n**, равного отношению несущей способности **R** и действующей нагрузки **F**.

Средние значения **R** и **F** соответственно равны

m_R = ……… Н, m_F = ……… Н;

коэффициенты вариации

v_R = ……; v_F = …...

Практическое занятие №5
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАДЁЖНОСТИ

1. Цель занятия: изучение метода статистического моделирования, приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Отчёт должен содержать:

1.Название работы.
2.Цель работы.
3.Ответы на контрольные вопросы.
4. Задание, расчёты.

4. Теоретическая часть.

3.1. Метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) применяется для решения задач надежности при отсутствии или сложности аналитических решений.

Его называют также методом имитационного моделирования за высокий уровень адекватности модели реальным изучаемым процессам. Метод является численным методом.

Сущность его заключается в том, что процесс функционирования технологической машины имитируется на ЭВМ.

Имитация случайных величин (параметров, нагрузок и т.п.) с заданным законом распределения производится при помощи случайных чисел.

Для получения случайных чисел используют специальные генераторы случайных чисел, таблицы случайных чисел или их вычисляют на ЭВМ.

Для метода характерны особенности: наглядная вероятностная трактовка, применимость к исследованию систем большой сложности, простая вычислительная процедура с одной стороны и большой объем вычислений для получения результатов достаточной точности с другой.

3.2. Одним из показателей ремонтопригодности и сохраняемости технологической машины является коэффициент готовности.

Коэффициент готовности — вероятность того, что технологическая машина окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме периодов, в которых эксплуатация не предусматривается.

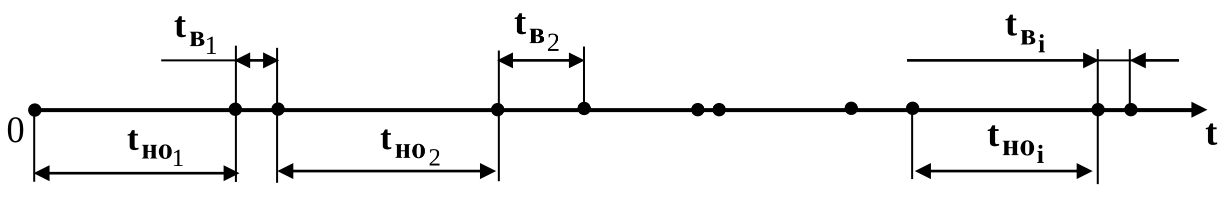


Рис. 1. Схема работы технологической машины.

Коэффициент определяют как отношение математических ожиданий времени нахождения в работоспособном состоянии к математическим ожиданиям суммы этого времени и времени внеплановых ремонтов.

5. Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется метод статистического моделирования?
2. Почему метод статистического моделирования называют также методом имитационного моделирования?
3. В чём заключается его сущность?
4. Как производится имитация случайных величин (параметров, нагрузок и т.п.) с заданным законом распределения?
5. Что используют для получения случайных чисел?
6. Какие особенности характерны для метода статистического моделирования?
7. К каким показателям относится коэффициент готовности?
8. Что представляет собой коэффициент готовности?
9. Как определяют коэффициент готовности?

6. Задание.

В процессе работы технологической машины возможны внезапные отказы, которые устраняют внеплановыми ремонтами (рис. 1).

Время работы машины до отказа $\mathbf{t_{но}}$ является случайной величиной распределённой по нормальному закону с параметрами:

- математическое ожидание $\mathbf{m_{t_{но}}}$ мин,

- среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{но}}}$ мин.

Время ремонта $\mathbf{t_{в}}$ также является случайной величиной распределённой по нормальному закону с параметрами:

- математическое ожидание $\mathbf{m_{t_{в}}}$ мин,

- среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{в}}}$ мин.

Рассчитать коэффициент готовности технологической машины; установить степень влияния на величину коэффициента готовности рассеяния продолжительности времени восстановления технологической машины - среднего квадратического отклонения $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{в}}}$.

7. Порядок выполнения работы.

7.1. Расчёт коэффициента готовности.

Расчёт ведется в табличной форме (см. таблицу 1).

1. Получить № варианта задания.

2. В колонки 2 и 4 в соответствии с № варианта вписать случайные нормально распределённые числа $\mathbf{x_i}$, ($\mathbf{i}$ =1, 2, …, 30) и $\mathbf{y_j}$, ($\mathbf{j}$ = 1, 2, …, 30) с математическим ожиданием $\mathbf{m}$ = 0 и средним квадратическим отклонением $\boldsymbol{\sigma}$ = 1 .

3. Вычислить $\mathbf{t_{но_i}}$, $\mathbf{t_{в_j}}$ и заполнить колонки 3 и 5.

4. Вычислить величину коэффициента готовности.

Коэффициент готовности равен

$$\mathbf{k_г} = \frac{\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{30} \mathbf{t_{но_i}}}{\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{30} \mathbf{t_{но_i}} + \sum\limits_{\mathbf{j}=1}^{30} \mathbf{t_{в_j}}} \qquad (1)$$

Таблица 1

№	Случ. норм. распред. числа $\mathbf{x_i}$	$\mathbf{t_{но_i}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{но}}} \cdot \mathbf{x_i} + \mathbf{m}_{\mathbf{t_{но}}}$, мин.	Случ. норм. распред. числа $\mathbf{y_j}$	$\mathbf{t_{в_j}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_в}} \cdot \mathbf{y_j} + \mathbf{m}_{\mathbf{t_в}}$, мин.
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1 2 3 … 30				
		$\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{30} \mathbf{t_{но_i}} =$		$\sum\limits_{\mathbf{j}=1}^{30} \mathbf{t_{в_j}} =$

7.2. Исследование влияния рассеяния продолжительности времени восстановления (среднего квадратического отклонения $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_в}}$) на величину коэффициента готовности.

Расчёт ведется в табличной форме (см. таблицу 2).

1. Получить № варианта задания.

2. В колонку 2 всем бригадам вписать указанные преподавателем случайные нормально распределённые числа $\mathbf{x_i}$, ($\mathbf{i}$ =1, 2, …, 30) с математическим ожиданием $\mathbf{m}$ = 0 и средним квадратическим отклонением $\boldsymbol{\sigma}$ = 1 .

