

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В. П. Грязева
Кафедра «Стрелково-пушечное вооружение»

Заведующий кафедрой



В. К. Зеленко

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Ускорительные комплексы мегасайенс класса»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы магистратуры

по направлению подготовки
15.04.05 Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств

с направленностью (профилем)
Проектирование и конструирование механических частей физических
установок

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 150405-06-22

Тула 2022 год

Разработчик(и) методических указаний

Никольский В. В. профессор, докт. техн. наук, доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



Практическое занятие № 1

БЕТАТРОН

Цель: закрепление теоретических основ физики работы циклического индукционного ускорителя электронов – бетатрона, включающих принцип работы, условия ускорения и фокусировки пучка.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Структурная схема бетатрона и особенности его работы

Бетатрон – циклический ускоритель электронов, в котором переменный поток вектора индукции магнитного поля $B(r,t) = e_z B(r,t)$, проходящий через замкнутую круговую орбиту электрона, создает на ней вихревое ускоряющее электрическое поле (e_z – орт вертикальной цилиндрической координаты z ; перпендикулярной плоскости орбиты; r – текущая радиальная координата).

На рис. 1.1 представлен схематический разрез наиболее простого конструктивного варианта бетатрона с отпаянной вакуумной камерой, где происходит ускорение электронов.

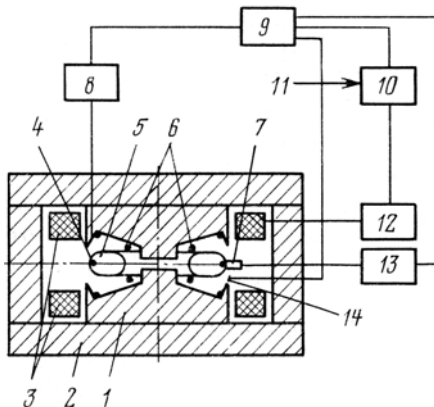


Рис. 1.1. Структурная схема бетатрона

Электромагнит бетатрона для обеспечения устойчивости движения электронов на орбите имеет специальную форму полюсных наконечников 1 со скосом к его центральной части. Благодаря такой форме наконечников в области, прилегающей к орбите, создается магнитное поле, спадающее к периферии. Магнитопровод 2 обеспечивает замыкание магнитного потока, создаваемого обмотками 3.

В рассматриваемой конструкции мишень 4, где образуются тормозные γ -кванты, расположена внутри запаянной вакуумной камеры 5. Для сброса электронов на мишень используется специальная экстракторная обмотка 6, возбуждаемая импульсом тока от источника питания 8. В результате в области орбиты нарушается условие 2:1 (см. ниже), и электроны по разворачивающейся спирали начинают смещаться к мишени.

Инжектор бетатрона 7 представляет собой коаксиальный диод с внутренним термокатодом. На диод подается импульс напряжения с амплитудой в несколько десятков киловольт и длительностью от 5 до 20 мкс. Этот импульс обеспечивает извлечение, предварительное ускорение и фокусировку электронов. Длительность импульса определяется временем выхода электрона на равновесную орбиту в центре вакуумной камеры. Максимальная длительность импульса, в течение которого электроны могут быть захвачены в процесс ускорения, будет соответствовать времени, за которое равновесная орбита сместится от внешней стенки вакуумной камеры к внутренней.

Описанный вид инжекции называется внутренней инжекцией. Подобный вид инжекции применяется в машинах с малыми размерами, а следовательно, и на малые энергии электронов. Существует и другой, внешний, способ инжекции. В этом случае электронный пучок в бетатрон инжектируется из внешнего источника.

Бетатрон снабжен также пультом управления 9, распределительным щитом 10, системой энергопитания 11, конденсаторной батареей 12, соединенной параллельно с катушками электромагнита для обеспечения более экономичного режима питания электромагнита. Емкость батареи выбирается из резонансного условия

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} . \quad (1.1)$$

Для обеспечения импульсного режима питания инжектора используется специальный модулятор 13. Изменение магнитного поля контролируется с помощью магнитного датчика 14.

Другие разновидности конструкций бетатрона можно найти в литературных источниках [3–5].

Ускорение электронов в бетатроне происходит на первой четверти периода изменения магнитного поля:

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4f},$$

когда область возрастания магнитного поля совпадает с областью положительного значения его индукции. При этом за один цикл ускорения может быть ускорено до 10^{10} частиц. Максимальная энергия на выходе бетатрона, как правило, не превышает 50 МэВ.

Улучшить параметры бетатрона можно путем введения подмагничивания постоянным полем, величина которого равна амплитуде переменного магнитного поля. Выражение для индукции магнитного поля на равновесной орбите будет иметь вид:

$$B(R, t) = B_0(1 - \cos(2\pi ft)). \quad (1.2)$$

При этом временная область возможного ускорения увеличивается до полупериода изменения магнитного поля.

Основное применение бетатрон нашел при создании полей тормозного гамма излучения. Кроме того, бетатроны, снабженные системой вывода электронного пучка, могут использоваться в качестве инжекторов синхротронов, а также при решении различных технологических задач.

1.2. Принцип действия бетатрона

Выражение для магнитного потока определяется следующими соотношениями [1]:

$$\Phi = \int_0^R B(r, t) dS = 2\pi \int_0^R r B(r, t) dr = \pi R^2 \langle B(r, t) \rangle, \quad (1.3)$$

где R – радиус орбиты; $\langle B(r, t) \rangle$ – величина магнитной индукции, усредненная по площади, охватываемой орбитой ускоряемой час-

тицы. При этом радиус орбиты в бетатроне, как правило, является постоянной величиной.

Величину ускоряющего электрического поля на орбите $E(R, t)$ можно определить, используя закон электромагнитной индукции:

$$E(R, t)2\pi R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Учитывая соотношение (1.3) получаем:

$$E(R, t) = -\frac{R}{2} \frac{d \langle B(r, t) \rangle}{dt}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим сначала азимутальное движение частиц в бетатроне. Пренебрегая вертикальными и радиальными колебательными процессами, которые на ускорение частиц в бетатроне не оказывают существенного влияния, можно записать условие, определяющее существование в ускорителе замкнутой круговой равновесной орбиты у электрона:

$$\frac{\gamma m_0 v^2}{R} = e v B(r, t), \quad (1.5)$$

где R – радиус орбиты; m_0 – масса покоя электрона; e – элементарный электрический заряд; v и $\gamma = \frac{W}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ – азимутальная скорость и приведенная энергия частицы; $B(r, t)$ – магнитное поле на орбите.

В левой части уравнения (1.5) стоит релятивистское выражение для центробежной силы в системе координат, связанной с электроном, в правой части – выражение для уравновешивающей ее радиальной силы Лоренца.

Из уравнения (1.5) вытекает связь между величинами импульса электрона, радиусом орбиты и индукцией магнитного поля на орбите:

$$p = \gamma m_0 \beta c = e R B(R, t). \quad (1.6)$$

Если полную энергию частицы измерять в мегоэлектронвольтах, радиус в метрах, а магнитное поле в теслах, то формулу (1.6) можно переписать так:

$$W = \frac{300B(R,t)R}{\beta}, \quad (1.7)$$

где приведенная скорость частицы β .

Из формулы (1.5) можно получить также выражение для угловой скорости обращения частицы на орбите

$$\omega = \frac{eB}{\gamma m_0} = \frac{v}{R}. \quad (1.8)$$

Величина прироста энергии электрона, движущегося по замкнутой траектории (орбите), будет определяться значением вихревого электрического поля на орбите. При этом уравнение движения, описывающее этот процесс в соответствии с выражением (1.6), можно записать так:

$$\frac{dp}{dt} = -eE(R,t) = \frac{R}{2} \frac{d \langle B(r,t) \rangle}{dt}, \quad (1.9)$$

где p – величина азимутального импульса электрона.

Дифференцируя выражение (1.6) по времени, при условии, что электрон находится на равновесной орбите с радиусом R , имеем:

$$\frac{dp}{dt} = eR \frac{dB(R,t)}{dt}. \quad (1.10)$$

Подставляя результат в уравнение (1.9) получаем следующее соотношение:

$$2 \frac{dB(R,t)}{dt} = \frac{d \langle B(r,t) \rangle}{dt}, \quad (1.11)$$

которое было впервые получено Р. Видероз в 1928 г. и принято называть **условием 2:1**. Из этого соотношения следует, что для поддержания постоянного равновесного радиуса орбиты электрона, поле на орбите должно меняться в два раза медленнее, чем средняя величина поля внутри орбиты.

После интегрирования в (1.11) получается более общее интегральное соотношение:

$$2B(R,t) = \langle B(r,t) \rangle + C, \quad (1.12)$$

где C есть константа, которая определяется из начальных условий. При отсутствии постоянного магнитного поля на орбите $C = 0$.

1.3. Прирост энергии частиц в бетатроне

При движении по окружности в однородном магнитном поле заряженная частица излучает электромагнитную энергию. Этот эффект принято называть магнитотормозным или синхротронным излучением (СИ). При большой скорости частиц поток энергии Q , излучаемый каждым электроном в единицу времени, можно определить по формуле [2]:

$$Q = \frac{8\pi}{3} \gamma^2 B^2 r_0^2 \varepsilon_0 c, \quad (1.13)$$

где $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Соответственно, потери энергии электроном за один оборот можно найти по формуле

$$W_{\text{пот}} = QT, \quad (1.14)$$

где T – период обращения частицы.

В ультрарелятивистском случае это выражение можно упростить и записать в виде

$$W_{\text{пот}} \approx \frac{90W^4}{R}, \quad (1.15)$$

где W – энергия электрона, выраженная в ГэВ; R – радиус орбиты в метрах. Сами потери энергии будут получены в кэВ/оборот.

Как видно из приведенных формул, потери на излучение быстро возрастают с увеличением энергии частиц. Это обстоятельство существенно ограничивает максимальную энергию пучка, которую можно получить в бетатроне. Действительно, если магнитное поле в бетатроне меняется во времени по гармоническому закону с частотой f :

$$B(R, t) = B_0 \sin(2\pi ft), \quad (1.16)$$

то прирост энергии электрона за один оборот с учетом только внешнего ускоряющего поля можно записать в виде:

$$\Delta W(t) = (2\pi R)^2 f B_0 \cos(2\pi ft). \quad (1.17)$$

Очевидно, что если эта величина будет сравнима с величиной потерь на излучение, то ускорение в бетатроне станет невозможным.

1.4. Выбор магнитного поля в бетатроне

Как будет показано ниже, фокусировка достигается при использовании в бетатроне азимутально-симметричного магнитного поля с вертикальной составляющей вектора индукции, спадающей с увеличением радиуса. При этом вектор магнитной индукции может быть представлен в виде:

$$B(r, z) = e_z B_z(r, z) + e_r B_r(r, z). \quad (1.18)$$

Вертикальную и радиальную составляющие вектора магнитной индукции в области пространства, прилегающей к равновесной орбите, можно представить в виде разложений Тейлора

$$\begin{aligned} B_z(r, z) &\approx B + \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{R,0} x + \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{R,0} z, \\ B_r(r, z) &\approx \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{R,0} x + \left. \frac{\partial B_r}{\partial z} \right|_{R,0} z, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $B = B_z(R, 0)$ – поле на орбите; R – радиус равновесной орбиты; $x = r - R$ – отклонение частицы от радиуса равновесной орбиты в медианной плоскости; z – отклонение частицы в вертикальном направлении от медианной плоскости.

Введем понятие показателя спада магнитного поля

$$n = - \frac{R}{B} \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{R,0}. \quad (1.20)$$

Из уравнений Максвелла [1] $\text{div} B = 0$, $\text{rot} B = 0$ следуют соотношения:

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{R,0} = - \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{R,0}, \quad \left. \frac{\partial B_r}{\partial z} \right|_{R,0} = \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{R,0}. \quad (1.21)$$

Функция $B_z(R, z)$ является четной, поэтому в медианной плоскости ($z = 0$)

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{R,0} = 0. \quad (1.22)$$

Подставляя в разложения (1.19) соотношение (1.22), а также формулы (1.20)–(1.21), получаем следующие выражения для ком-

понент вектора индукции магнитного поля в области, близкой к равновесной орбите $\left(\frac{x}{R} \ll 1, \frac{z}{R} \ll 1\right)$:

$$B_z(x) \approx B \left(1 - n \frac{x}{R}\right), \quad B_r(z) \approx -n \frac{z}{R}. \quad (1.23)$$

Следует отметить, что технически невозможно изготовить магнитную систему таким образом, что бы с абсолютной точностью выдержать условие (1.23) в плоскости $z = 0$, а также азимутальную симметрию магнитного поля. Поэтому соотношения (1.23) можно уточнить, добавив в них соответствующие поправки к разложению:

$$B_z(x) \approx B \left(1 - n \frac{x}{R}\right) + \varepsilon_x \frac{z}{R}, \quad B_r(z) \approx -n \frac{z}{R} + \varepsilon_z \frac{x}{R},$$

где ε_x и ε_z – малые безразмерные параметры, учитывающие влияние колебаний в одной плоскости на колебания в другой. В этом случае в уравнениях движения появляется правая часть (уравнения становятся не однородными), и движение становится связанным. При этом могут возникнуть двухмерные резонансы или так называемые резонансы связи. В случае возникновения этих резонансов происходит одновременное изменение амплитуды и фазы обоих видов колебаний.

Резонансное условие в общем виде записывается следующим образом:

$$nv_x \pm mv_z = p,$$

где n, m, p – целые, $|n| + |m|$ – порядок резонанса.

Если данное резонансное условие не выполняется, то результат этих возмущений – лишь биения амплитуды, становящийся тем меньше и тем медленнее, чем дальше рабочая точка от резонанса связи. У резонансов связи имеется интересная особенность. При разностном резонансе $nv_z - mv_z = p$ горизонтальные и вертикальные колебания оказываются связанными только между собой, и сумма их энергий остается постоянной. Таким образом, в разностном резонансе колебания могут только периодически обмениваться энергией, т.е. неограниченного роста амплитуды быть не может. Физи-

ческие причины этого явления обусловлены тем, что возмущения магнитного поля действуют одновременно на оба типа колебаний. Так, компоненты B_z и B_x связаны соотношением $\operatorname{div} B = 0$. В частности, в разностном резонансе фазы возмущающих сил оказываются всегда такими, что раскачка одного типа колебаний автоматически влечет за собой затухание другого типа. В суммовом резонансе $nv_z - mv_z = p$ оба типа колебаний оказываются связанными с продольным движением, представляющим для бетатронных колебаний неограниченный источник энергии. Постоянной в этом случае оказывается разность энергий, т.е. амплитуда обоих типов колебаний неограниченно возрастает. Поэтому, как правило, суммовый резонанс опаснее разностного.

1.5. Уравнения поперечного движения пучка

Радиальная составляющая силы, действующей на частицу, смещенную на расстояние x от равновесной орбиты, складывается из центробежной силы и силы Лоренца [1]. При этом закон Ньютона приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\gamma m_0 v^2}{R + x} - ev B_z(x). \quad (1.24)$$

Рассмотрим случай малых отклонений частицы от равновесной орбиты: когда $x \ll R$, справедливы выражения (1.23) для индукции магнитного поля. Подставляя формулы для магнитного поля в (1.24), приходим после алгебраических преобразований к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx}{dt} \right) + \gamma \omega^2 (1 - n)x = 0, \quad (1.25)$$

где ω — угловая частота вращения частицы.

Полагая, что за время нескольких оборотов энергия γ изменяется не существенно, получаем уравнение радиальных бетатронных колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 - n)x = 0. \quad (1.26)$$

Как видно, радиальные колебания будут устойчивы, если показатель спада магнитного поля $n < 1$.

Вертикальная составляющая силы, действующей на частицу, смещенную на расстояние z от равновесной орбиты в направлении, перпендикулярном медианной плоскости магнитной системы, определяется соответствующей составляющей силы Лоренца. Закон изменения вертикального движения Ньютона в этом случае приводит к дифференциальному уравнению

$$m_0 \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dz}{dt} \right) = evB_r(z). \quad (1.27)$$

По аналогии с радиальным движением, учитывая формулы (1.23), получаем для $n > 0$ уравнение вертикальных колебаний

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dz}{dt} \right) + \gamma \omega^2 n z = 0 \quad (1.28)$$

или, если за время нескольких оборотов энергия γ изменяется не существенно, имеем

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 n z = 0. \quad (1.29)$$

Как видно из (1.26) и (1.29), радиальные и вертикальные колебания будут устойчивы, если показатель спада магнитного поля выбран в интервале

$$0 < n < 1. \quad (1.30)$$

То, что показатель спада магнитного поля больше нуля означает, что магнитное поле должно убывать с радиусом.