Таблица 2

№	Случ. норм. распред. числа $\mathbf{x_i}$	$\mathbf{t_{но_i}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{но}}} \cdot \mathbf{x_i} + \mathbf{m}_{\mathbf{t_{но}}}$, мин.	Случ. норм. распред. числа $\mathbf{y_j}$	$\mathbf{t_{в_j}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_в}} \cdot \mathbf{y_j} + \mathbf{m}_{\mathbf{t_в}}$ мин.
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1 2 … 30				
		$\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{30} \mathbf{t_{но_i}} =$		$\sum\limits_{\mathbf{j}=1}^{30} \mathbf{t_{в_j}} =$

3. В колонку 4 каждой бригаде в соответствии с её № варианта вписать случайные нормально распределённые числа $\mathbf{y_j}$, ($\mathbf{j}$ = 1, 2, …, 30) с математическим ожиданием $\mathbf{m}$ = 0 и средним квадратическим отклонением $\boldsymbol{\sigma}$ = 1 .

4. Вычислить $\mathbf{t_{но}}$, $\mathbf{t_{в}}$ и заполнить колонки 3 и 5.

5. Вычислить величину коэффициента готовности по формуле (1).

6. На основании полученных всеми бригадами величин коэффициента готовности построить график $\mathbf{k_{г}} = \mathbf{f}\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{в}}}\right)$.

7. Сделать вывод о степени влияния на величину коэффициента готовности рассеяния продолжительности времени восстановления технологической машины (среднего квадратического отклонения $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{t_{в}}}$).

Практическое занятие №6

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ИЗНАШИВАНИИ

1. Цель занятия: изучение методов оценки надёжности при механическом изнашивании; приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, расчёты, выводы.

4. Теоретическая часть.

Износостойкость трущейся пары обычно характеризуют интенсивностью изнашивания $\boldsymbol{I}$, равной толщине изношенного слоя на единицу пути трения. По интенсивности изнашивания, скорости относительного перемещения трущихся поверхностей $\boldsymbol{v}$ и времени работы $\boldsymbol{t}$ можно оценить линейный износ детали

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Ivt} \qquad (1)$$

Интенсивностью изнашивания есть функция материалов, смазки, давления и скорости. Формула предполагает сохранение вида трения и отсутствие существенного влияния температуры на интенсивность изнашивания.

Оценку надежности следует вести:

- по изменению линейного размера одной детали, которое может характеризовать точность (например, измерительный, режущий инструмент) или прочность (например, рабочие органы машин);
- по изменению сочетания линейных размеров сопряженных деталей - зазоров в подшипниках, шагов зубчатых передач, которое может характеризовать динамические нагрузки, несущую способность, шум и выходную точность.

Обычно известно предельно допустимое значение размера $\boldsymbol{h_{пред}}$, при износе до которого детали снимают с эксплуатации. Также задано среднее значение $\boldsymbol{\bar{h}_{пред}}$ и среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{S_h}$ начального размера. В этом случае, если известны среднее значение интенсивности изнашивания $\boldsymbol{\bar{I}}$ и ее коэффициент вариации $\mathbf{v_I}$, можно оценить квантиль нормального распределения $\boldsymbol{u_p}$, а по ней вероятность безотказной работы детали $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{u_p} = -\frac{\boldsymbol{\bar{n}} - 1}{\sqrt{\boldsymbol{\bar{n}}^2 \boldsymbol{v}_\Delta^2 + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}}^2}}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{v}_\Delta = \boldsymbol{S_h} / \Delta$ - коэффициент вариации размера детали;

в случае расчета по предельно допустимому уменьшению размера

$$\bar{\Delta} = \bar{h}_{пред} - h_{пред},$$

а в случае увеличения (например, зазора)

$$\bar{\Delta} = h_{пред} - \bar{h}_{нач},$$

$n = \bar{\Delta} / \bar{I}vt$ - условный коэффициент запаса по износу, вычисленный как отношение средних значений допустимого износа $\bar{\Delta}$ к действительному $\bar{I}vt$.

Если рассматривается изнашивание подшипника скольжения без существенного искажения формы, то

$h_{пред}$ - предельно допустимый зазор,

$\bar{h}_{нач}$ — среднее значение начального зазора,

$S_h = \sqrt{S_в^2 + S_{вт}^2}$ - среднее квадратическое отклонение начального зазора,

где $S_в$, $S_{вт}$ - средние квадратические отклонения диаметров вала и втулки, принимаемые равными шестой части соответствующих допусков.

В цепных передачах ресурс обычно ограничен износом цепи, при котором может нарушиться ее зацепление со звездочкой (принимают допустимым увеличение шага цепи 3%). Хотя с изнашиванием цепи изнашивается также и звездочка, износ последней менее интенсивен, так как в сопряжении ролик цепи — зуб звездочки, имеет место, как правило, трение качения, а в шарнирном сопряжении двух звеньев большинства цепей — трение скольжения. В этом случае $h_{пред}$, $\bar{h}_{нач}$, S_h — предельное и среднее начальное значения шага цепи, а также среднее квадратическое отклонение начального шага.

Для технических целей используются расчеты на основе подобия:

$$I = k_1 p^m, \tag{3}$$

где k — здесь и далее с различными индексами коэффициенты пропорциональности;

p — давление в контакте;

m — показатель степени, зависящий от условий работы.

Эту формулу можно уточнить учетом других основных факторов, влияющих на интенсивность изнашивания и имеющих существенное рассеяние в эксплуатации.

Установлено, что для металлических материалов в естественном состоянии и отожженных сталей при трении их об абразивную шкурку или шлифовальный круг интенсивность изнашивания пропорциональна давлению p и обратно пропрциональна твёрдости изнашиваемого материала H:

$$I = k_2 \frac{p}{H}. \tag{6}$$

Эта закономерность сохраняется до твёрдости материала, не превышающей значений 0,6…0,75 твёрдости абразива. При больших значениях H зависимость интенсивности I от твёрдости несколько понижается по сравнению с расчётной. Для закалённых сталей зависимость износостойкости от твёрдости линейная, но со свободным членом.

В отдельных случаях показатель степени при твёрдости изнашиваемого материала $\boldsymbol{H}$ может отличаться от единицы и доходить до двух. Тогда предыдущая формула преобразуется к виду

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{k}_3 \frac{\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{m}}}{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{l}}}. \qquad (7)$$

Если рассматривается суммарный износ сопряжённых поверхностей 1 и 2, то $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2$. Следовательно, суммарный износ можно считать по (7), подставив в неё

$$\frac{1}{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{l}}} = \frac{1}{\boldsymbol{H}_1^{\boldsymbol{l}}} + \frac{1}{\boldsymbol{H}_2^{\boldsymbol{l}}}, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ – твёрдости сопряжённых поверхностей деталей.

Существенное влияние на интенсивность изнашивания оказывает коэффициента трения. Поэтому формулу для интенсивности изнашивания, если известны надежные значения коэффициента трения **f**, можно рассматривать в виде

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{k}_4 \frac{\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{l}}} \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{k}_4 = \boldsymbol{k}_3 / \boldsymbol{f}_0^{\boldsymbol{n}}$;

$\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{f}_0$ – коэффициенты трения рассматриваемой и исходной пар;

$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}$ – показатели степеней, зависящие от влияния смазки, термообработки деталей и степени близости $\boldsymbol{p}$ к предельному значению $[\boldsymbol{p}]$, при котором проявляется схватывание материалов.

Формула может быть полезной при пересчетах интенсивности изнашивания близких материалов. В большинстве случаев можно принимать $\boldsymbol{n} = 1$. Если имеет место трение стали по иному материалу, то $\boldsymbol{l} = 1$, если трение закаленной стали по закаленной стали, то $\boldsymbol{l} = 2...3$. что связано с резко повышенным у закаленных сталей сопротивлением к схватыванию, которое обычно существенно ускоряет изнашивание. При трении деталей без смазки и при граничном трении деталей со смазкой в случае, если $\boldsymbol{p} \le (0{,}7...0{,}8) \cdot [\boldsymbol{p}]$ показатель степени $\boldsymbol{m} = 1$, при большем давлении $\boldsymbol{m} = 2...3$. При полужидкостном трении деталей со смазкой при любых давлениях значение $\boldsymbol{m}$ повышается, доходя до 3. Это повышение связано с тем, что при росте общей нагрузки одновременно увеличивается ее доля, воспринимаемая контактом микронеровностей.

Интенсивность изнашивания растет пропорционально количеству поступающего в зону трения абразива $\boldsymbol{q}$, г/ч. Поэтому, если известно $\boldsymbol{q}$, то как при смазке, так и без нее

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{k}_5 \boldsymbol{q} \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{l}}} \qquad (10)$$

Формулы (7…10) позволяют выразить коэффициент вариации интенсивности изнашивания $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{I}}$ через коэффициенты вариации давления $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}$, коэффициента трения $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{f}}$, твердости $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{H}}$ и количества абразива $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{q}}$. Показатели степеней при $\boldsymbol{p}$,

f, ***H*** до накопления уточняющих данных принимаем детерминированными величинами

$$v_I = \sqrt{(mv_p)^2 + (nv_f)^2 + (lv_H)^2}\,. \qquad (11)$$

В случае изнашивания с заданным количеством абразива

$$v_I = \sqrt{v_q^2 + v_p^2 + (lv_H)^2}\,. \qquad (12)$$

Значение v_H при рассмотрении изнашивания сопряженных деталей может быть оценено по коэффициентам вариации v_{H_1}, v_{H_2} твердости деталей

$$v_H = \sqrt{\left(\frac{\bar{H}}{\bar{H}_1} v_{H_1}\right)^2 + \left(\frac{\bar{H}}{\bar{H}_2} v_{H_2}\right)^2}\,. \qquad (13)$$

Если принять в формуле (9) коэффициенты ***m, n, l*** случайными, то коэффициент вариации интенсивности изнашивания за счет только рассеяния значений показателей степеней будет оцениваться как

$$v_{Icmen} = \sqrt{\left(\ln\frac{\bar{p}}{p_0} S_m\right)^2 + \left(\ln\frac{\bar{f}}{f_0} S_n\right)^2 + \left(\ln\frac{\bar{H}}{H_0} S_l\right)^2}\,, \qquad (14)$$

где $\bar{p}$, $\bar{f}$, $\bar{H}$ — средние значения параметров p, f, H в рассматриваемом режиме работы пары трения;

p_o, f_o, H_o — исходные значения параметров p, f, H, при которых получено значение коэффициента k_4 в формуле (10);

S_m, S_n, S_l — средние квадратические отклонения показателей степеней ***m, n, l*** в рассматриваемом режиме работы.

Тогда при изнашивании без абразива в общем случае формула (11) дополняется введением члена $v_{I\,cmen}^2$ под корнем

$$v_I = \sqrt{(mv_p)^2 + (nv_f)^2 + (lv_H)^2 + v_{Icmen}^2}\,. \qquad (15)$$

Если расчетом или экспериментально оценена средняя интенсивность изнашивания, то формулы (5)...(15) позволяют по рассеянию параметров деталей и режима работы оценить вероятность безотказной работы детали по критерию износа.

5. Контрольные вопросы.

1. Чем обычно характеризуется износостойкость трущейся пары?
2. Как можно оценить линейный износ детали?
3. Функцией каких факторов является интенсивность изнашивания?
4. Как следует вести оценку надёжности при механическом изнашивании?
5. В каком случае можно оценить квантиль нормального распределения u_p, а по ней вероятность безотказной работы детали P?

Задание.

Оценить вероятность безотказной работы P по критерию износа подшипника скольжения, работающего при сухом трении.

Исходные данные:

1. Материал подшипника – углепластик (графитопласт) АМС-3 твердостью $\boldsymbol{HB_1}$ **……**.
2. Ресурс $\boldsymbol{t}$ = … **ч**.
3. Сопряжение подшипника с валом выполнено по посадке …….**.**
4. Вал стальной твердостью $\boldsymbol{HB_2}$ **…**.
5. Условия трения при среднем зазоре:

- наибольшее давление в контакте вал-подшипник $\boldsymbol{p}$ = … **МПа**,
- коэффициент вариации максимального давления, вызванного рассеянием зазора, $\mathbf{v_p}$ **= ….,**
- скорость относительного перемещения трущихся поверхностей $\boldsymbol{v}$ =… **м/с**,
- коэффициент трения $\boldsymbol{f}$ = ……...