В случае связанных бетатронных колебаний уравнения (1.26) и (1.29) примут вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 (1 - n) x = - \frac{e \cdot c}{\gamma m_e} \varepsilon_x \frac{z(t)}{R}, \quad (1.26a)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 n z = \frac{e \cdot c}{\gamma m_e} \varepsilon_z \frac{x(t)}{R}. \quad (1.29a)$$

В дальнейшем в уравнениях (1.26), (1.29) удобно ввести замену: вместо переменной t ввести продольную координату s :

$$s = R \int \omega(t) dt$$

и новые обозначения

$$v_x = \sqrt{1-n}, \quad v_z = \sqrt{n}, \quad (1.31)$$

которые имеют простой физический смысл: это число поперечных колебаний (радиальных и вертикальных) за оборот.

Формулы (1.31) позволяют установить связь между частотами бетатронных колебаний в виде уравнения окружности:

$$v_x^2 + v_z^2 = 1. \quad (1.32)$$

Полагая, что за время наблюдения частота вращения частицы изменяется не существенно, получаем систему уравнений, описывающих бетатронные колебания:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} - \alpha_x &= 0, & \frac{d\alpha_x}{ds} + v_x^2 \frac{x}{R^2} &= 0, \\ \frac{dz}{ds} - \alpha_z &= 0, & \frac{d\alpha_z}{ds} + v_z^2 \frac{z}{R^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

В системе (1.33) введены угловые переменные α_x и α_z , определяющие вертикальный и медианный тангенсы угла наклона траектории частицы относительно равновесной орбиты. Система (1.33) имеет форму уравнений Гамильтона [2] и соответствует гамильтониану:

$$H(y, \alpha) = v_x^2 \frac{x^2}{2} + v_z^2 \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2},$$

где $y = \{x, z\}$, $\alpha = \{\alpha_x, \alpha_z\}$.

При переходе к угловой координате $\theta = \frac{s}{R}$ уравнения бетатронных колебаний приобретают наиболее простую форму:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + v_x^2 x = 0, \quad \frac{d^2z}{d\theta^2} + v_z^2 z = 0. \quad (1.34)$$

Во время ускорения в бетатроне электроны должны совершить порядка миллиона оборотов, пройдя полный путь около тысячи километров. Оценить пройденный электронами путь или совершенное количество оборотов можно из выражения

$$N_{об} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} c\beta(t)dt}{2\pi R}, \quad (1.35)$$

где $c\beta(t)$ – скорость частицы; t_0 – время, когда пучок инжектируется в бетатрон; t_1 – время, когда пучок выпускается из бетатрона.

В ультрарелятивистском пределе, когда $\beta(t) \approx 1$, выражение (1.35) легко может быть упрощено:

$$N_{06} = \frac{c(t_1 - t_0)}{2\pi R}. \quad (1.36)$$

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель использует инструментарий и встроенные функции системы Mathcad. Работа состоит из четырех основных частей. В первой части задаются константы и исходные данные, а также основные параметры для моделирования:

Постоянные величины:

заряд электрона	$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл
масса покоя электрона	$m_e = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
скорость света	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
энергия покоя электрона	$W_0 = 5.11 \cdot 10^5$ эВ

Переменные величины

задаваемые преподавателем согласно варианту:

энергия равновесной частицы при инжекции	$W_{inj} = 10$ кэВ
радиус равновесной орбиты	$R = 6$ см
полуапертура вакуумной камеры	$a = 3$ см

Положение инжектора относительно равновесной орбиты:

начальное горизонтальное смещение	$x_0 = 25$ мм
начальный горизонтальный угол	$x'_0 = 0$ мрад
начальное вертикальное смещение	$z_0 = 0,1$ мм
начальный вертикальный угол	$z'_0 = 0$ мрад
временная задержка влета частицы	
относительно влета равновесной частицы	$\varphi t_0 = 0$ мс

Внешнее магнитное поле задается тремя параметрами:

коэффициент спада поля

$$n = 0.6$$

амплитуда внешнего магнитного поля

$$B_0 = 0,25 \text{ Тл}$$

частота изменения внешнего магнитного поля

$$f_{\text{поле}} = 50 \text{ Гц}$$

Варианты заданий

№ варианта	B_0 , Тл	R , м	x_0 , мм	x'_0 , мрад	z_0 , мм	z'_0 , мрад
1	0,3	0,2	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
2	0,3	0,25	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
3	0,3	0,3	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
4	0,3	0,35	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
5	0,3	0,4	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
6	0,3	0,45	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
7	0,3	0,5	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
8	0,4	0,2	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
9	0,4	0,25	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
10	0,4	0,3	0; 1	0; 1	0; 1	0; 0,1
11	0,4	0,35	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
12	0,4	0,4	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
13	0,4	0,45	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
14	0,4	0,5	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
15	0,5	0,2	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
16	0,5	0,25	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
17	0,5	0,3	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
18	0,5	0,35	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
19	0,5	0,4	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2
20	0,5	0,45	0; 2	0; 0,5	0; 0,5	0; 0,2

Во второй части проводится моделирование бетатронных колебаний и расчет энергетических зависимостей, строятся соответствующие графики. Эта часть работы состоит из трех разделов. В I разделе задается количество оборотов, в течение которых будет произведен расчет бетатронных колебаний ($N = 10$). Предварительно необходимо аналитически рассчитать некоторые параметры бетатрона и пучка. В число расчетных параметров входят:

B_{00} – индукция магнитного поля на равновесной орбите в момент времени φt ;

φt – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда равновесная орбита будет находиться на радиусе R ;

φt_1 – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда радиус орбиты будет равен внешнему радиусу вакуумной камеры $R + a$;

φt_2 – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда радиус орбиты будет равен внутреннему радиусу вакуумной камеры $R - a$;

φt_3 – максимальное время, в течение которого возможна инжекция пучка;

Tt – время ускорения равновесной частицы от начала инжекции до максимальной энергии (потери на синхротронное излучение не учитываются).

Параметры, которые получились в результате численного моделирования:

$W_{p_{\max}}$ – максимально достижимая энергия равновесной частицы (потери на синхротронное излучение не учитываются);

N_{06} – число оборотов, совершаемое частицей за время ускорения (в отсутствии синхротронного излучения).

Во II разделе производится моделирование бетатронных колебаний с учетом нелинейности радиальных бетатронных колебаний. При расчете бетатронных колебаний учитывается нелинейность радиальных бетатронных колебаний, а энергия частицы считается неизменной. Следует отметить, что исходные уравнения будут

правильно описывать движение частицы, только на малых энергиях и на малом промежутке времени (по сравнению со временем ускорения). Результатом расчета являются графики зависимости амплитуды горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний от числа оборотов. Далее, при заданном числе оборотов Nm , строится траектория частицы внутри вакуумной камеры бетатрона. Отдельно определяется число оборотов, за которое частица снова приблизится к источнику. Левый рисунок на экране является статичным, а правый рисунок является анимированной версией. Масштабный множитель zzz используется для масштабирования размеров вакуумной камеры для более наглядного представления результатов.

В III разделе второй части работы рассчитываются: зависимость частоты обращения от времени, изменение энергии равновесной частицы, потери и прирост энергии частицы за один оборот в процессе ускорения.

В последней части работы определяется максимально достижимая энергия пучка в бетатроне. Исходными данными являются радиус равновесной орбиты Rl , амплитуда внешнего переменного магнитного поля на равновесной орбите Bl и частота внешнего переменного магнитного поля $fI_{\text{поле}}$. Этот расчет позволяет наглядно представить ограничение по энергии частицы в бетатроне.

Результатами расчета являются графики зависимостей энергии равновесной частицы от времени, прироста и потери энергии равновесной частицы за оборот в процессе ускорения.

В последней, четвертой части работы, исследуются линейные связанные бетатронные колебания.

Для моделирования этих колебаний выбираются следующие параметры:

$n = -1, 0.5, 0.6, 2$ – показатель спада магнитного поля;

$ex = 0.01$ – малый безразмерный параметр, задающий влияние вертикального движения на горизонтальное;

$ez = 0.01, -0.01$ – малый безразмерный параметр, задающий влияние горизонтального движения на вертикальное;

$\gamma = 20$ – релятивистский фактор;

$R = 6 \text{ см}$ – радиус равновесной орбиты;

$x_0 = 20 \text{ мм}$ – начальное горизонтальное смещение.

При моделировании связанных бетатронных колебаний использовались линейные уравнения движения (1.26а), (1.29а). Ускорение и синхротронное излучение в данном случае не учитывалось.

Результатами расчета являются нахождение частоты радиальных и вертикальных бетатронных колебаний, при которых имеет место неустойчивость поперечного движения пучка.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей работы бетатрона.

2. Во второй части работы рассчитать амплитуду индукции магнитного поля на орбите в момент инжекции.

3. Рассчитать время, прошедшее с момента, когда амплитуда магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда равновесная орбита будет находиться на радиусе R ; на внешнем радиусе вакуумной камеры $R + a$; на внутреннем радиусе вакуумной камеры $R - a$; время, в течение которого возможна инжекция и время ускорения пучка.

4. Определить количество оборотов, которое совершит частица за время ускорения. Сравнить с оценкой, сделанной для ультрарелятивистского случая.

5. Построить и сравнить графики горизонтальных и вертикальных бетатронных колебаний.

6. Определить число оборотов, через которое, в отсутствии ускорения и синхротронного излучения, частица попадет на источник.

7. Определить время, когда частота обращения частицы будет отличаться менее чем на 5% от максимального значения.

8. Определить максимально достижимую энергию с учетом и без учета синхротронного излучения.

9. Определить радиационные потери и набор энергии электрона за один оборот.

10. В третьей части работы определить предельную энергию электрона в бетатроне без учета и с учетом синхротронного излу-

чения и время ускорения. Сравнить получившиеся результаты с результатами, получившимися в задании 8.

11. Исследовать связанные бетатронные колебания, используя разные показатели спада магнитного поля $n = -1, 0.5, 0.6, 2$. В случае, когда показатель спада магнитного поля равен 0.5, выполнить расчеты с двумя разными малыми безразмерными параметрами, которые задают влияние горизонтального движения на вертикальное $\varepsilon_z = 0,01, -0,01$. В этом случае можно наблюдать поведение траекторий частицы при суммовом и разностном резонансе. Сравнить получившиеся графики с графиками, получившимися в задании 5.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с соответствующими названиями колонок и отображать на графиках.

3. Результаты расчетов рекомендуется заносить в таблицу следующего вида:

$B00$, мТл	
φt , мс	
$\varphi t1$, мс	
$\varphi t2$, мс	
$\varphi t3$, мс	
Tt , мс	

$B00$ – индукция магнитного поля на равновесной орбите в момент времени;

φt – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда равновесная орбита будет находиться на радиусе R ;

$\varphi t1$ – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда радиус орбиты будет равен внешнему радиусу вакуумной камеры $R + a$;

ϕt_2 – время, прошедшее с момента, когда индукция внешнего магнитного поля на равновесной орбите равна нулю до того момента, когда радиус орбиты будет равен внутреннему радиусу вакуумной камеры $R - a$;

ϕt_3 – максимальное время, в течение которого возможна инжекция пучка;

Tt – время ускорения равновесной частицы от начала инжекции до максимальной энергии (потери на синхротронное излучение не учитываются).

4. Результаты моделирования рекомендуется заносить в таблицу следующего вида:

$N_{об}$ за время ускорения	Оценка		Моделирование	
$N_{об}$ частица попадет на источник				
T , мс при котором $\Delta f < 5\%$				

W_{max} , МэВ	Без учета СИ		С учетом СИ	
	часть II	часть III	часть II	часть III

5. Построить все графики и сделать для каждого задания соответствующие выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Является ли бетатрон резонансным ускорителем?
2. Какие функции несет магнитное поле при работе бетатрона?
3. Каковы преимущества бетатрона с подмагничиванием?
4. Чем обусловлена предельная энергия электронов в бетатроне?
5. Чем ограничивается величина максимальной индукции магнитного поля на равновесной орбите?
6. Что такое показатель магнитного поля? Какое накладывается на него ограничение?
7. Что такое условие 2:1 и зачем оно необходимо?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967.
3. Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. Ананьев Л.М., Воробьев А.А., Горбунов В.И. Индукционный ускоритель электронов – бетатрон. – М.: Атомиздат, 1961.

Практическое занятие № 2

ЦИКЛОТРОН

Цель: закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение особенностей продольного движения частиц в циклотроне; определение предельной энергии частицы.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

2.1. Принцип работы циклотрона

Циклотрон был первым и в течение ряда лет единственным типом резонансного циклического ускорителя. Идея циклотрона весьма проста. Между двумя полукруглыми полыми электродами, называемыми дуантами (рис. 2.1), приложено переменное электрическое напряжение.

$$V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right), \quad (2.1)$$

$T_0 = \text{const}$ – период ВЧ-поля.

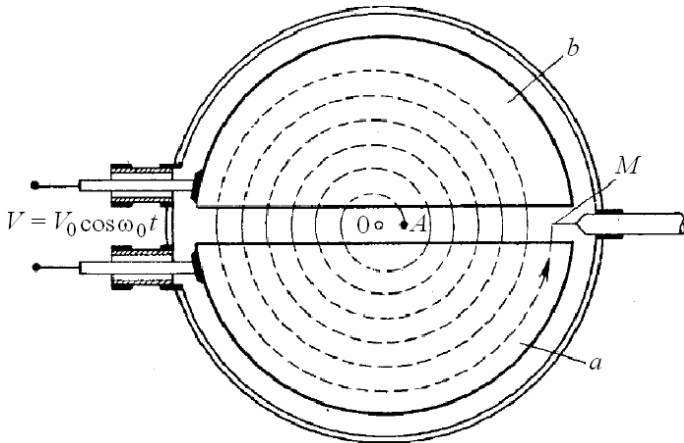


Рис. 2.1. Схематическое изображение спиральной траектории иона в циклотроне:
 a, b – дуанты; A – ионный источник; M – мишень

Дуанты симметрично расположены внутри вакуумной камеры, помещенной между полюсами электромагнита, создающими азимутально-симметричное магнитное поле B_0 . Пусть частица, пройдя щель между дуантами, получила приращение энергии $eV_0 \cos \varphi$, где φ – фаза электрического поля при прохождении щели. Описав под действием поля B_0 полуокружность внутри дуанта, частица возвращается к диаметрально противоположной точке щели и снова испытывает действие электрического поля. Время изменения полярности электрического напряжения на дуантах $T_0/2$ подбирается равным времени движения частиц по полуокружности, т.е.

$$\frac{T_0}{2} \approx \frac{T}{2}, \quad (2.2)$$

где T – период обращения частицы в магнитном поле.

Для заряженной частицы, скорость которой перпендикулярна направлению магнитного поля, выполняется равенство

$$\frac{\gamma m v^2}{r} = Ze v B_0, \quad (2.3)$$

где m , v , Ze – масса, скорость и заряд частицы; B_0 – индукция магнитного поля. Соответственно, период обращения частицы:

$$T = \frac{2\pi W}{c^2 e Z B_0}, \quad (2.4)$$

где W – полная энергия частицы.

Поэтому (2.2) предполагает наличие определенной связи между параметрами циклотрона:

$$B_0 \lambda \approx \frac{2\pi W_0}{eZ}, \quad (2.5)$$

где W_0 – энергия покоя частицы; λ – длина волны ВЧ-поля.

При выполнении условия (2.2) частица снова получит приращение энергии $eV_0 \cos \varphi$, пройдет по полуокружности большего радиуса внутри второго электрода и т.д. Так, двигаясь по разворачивающейся спирали с радиусом

$$r = \frac{W\beta}{eZcB_0}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (2.6)$$

частица будет постепенно набирать энергию до тех пор, пока не достигнет периферии ускоряющих электродов, т.е. края полюсов электромагнита.

2.2. Особенности фокусировки частиц в циклотроне

Магнитное поле в его центральной части является практически однородным (постоянным по радиусу) и поэтому не обеспечивает вертикальную магнитную фокусировку. В указанной области важную роль может играть вертикальная фокусировка, связанная с действием ускоряющего электрического поля.

Рассмотрим силовые линии электрического поля $E(s, z)$ между дуантами в данный момент времени t (рис. 2.2), где s – координата в направлении движения частицы, z – вертикальная координата (расстояние от плоскости симметрии магнитного поля). При движении в плоскости $z = 0$ частица испытывает действие только составляющей E_s в направлении s . Как видно из рис. 2.2, частица, у которой $z \neq 0$, двигаясь слева от середины щели $s = 0$, отклоняется под действием E_z к средней плоскости, а при движении справа от середины щели она, наоборот, отклоняется от этой плоскости. Результирующий фокусирующий эффект, однако, оказывается отличным от нуля благодаря двум эффектам, которые мы несколько условно назовем статической и динамической фокусировками.