6. Средняя интенсивность изнашивания $\boldsymbol{\bar{I}}$ =… **м/м.**
7. Предельно допустимый зазор $\boldsymbol{h_{пред}}$ = **0,15 мм**.
8. Рассеяние показателей степеней $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{l}$ отсутствует ($\boldsymbol{m}$ **= 1,** $\boldsymbol{n}$ **= 1,** $\boldsymbol{l}$ **= 1**).

Практическое занятие №7
НАДЕЖНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗКИ ПО СИСТЕМАМ

1. Цель занятия: изучение методов оценки надёжности последовательной системы при нормальном распределении нагрузки по системам; приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы;
- цель работы;
- ответы на контрольные вопросы;
- задание, расчёты, выводы.

4. Теоретическая часть.

4.1. Общие сведения

Надежность большинства изделий в технике приходится определять при рассмотрении их как систем.

Системы с позиций надежности могут быть последовательными, параллельными и комбинированными.

Наиболее наглядным примером *последовательных* систем могут служить автоматические линии без резервных цепей и накопителей. В них название реализуется буквально. Однако понятие «последовательная система» в задачах надежности - более широкое, чем обычно. К этим системам относят все системы, в которых отказ элемента приводит к отказу системы. Например, систему подшипников механических передач рассматривают как последовательную, хотя подшипники каждого вала работают параллельно.

Примерами *параллельных* систем являются энергетические системы из электрических машин, работающих на общую сеть, многомоторные самолеты, суда с двумя машинами и резервированные системы.

Примеры *комбинированных* систем - частично резервированные системы.

Многие системы состоят из элементов, отказы каждого из которых можно рассматривать как независимые. Такое рассмотрение достаточно широко применяется по отказам функционирования и иногда как первое приближение — по параметрическим отказам.

Системы могут включать элементы, изменение параметров которых определяет отказ системы или влияет на работоспособность других элементов. К этой группе относится большинство систем при рассмотрении их по параметрическим отказам. Например, отказ прецизионных металлорежущих станков по параметрическому критерию - потере точности - определяется совокупным изменением точности отдельных элементов: шпиндельного узла, направляющих и др.

В системе с параллельным соединением элементов представляет интерес знание вероятности безотказной работы всей системы, т. е. всех ее элементов, системы без одного, без двух и т. д. элементов в пределах сохранения системой работоспособности хотя бы с сильно пониженными показателями.

Сохранение работоспособности системы с параллельным соединением одинаковых элементов определяется с помощью биномиального распределения.

Рассматривают бином

$$[P(t)+Q(t)]^m$$

где m - показатель степени равняется общему числу параллельно работающих элементов;

$P(t)$ и $Q(t)$ - вероятности безотказной работы и соответственно отказа каждого из элементов.

Записав результаты разложения биномов с показателями степени 2, 3 и 4 соответственно для систем с двумя, тремя и четырьмя, параллельно работающими элементами, получают выражения, по которым можно определить вероятность безотказной работы всех элементов, вероятность отказа одного элемента и безотказной работы остальных, вероятность отказа не более одного элемента (отсутствие отказа или отказ одного элемента) и т.д., вероятность отказа всех элементов.

Надежность системы из последовательно соединенных элементов, подчиняющихся распределению Вейбулла $P_1(t)=e^{-t^{m_1}/t_{01}}$ и $P_2(t)=e^{-t^{m_2}/t_{02}}$, также подчиняется распределению Вейбулла $P(t)=e^{-t^{m}/t_0}$, где параметры m и t являются сложными функциями аргументов m_1, m_2, t_{01} и t_{02}.

Показатели надёжности систем могут быть рассчитаны также методом статистического (имитационного) моделирования.

4.2. Надёжность последовательной системы

Если рассеяние нагрузки по системам пренебрежимо мало, а несущие способности элементов независимы друг от друга, то отказы элементов статистически независимы и поэтому вероятность $P(R \geq F_0)$ безотказной работы последовательной системы с несущей способностью R при нагрузке F_0 равна произведению вероятностей безотказной работы элементов:

$$P(R \geq F_0)= \prod_{j=1}^{n} P(R_j \geq F_0)= \prod_{j=1}^{n} \left[1-F_{R_j}(F_0)\right], \qquad (1)$$

где $P(R_j \geq F_0)$ - вероятность безотказной работы j-го элемента при нагрузке F_0;

n - число элементов в системе;

$F_{R_j}(F_o)$ - функция распределения несущей способности j-го элемента при значении случайной величины $R_j = F_0$.

В большинстве случаев нагрузка имеет существенное рассеяние по системам, например универсальные машины (станки, автомобили и др.) могут эксплуатироваться в разных условиях. При рассеянии нагрузки по системам оценку вероятности безотказной работы системы $\boldsymbol{P(R \geq F)}$ в общем случае следует находить по формуле полной вероятности, разбив диапазон рассеяния нагрузки на интервалы $\Delta \boldsymbol{F}$, найдя для каждого интервала нагрузки произведение вероятности безотказной работы $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{R_j} \geq \boldsymbol{F_i}\right)$ у $\boldsymbol{j}$-го элемента при фиксированной нагрузке на вероятность этой нагрузки $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F_i}) \cdot \Delta \boldsymbol{F}$, затем, просуммировав эти произведения по всем интервалам,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{F}) = \sum \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F_i}) \cdot \Delta \boldsymbol{F} \cdot \prod_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{R_j} \geq \boldsymbol{F}_0\right)$$

или, переходя к интегрированию,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{F}) = \int_0^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}) \cdot \prod_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \left[1 - \boldsymbol{F_{R_j}}(\boldsymbol{F})\right] \cdot \boldsymbol{dF}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F})$ - плотность распределения нагрузки;

$\boldsymbol{F_{R_j}}(\boldsymbol{F})$ - функция распределения несущей способности $\boldsymbol{j}$-го элемента при значении несущей способности $\boldsymbol{R_j = F}$.

Расчеты по формуле (2) в общем случае трудоемки, так как предполагают численное интегрирование, а поэтому при большом $\boldsymbol{n}$ возможны только на ЭВМ. Чтобы не вычислять $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{F})$ по формуле (2), на практике часто оценивают вероятность безотказной работы систем $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R} \geq \boldsymbol{F}_{\max})$ при нагрузке $\boldsymbol{F}_{\max}$ максимальной из возможных нагрузок. Принимают, в частности, $\boldsymbol{F}_{\max} = \boldsymbol{m_F}(1 + 3\boldsymbol{v_F})$, где $\boldsymbol{m_F}$ - математическое ожидание нагрузки и $\boldsymbol{v_F}$ - её коэффициент вариации. Это значение $\boldsymbol{F}_{\max}$ соответствует наибольшему значению нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{F}$ на интервале, равном шести средним квадратическим отклонениям нагрузки. Такой метод оценки надежности существенно занижает расчетный показатель надежности системы.

Ниже предлагается достаточно точный метод упрощенной оценки надежности последовательной системы для случая нормального распределения нагрузки по системам. Идея метода состоит в аппроксимации закона распределения несущей способности системы нормальным распределением так, чтобы нормальный закон был близок истинному в диапазоне пониженных значений несущей способности системы, так как именно эти значения определяют величину показателя надежности системы.

Сравнительные расчеты на ЭВМ по формуле (2) (точное решение) и по предлагаемому упрощенному методу показали, что его точность достаточна для инженерных расчетов надежности систем, у которых коэффициент вариации несущей способности не превышает 0,1...0,15, а число элементов системы не превышает 10...15. Метод заключается в следующем:

1. Задаются двумя значениями $\boldsymbol{F_A}$ и $\boldsymbol{F_B}$ фиксированных нагрузок. По формуле (3.1) проводят расчет вероятностей безотказной работы системы при этих нагрузках. Нагрузки подбирают с тем расчетом, чтобы при оценке надежности системы вероятность безотказной работы системы получилась в пределах

$P(R \geq F_A)$= 0,45…0,60 и $P(R \geq F_B)$= 0,95...0,99, т. е. охватывали бы представляющий интерес интервал. Ориентировочные значения нагрузок можно принимать близкими значениям $F_A \approx (1+3v_F)m_F$, $F_B \approx (1+v_F)m_F$.

2. По таблице находят квантили нормального распределения u_{pA} и u_{pB} соответствующие найденным вероятностям.

3. Аппроксимируют закон распределения несущей способности системы нормальным распределением с параметрами математического ожидания m_R и коэффициента вариации v_R. Пусть S_R - среднее квадратическое отклонение аппроксимирующего распределения. Тогда $m_R - F_A + u_{pA} S_R = 0$ и $m_R - F_B + u_{pB} S_R = 0$. Из приведенных выражений получаем выражения для m_R и $v_R = \dfrac{S_R}{m_R}$:

$$m_R = F_A - \frac{F_B - F_A}{u_{pB} - u_{pA}} \cdot u_{pA}, \qquad (3)$$

$$v_R = \frac{F_B - F_A}{F_A u_{pB} - F_B u_{pA}}. \qquad (4)$$

4. Вероятность безотказной работы системы $P(R \geq F)$ для случая нормального распределения нагрузки F по системам с параметрами математического ожидания m_F и коэффициента вариации v_F находят обычным способом по квантили нормального распределения u_p. Квантиль u_p вычисляют по формуле, отражающей факт, что разность двух распределенных нормально случайных величин (несущей способности системы и нагрузки) распределена нормально с математическим ожиданием, равным разности их математических ожиданий, и средним квадратическим, равным корню из суммы квадратов их средних квадратических отклонений:

$$\mathbf{u_p} = -\frac{\bar{\mathbf{n}} - 1}{\sqrt{(\bar{\mathbf{n}}\mathbf{v_R})^2 + \mathbf{v_F^2}}}, \qquad (5)$$

где $\bar{n} = \dfrac{m_R}{m_F}$ - условный запас прочности по средним значениям несущей способности и нагрузки.

5. Контрольные вопросы

1. Какие могут быть системы с позиций надёжности?
2. Какие системы относятся к последовательным?
3. С помощью чего определяется сохранение работоспособности системы с параллельным соединением одинаковых элементов?
4. Какому распределению подчиняется надежность системы из последовательно соединенных элементов, подчиняющихся распределению Вейбулла?
5. Как могут быть рассчитаны показатели надёжности систем?

Задания

1. Требуется оценить вероятность безотказной работы одноступенчатого редуктора, если известно следующее. Условные запасы прочности по средним значениям несущей способности и нагрузки составляют: зубчатой передачи $\bar{n}_1$ =……; подшипников входного вала $\bar{n}_2$ = $\bar{n}_3$ = …..; подшипников выходного вала $\bar{n}_4$ = $\bar{n}_5$ = …., выходного и входного валов $\bar{n}_6$ = $\bar{n}_7$ = …. Это соответствует математическим ожиданиям несущей способности элементов:

$$m_{R1} = \bar{n}_1 \cdot m_F = \ldots..,$$

$$m_{R2} = m_{R3} = \bar{n}_2 \cdot m_F = \ldots..,$$

$$m_{R4} = m_{R5} = \bar{n}_4 \cdot m_F = \ldots..,$$

$$m_{R6} = m_{R7} = \bar{n}_6 \cdot m_F = \ldots...$$

Часто в редукторах $\bar{n}_6$ и $\bar{n}_7$ и соответственно m_{R_6} и m_{R_7} существенно больше. Задано, что несущие способности передачи, подшипников и валов нормально распределены с одинаковыми коэффициентами вариации $v_{R_1} = v_{R_2} = \ldots = v_{R_7}$ = ..… , а нагрузка по редукторам распределена также нормально с коэффициентом вариации v_F = …… .

2. Для условия рассмотренного выше примера найдем вероятность безотказной работы редуктора по максимальной нагрузке в соответствии с методикой, применявшейся ранее для практических расчетов. Максимальную нагрузку принимаем $F_{\max} = m_F\left(1 + 1{,}3 v_F\right) = 1{,}3 m_F$.

Практическое занятие №8
НАДЕЖНОСТЬ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

1. Цель занятия: изучение методов оценки надёжности резьбовых соединений; приобретение навыков выполнения расчётов при решении задач надёжности.