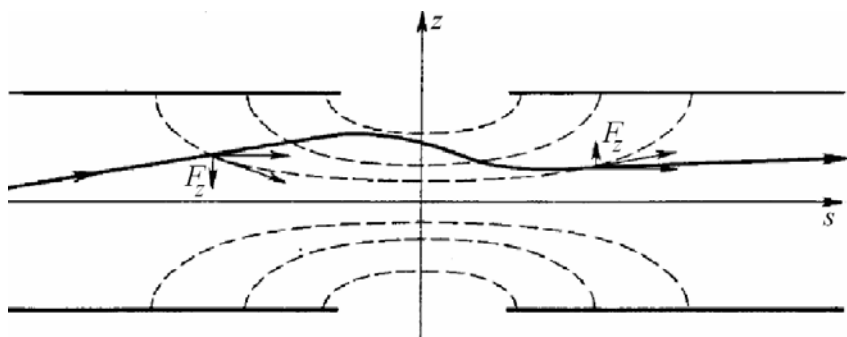


Рис. 2.2. Электрическая фокусировка и дефокусировка при прохождении частицей щели между дуантами. Пунктиром обозначены силовые линии электрического поля

Статическая фокусировка имеет место независимо от изменения электрического поля во времени. Действие этого вида фокусировки связано с изменением энергии W , а следовательно, и скорости частицы v при прохождении щели. В случае ускоряющего поля скорость частицы возрастает. Поэтому первую (фокусирующую) половину пути до середины щели частица проходит за больший промежуток времени, чем вторую половину (дефокусирующую). В результате возникает фокусирующий эффект.

Динамическая фокусировка обусловлена временным изменением ускоряющего напряжения. А именно: если частица пересекает середину щели в такой фазе ускоряющего напряжения, которая соответствует уменьшению поля во времени, то первую половину пути частица проходит в более сильном электрическом поле и больше приближается в средней плоскости, чем во второй половине пути, и удаляется от этой плоскости.

Приведем формулы, необходимые для количественной оценки эффективности электрической фокусировки [1–3]. Если учитывать только изменение энергии частицы при прохождении щели и не учитывать изменения электрического поля во времени, то выражение для изменения угла отклонения от средней плоскости $\Delta\chi$ имеет вид

$$\Delta\chi_{\text{стат}} \approx -C \left(\frac{eZV_0}{W} \right)^2 \frac{z}{r} \cos^2 \varphi, \quad (2.7)$$

где постоянная C обычно порядка единицы, а W и φ – кинетическая энергия и фаза частицы при пересечении середины щели.

Если же учесть только зависимость напряжения от времени, то получим выражение

$$\Delta\chi_{\text{дин}} \approx -\frac{eZV_0 \sin \varphi}{W \cdot r} z. \quad (2.8)$$

Оно показывает, что при $\varphi > 0$ (т.е. при спадающем во времени напряжении) имеет место динамическая фокусировка, а при $\varphi < 0$ – дефокусировка, причем для всех прохождений щели, кроме нескольких начальных,

$$\Delta\chi_{\text{дин}} \gg \Delta\chi_{\text{стат}}. \quad (2.9)$$

Таким образом, щель между дуантами действует на движение частицы в направлении z как линза. По мере возрастания энергии частицы и удаления ее от центра магнита начинает сказываться «бочкообразность» силовых линий магнитного поля, и в игру вступает обычная вертикальная магнитная фокусировка.

Весьма важным для практики является вопрос о предельной энергии в циклотроне и связанный с ним вопрос об интенсивности пучка частиц. Режим ускорения в циклотроне обладает особенностью, выделяющей его среди других типов резонансных ускорителей и заключается в том, что благодаря постоянству магнитного поля и радиочастоты, равновесная энергия частиц W_s в циклотроне постоянна. Исходя из этого можно ожидать, что в циклотроне энергия частиц, предоставленных самим себе, в среднем за достаточно большой промежуток времени оставалась бы постоянной, испытывая последовательные увеличения и уменьшения, которые нетрудно отождествлять с синхротронными колебаниями. Поэтому в циклотроне следует стремиться к тому, чтобы получить на выходе частицы, энергия которых максимально отклонилась бы от равновесной в процессе этих колебаний.

2.3. Циклотронный режим ускорения

Из формулы (2.4) следует, что при увеличении энергии частицы растет ее период обращения в магнитном поле. В результате частица непрерывно смещается по фазе и, в конце концов, попадает в область отрицательных напряжений, соответствующих замедлению (рис. 2.3).

Максимально возможная энергия получается в том случае, если частица, смещаясь по фазе, проведет возможно больший промежуток времени в области ускоряющего напряжения. Для этого нужно выбрать поле B_0 в центральной части магнита заведомо большим

значения $B_{\text{рез}} = \frac{2\pi W_0}{\lambda eZ}$, т.е. $B_0 > B_{\text{рез}}$ при этом магнитное поле B_0

будет соответствовать какой-то равновесной энергии частицы W_s . Тогда при определенных условиях можно осуществить такой ре-

жим, когда фаза частицы, начав с величины $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и постепенно смещаясь влево, дойдет до $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, а затем вернется обратно (рис. 2.4).

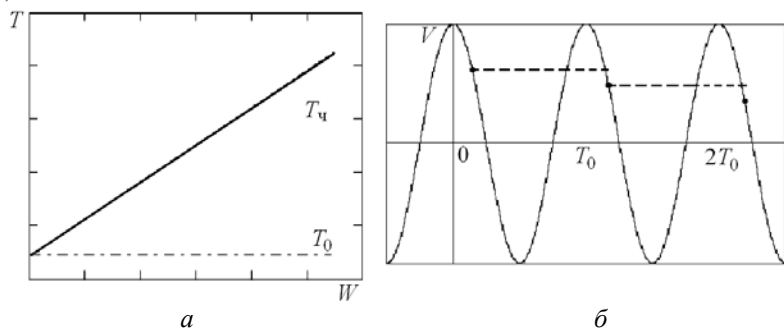


Рис. 2.3. Зависимость периода частицы от энергии (а) и движение частицы по кривой изменения напряжения на ускоряющем зазоре (б)

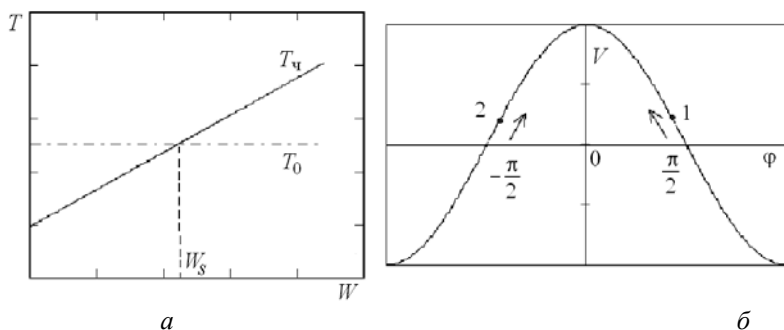


Рис. 2.4. Зависимость периода частицы от энергии при условии $B_0 > B_{рез}$ (а) и «скольжение» частицы по кривой изменения напряжения на ускоряющем зазоре (б)

При этом область фаз, соответствующая ускоряющему напряжению, будет пройдена дважды, и выигрыш в энергии окажется наибольшим. Однако при таких условиях интенсивность окажется исчезающе малой, так как начальная область фаз будет сведена к точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что интенсивность можно увеличить, выбирая на-

чальную область фаз в интервале от $\varphi = \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, но при этом средняя достигаемая энергия пучка несколько снизится.

Окончательный выбор параметров циклотрона должен обеспечивать некоторый разумный компромисс между стремлением получить максимальную энергию частиц и необходимостью иметь достаточно высокую интенсивность.

Произведем приближенный расчет для оценки величины максимальной кинетической энергии частицы W_{\max} . Для простоты будем считать поле однородным:

$$B = B_0 = \text{const}, \quad (2.10)$$

что является близким к действительности.

Увеличение кинетической энергии частицы за одно прохождение зазора:

$$\frac{dW}{dk} = eZV_0 \cos \varphi, \quad (2.11)$$

где k – число проходов ускоряющего промежутка. Переменная k дискретна, она скачками возрастает с шагом $\Delta k = 1$. При большом числе оборотов частицы ($k \gg \Delta k$), k можно приближенно считать непрерывной и записать прирост энергии в форме (2.11).

Изменение фазы относительно ускоряющего поля за один акт ускорения $d\varphi/dk$ выразим следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dk} = \frac{d\varphi}{dW} \frac{dW}{dk} = \frac{d\varphi}{dW} eZV_0 \cos \varphi. \quad (2.12)$$

Но изменение фазы связано с разностью периодов обращения частицы $T_{\text{ч}}$ и колебаний поля T_0 :

$$\frac{d\varphi}{dk} = \omega_0 \left(\frac{T_{\text{ч}}}{2} - \frac{T_0}{2} \right) = \pi \left(\frac{T_{\text{ч}} - T_0}{T_0} \right), \quad (2.13)$$

поскольку $\omega_0 = 2\pi/T_0$, $T_0 = \frac{2\pi W_s}{eZc^2 B}$, где W_s – полная равновесная энергия частицы. Из рис. 2.4,*a* видно, что возможна ситуация, когда $T_{\text{ч}} < T_0$ и $T_{\text{ч}} > T_0$. В связи с этим $T_{\text{ч}} = \frac{2\pi(W_s \pm W)}{eZc^2 B}$, и выражение (2.13) разделится на два выражения соответственно:

$$\frac{d\varphi}{dk} = -\pi \frac{W}{W_s} \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{dk} = \pi \frac{W}{W_s}. \quad (2.14)$$

Подставляя выражения (2.14) в выражение (2.12), получаем

$$WdW = -\frac{d\varphi}{\pi} W_s eZV_0 \cos \varphi, \quad (2.15)$$

$$WdW = \frac{d\varphi}{\pi} W_s eZV_0 \cos \varphi. \quad (2.16)$$

Проинтегрировав (2.15) и (2.16) в пределах фаз от начальной φ_n до конечной φ_k и разрешив относительно W , будем иметь:

$$W = \sqrt{\frac{2}{\pi} W_s eZV_0 (\sin \varphi_n - \sin \varphi_k)} \quad \text{для} \quad T_q < T_0, \quad (2.17)$$

$$W = \sqrt{\frac{2}{\pi} W_s eZV_0 (\sin \varphi_k - \sin \varphi_n)} \quad \text{для} \quad T_q > T_0. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.17) легко видеть, что для случая $T_q < T_0$ наиболее благоприятный режим (с точки зрения получения максимальной энергии) имеет место для частиц с фазами $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ и

$\varphi_k = -\frac{\pi}{2}$. Для случая $T_q > T_0$ (2.18) наоборот благоприятный режим

будет для частиц с фазами $\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$. Подставив граничные фазы и объединив оба случая, получим искомое выражение:

$$W_{\text{lim}} = 4 \sqrt{\frac{W_s eZV_0}{\pi}}, \quad (2.19)$$

W_{lim} – предельная величина кинетической энергии частицы.

Для достижения W_{lim} частица проходит две одинаковые (с точки зрения увеличения энергии) области $T_q < T_0$ и $T_q > T_0$ (рис. 2.4). Отсюда можно определить период ВЧ-поля:

$$T_0 = \frac{2\pi(W_0 + W_{\text{lim}}/2)}{eZc^2 B},$$

а выражения для равновесной энергии примет вид:

$$W_s = W_0 + W_{\text{lim}} / 2 .$$

Следует помнить, что при начальном движении частицы слева направо эта фаза переходит в область отрицательных φ , а там действуют электрические дефокусирующие силы (2.8), и пучок может быть потерян. Однако это произойдет уже на значительном расстоянии от центра циклотрона, когда действие электрических сил уменьшается и нарастает магнитная фокусировка. На рис. 2.5 показана траектория частицы в фазовом пространстве для выше описанного случая.

Зная энергию частицы W на выходе из циклотрона и напряжение на дуантах V_0 можно легко оценить количество оборотов, которое делает частица для достижения этой энергии: $N = W / (2ZV_0)$.

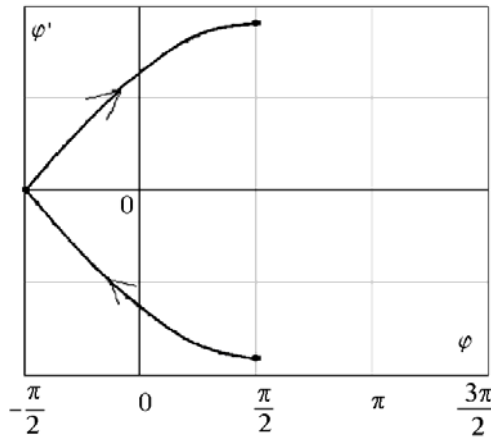


Рис. 2.5. Траектория частицы в фазовой плоскости в случае достижения максимально возможной энергии

Как видно из (2.19), зависимость W_{lim} от V_0 будет нелинейной и увеличивается, как $\sqrt{V_0}$. Качественно это можно объяснить тем, что хотя приращение энергии, получаемое частицей, пропорционально V_0 , но зато число проходов уменьшается с ростом V_0 . Значения W_{lim} для различных типов частиц приведены в табл. 2.1.

**Таблица 2.1. Теоретические значения предельной энергии
частиц в циклотроне**

Частицы	W_0 (в МэВ)	W_{lim} (в МэВ)	
		$V_0 = 100$ кВ	$V_0 = 500$ кВ
Протоны	938	20	50
Дейтоны	1876	30	70
α -частицы	3733	60	140

2.4. Фазовый объем пучка

Одной из основных характеристик пучка является шестимерный фазовый объем пучка, в котором четыре координаты характеризуют поперечное движение (x , x' , z , z'), а две (энергия W и продольная координата s) – продольное. В данном случае мы рассматриваем только продольное движение, и главным вопросом является энергетический и продольный размеры инжектируемого пучка и пучка на выходе.

На фазовой плоскости продольный размер соответствует $\Delta\varphi$, энергетический – $\Delta\varphi'$ и определяются следующими выражениями:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta T}{T_0} = 2\pi \frac{\Delta S}{\lambda}, \quad (2.20)$$

$$\Delta\varphi' = \pi \frac{\Delta W}{W_s}, \quad (2.21)$$

где ΔT – временной разброс; ΔS – продольный размер; λ – длина волны ВЧ поля; ΔW – энергетический размер пучка.

Инжектировать пучок в циклотрон можно как из источника, расположенного в центре между дуантами, так и за счет внешней инжекции из других ускорителей. Если ионный источник расположен в ускорительном зазоре, то энергия инжекции определяется приложенным к дуантам напряжением, при этом разброс по энергии может достигать V_0 , по фазе же пучок будет иметь размер π .

В случае же с внешней инжекцией фазовый размер пучка (энергетический и продольный) определяется внешним источником, а

момент впуска, или, что то же самое, начальную фазу φ_0 пучка можно произвольным образом менять. Начальная производная фазы φ'_0 определяется согласно выражению (2.3) энергией инжекции W_{in} и периодом ВЧ-генератора T_0 (или, что тоже самое, W_s)

$$\varphi'_0 = \pi \left(\frac{W_0 + W_{in}}{W_s} - 1 \right).$$

Стоит также отметить, что в одной и той же машине, не изменяя основных параметров циклотрона (радиус, магнитное поле), можно ускорять различные типы ионов. Если в циклотроне предельная кинетическая энергия для протонов Wp_k , тогда ион с зарядовым и массовым числами Z и A соответственно, будет ускорен до

энергии $W_k = \frac{Z^2}{A} Wp_k$. Действительно, кинетическая энергия равна

$W_k = \frac{p^2}{2m}$, а для заряженной частицы, движущейся в магнитном поле, выполняется равенство

$$\frac{\gamma A m_p v^2}{R} = e Z v B_0 \rightarrow p = e Z B_0 R,$$

где m_p – масса покоя протона. Тогда выражение для кинетической энергии примет вид

$$W_k = \frac{(e Z B_0 R)^2}{2 A m_p} = \frac{Z^2}{A} Wp_k.$$

Частота ВЧ-генератора будет определяться как $\omega = \frac{Z}{A} \omega_p$, где ω_p – частота ВЧ-генератора для случая ускорения протонов.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathcad и состоит из трех основных частей. В первой части – блоке начальных данных – заданы основные кон-

станты (скорость света, заряд электрона, масса частицы и т.д.), используемые при расчетах, а также записываются параметры моделирования: напряжение на дуантах V_0 , индукция магнитного поля B_0 , начальная энергия W_{in} . На рис. 2.6 показан вид блока начальных данных.

Энергия покоя протона, эВ.....	$m_p := 938 \cdot 10^6$	
Скорость света, м/с.....	$c := 3 \cdot 10^8$	
Заряд электрона, Кл.....	$e_e := 1.6 \cdot 10^{-19}$	
Зарядовое и массовое число частицы.....	$Z := 1$	$A := 1$
Энергия покоя частицы, эВ.....	$W_0 := A \cdot m_p$	
Индукция магнитного, Тл.....	$B_0 := 1$	
Напряжение на дуантах, В.....	$V_0 := 300 \cdot 10^3$	
Энергия инжекции (начальная кинетическая энергия частиц), эВ.....	$W_{in} := 5V_0$	
Равновесная энергия, эВ.....	$W_s := W_0 + 19 \cdot 10^6$	
Период электрического поля ВЧ-генератора, с.....	$T_{RF} := \frac{2 \cdot \pi \cdot W_s}{Z \cdot B_0 \cdot c^2}$	
Разброс инжектируемого пучка по энергии относительно энергии инжекции, эВ	$\sigma_{WY} := 0.5 \cdot 10^6$	
Разброс инжектируемого пучка по фазам (временной разброс), нс	$\sigma_t := 5 \cdot 10^{-9}$	

Рис. 2.6. Блок начальных данных

Во второй части заданы выражения для фазового движения частицы, производится расчет максимальной предельно допустимой энергии частицы.