2. Порядок выполнения работы:

1. Изучить теоретическую часть.
2. Записать ответы на контрольные вопросы.
3. Получить индивидуальное задание.
4. Выполнить расчёты.

3. Указания по оформлению отчёта

Отчёт должен содержать:

- название работы.
- цель работы.
- ответы на контрольные вопросы.
- задание, расчёты.

4. Теоретическая часть.

4.1. Общие сведения

Вопрос о надежности резьбовых соединений возникает в основном в связи с рассеянием нагрузок, предела выносливости болтов, разбросом их ударной прочности при низких температурах и с недостаточной надежностью многих применяемых средств стопорения.

Рассмотрим надежность болтов по критерию прочности при статических и переменных нагрузках. Специфика расчета резьбовых соединений на надежность может быть сведена к учету рассеяния начальной затяжки и к уточненному учету рассеяния концентрации напряжений. В расчете принимаем случайными величинами внешнюю нагрузку, силу начальной затяжки, предел выносливости материала и эффективный коэффициент концентрации напряжений в связи с разбросом радиуса выкружки резьбы.

4.2. Напряжения в болте от силы затяжки.

Сильная затяжка повышает надежность работы резьбового соединения, так как при этом повышается жесткость стыка и существенно понижается доля переменной нагрузки, приходящейся на болт.

Чтобы обеспечить требуемую затяжку болтов, силу затяжки контролируют. Методы контроля основаны на замере: удлинения болта (шпильки), угла поворота гайки, крутящего момента при затяжке гайки.

Первый метод наиболее точен, третий — наиболее распространен вследствие простоты и приспособленности для крупносерийного производства. Контроль в этом случае производят с помощью динамометрического ключа.

Считается, что при затяжке динамометрическим ключом разброс силы затяжки составляет ± (25...30) %, при затяжке на определенный угол поворота гайки ± 15%, при контроле затяжки по деформации тарированной упругой шайбы ± 10%, при контроле удлинения болта ± (3...5) %. Этим значениям разброса соответвуют приблизительно следующие коэффициенты вариации силы затяжки: 0,09; 0,05; 0,04; 6,02.

4.3. Напряжения в болте от внешней нагрузки

Напряжения в болте от внешней нагрузки в затянутом резьбовом соединении определяются с учетом того, что лишь χ-я часть нагрузки передается на болты. Величина χ, называемая коэффициентом основной нагрузки, равна

$$\chi = \frac{\lambda_{\partial}}{\lambda_{\partial} + \lambda_{б}}$$

где $\lambda_{б}$, λ_{∂} — податливость болта и деталей.

В рабочем диапазоне внешних нагрузок при достаточных силах затяжки болтов для стальных и чугунных деталей обычно χ = ***0,2...0,3***. Предполагая, что стыки достаточно сильно затянуты и, поэтому контактная жесткость мало меняется от давления, до специального изучения рассеяния контактной жесткости можно принимать χ детерминированной величиной. Отсюда коэффициент вариации номинальных напряжений в болте, вызванный рассеянием внешней нагрузки, полагаем равным коэффициенту вариации внешней нагрузки.

4.4. Коэффициент концентрации в резьбе

Коэффициент концентрации в резьбе в первую очередь определяется формой впадины резьбы. Форма может быть неоговоренной или закругленной.

Для ответственных высоко нагруженных соединений при переменных и динамических нагрузках должна применяться резьба с закругленной впадиной. У этой резьбы радиус кривизны впадины не должен быть менее ***0,1P***, где ***P*** — шаг резьбы. Рассеяние радиуса впадины заключено в пределах ***(0,1...0,144)P*** независимо от степени точности резьбы.

Эффективный коэффициент концентрации в резьбе определяют экспериментально или через теоретический коэффициент концентрации напряжений и коэффициент чувствительности. Теоретический коэффициент концентрации для наиболее распространенного сопряжения болта с гайкой, работающей на сжатие, связан с шагом ***P*** и радиусом выкружки ***R*** зависимостью

$$\alpha = 1 + 1{,}1\sqrt{\frac{P}{R}}\,. \tag{1}$$

Отсюда среднее значение α и коэффициент вариации v_{α} коэффициента концентрации напряжений

$$\bar{\alpha} = 1 + 1{,}1\sqrt{\frac{2P}{R_{\max} + R_{\min}}} = 1 + 1{,}1\sqrt{\frac{2P}{(0{,}144 + 0{,}1)R}} = 4{,}15\,; \tag{2}$$

$$v_{\alpha} = \frac{1}{6\bar{\alpha}}(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) = \frac{1}{6\bar{\alpha}}1{,}1\left(\sqrt{\frac{P}{R_{\min}}} - \sqrt{\frac{P}{R_{\max}}}\right) = 0{,}023\,. \tag{3}$$

Болты с резьбой, радиус впадины которых ***(0,15...0,18)P*** имеют повышенный предел выносливости. Для этой резьбы $\bar{\alpha}$ = ***3,70*** и v_{α} = ***0,011***.

Вероятностный расчет работоспособности и надежности болтового соединения сводится к оценке вероятности $\boldsymbol{P}$ безотказной работы соединения, в простейшем предположении равной произведению $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} \cdot \boldsymbol{P_2} \cdot \boldsymbol{P_3} \cdot \ldots$ вероятностей безотказной работы по основным критериям: нераскрытию стыка, несдвигаемости стыка, прочности болтов и т. д. Количество учитываемых критериев определяется в зависимости от их значимости.

4.5. Вероятность безотказной работы по критерию нераскрытия стыка

Вероятность безотказной работы по критерию нераскрытия стыка $\boldsymbol{P_1}$ соответствует вероятности того, что наименьшее напряжение сжатия в стыке после приложения внешней нагрузки больше нуля.

Для простейшего случая, когда единичное болтовое соединение нагружено центральной отрывающей силой $\boldsymbol{F}$ (величина случайная), вероятность $\boldsymbol{P_1}$ определяют из условия

$$\boldsymbol{P_1} = \boldsymbol{Вер}\left[\frac{\boldsymbol{F_{зат}}}{\beta_c} > (\boldsymbol{1} - \chi)\cdot \boldsymbol{F}\right],$$

где $\boldsymbol{F_{зат}}$ — сила затяжки; $(\boldsymbol{1} - \chi)$ — множитель, характеризующий долю внешней нагрузки на стык; $\beta_c = \boldsymbol{1{,}1}$ — коэффициент, учитывающий возможное ослабление затяжки вследствие обмятия стыков.

Вероятность $\boldsymbol{P_1}$ безотказной работы определяем по таблице в зависимости от квантили

$$\boldsymbol{u_{P_1}} = -\frac{\bar{\boldsymbol{n}}_{P_1} - \boldsymbol{1}}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{n}}_{P_1}^2 \boldsymbol{v}_{зат}^2 + \boldsymbol{v}_F^2}}, \tag{4}$$

где $\bar{\boldsymbol{n}}_{P_1}$ — коэффициент запаса нераскрытия стыка по средним нагрузкам

$$\bar{\boldsymbol{n}}_{P_1} = \frac{\bar{\boldsymbol{F}}_{зат}}{\beta_c \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{1} - \chi)}.$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{F}}_{зат}$, $\bar{\boldsymbol{F}}$ и $\boldsymbol{v}_{зат}$, $\boldsymbol{v_F}$ — средние значения и коэффициенты вариации случайных сил $\boldsymbol{F_{зат}}$ и $\boldsymbol{F}$ соответственно.

4.6. Вероятность безотказной работы по критерию несдвигаемости стыка

Вероятность безотказной работы по критерию несдвигаемости стыка $\boldsymbol{P_2}$ единичного затянутого болтового соединения, нагруженного сдвигающей силой $\boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{Вер}\left(\frac{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{F_{зат}}}{\beta_c} > \boldsymbol{F}\right),$$

где $\boldsymbol{f}$ – коэффициент трения.

По таблице определяют $\boldsymbol{P_2}$ в зависимости от величины квантили

$$\boldsymbol{u_{P_2}} = -\frac{\bar{\boldsymbol{n}}_{P_2} - \boldsymbol{1}}{\sqrt{\bar{\boldsymbol{n}}_{P_2}^2 \boldsymbol{v}_{\lim}^2 + \boldsymbol{v}_F^2}}, \tag{5}$$

где коэффициент запаса несдвигаемости стыка по средним нагрузкам

$$\bar{\boldsymbol{n}}_2 = \frac{\bar{\boldsymbol{f}} \cdot \bar{\boldsymbol{F}}_{зат}}{\beta_c \cdot \bar{\boldsymbol{F}}}; \qquad \boldsymbol{v}_{\lim} = \sqrt{\boldsymbol{v}_{зат}^2 + \boldsymbol{v}_f^2};$$

где $\bar{f}$ и v_f — среднее значение и коэффициент вариации коэффициента трения f.

4.7. Вероятность безотказной работы по критерию статической прочности

Вероятность безотказной работы по критерию статической прочности равна

$$P_3 = Вер(\sigma_{рас} > \sigma_t)$$

где $\sigma_{рас}$ — расчетное напряжение в опасном сечении болта, величина случайная; σ_t — предел текучести материала болта, величина случайная.

Расчетное напряжение в болте единичного болтового соединения, нагруженного центральной отрывающей силой, определяется выражением

$$\sigma_{рас} = \frac{4}{\pi \cdot d_p^2}(k \cdot F_{зат} + \chi \cdot F),$$

где d_p — расчетный диаметр резьбы болта; k — коэффициент, учитывающий кручение болта (если кручение при затяжке исключено, $k = 1$, в остальных случаях **k** = $1{,}3$).

Среднее значение напряжения $\bar{\sigma}_{рас}$ определяем по зависимости для $\sigma_{рас}$, в которую вместо $F_{зат}$ и F подставляем их средние значения $\bar{F}_{зат}$ и $\bar{F}$.

Среднее квадратическое отклонение расчетного напряжения

$$S_{рас} = \bar{\sigma}_{рас} \cdot v_{рас} = \frac{4}{\pi \cdot d_P^2}\sqrt{k^2 \cdot v_{зат}^2 \cdot \bar{F}_{зат}^2 + \chi^2 \cdot \bar{F}^2 \cdot v_F^2}\ .$$

Решая уравнение относительно коэффициента вариации $v_{рас}$, получаем

$$v_{рас} = v_{зат}\frac{1}{1+a}\sqrt{1 + a^2\frac{v_F^2}{v_{зат}^2}}; \qquad здесь\ a = \frac{\chi \cdot \bar{F}}{k \cdot \bar{F}_{зат}}.$$

Вследствие относительной малости величины a и соизмеримости коэффициентов вариации v_F и $v_{зат}$ технических расчетах принимаем $v_{рас} = v_{зат}$.

Вероятность безотказной работы по критерию статической прочности P_3 находим по квантили

$$u_{P_3} = -\frac{\bar{n}_{P_3} - 1}{\sqrt{\bar{n}_{P_3}^2 v_{\sigma_t}^2 + v_{рас}^2}}, \tag{6}$$

где коэффициент запаса прочности по средним напряжениям

$$\bar{n}_{P_3} = \frac{\bar{\sigma}_t}{\bar{\sigma}_{рас}} = \frac{\pi \cdot d_P^2 \cdot \bar{\sigma}_t}{4 \cdot (k \cdot \bar{F}_{зат} + \chi \cdot \bar{F})}, \tag{7}$$

здесь $\bar{\sigma}_t$ и v_{σ_t} — среднее значение и коэффициент вариации предела текучести материала болта.

4.8. Вероятность безотказной работы по критерию сопротивления усталости

Вероятность безотказной работы по критерию сопротивления усталости равен

$$P_4 = Вер(\sigma_a < \sigma_{-1д}),$$

где σ_a —действующие напряжения, приведенные к симметричному циклу;

$\sigma_{-1д}$ — предел выносливости болта.