Третья часть представляет собой графики фазовых траекторий, график изменения кинетической энергии частицы, изменения периода обращения частицы от номера оборота.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с математической моделью, разработанной для изучения особенностей продольного движения частицы в циклотроне.

2. Оценить максимальную энергию W_{\max} и число оборотов N совершенных ионом для случая классического циклотрона ($W_{\text{in}} = -eZV_0$, $W_s = W_0 + W_{\text{in}}$, $\varphi_n = 0$, $\varphi_k = \pi/2$). Сравнить полученные оценки с результатами моделирования. Объяснить полученные результаты. Привести траекторию движения иона в фазовой плоскости и зависимость фазы от числа оборотов.

3. Определить относительную величину изменения периода обращения иона за время ускорения ($\Delta T/T = (T_k - T_n)/T_k$).

4. Построить график зависимости максимальной энергии от напряжения на дуантах.

5. Оценить предельно допустимую энергию иона W_{lim} , число оборотов N и величину равновесной энергии W_s для этого случая.

6. Подобрать в программе равновесную энергию W_s и число оборотов в циклотроне N так, чтобы W_k совпадала с W_{lim} . Привести траекторию движения иона в фазовой плоскости и зависимость фазы от числа оборотов. Объяснить с помощью графиков, почему число оборотов, найденное аналитически, существенно отличается от числа оборотов, рассчитанных численно.

7. Пересчитать максимальную кинетическую энергию для другого типа ионов, которую можно получить на этом же циклотроне. Как при этом нужно изменить частоту ВЧ поля?

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Работа выполняется в виде стандартного отчета. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений оформляются в виде таблицы с соответствующими названиями колонок и отображаются на графиках.

№	φ	W_{in}	W_s	W_k	W_{max}	N

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Вывести формулу для периода обращения иона в циклотроне.
2. Вывести формулу, связывающую энергию иона в циклотроне и радиус его орбиты.
3. Что такое равновесная энергия и как она связана с периодом генератора?
4. Как меняется число оборотов в зависимости от начальной фазы инжекции?
5. Вывести уравнение фазового движения.
6. Почему начальная фаза инжекции должна быть положительной?
7. Почему статическая фокусировка эффективно работает на первых оборотах?
8. Что такое внешняя инжекция? Как меняются выходные характеристики пучка с увеличением энергии инжекции?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальднер О.А., Глазков А.А.. Новые конструкции ускорителей циклотронного типа. – М.: 1987.
2. Rose M.E. Focusing and Maximum Energy of Ions in the Cyclotron // Physical rev., 1938. V.53.
3. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. – М.: 1962.

Практическое занятие № 3

МИКРОТРОН

Цель: закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение особенностей продольного движения частиц в микротроне; определение фазовой устойчивости частицы в микротроне.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

3.1. Принцип работы микротрона

Микротрон, иногда называемый электронным циклотроном, создан на основе идеи В.И. Векслера [1–2], позволившей избежать нарушения условий синхронизма в циклотроне, обусловленного ростом массы при увеличении энергии. Микротрон, как и циклотрон, имеет постоянное по времени магнитное поле B и период ускоряющего ВЧ-поля T_0 . Идея состоит в том, что релятивистское возрастание периода обращения частиц T за один оборот, нарушающее работу циклотрона, можно поддерживать равным (или кратным) периоду T_0 и тем самым сохранить синхронизм между обращением частицы и переменным электрическим полем. Классический микротрон представляет собой циклический ускоритель на сравнительно низкую энергию и малую интенсивность пучка. Самые крупные и наиболее совершенные классические микротроны рассчитаны на энергии электронов порядка 30 МэВ и средний ток пучка порядка 50 мкА.

Рассмотрим принцип работы классического микротрона (рис. 3.1). Пусть имеется постоянное однородное магнитное поле $B = \text{const}$ и ускоряющей промежуток, на котором создается пере-

ряжение $V_0 \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} t\right)$. Период обращения

частиц после k -ого оборота равен

$$T_k = \frac{2\pi W_k}{c^2 e B}, \quad (3.1)$$

то есть при указанных условиях пропорционален ее полной энергии W_k . Приращение $\Delta T_k = T_{k+1} - T_k$ выбирается равным или кратным периоду T_0 , а именно $\Delta T = pT_0$, где p – целое число ($p = 1, 2, 3, \dots$), постоянное для данной установки. Тогда хотя по мере релятивистского возрастания массы (энергии) частицы, последняя будет опережать по фазе ускоряющее напряжение, это опережение будет оставаться кратным 2π . Получается резонансный режим ускорения, условие осуществления которого

$$\Delta T = \frac{2\pi V_0 \cos \varphi_s}{c^2 B} = pT_0, \quad (3.2)$$

где φ_s – фаза равновесной частицы ВЧ-поля резонатора. При этом под равновесной частицей, будем понимать частицу, период обращения которой точно кратен периоду генератора.

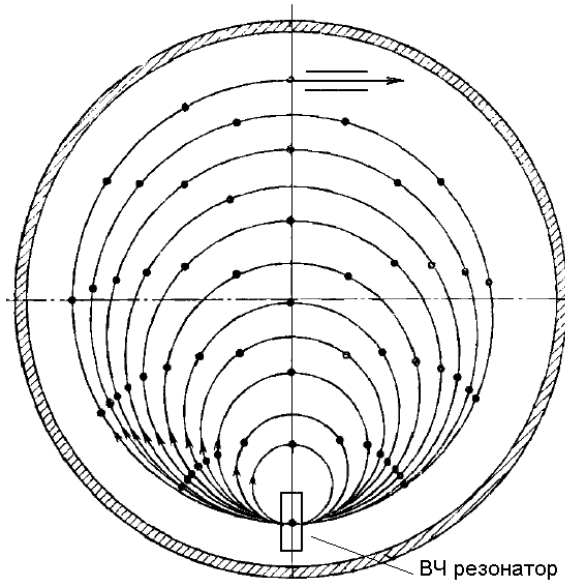


Рис. 3.1. Траектории частиц в микротроне с одним ускоряющим промежутком

Условие, определяющее ΔT , должно быть дополнено условием резонанса для первого оборота

$$\frac{2\pi W_i}{c^2 eB} = lT_0, \quad (3.3)$$

где l – целое число (начальная кратность); W_i – энергия инжекции.

При отсутствии внешней инжекции

$$W_i = W_0 + eV_0 \cos \varphi_s = W_0(1 + q),$$

где W_0 – энергия покоя электрона, $q = \frac{eV_0 \cos \varphi_s}{W_0}$.

Разделив почленно (3.2) на (3.3), можно получить важное соотношение:

$$q = \frac{p}{l - p}. \quad (3.4)$$

Поскольку по определению $q > 0$, то обязательно $l > p$. Тогда из (3.2) и (3.4) легко получить

$$T_0 = \frac{2\pi W_0}{c^2 eB} \frac{1}{l - p}. \quad (3.5)$$

Если вместо T_0 подставить $T_0 = \frac{\lambda}{c}$, где λ – длина волны ВЧ-поля,

то можно переписать (3.5) в следующем виде

$$B\lambda = \frac{2\pi W_0}{ce} \frac{1}{l - p} = 0,0107 \frac{1}{l - p} \text{ Тл} \cdot \text{м}. \quad (3.6)$$

Это требование определяет собой конструктивные особенности ускорителя. Поскольку не очень выгодно применять магниты с малым магнитным полем $B \leq 0,1$ Тл, то возникает необходимость использовать генераторы с $\lambda < 0,1$ м, т.е. использовать сантиметровый диапазон волн.

Отметим, что прирост энергии за оборот не может быть произвольным, как в обычном циклотроне, а определяется выбором l и p . Поскольку для величины p удобно выбрать минимальное значение $p = 1$ (знаменатель в выражении (3.6) должен быть минимальным), то наименьшая величина $l = 2$, откуда видно, что прирост энергии не может быть меньше W_0 . Это значит, что первый оборот электро-

на по орбите должен соответствовать не менее чем двум периодам колебаний ускоряющего поля.

3.2. Исследование движения частиц

В отличие от остальных ускорителей, в микротроне относительный прирост энергии за оборот велик. Поэтому фазовое движение частиц здесь целесообразно исследовать при помощи уравнений в конечных разностях. Для функции целочисленного аргумента F_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) вместо производных вводят конечные разности соответствующих порядков:

первую разность $\Delta F_k = F_{k+1} - F_k$,

вторую разность $\Delta^2 F_k = \Delta F_{k+1} - \Delta F_k = F_{k+2} - 2F_{k+1} + F_k$.

Воспользовавшись выражением (3.1), получаем уравнение в конечных разностях второго порядка, справедливое и для других циклических резонансных ускорителей:

$$\Delta^2 t_k - \frac{2\pi V_0}{c^2 B} \cos(\omega_0 \cdot t_{k+1}) = 0, \quad (3.7)$$

где t_k – момент k -го прохождения через ускоряющий промежуток, $\Delta t_k = T_k$, $\Delta^2 t_k = \Delta T_k$. Приращение фазы на k -м обороте равняется

$$\Delta \varphi_k = \omega_0 \Delta t_k - 2\pi \cdot l_k, \quad (3.8)$$

где l_k – кратность на этом обороте, причем согласно принципу работы микротрона

$$\Delta l_k = p. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) получаем искомое фазовое уравнение

$$\Delta^2 \varphi_k - \frac{2\pi \cdot p \cos \varphi_{k+1}}{\cos \varphi_s} = -2\pi \cdot p. \quad (3.10)$$

Фазовое уравнение типа

$$\Delta^2 \varphi_k - D \cos \varphi_{k+1} = -D \cos \varphi_s, \quad (3.11)$$

к которому относится (3.10), вообще справедливо для ускорителей с автофазировкой. Однако для микротрона согласно (3.10) величина D будет не меньше 2π , в то время как для других ускорите-

лей $D \ll 2\pi$. Последнее обстоятельство обуславливает практически непрерывное изменение фазы φ_k в этих ускорителях и дает возможность переходить от разностного уравнения к дифференциальному:

$$\frac{d^2\varphi}{dk^2} - D \cos \varphi = -D \cos \varphi_s. \quad (3.12)$$

Исследуем сначала малые фазовые колебания в окрестности φ_s , положив:

$$\varphi_k = \varphi_s + \eta_k, \quad |\eta_k| \ll \varphi_s. \quad (3.13)$$

Линеаризуя (3.10) по η_k , получим линейное разностное уравнение

$$\eta_{k+2} - 2(1 - \pi \cdot p \cdot \operatorname{tg} \varphi_s) \cdot \eta_{k+1} + \eta_k = 0, \quad (3.14)$$

решение которого имеет вид

$$\eta_k = b \cos(\mu \cdot k + \delta), \quad \cos \mu = 1 - \pi \cdot p \cdot \operatorname{tg} \varphi_s, \quad (3.15)$$

где μ , b , δ – постоянные.

Как следует из (3.15), устойчивое движение возможно для интервала значений φ_s , определяемого неравенствами

$$|\cos \mu| < 1 \text{ или } 0 < \operatorname{tg} \varphi_s < \operatorname{tg} \varphi_{s\text{пред}} = \frac{2}{\pi \cdot p}, \quad (3.16)$$

оптимальное значение $\varphi_s = (\varphi_s)_{\text{опт}}$, соответствующее $\mu = \frac{\pi}{2}$, то есть центру области устойчивости, согласно (3.15) равняется

$$(\varphi_s)_{\text{опт}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\pi \cdot p} \right).$$

Из выражения (3.16) видно, что область устойчивости зависит от p . Например, для микротрона в наиболее простом случае ($p = 1$, $l = 2$, $q = 1$) область устойчивого движения лежит в пределах $0 < \varphi_s < 32,48^\circ$, а $(\varphi_s)_{\text{опт}} = 17,65^\circ$. Существование ограниченной области устойчивого движения имеет как отрицательные стороны, так и положительные. К недостаткам можно отнести – ограничение области захвата частиц при инжекции, что в итоге приводит к малым интенсивностям ускоряемых электронов. К положительным сторонам существования малой области устойчивости можно отнести – высокий темп ускорения (так как значение синхронной фазы

так же мало, $\cos \varphi_s \approx 1$), малые продольные размеры сгустков и малый энергетический разброс частиц в сгустке. В случае больших отклонений от равновесных условий $\varphi_i = \varphi_s$, $\Delta \varphi_i = 0$ приходится получать последовательное положение изображающей точки на плоскости $(\varphi_k, \Delta \varphi_k)$, используя нелинейное разностное уравнение (3.10) как рекуррентную формулу для перехода от φ_k , $\Delta \varphi_k$ к φ_{k+1} , $\Delta \varphi_{k+1}$ (начиная с φ_i , $\Delta \varphi_i$). Результаты численных расчетов по рекуррентным формулам представлены на рис. 3.2. Для начальных условий, лежащих в некоторой области около равновесных, изображающая точка совершает движение, близкое к периодическому. При этом скачкообразно перемещающаяся точка ложится на довольно плавную фазовую траекторию, определяемую начальными условиями.

На рис. 3.2 показаны такие траектории для случая $\varphi_s = (\varphi_s)_{\text{опт}} = \arctg(1/\pi)$. Там же показаны фазовые траектории $\frac{d\varphi_k}{dk} = f(\varphi)$ и сепаратриса, полученная из дифференциального уравнения (3.12), соответствующего тому же значению φ_s .

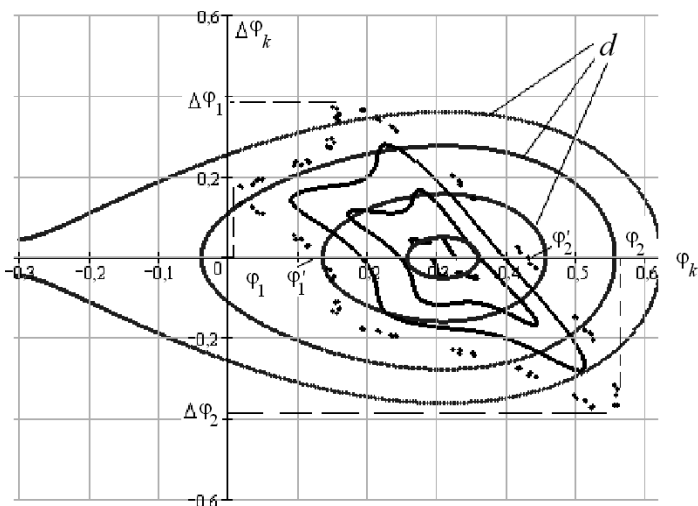


Рис. 3.2. Фазовые орбиты для случая $\varphi_s = (\varphi_s)_{\text{опт}}$, d – семейство орбит, соответствующих дифференциальному уравнению

Чем больше начальные значения $(\varphi_i, \Delta\varphi_i)$ отличаются от равновесных $(\varphi_s, \Delta\varphi_s)$, тем сильнее отличаются семейства траекторий принадлежащих соответственно (3.12) и (3.10).

Скачки изображающей точки по орбите на плоскости $(\varphi_k, \Delta\varphi_k)$ показаны на рис. 3.3. Если проследить за точкой на протяжении достаточно большого количества скачков, то можно обнаружить, что она совершает своеобразное прецессионное движение. Анализируя граничные фазовые траектории (см. рис. 3.2, прерывистая кривая) можно оценить энергетический разброс и длину электронного сгустка в микротроне. Длина сгустка находится следующим образом:

$$\Delta L = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} \lambda, \quad (3.17)$$

где λ – длина волны ВЧ-поля; φ_1 и φ_2 – левая и правая границы области устойчивости соответственно (см. рис. 3.2).

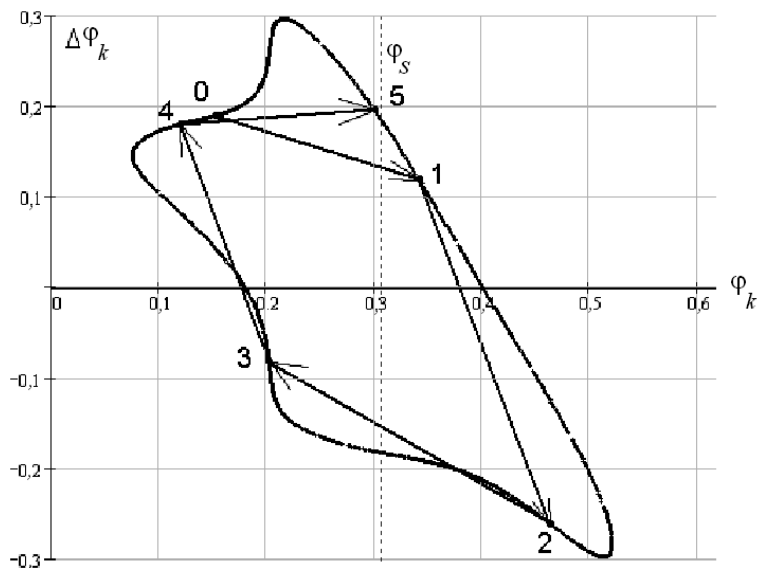


Рис. 3.3. Скачки изображающей точки по фазовой плоскости для одной из фазовых орбит в случае $\varphi_s = (\varphi_s)_{\text{опт}}$

Энергетический разброс можно оценить двумя способами. Первый способ основан на том, что пучок, проходя ускоряющее ВЧ-напряжение с разными фазами, получает различный прирост энергии ΔW , отсюда

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{V_0(\cos(\varphi'_1) - \cos(\varphi'_2))}{W}, \quad (3.18)$$

где φ'_1 и φ'_2 – левая и правая границы области устойчивости, соответственно (рис. 3.2), при $\Delta\varphi = 0$ (так как при $\Delta\varphi = 0$ энергия частиц равна равновесной энергии), а W – конечная энергия электронного пучка.

Второй способ позволяет оценить разброс из выражения (3.8). Действительно, преобразуя выражение (3.8) с учетом $\Delta t_k = T_k$ и

$$T_k = \frac{2\pi W_k}{c^2 e B}, \text{ получаем}$$

$$\Delta\varphi_k = \frac{2\pi}{W_0} \Delta W_k. \quad (3.18)$$

Отсюда получаем выражение для оценки энергетического разброса

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)W_0}{2\pi W},$$

где $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ – верхняя и нижняя граница области устойчивости соответственно.

3.3. Методы внутренней инжекции

При создании первых классических микротронов его разработчики столкнулись с техническими трудностями, связанными с разработкой конкретной конструкции такого ускорителя. Прежде всего, это – проблемы, связанные с инжекцией пучка в микротрон и с необходимостью обеспечить высокое ускоряющее напряжение в ВЧ-резонаторе.

Инжекция в классическом микротроне внутренняя и требует размещения инжектора между полюсами магнита. Первые микротроны в течение долгих лет не находили практического применения. Из-за проблемы инжекции они имели максимальную интен-

интенсивность пучка порядка 1 мА, что при скважности около 1000 давало среднюю интенсивность не более 1 мкА. Усовершенствование инъекции позволило поднять интенсивность в десятки раз.

На рис. 3.4 показаны два наиболее удачных способа инъекции, разработанные на основе остроумной идеи В.Н. Мелехина (Институт физических проблем РАН). Внутри резонатора, имеющего сквозные отверстия в обоих основаниях цилиндра, расположен горячий катод, эмиттирующий электроны под действием ВЧ-напряжения. Инжектируемые электроны под влиянием магнитного поля сразу отклоняются. Чтобы на первом обороте электроны могли обогнуть резонатор, поперечные размеры ускоряющего резонатора должны быть малы. С другой стороны, как было сказано выше, прирост энергии за один проход резонатора должен превышать энергию электрона. Поэтому ускоряющее ВЧ-поле в резонаторе должно быть большим.

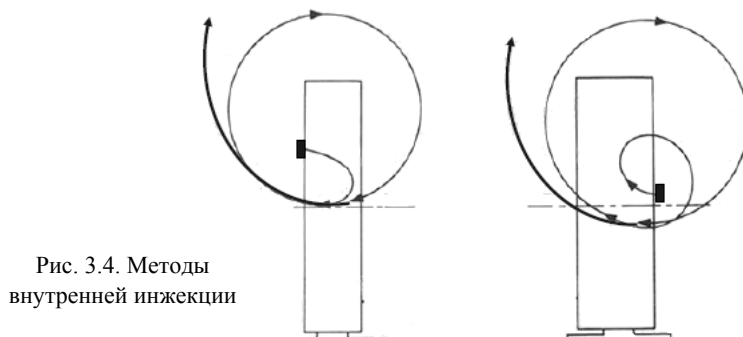


Рис. 3.4. Методы
внутренней инъекции

Высокое ВЧ-напряжение может быть получено только при большой мощности генератора и большом шунтовом сопротивлении резонатора. Все вышеперечисленные особенности ускоряющей системы обуславливают высокие тепловые нагрузки на резонатор, поэтому классические микротроны работают только в импульсном режиме.

Современные микротроны делают с разделенными магнитами. Это так называемые разрезные микротроны. Схема микротрона с магнитом, разрезанным на две части, дана на рис. 3.5. В качестве ускоряющего устройства используется линейный ускоритель. Раз-

деление магнита на части позволяет ввести новый параметр, обеспечивающий резонансное ускорение при различных значениях B , W_i , ΔW и при плавном регулировании конечной энергии пучка. Если в обычных микротронах чаще всего $\Delta W = W_0$, то здесь расстояние между магнитами достаточно для установки крупного ускоряющего устройства, включая и линейный ускоритель на энергию в несколько МэВ или даже сотен МэВ.

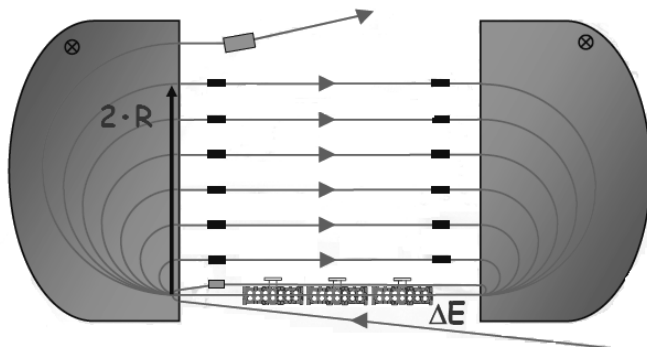


Рис. 3.5. Разрезной микротрон

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathcad и состоит из трех основных частей. В первой части – блоке начальных данных – заданы основные константы (скорость света, заряд электрона, масса частицы и т.д.), используемые при расчетах, а также записываются параметры моделирования: радиус микротрона R_{mic} , длина волны ВЧ-поля λ , прирост энергии q , кратность ВЧ p , кратность ВЧ на первом обороте l . На рис. 3.6 показан вид блока начальных данных.

Во второй части заданы выражения для фазового движения частицы, производится численный расчет фазового движения частицы, находится оптимальная равновесная фаза φ_{opt} .

Третья часть представляет собой графики фазовых траекторий, график изменения кинетической энергии частицы в зависимости от числа оборотов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомится с математической моделью, разработанной для изучения особенностей продольного движения частицы в микротроне.

2. По величине магнитного поля B и приросту энергии за один оборот W оценить энергию выходящего пучка и число оборотов, совершаемых в микротроне радиуса R . Определить максимальный размер резонатора.

Заряд электрона, Кл	$e := 1.6 \cdot 10^{-19}$
Энергия покоя электрона, эВ	$W_0 := 0.511 \cdot 10^6$
Скорость света, м/с	$c := 3 \cdot 10^8$
длина э.-м. волны возбуждаемой в резонаторе, м	$\lambda := 10 \cdot 10^{-2}$
Прирост энергии за оборот в единицах W_0	$q := 1$
Кратность ВЧ	$p := 1$
Кратность ВЧ на первом обороте	$m := p + 1$
Радиус микротрона, м	$R_{mic} := 1$

Рис. 3.6. Блок начальных данных

3. Найти области устойчивости для разных φ_s ($\varphi_s < 0$, $\varphi_s \approx \frac{1}{2}(\varphi_s)_{opt}$, $\varphi_s = (\varphi_s)_{opt}$, $\varphi_s \approx \frac{3}{4}(\varphi_s)_{opt}$, $\varphi_s > \varphi_{s пред}$). Предполагается, что движение частиц в сгустке будет устойчивым если фазовый размер сгустка на протяжении 1000 и более оборотов не увеличивается.

4. Определить продольный размер и энергетический разброс пучка для каждого значения φ_s .

5. Прodelать те же самые действия для $p = 2$, $p = 5$.
6. Сделать вывод о том, как меняется область устойчивости для больших значений p .

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, результаты теоретических расчетов.
2. Результаты всех измерений оформляются в виде таблицы с соответствующими названиями колонок и отображать на графиках.

φ_s	φ_1	φ_2	φ'_1	φ'_2	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Поясните принцип работы микротрона.
2. Какие ограничения на длину волны генератора и значения магнитной индукции накладывает переменная кратность?
3. Назовите пределы возможного изменения синхронной фазы в микротроне.
4. В чем преимущества и недостатки малого значения синхронной фазы в микротроне?
5. Существуют ли ограничения на прирост энергии за один оборот у микротрона?
6. Какие требования к ускоряющей ВЧ-системе микротрона предъявляются?
7. Что такое разрезной микротрон и каковы его преимущества?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальднер О.А., Глазков А.А. Новые конструкции ускорителей циклотронного типа. – М.: МИФИ, 1987.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. – М.: Физматгиз, 1962.

Практическое занятие № 4

ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Цель: закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение методов поперечной фокусировки пучков; анализ движения пучка с помощью оптических функций; исследование движения пучка заряженных частиц через триплет и дублет квадрупольных линз.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

4.1. Матричная форма решения уравнений движения

Для частицы с равновесной энергией уравнение радиальных бета-тронных колебаний в линейном приближении имеет вид [1–2]:

$$x'' + K_x(s) \cdot x = 0, \\ K_x(s) = h^2(s) + k(s) = \left(\frac{q}{p} B_{z0}(s) \right)^2 + \frac{q}{p} G(s), \quad G = \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_{x=z=0}, \quad (4.1)$$

где $h = 1/r_0$ – кривизна траектории, т.е. при рассмотрении канала без поворотных магнитов $h = 0$; p – импульс частицы; q – заряд частицы.

Для простоты рассмотрим только горизонтальное движение, а полученные выводы можно применять к вертикальному движению с учетом различия периодических коэффициентов фокусировки.

Один из способов решения уравнения (4.1) связан с возможностью представления реального азимутального распределения магнитного поля на орбите ускорителя в виде кусочно-постоянной функции, когда весь периметр ускорителя делится на участки, на каждом из которых $B_{z0} = \text{const}$ и $G = \text{const}$. Например, для участка, где магнитного поля нет (прямолинейный промежуток), $B_{z0}(s) = 0$ и $G(s) = 0$, для дипольного магнита с плоско-параллельными полюсами $B_{z0}(s) = B_{z0} = \text{const}$ и $G(s) = 0$, для квадрупольной линзы $B_{z0}(s) = 0$ и $G(s) = G_0 = \text{const}$ и т.д. Конечно, магнитное поле на границе участков не может измениться мгновенно, а плавно спадает

или нарастает, но обычно длина перехода мала по сравнению с основным участком, и *краевым полем* пренебрегают. Для кусочно-постоянного приближения решение имеет одну из возможных форм:

- фокусирующий участок: $K_x > 0$,

$$x(s) = a \cos(\sqrt{K_x} s) + b \sin(\sqrt{K_x} s), \quad (4.2)$$

- участок без поля: $K_x = 0$,

$$x(s) = a \cdot s + b, \quad (4.3)$$

- дефокусирующий участок: $K_x < 0$,

$$x(s) = a \cdot \text{ch}(\sqrt{|K_x|} s) + b \cdot \text{sh}(\sqrt{|K_x|} s), \quad (4.4)$$

где константы a и b определяются начальными условиями, а s – продольная координата.

Зададим вектор $\vec{x}(s)$ с помощью решения уравнения движения $x(s)$ и его производной $x'(s)$ следующим образом:

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Тогда, например, для $K_x > 0$ компоненты вектора запишутся как

$$x(s) = a \cos(\sqrt{K_x} s) + b \sin(\sqrt{K_x} s), \quad (4.6)$$

$$x'(s) = -a\sqrt{K_x} \sin(\sqrt{K_x} s) + b\sqrt{K_x} \cos(\sqrt{K_x} s). \quad (4.7)$$

Подставляя в (4.6) и (4.7) начальные условия $x_0 = x(0)$ и $x'_0 = x'(0)$, получим

$$a = x_0, \quad b = \frac{x'_0}{\sqrt{K_x}}. \quad (4.8)$$

Видно, что соотношение между вектором начальных условий и $\vec{x}(s)$ можно записать в матричной форме:

$$\vec{x}(s) = M_F \vec{x}_0, \quad (4.9)$$

где M_F называется *матрицей перехода* для фокусирующего участка:

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K_x} s) & \frac{1}{\sqrt{K_x}} \sin(\sqrt{K_x} s) \\ -\sqrt{K_x} \sin(\sqrt{K_x} s) & \cos(\sqrt{K_x} s) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Подобные матрицы перехода могут быть получены для участка без поля

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

и для дефокусирующего участка

$$M_D = \begin{pmatrix} \text{ch}(\sqrt{|K_x|}s) & \frac{1}{\sqrt{|K_x|}} \text{sh}(\sqrt{|K_x|}s) \\ \sqrt{|K_x|} \text{sh}(\sqrt{|K_x|}s) & \text{ch}(\sqrt{|K_x|}s) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Рассмотрим вектор (4.5) до и после тонкой квадрупольной линзы. При пролете тонкой линзы координата частицы не меняется (т.е. $x = x_0$), в то время как из наклона траектории вычитается (для фокусирующей линзы) угол α (рис. 4.1). Или:

$$x = 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x'_0, \quad x' = -\frac{1}{f} x_0 + 1 \cdot x'_0. \quad (4.13)$$

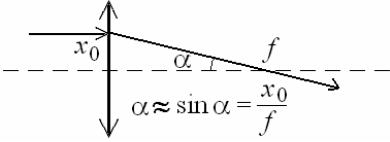


Рис. 4.1. Прохождение частицы через тонкую линзу

Равенства (4.13) еще можно записать так: $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0$, где

M_x – матрица тонкой линзы.

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Аналогичное выражение может быть получено из (4.10) или (4.12) с помощью предельного перехода $s \rightarrow 0$.

Вертикальное движение также может быть описано с помощью матричного формализма, так что для каждого элемента существует две матрицы перехода M_x и M_z , которые записываются в зависимости от знака соответствующего фокусирующего коэффициента K_x и K_z . Для квадрупольной линзы, для которой $K_x = -K_z$, одна из матриц всегда фокусирующая, а вторая – дефокусирующая.

Если частица движется через последовательность элементов с матрицами M_1, M_2, \dots, M_n , то входной и выходной векторы (4.5) соотносятся как

$$\vec{x} = M_n \dots M_2 M_1 \vec{x}_0. \quad (4.15)$$

Матричный формализм весьма удобен, если нужно численно проследить движение частицы через большое число элементов. При этом нет необходимости на каждом участке решать уравнения движения с новыми начальными условиями.

Из теоремы Лиувилля следует, что плотность фазовых траекторий и объем фазового пространства всегда сохраняются во времени. Этот вывод является общим и справедлив для любой консервативной динамической системы. Следствием этой теоремы будет равенство единице определителя матрицы перехода $|M| = 1$.

4.2. Аналитическая форма решения уравнений движения

Простота матричного подхода особенно удобна при численном исследовании движения частицы, например при компьютерном моделировании. Однако пучок состоит из большого числа частиц ($\sim 10^{10}$), и мы не в состоянии проследить численно их траектории. Для исследования свойств пучка как целого и для того, чтобы иметь возможность аналитически изучать поведение частиц, нам нужно общее решение уравнения движения в виде функции произвольной азимутальной координаты s , а не отдельных участков.

Уравнение с периодическим коэффициентом типа

$$x'' + K_x(s)x = 0 \quad (4.16)$$

называется *уравнением Хилла* и известно с конца XIX века в связи с изучением движения Луны в поле тяготения Земли. Решение уравнения Хилла имеет следующий вид:

$$x(s) = A \cdot w(s) \cos(\mu(s) + \mu_0), \quad (4.17)$$

где A и μ_0 – постоянные, зависящие от начальных условий; $\mu(s)$ – фазовая функция (параметр Флоке); $w(s)$ – амплитудная функция Флоке.

В настоящее время в физике ускорителей принята другая форма представления бетатронных колебаний с помощью *бетатронной функции* $\beta(s) = w^2(s)$, так что

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0). \quad (4.18)$$

Можно сказать, что бетатронное движение частицы представляет собой псевдо-гармонические колебания, амплитуда и фаза которых являются функциями независимой переменной s .