Среднее значение действующих напряжений определяем по формуле

$$\bar{\sigma}_a = \frac{4}{\pi \cdot d_P^2}\left[0,5 \cdot \chi \cdot \bar{F} + \frac{\psi}{\bar{k}_\sigma}\left(\bar{F}_{зат} + 0,5 \cdot \bar{F} \cdot \chi\right)\right], \qquad (8)$$

где $\bar{F}$ — среднее (учитывая случайный характер силы) значение максимальной нагрузки цикла; $0,5\bar{F}$ — среднее значение амплитуды нагрузки; ψ — коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла; $\bar{k}_\sigma$ — среднее значение эффективного коэффициента концентрации напряжений, принимают по таблице в зависимости от предела прочности материала $\sigma_в$:

$\sigma_в$, МПа	*400*	*600*	*800*	*1000*
$\bar{k}_\sigma$	*3,0*	*3,9*	*4,8*	*5,2*

или вычисляют по формуле: $\bar{k}_\sigma = 1 + q(\bar{\alpha} - 1)$, где q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, равный *0,5...0,6* для углеродистых сталей и *0,7...0,8* для легированных сталей; $\bar{\alpha}$ — среднее значение теоретического коэффициента концентрации напряжений.

Коэффициент вариации напряжения σ_a можно принимать равным коэффициенту вариации нагрузки v_F, так как влияние на сопротивление усталости средней составляющей напряжений мало по сравнению с переменной.

Среднее значение предела выносливости болта

$$\bar{\sigma}_{-1д} = \bar{\sigma}_{-1}\frac{\varepsilon_\sigma}{\bar{k}_\sigma}\beta \cdot \beta_{уп}, \qquad (9)$$

где β — коэффициент; для соединения стандартными болтами и гайками ($\beta = 1$, для соединений типа стяжки $\beta = 1,5... 1,6$); $\beta_{уп}$ - коэффициент технологического упрочнения; для болтов с нарезанной резьбой $\beta_{уп} = 1$, для болтов с накатанной резьбой $\beta_{уп} = 1,2...1,3$; $\bar{\sigma}_{-1}$ — среднее значение предела выносливости гладкого образца; ε_σ — коэффициент влияния абсолютных размеров.

Коэффициент вариации предела выносливости болта $v_{-1д}$ включает коэффициент вариации предела выносливости стали одной партии, приближенно принимаемого $v_д = 0,06...0,08$, коэффициент среднего предела выносливости по партиям стали, приближенно принимаемого равным $v_п = 0,08$, и эффективного коэффициента концентрации напряжений $v_{k\sigma} \approx v_\sigma$, и вычисляется по формуле

$$v_{-1d} = \sqrt{v_д^2 + v_п^2 + v_\alpha^2}\,. \qquad (10)$$

Вероятность безотказной работы по критерию сопротивления усталости P_4 определяем в зависимости от квантили

$$u_{P_4} = -\frac{\bar{n}_{P_4} - 1}{\sqrt{\bar{n}_{P_4}^2 \cdot v_{-1д}^2 + v_a^2}}; \qquad \bar{n}_{P_4} = \frac{\bar{\sigma}_{-1д}}{\bar{\sigma}_a}.$$

5. Контрольные вопросы

1. В связи с чем возникает вопрос о надёжности резьбовых соединений?

2. К чему может быть сведена специфика расчета резьбовых соединений на надежность?
3. Что в расчете на надежность принимаем случайными величинами?
4. Что повышает надёжность работы резьбового соединения и почему?
5. На чём основаны методы контроля затяжки?
6. Какой метод затяжки наиболее точен и распространён?
7. Каков разброс силы затяжки?
8. Как определяются напряжения в болте от внешней нагрузки?
9. Чему равен коэффициент основной нагрузка?
10. Чем определяется коэффициент концентрации в резьбе?
11. Как определяют эффективный коэффициент концентрации в резьбе?
12. К чему сводится вероятностный расчёт работоспособности и надёжности болтового соединения?
13. Как учитывается количество учитываемых критериев при этом?
14. Чему соответствует вероятность безотказной работы болтового соединения по критерию нераскрытия стыка?
15. Чему равна вероятность безотказной работы болтового соединения по критерию несдвигаемости стыка?
16. Чему равна вероятность безотказной работы болтового соединения по критерию статической прочности?
17. Чему равна вероятность безотказной работы болтового соединения по критерию сопротивления усталости?

Задание.

Две стальные детали стянуты болтом ……. (шаг резьбы $\boldsymbol{P}$ = …… мм, внутренний диаметр резьбы $\boldsymbol{d_P}$ = …….. мм) класса прочности ……..

Соединение нагружено растягивающей силой, изменяющейся от $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{F}$.

Среднее значение силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ = …. Н. Коэффициент вариации силы $\boldsymbol{v_F}$ =…..

Оценить вероятность безотказной работы по основным критериям: нераскрытия стыка, статической прочности и сопротивления усталости болта.

Контроль затяжки осуществляется динамометрическим ключом.

Принимаем:

χ = …;	ψ = …;	β = …;
$\overline{\sigma}_t$ = … МПа;	$v_{зат}$ = …;	$\beta_{уп}$ = …;
$\overline{\sigma}_{-1}$ = … МПа;	$v_д$ = …;	β_c = …;
v_{σ_t} = ….;	v_n = …;	$\overline{k}_\sigma$ = …;
$\overline{\sigma}_{зат} = 0{,}5\overline{\sigma}_t$ = …. МПа;	v_α = …;	ε_σ = ….

Библиографический список

1. Острейковский, В. А. Теория надежности : учебник для вузов / В. А. Острейковский .— 2-е изд., испр. - Москва: Высш. шк., 2008 - 464 с. - ISBN 978-5-06-005954-0. — Текст: непосредственный.

2. Половко, А.М. Основы теории надежности: учеб.пособие для вузов / А.М. Половко, С.В. Гуров 2-е изд.,перераб.и доп. - СПб.: БХВ-Петербург, 2006 - 704с.: ил. – ISBN 5-94157-541-6. — Текст: непосредственный.

3. Решетов, Д.Н. Надежность машин: учеб. пособие для вузов / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев ; под ред. Д.Н. Решетова. - Москва: Высш. шк., 1988 - 238 с.: ил. - ISBN 5-06-001200-X. — Текст: непосредственный.

4. Решетов, Д.Н. Детали машин: учебник для вузов / Д.Н. Решетов. – Москва: Машиностроение, 1989 – 496 с. – ISBN 5-217-00335-9. — Текст: непосредственный.

Содержание