Подставим (4.18) в (4.16) и объединим слагаемые с синусом и косинусом фазовой функции:

$$\begin{aligned} x'' + K_x x = & A \left(-\beta^{1/2} \mu'' - \frac{\beta' \mu'}{2\beta^{1/2}} - \frac{\beta' \mu'}{2\beta^{1/2}} \right) \sin(\mu + \mu_0) + \\ & + A \left(-\beta^{1/2} \mu'^2 - \frac{\beta'^2}{4\beta^{3/2}} + \frac{\beta''}{2\beta^{1/2}} + K_x \beta^{1/2} \right) \cos(\mu + \mu_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как β и μ не должны зависеть от начальной фазы μ_0 , которая определяется конкретными начальными условиями, синусная и косинусная части (4.19) должны равняться нулю независимо. Умножив выражение перед синусом на $\beta^{1/2}$, получим

$$\beta \mu'' + \beta' \mu' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\mu'}{\mu'} = -\frac{d\beta}{\beta}. \quad (4.20)$$

Интегрируя (4.20) получим важное соотношение между фазовой и амплитудной функциями бетатронных колебаний:

$$\mu' = \frac{d\mu(s)}{ds} = \frac{1}{\beta(s)} \quad \text{или} \quad \mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}. \quad (4.21)$$

Возвращаясь к выражению перед косинусом в (4.19), умножив его на $4\beta^{3/2}$, приравняв нулю и воспользовавшись (4.21), получим уравнение, определяющее бетатронную функцию:

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4K_x(s)\beta^2 = 4. \quad (4.22)$$

4.3. Инвариант Куранта–Снайдера

Рассмотрим отклонение частицы от равновесной орбиты

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (4.23)$$

и угол наклона ее траектории

$$x'(s) = \frac{\beta'}{2\beta} A\sqrt{\beta} \cos(\mu + \mu_0) - \frac{A}{\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0) = \frac{\beta'}{2\beta} x - \frac{A}{\sqrt{\beta}} \sin(\mu + \mu_0). \quad (4.24)$$

Выделив в (4.23) и (4.24) синус и косинус, возведя их в квадрат и сложив, получим следующее выражение для квадрата константы движения A

$$\frac{x^2}{\beta} + \beta \cdot \left(x' - \frac{\beta'}{2\beta} x \right)^2 = A^2. \quad (4.25)$$

Для заданных начальных условий величина в левой части равенства (4.25) является постоянной для любой продольной координаты и называется *инвариантом Куранта–Снайдера*.

Раскрыв скобки и введя новые обозначения

$$\alpha(s) = \frac{-\beta'(s)}{2} \quad \text{и} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)}, \quad (4.26)$$

можно записать инвариант Куранта–Снайдера в альтернативной форме

$$\gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 = A^2. \quad (4.27)$$

Вспомогательные структурные (в том смысле, что они определяются только магнитной структурой ускорителя) функции (4.26) вместе с $\beta(s)$ иногда называют параметрами Куранта–Снайдера.

Уравнение вида:

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 = d, \quad (4.28)$$

где a, b, c, d – константы, является стандартным уравнением эллипса, повернутого относительно координатных осей на угол φ , такой, что $\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2 \cdot b}{a - c}$. Площадь эллипса определяется выражением

$$S = \frac{\pi \cdot d}{\sqrt{ac - b^2}}.$$

Выражение (4.27) означает, что все частицы с одинаковой константой A при пролете определенной продольной координаты s будут иметь координаты (x, x') в фазовом пространстве, принадлежащие эллипсу. Сравнение (4.27) и (4.28) дает выражения для угла поворота этого эллипса и его площади:

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{\alpha(s)}{\gamma(s) - \beta(s)}; \quad S = \frac{\pi \cdot A^2}{\sqrt{\gamma\beta - \alpha^2}} = \pi \cdot A^2. \quad (4.29)$$

Существование важной для физики ускорителей константы движения (4.27) является следствием теоремы Лиувилля, так же, как и равенство единице определителя матрицы перехода.

Для частицы, максимальное отклонение которой равно среднеквадратичному отклонению частиц в пучке, т.е. $x_{\max} = \sigma_x$, квадрат инварианта Куранта–Снайдера связан со среднеквадратичным эмиттансом пучка следующим образом: $A_{\text{оx}}^2 = \frac{\epsilon_x}{\pi}$.

4.4. Согласование канала

Значения α , β и γ в конце канала определяется настройкой самого канала, в то время как после выпуска из канала движение частиц будет определяться оптическими функциями структуры, в которую попали частицы. Движение в фазовом пространстве всегда происходит вдоль эллипсов, определяемых параметрами Куранта–Снайдера, поэтому если канал не согласован со следующей за ним структурой, то произойдет эффективное увеличение эмиттанса как показано на рис. 4.2.



Рис. 4.2. Согласование эмиттанса

4.5. Матрица перехода и параметры Куранта–Снайдера

И аналитическая, и матричная формы решения уравнений бета-тронных колебаний описывают одно и то же явление – движение частицы в плоскости, поперечной к равновесной орбите. Поэтому, естественно, между этими двумя альтернативными представления-

ми должна существовать связь. Для установления такой связи перепишем решение (4.23) в слегка другой тригонометрической форме:

$$x(s) = \sqrt{\beta(s)} (A \cos \mu(s) + B \sin \mu(s)). \quad (4.30)$$

Тогда производная (4.26) примет вид

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} [(B - A\alpha(s)) \cos \mu - (A + B\alpha(s)) \sin \mu]. \quad (4.31)$$

Для некоторой произвольной продольной координаты s , которую для простоты обозначим как $s = 0$, определим начальные значения $x(0) = x_0$ и $x'(0) = x'_0$. Пусть для этой координаты значения параметров Куранта–Снайдера $\beta(0) = \beta_0$ и $\alpha(0) = \alpha_0$, и, согласно (4.21), $\mu(0) = 0$.

Тогда связь констант A и B с начальными значениями определяется как

$$x_0 = A\sqrt{\beta_0} \quad \text{или} \quad A = x_0 / \sqrt{\beta_0}, \quad (4.32)$$

$$x'_0 = (B - A\alpha_0) / \sqrt{\beta_0} \quad \text{или} \quad B = x'_0 \sqrt{\beta_0} + x_0 \alpha_0 / \sqrt{\beta_0}. \quad (4.33)$$

Подставляя (4.32) и (4.33) в (4.30) и (4.31) после несложных преобразований для произвольного азимута s получим

$$x(s) = x_0 \left(\sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \cos \mu(s) + \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \sin \mu(s) \right) + x'_0 \sqrt{\beta(s)\beta_0} \sin \mu(s), \quad (4.34)$$

$$x'(s) = -x_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta(s)\beta_0}} [(\alpha(s) - \alpha_0) \cos \mu(s) + (1 + \alpha(s)\alpha_0) \sin \mu(s)] + x'_0 \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \mu(s) - \alpha(s) \sin \mu(s)). \quad (4.35)$$

Видно, что выражения (4.34) и (4.35) могут быть записаны в матричной форме $\vec{x}(s) = M(s_0 \rightarrow s) \vec{x}_0$, а элементы матрицы перехода от координаты s_0 к координате s выражаются через значения параметров α , β и μ , взятых в точках s_0 и s :

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}}(\cos\Delta\mu + \alpha_0 \sin\Delta\mu) & \sqrt{\beta(s)\beta_0} \sin\Delta\mu \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta(s)\beta_0}}[(\alpha(s) - \alpha_0)\cos\Delta\mu + (1 + \alpha(s)\alpha_0)\sin\Delta\mu] & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} \times (\cos\Delta\mu - \alpha(s)\sin\Delta\mu) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

где $\Delta\mu = \mu(s) - \mu(s_0)$ – набег фазы бетатронных колебаний между s_0 и s .

4.6. Вычисление параметров Куранта–Снайдера

Рассмотрим способы вычисления $\beta(s)$, а также других параметров Куранта–Снайдера. Использование уравнения (4.22) неэффективно, так как из-за его сложности решить его можно только с помощью численного интегрирования. Поэтому используют другой подход, основанный на инварианте Куранта–Снайдера, который при заданных начальных значениях не зависит от продольной координаты, и для любых двух точек выполняется равенство:

$$\gamma_1 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_1' + \beta_1 x_1'^2 = \gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2. \quad (4.37)$$

Поскольку $\vec{x}_1 = M \cdot \vec{x}_0$, то, вводя обратное преобразование с помощью $M^{-1}M = I$, где I – единичная матрица, можно записать:

$$\vec{x}_0 = M^{-1} \vec{x}_1, \quad (4.38)$$

где элементы обратной матрицы перехода выражаются через элементы прямой матрицы как

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

поскольку определитель матрицы перехода равен единице.

Теперь выразим правую часть (4.37) с помощью (4.38) и (4.39):

$$\begin{aligned} & \gamma_0 (m_{22}x_1 - m_{12}x_1')^2 + 2\alpha_0 (m_{22}x_1 - m_{12}x_1') \times \\ & \times (-m_{21}x_1 + m_{11}x_1') + \beta_0 (-m_{21}x_1 + m_{11}x_1')^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Приведя подобные члены в (4.40) и сравнив полученное выражение с левой частью равенства (4.37), легко получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= m_{11}^2 \beta_0 - 2m_{11}m_{12} \alpha_0 + m_{12}^2 \gamma_0, \\ \alpha_1 &= -m_{11}m_{21} \beta_0 + (m_{11}m_{22} + m_{21}m_{12}) \alpha_0 - m_{12}m_{22} \gamma_0, \\ \gamma_1 &= m_{21}^2 \beta_0 - 2m_{21}m_{22} \alpha_0 + m_{22}^2 \gamma_0.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Легко видеть, что (4.41) можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{21}m_{12} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_0. \quad (4.42)$$

Например, для прямолинейного промежутка без магнитного поля матрица перехода равна $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда в соответствии с (4.42) значения параметров Куранта–Снайдера на “выходе” такого участка равны

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \beta_0 - 2\alpha_0 s + \gamma_0 s^2, \\ \alpha(s) &= \alpha_0 - \gamma_0 s, \quad \gamma(s) = \gamma_0,\end{aligned}\quad (4.43)$$

где значения параметров на “входе” участка – α_0 , β_0 и γ_0 .

И совсем простое выражение для поведения бетатронной функции в прямолинейном промежутке получается, если принять

$$\alpha_0 = 0: \quad \beta(s) = \beta_0 + \frac{s^2}{\beta_0}, \quad \text{т.е. бетатронная функция на участке без}$$

магнитного поля увеличивается квадратично с длиной, причем тем быстрее, чем меньше начальное значение β_0 на входе в участок.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathcad. При помощи средств Mathcad можно создать анимацию, в которой будет наглядно отображаться эволюция фазовых эллипсов пучка и координат тестовой частицы при движении вдоль канала.

В начале работы задаются длины элементов канала, начальный эмиттанс пучка, аксептанс с которым необходимо согласовать канал, также задаются начальные значения оптических функций. В программе задаются параметры трех линз, однако любую из них можно исключить из рассмотрения, если задать нулевую длину или нулевой градиент, таким образом можно перейти к рассмотрению дублета или одной квадрупольной линзы. Далее в программе производится расчет бетатронных функций, результат приводится в виде графиков, справа на экране приводятся аксептансы, с которыми необходимо согласовать канал, и эммитансы пучка, прошедшего канал. По приведенным эллипсам можно оценить, насколько хорошо согласован канал. В конце программы задаются продольная координата наблюдения и начальные координаты тестовой частицы. Снова приводятся графики бетатронных функций, где теперь вертикальной линией обозначена координата наблюдения, для которой справа на экране приводятся фазовые эллипсы пучка и координаты тестовой частицы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения движения пучка заряженных частиц в системе квадрупольных линз.

2. Рассмотреть поведение фазовых эллипсов и β -функций при прохождении пучка через дрейфовый промежуток. Задать произвольные, но разные начальные значения β_{x0} и β_{y0} , начальные значения производных β'_{x0} , β'_{y0} положить равными нулю. С помощью матрицы определить значения β -функций в конце промежутка, определить прирост функций. Сравнить полученные результаты с моделированием.

3. Изучить влияние на пучок одной квадрупольной линзы. Рассмотреть структуру “промежуток–линза–промежуток”. Посмотреть, как меняются фазовые эллипсы пучка на выходе в зависимости от градиента, как меняются эллипсы в зависимости от продольной координаты внутри линзы.

Варианты заданий

1	Частицы: электрон, альфа-частица; $W = 1500$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 5$ м	$\beta inj_x = 6,2$ м	$\beta' inj_x = 1,2$
	$\beta_{y0} = 10$ м	$\beta inj_y = 6$ м	$\beta' inj_y = -2,3$
	$G_{Q1} = -9$ Тл/м	$G_{Q2} = 23$ Тл/м	$G_{Q3} = -16$ Тл/м
	$G_{Q1} = -5$ Тл/м	$G_{Q2} = 10$ Тл/м	$G_{Q3} = -7$ Тл/м
2	Частицы: протон, альфа-частица; $W = 1500$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 5$ м	$\beta inj_x = 6$ м	$\beta' inj_x = -1,2$
	$\beta_{y0} = 3$ м	$\beta inj_y = 5,5$ м	$\beta' inj_y = 2,4$
	$G_{Q1} = 12$ Тл/м	$G_{Q2} = -24$ Тл/м	$G_{Q3} = 15$ Тл/м
	$G_{Q1} = 15$ Тл/м	$G_{Q2} = -30$ Тл/м	$G_{Q3} = 30$ Тл/м
3	Частицы: электрон, протон; $W = 800$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 2$ м	$\beta inj_x = 2,5$ м	$\beta' inj_x = -2$
	$\beta_{y0} = 1$ м	$\beta inj_y = 5,5$ м	$\beta' inj_y = 3$
	$G_{Q1} = 10$ Тл/м	$G_{Q2} = -15$ Тл/м	$G_{Q3} = 9$ Тл/м
	$G_{Q1} = 6$ Тл/м	$G_{Q2} = -12$ Тл/м	$G_{Q3} = 12$ Тл/м
4	Частицы: электрон, альфа-частица; $W = 300$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 2$ м	$\beta inj_x = 5,6$ м	$\beta' inj_x = -0,5$
	$\beta_{y0} = 1$ м	$\beta inj_y = 6,8$ м	$\beta' inj_y = 3$
	$G_{Q1} = 0,5$ Тл/м	$G_{Q2} = -2,5$ Тл/м	$G_{Q3} = 2,7$ Тл/м
	$G_{Q1} = 1,5$ Тл/м	$G_{Q2} = -3,2$ Тл/м	$G_{Q3} = 2,2$ Тл/м
5	Частицы: протон, альфа-частица; $W = 2000$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 2$ м	$\beta inj_x = 1$ м	$\beta' inj_x = -0,5$
	$\beta_{y0} = 7$ м	$\beta inj_y = 2$ м	$\beta' inj_y = -0,7$
	$G_{Q1} = -25$ Тл/м	$G_{Q2} = 40$ Тл/м	$G_{Q3} = -30$ Тл/м
	$G_{Q1} = -15$ Тл/м	$G_{Q2} = 30$ Тл/м	$G_{Q3} = -20$ Тл/м
	$G_{Q1} = -20$ Тл/м	$G_{Q2} = 40$ Тл/м	$G_{Q3} = -20$ Тл/м

6	Частицы: электрон, протон; $W = 2500$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 5$ м $\beta_{y0} = 15$ м	$\beta inj_x = 2,7$ м $\beta inj_y = 0,6$ м	$\beta' inj_x = -0,6$ $\beta' inj_y = 1,2$
	$G_{Q1} = -20$ Тл/м	$G_{Q2} = 35$ Тл/м	$G_{Q3} = -25$ Тл/м
	$G_{Q1} = -10$ Тл/м	$G_{Q2} = 20$ Тл/м	$G_{Q3} = -25$ Тл/м
	$G_{Q1} = -20$ Тл/м	$G_{Q2} = 45$ Тл/м	$G_{Q3} = -40$ Тл/м
7	Частицы: электрон, альфа-частица; $W = 1300$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 15$ м $\beta_{y0} = 1$ м	$\beta inj_x = 0,3$ м $\beta inj_y = 1,8$ м	$\beta' inj_x = 0,3$ $\beta' inj_y = 0,4$
	$G_{Q1} = 20$ Тл/м	$G_{Q2} = -25$ Тл/м	$G_{Q3} = 30$ Тл/м
	$G_{Q1} = 8$ Тл/м	$G_{Q2} = -20$ Тл/м	$G_{Q3} = 12$ Тл/м
	$G_{Q1} = 10$ Тл/м	$G_{Q2} = -20$ Тл/м	$G_{Q3} = 15$ Тл/м
8	Частицы: протон, альфа-частица; $W = 1100$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 2$ м $\beta_{y0} = 2$ м	$\beta inj_x = 2,6$ м $\beta inj_y = 4$ м	$\beta' inj_x = -2,3$ $\beta' inj_y = 2$
	$G_{Q1} = 7$ Тл/м	$G_{Q2} = -17$ Тл/м	$G_{Q3} = 13$ Тл/м
	$G_{Q1} = -15$ Тл/м	$G_{Q2} = 25$ Тл/м	$G_{Q3} = -15$ Тл/м
	$G_{Q1} = 10$ Тл/м	$G_{Q2} = -22$ Тл/м	$G_{Q3} = 20$ Тл/м
9	Частицы: электрон, протон; $W = 1700$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 6$ м $\beta_{y0} = 3$ м	$\beta inj_x = 2$ м $\beta inj_y = 1$ м	$\beta' inj_x = -2,3$ $\beta' inj_y = 2$
	$G_{Q1} = 5$ Тл/м	$G_{Q2} = -12$ Тл/м	$G_{Q3} = 10$ Тл/м
	$G_{Q1} = 12$ Тл/м	$G_{Q2} = -25$ Тл/м	$G_{Q3} = 25$ Тл/м
	$G_{Q1} = 10$ Тл/м	$G_{Q2} = -25$ Тл/м	$G_{Q3} = 18$ Тл/м
10	Частицы: электрон, альфа-частица; $W = 2200$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 1$ м $\beta_{y0} = 1$ м	$\beta inj_x = 2$ м $\beta inj_y = 6,7$ м	$\beta' inj_x = -4$ $\beta' inj_y = 4$
	$G_{Q1} = -20$ Тл/м	$G_{Q2} = 35$ Тл/м	$G_{Q3} = -30$ Тл/м
	$G_{Q1} = 15$ Тл/м	$G_{Q2} = -30$ Тл/м	$G_{Q3} = 30$ Тл/м
	$G_{Q1} = -15$ Тл/м	$G_{Q2} = 30$ Тл/м	$G_{Q3} = -30$ Тл/м

11	Частицы: протон, альфа-частица; $W = 600$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 15$ м $\beta_{y0} = 1$ м	$\beta inj_x = 0,5$ м $\beta inj_y = 3$ м	$\beta' inj_x = -2$ $\beta' inj_y = 1$
	$G_{Q1} = 12$ Тл/м	$G_{Q2} = -23$ Тл/м	$G_{Q3} = 16$ Тл/м
	$G_{Q1} = 10$ Тл/м	$G_{Q2} = -20$ Тл/м	$G_{Q3} = 10$ Тл/м
	$G_{Q1} = 8$ Тл/м	$G_{Q2} = -18$ Тл/м	$G_{Q3} = 15$ Тл/м
12	Частицы: электрон, протон; $W = 1300$ МэВ		
	$\beta_{x0} = 4$ м $\beta_{y0} = 6$ м	$\beta inj_x = 0,8$ м $\beta inj_y = 1$ м	$\beta' inj_x = 1,4$ $\beta' inj_y = -1,1$
	$G_{Q1} = -5$ Тл/м	$G_{Q2} = 12$ Тл/м	$G_{Q3} = -10$ Тл/м
	$G_{Q1} = -15$ Тл/м	$G_{Q2} = 23$ Тл/м	$G_{Q3} = -28$ Тл/м
	$G_{Q1} = -9$ Тл/м	$G_{Q2} = 19$ Тл/м	$G_{Q3} = -14$ Тл/м

4. Рассмотреть движение пучка в канале, содержащем квадрупольный дублет. Для заданных параметров канала, пучка и аксептанса структуры, в которую осуществляется выпуск, подобрать градиенты линз таким образом, чтобы фазовый объем пучка на выходе был согласован с аксептансом. Привести максимальные значения получившихся β -функций.

5. Рассмотреть движение пучка в канале, содержащем квадрупольный триплет. Выбрать из данных вариантов настройки триплета наиболее оптимальный с точки зрения согласования. Используя выбранный вариант как исходный, повторить п. 2 для квадрупольного триплета. Сравнить поведение оптических функций в дуплете и триплете. Пояснить различия.

6. Используя полученные в п. 5 данные, рассчитать такие градиенты, при которых канал будет согласован для другого сорта частиц.

7. Для согласованного триплета создать анимацию, из которой будет наглядно видно поведение фазовых эллипсов при движении пучка вдоль канала.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, требуемые результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений следует заносить в таблицы с соответствующими названиями колонок.

3. Привести все полученные графики.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Запишите матрицу перехода для фокусирующей и дефокусирующей квадрупольной линзы, и дрейфового промежутка. Поясните разницу между ними.

2. Каков физический смысл β -функции?

3. Каков физический смысл инварианта Куранта–Снайдера?

4. Вывести связь между квадратом константы A в уравнении движения и эмиттансом пучка.

5. Опишите поведение бетатронной функции в дрейфовом промежутке. Ответ поясните.

6. Что означает равенство единице определителя матрицы перехода?

7. В чем удобства матричной и аналитической форм решения?

8. Почему при использовании одиночных фокусирующих элементов удобно использовать не квадрупольный дуплет, а триплет?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: Энергоатомиздат, 1991.

2. Брук Г., Циклические ускорители заряженных частиц. – М.: Атомиздат, 1970.

Практическое занятие № 5

ЗНАКОПЕРЕМЕННАЯ ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. ФОКУСИРОВКА ПУЧКОВ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Цель: закрепление теоретических основ физики пучков заряженных частиц; изучение методов поперечной фокусировки пучков, изучение особенности периодической знакопеременной фокусировки в циклических ускорителях.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

5.1. Магнитная система циклического ускорителя

Назначение магнитной системы

Предположим, что для рассматриваемого нами случая циклического ускорителя существует такая замкнутая кривая, лежащая в горизонтальной плоскости (которая называется *медианной плоскостью*), что частица с некоторым импульсом p_0 может двигаться точно по этой кривой. Назовем эту кривую *равновесной орбитой* [1–2]. Формирование равновесной (или идеальной) замкнутой орбиты с помощью внешнего магнитного поля является первой, но не единственной задачей магнитной системы. Реально в пучке всегда есть разброс частиц по координатам и угловым отклонениям от равновесной орбиты. Поэтому вторая задача магнитной системы – обеспечение устойчивого движения частиц при помощи фокусирующих сил. Если частица с равновесным импульсом начинает движение с небольшим смещением и/или небольшим угловым отклонением от равновесной орбиты, то она все время должна оставаться вблизи этой орбиты (рис. 5.1).

Поворотные и фокусирующие силы могут создаваться как магнитным, так и электрическим полем согласно известному выражению силы Лоренца:

$$\vec{F} = e \cdot \vec{E} + e \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.1)$$

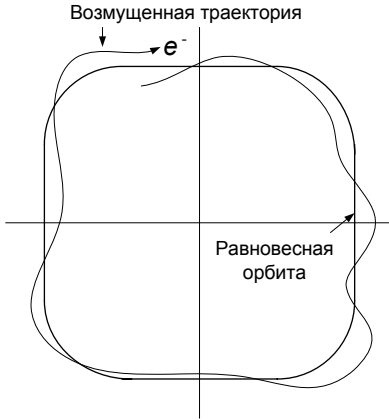


Рис. 5.1. Устойчивое движение частицы относительно равновесной орбиты

Потребовав равенства сил, создаваемых электрическим и магнитным полями, для релятивистской частицы ($v \approx c$) легко видеть, что умеренная величина магнитного поля $1 \text{ Т} = 10 \text{ кГс}$ соответствует напряженности электрического поля $3 \cdot 10^8 \text{ В/м}$. Поскольку такое электрическое поле технически недостижимо, для поворота и фокусировки релятивистских пучков практически всегда используется магнитное поле.

С другой стороны, если рассмотреть релятивистское уравнение движения

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}, \quad (5.2)$$

то, умножая обе части его скалярно на скорость \vec{v} , получим

$$dW/dt = \vec{v} \cdot \vec{F} = 0 \quad (5.3)$$

ввиду перпендикулярности \vec{v} и $\vec{v} \times \vec{B}$. Здесь вместо $\vec{v} \cdot \vec{p}$ введена величина полной энергии W , которая равна

$$W = mc^2 = \gamma \cdot m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.4)$$

Из условия (5.3) легко видеть, что стационарное магнитное поле *не* может изменить энергию и релятивистскую массу частицы. Отсюда сразу следует, что, во-первых, для ускорения частиц необходимо применять электрическое поле (в частном случае *бетатро-*

на используется переменное магнитное поле), а во-вторых, из (5.1) получается уравнение для определения радиуса траектории движения релятивистской частицы в магнитной системе циклического ускорителя.

Формирование равновесной орбиты

Характерные размеры циклического ускорителя определяются радиусом равновесной орбиты ρ , который в простейшем случае однородного магнитного поля, перпендикулярного медианной плоскости, находится из условия равенства сил центростремительной и Лоренца

$$\frac{\gamma \cdot m_0 v^2}{\rho} = evB,$$

откуда следует важное соотношение

$$B\rho = \frac{mv}{e} = \frac{p}{e} \quad (5.5)$$

и определяется угловая частота $\omega = eB/m_0\gamma$ обращения частицы на орбите.

Величина $B\rho$, которая для релятивистских частиц ($\beta \approx 1$) характеризует энергию пучка, называется *магнитной жесткостью* ускорителя. В практических единицах

$$E[\text{ГэВ}] = 0,3 B[\text{Тл}] \rho[\text{м}]. \quad (5.6)$$

Магнитная индукция на орбите пучка для обычных (не сверхпроводящих) электромагнитов имеет характерную величину 1–2 Тл, для сверхпроводящих – несколько тесл. При поле 1 Тл для электронов с энергией 100 МэВ радиус магнитной системы согласно (5.6) приблизительно равен 0,3 м, а для энергии 10 ГэВ – 30 м.

5.2. Сильная фокусировка заряженных частиц

В азимутально-симметричном поле частоты бетатронных колебаний $\nu_{x,z}$ меньше частоты обращения. В то же время, чем меньше эти частоты (чем «слабее» фокусировка), тем больше при прочих

равных условиях отклонение частицы от равновесной траектории, и тем больше требуемая для пучка апертура. При этом растет энергопотребление магнитов, их габариты, вес и, в конечном счете, стоимость установки. Кроме того, для подавляющего числа экспериментов необходимы пучки заряженных частиц с малыми размерами и угловой расходимостью. Все это заставило изыскивать способы повышения эффективности фокусировки и уменьшения эмиттанта пучка, т.е. получения так называемой *сильной (знакопеременной) фокусировки*.

Для увеличения возвращающей силы необходимо, чтобы показатель спада магнитного поля $|n| \gg 1$ (сильный градиент поля G на равновесной орбите). Однако при этом в зависимости от знака градиента движение всегда неустойчиво по одной из поперечных координат. Решение заключается в отказе от азимутальной симметрии и расположении магнитов с $n \gg +1$ и $n \ll -1$ в определенной последовательности так, что хотя каждый из магнитов и дефокусирует пучок по x или z , совместное действие такой системы оказывается фокусирующим в обеих плоскостях. Качественно этот эффект можно объяснить тем, что в подобной магнитной системе частица проходит фокусирующий магнит при большем отклонении от оси, чем дефокусирующий. А поскольку сила пропорциональна смещению, то суммарное действие оказывается фокусирующим. На рис. 5.2 схематически показан сильнофокусирующий циклический ускоритель.

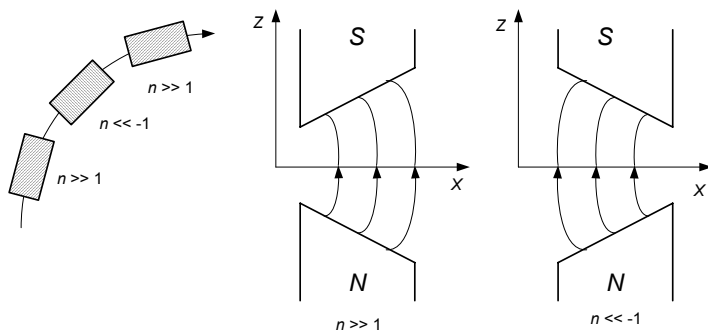


Рис. 5.2. Схема сильнофокусирующего ускорителя

Исследование поперечного движения частицы в современных магнитных системах, имеющих весьма сложную конфигурацию, представляет важный раздел теории ускорителей. Формирование участков поля с $n \gg +1$ и $n \ll -1$ в современных ускорителях делается в основном (но не только) специализированными *квадрупольными* («четыреполюсными») магнитами, которые создают на равновесной орбите поле, линейно зависящее от поперечных координат:

$$B_z = G \cdot x, \quad B_x = G \cdot z, \quad (5.7)$$

где x – радиальное отклонение частицы от равновесной траектории; z – вертикальное отклонение.

Сечение квадрупольного магнита (линзы) схематически изображено на рис. 5.3.

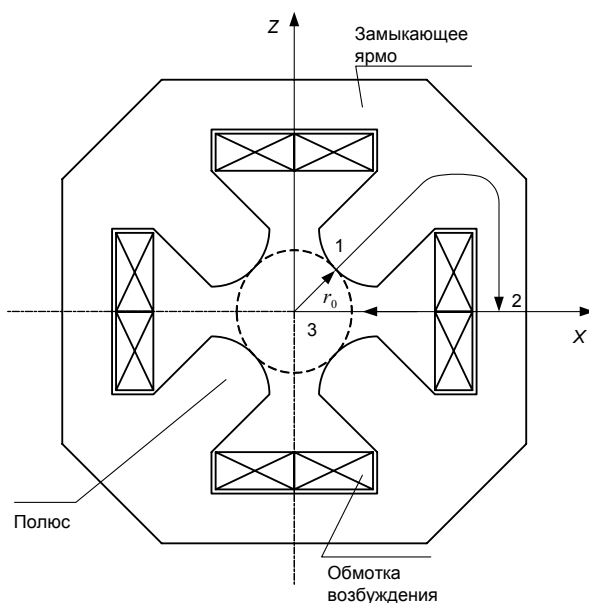


Рис. 5.3. Сечение квадрупольной линзы

Линзу, фокусирующую по горизонтали, будем называть *фокусирующей*, несмотря на то, что она дефокусирует по вертикали. Соответственно, *дефокусирующая* линза дефокусирует пучок по x и

фокусирует по z . Понятно, что смена полярности питания превращает линзу из фокусирующей в дефокусирующую и наоборот.

Для фокусирующей линзы градиент $G > 0$ и уравнения поперечного движения заряда имеют вид

$$F_x = evB_z(x, z) = -evGx, \quad F_z = evB_x(x, z) = evGz. \quad (5.8)$$

Важным свойством этих выражений является тот факт, что каждая компонента силы зависит линейно только от соответствующей координаты, и для ускорителя, состоящего из поворотных и квадрупольных магнитов, движение по x и z могут рассматриваться независимо, если нет ошибок установки магнитных элементов.

5.3. Псевдогармонические бетатронные колебания

Устойчивое (т.е. ограниченное) поперечное движение, описываемое уравнением вида

$$\frac{d}{ds} p \frac{d}{ds} x + K(s)x = 0,$$

где $K(s)$ – периодическая функция, является псевдогармонической функцией

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0), \quad \mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)},$$

где A – константа, а β и μ – периодические функции (см. работу 4).

Здесь введена в рассмотрение так называемая бетатронная функция $\beta(s) = \beta(s + L)$ – периодическая функция азимутальной координаты, L – период оптической структуры. Таким образом, бетатронная функция, с одной стороны, определяет максимальное отклонение частицы на данном азимуте при заданном A , зависящем от начальных условий:

$$X_{\max}(s) = \pm A\sqrt{\beta(s)}. \quad (5.9)$$

С другой стороны, бетатронная функция, через $\mu(s)$ характеризует мгновенную фазу колебаний и, таким образом, может быть определена как локальная длина волны бетатронных колебаний: $2\pi\beta(s) = \lambda(s)$.

Поскольку в силу определения $\beta > 0$, а производная β'' в точках максимума отрицательна, из уравнения для β -функции ($2\beta \cdot \beta'' - \beta'^2 + 4K_x(s)\beta^2 = 4$, см. описание к лабораторной работе 4, формула (4.22)) следует, что максимальное значение бетатронной функции может быть достигнуто только на азимуте с $K(s) > 0$. Иными словами, горизонтальная или вертикальная бетатронные функции максимальны (минимальны) в элементах, фокусирующих (дефокусирующих) по соответствующей координате, или, что то же самое, частица больше отклоняется от оси в фокусирующих элементах. Благодаря этому фокусирующее действие квазиупругих сил больше, чем дефокусирующее, что и дает суммарный фокусирующий эффект в системах, где функция $K(s)$ знакопеременна (сильная фокусировка), а сама бетатронная функция может служить характеристикой фокусирующих свойств магнитной системы, альтернативной $K(s)$.

На рис. 5.4 показана $\beta_x(s)$ для простой магнитной структуры (так называемой структуры *FODO*) состоящей из последовательно-фокусирующих и дефокусирующих квадрупольных линз, разделенных участками без магнитного поля. Кроме того, здесь же приведены огибающая пучка и ряд траекторий. Под огибающей пучка имеется в виду максимальное отклонение частиц от равновесной орбиты как функция азимутальной координаты s . Видно, что траектории частицы имеют вид “искаженных” гармонических колебаний с амплитудой, модулированной $\sqrt{\beta(s)}$, и с фазой, скорость изменения которой пропорциональна $1/\beta(s)$.

Если мы рассмотрим движение частиц с разными значениями A и ϕ_0 (рис. 5.4,е), мы увидим, что частицы всегда остаются внутри огибающей, определяемой (5.11). Другими словами, бетатронная функция определяет минимальную апертуру, необходимую для движения частиц с различными начальными условиями. Если внутри этой апертуры будет помещена мишень, то частицы с определенными начальными условиями будут сталкиваться с мишенью и выходить из режима ускорения.

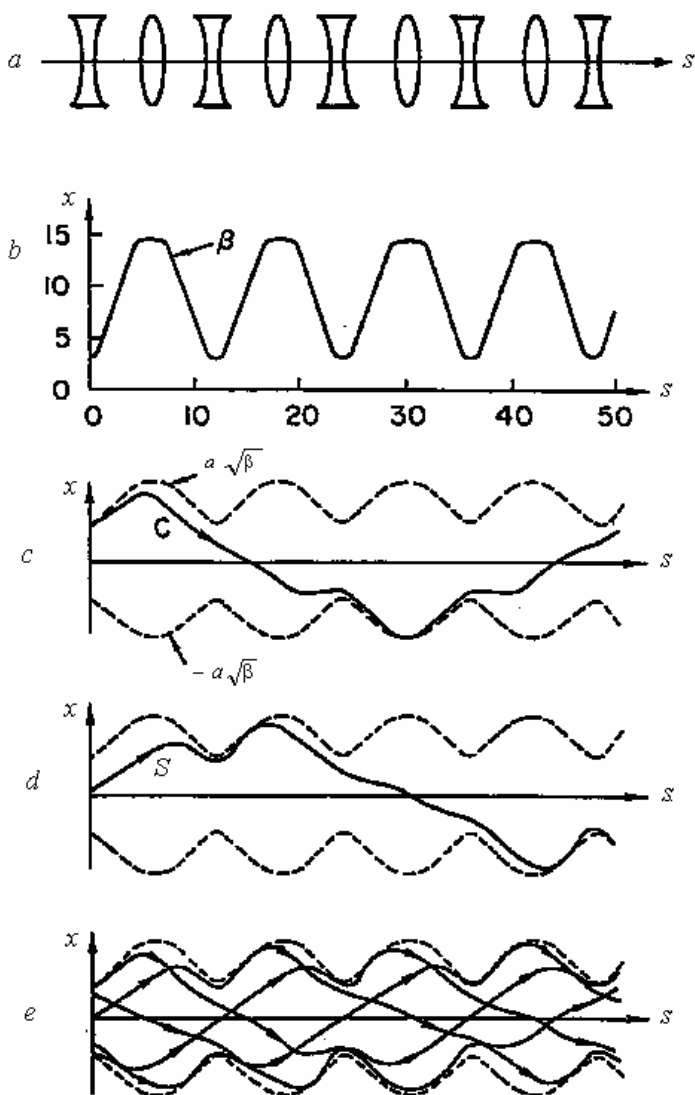


Рис. 5.4. Бетатронные функции структуры *FODO*:
 a – последовательность F и D линз; b – бетатронная функция;
 c и d – косинусная и синусная траектории внутри огибающей;
 e – одна траектория на протяжении нескольких оборотов

5.4. Матрица оборота и критерий устойчивости

В описании к лабораторной работе 4 была выведена связь между матрицей перехода $s_0 \rightarrow s$ для непериодической структуры и параметрами Куранта–Снайдера:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}}(\cos \Delta\mu + \alpha_0 \sin \Delta\mu) & \sqrt{\beta(s)\beta_0} \sin \Delta\mu \\ -\frac{1}{\sqrt{\beta(s)\beta_0}}[(\alpha(s) - \alpha_0)\cos \Delta\mu + (1 + \alpha(s)\alpha_0)\sin \Delta\mu] & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}}(\cos \Delta\mu - \alpha(s)\sin \Delta\mu) \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

где $\Delta\mu = \mu(s) - \mu(s_0)$ – набег фазы бетатронных колебаний между точками s_0 и s .

Матрица оборота позволяет установить критерий устойчивости линейных бетатронных колебаний.

Пусть, с одной стороны, получена матрица оборота $s \rightarrow s + L$ с помощью последовательного перемножения матриц элементарных участков:

$$M_R = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

С другой стороны, выражение (5.10) позволяет записать эту же матрицу в виде

$$M_R = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

где $\alpha(s) = -\beta'(s)/2$, γ – третий параметр Куранта–Снайдера; μ – набег фазы бетатронных колебаний на периоде оптической структуры; учтено, что в силу периодичности бетатронной функции

$$\beta(s + L) = \beta(s) = \beta \quad \text{и} \quad \alpha(s + L) = \alpha(s) = \alpha.$$

Сравнивая (5.11) и (5.12), можно получить критерий существования замкнутого решения уравнения бетатронных колебаний частоты в циклическом ускорителе, который является критерием устойчивости движения частицы, когда параметр μ является вещественным

$$\frac{1}{2}|SpM_R| = \frac{1}{2}|m_{11} + m_{22}| = |\cos \mu| < 1, \quad (5.13)$$

где $Sp(M)$ – шпур матрицы M .

Критерий устойчивости дает возможность при проектировании магнитной структуры циклического ускорителя не проводить утомительное моделирование траекторий частиц с различными начальными условиями для определения, будут ли отклонения от равновесной траектории ограничены или нет. Вместо этого достаточно вычислить матрицу перехода, отвечающую периоду ускорителя, и применить к шпуру этой матрицы условие (5.13).

Одновременно матрицы (5.11) и (5.12) позволяют вычислить параметры Куранта–Снайдера для выбранной точки s :

$$\beta = \frac{m_{12}}{\sin \mu}, \quad \alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu}, \quad \gamma = -\frac{m_{21}}{\sin \mu}. \quad (5.14)$$

Шпур матрицы (5.12) дает возможность найти значение $\sin \mu$, но не его знак. Однако, учитывая условие $\beta > 0$, знак $\sin \mu$ должен совпадать со знаком m_{12} . Набег фазы бетатронных колебаний на всей длине ускорителя, а точнее, *бетатронное число* (или *приведенная бетатронная частота*), является одним из фундаментальных понятий физики циклических ускорителей и определяется как

$$\nu = \frac{\mu \cdot N}{2\pi} = \frac{N}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}, \quad (5.15)$$

где N – число периодов оптической структуры на кольце,

В заключение отметим, что наиболее простой вид матрица оборота (5.12) принимает, если выбрать для ее вычисления азимут, для которого $\alpha = 0$, что всегда можно сделать из-за произвольности определения $s = 0$ в периодической структуре:

$$M_R = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

5.5. Расчет магнитной структуры циклического ускорителя

Рассмотрим сильнофокусирующую структуру *FODO*. Схематично структура одного периода *FODO* показана на рис. 5.5. Ускоритель состоит из большого числа ячеек, но в силу периодичности нам достаточно исследовать только одну ячейку. Если кольцо ускорителя состоит из N повторяющихся участков (ячеек), то такие участки называются *суперпериодами*, а про все кольцо говорят, что оно имеет N -кратную симметрию.

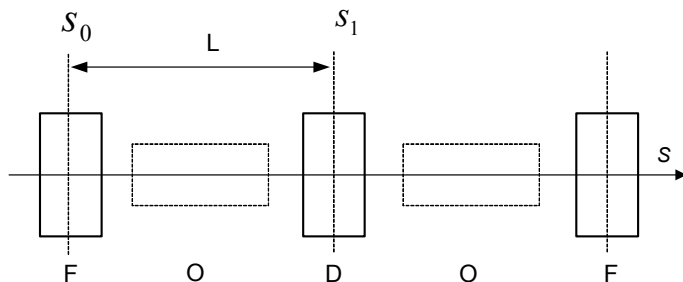


Рис. 5.5. Схема *FODO* ячейки

Для дальнейшего изучения периодической фокусировки необходимо сделать следующие допущения:

- Для создания круговой орбиты ускорителей между квадрупольными магнитами размещаются поворотные магниты (показанные на рис. 5.5 пунктиром). Однако слабой ($\sim \rho^{-2}$) фокусировкой поворотных магнитов по сравнению с квадрупольными линзами можно пренебречь. Будем также считать участок между поворотными магнитами прямолинейным без поля.

- Квадрупольные линзы будем рассматривать как тонкие с фокусными расстояниями f_F и f_D .

- Ввиду существования зеркальной симметрии в точке s_1 можно исследовать матрицу половины ячейки от азимута s_0 до s_1 длиной L .

- Обозначим максимальную бетатронную функцию как $\hat{\beta}$, а минимальную – как $\check{\beta}$. Из симметрии задачи очевидно, что для ра-

диального движения бетатронная функция максимальна в центре F -линзы на азимуте s_0 , а минимальна – в центре D -линзы на азимуте s_1 . Для вертикального движения – наоборот.

Рассмотрим матрицу перехода от азимута s_0 до s_1 :

$$M(s_0 \rightarrow s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

которая, с учетом обозначений $F = L / f_F$ и $D = -L / f_D$, запишется как

$$M(s_0 \rightarrow s_1) = \begin{pmatrix} 1 - F & L \\ -\frac{1}{L}(F - D + FD) & 1 + D \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

С другой стороны, согласно (5.10) эта матрица может быть выражена через параметры Куранта–Снайдера в точках s_0 и s_1

$$M(s_0 \rightarrow s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\beta}} \cos \frac{\mu}{2} & \sqrt{\tilde{\beta}\beta} \sin \frac{\mu}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}\beta}} \sin \frac{\mu}{2} & \sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\beta}} \cos \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

где $\alpha = 0$ в точках экстремума бетатронной функции, а μ – набег фазы бетатронных колебаний на одной ячейки структуры. Матрицы (5.18) и (5.19) записаны для радиального движения. В случае вертикального движения F и D (а также $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta}$) нужно поменять местами.

Для выяснения вопроса устойчивости радиального и вертикального движений рассмотрим произведение $m_{21}m_{12}$:

$$m_{21}m_{12} = \sin^2 \frac{\mu_x}{2} = F - D + FD \leq 1, \quad \sin^2 \frac{\mu_z}{2} = D - F + FD \leq 1. \quad (5.20)$$

В переменных $D(F)$ область устойчивого движения ограничивается следующими соотношениями:

$$\sin \frac{\mu_x}{2} = 1 \quad (\mu_x = 180^\circ) \rightarrow F = 1 \quad \text{и} \quad \sin \frac{\mu_x}{2} = 0 \quad (\mu_x = 0^\circ) \rightarrow F = \frac{D}{1 + D},$$

$$\sin \frac{\mu_z}{2} = 1 \quad (\mu_z = 180^\circ) \rightarrow D = 1 \quad \text{и} \quad \sin \frac{\mu_z}{2} = 0 \quad (\mu_z = 0^\circ) \rightarrow D = \frac{F}{1+F},$$

которые графически представляются известной диаграммой – «галстук» устойчивости (рис. 5.6).

Далее найдем значения бетатронной функции на азимутах s_0 и s_1 . Для упрощения выкладок примем, что градиент квадрупольных линз равен по абсолютной величине: $F = L/f$ и $D = -L/f$.

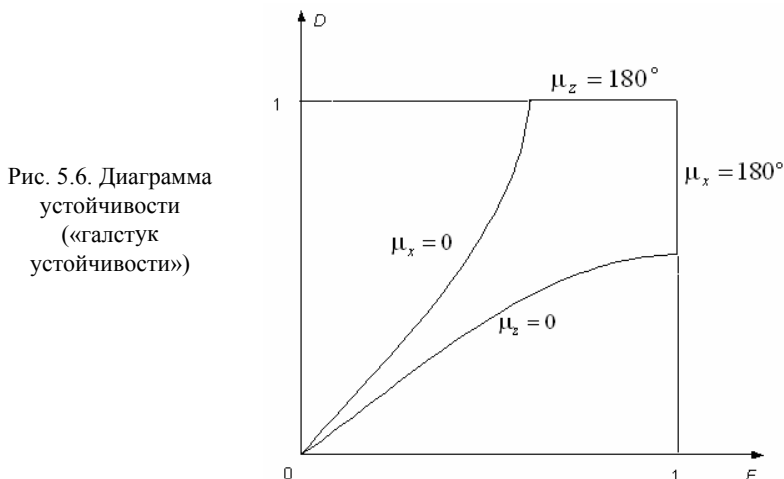


Рис. 5.6. Диаграмма устойчивости («галстук устойчивости»)

Тогда матрица перехода для половины ячейки периодичности (5.20) примет вид

$$M(s_0 \rightarrow s_1) = \begin{pmatrix} 1 - L/f & L \\ -L/f^2 & 1 - L/f \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

а условие устойчивости (одинаковое для обеих плоскостей) запишется как

$$-m_{21}m_{12} = \sin^2 \frac{\mu}{2} = \frac{L^2}{f^2} < 1 \quad \text{или} \quad L < f. \quad (5.22)$$

Комбинируя $m_{12} = L = \sqrt{\beta\bar{\beta}} \sin \frac{\mu}{2}$ с $m_{11} = 1 - \frac{L}{f} = \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{\beta}} \cos \frac{\mu}{2}$ и

учитывая (5.22), можно получить следующие выражения для значений бетатронной функции

$$\check{\beta} = 2L \frac{1 - \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu} \quad \text{и} \quad \hat{\beta} = 2L \frac{1 + \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu}. \quad (5.23)$$

Зависимость максимальной и минимальной бетатронных функций (в единицах длины ячейки $2L$) от набегу бетатронной фазы μ на периоде *FODO* показана на рис. 5.7.

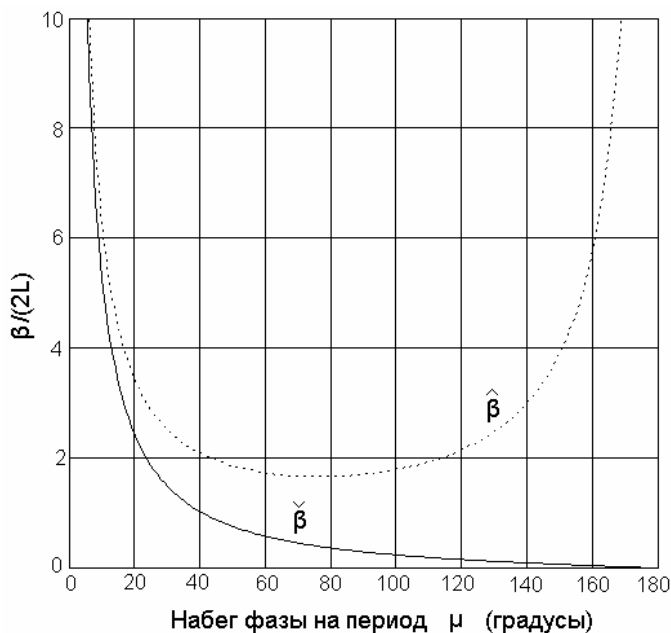


Рис. 5.7. Максимальная и минимальная бетатронная функция структуры *FODO*

Из экономических соображений желательно уменьшать поперечные размеры вакуумной камеры и магнитных элементов, что, в свою очередь, требует минимизации размера пучка, который пропорционален $\sqrt{\beta}$. Из графика на рис. 5.7 следует, что с этой точки зрения наиболее выгодно использовать *FODO* ячейку с набегом бетатронной фазы $\mu \approx 60^\circ \div 100^\circ$, где $\check{\beta}$ имеет пологий минимум. И наоборот, области вблизи 0° и 180° необходимо избегать, поскольку

ку здесь $\hat{\beta} \rightarrow \infty$. В терминах бетатронной частоты $\nu = N \cdot \mu / 2\pi$ это значит, что для ускорителя, состоящего из N_C одинаковых *FODO* ячеек, необходимо избегать частот, близких к целым $\nu = N_C$ и полужелым $\nu = N_C / 2$ значениям.

5.6. Квадрупольные линзы конечной длины

Квадрупольная линза конечной длины описывается матрицей вида:

$$M_{\text{KB}} = \begin{pmatrix} \cos(\chi) & \frac{s_{\text{KB}}}{\chi} \sin(\chi) \\ -\frac{\chi}{s_{\text{KB}}} \sin(\chi) & \cos(\chi) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

где $\chi_{x,z} = s_{\text{KB}} \sqrt{\pm \frac{e}{p} \frac{\partial B_z}{\partial x}} = \frac{s_{\text{KB}}}{p} \sqrt{n}$. Перемножив две матрицы вида (5.24) для фокусирующей дефокусирующей квадрупольной линзы, получим:

$$\cos \mu_x = \cos \chi_1 \cdot \cos \chi_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot \sin \chi_1 \cdot \sin \chi_2. \quad (5.25)$$

Поскольку для z -колебаний надо лишь заменить $n \rightarrow -n$, то $x \rightarrow ix$ и

$$\cos \mu_z = \text{ch } \chi_1 \cdot \text{ch } \chi_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \right) \cdot \text{sh } \chi_1 \cdot \text{sh } \chi_2. \quad (5.26)$$

Из (5.25) и (5.26) видно, что χ_1 и χ_2 не могут быть одновременно действительными или одновременно мнимыми, так как или $\cos \mu_x$, или $\cos \mu_z$ станет больше единицы. Это отражает тот очевидный факт, что система, составленная из одних дефокусирующих элементов, не может обеспечить устойчивости по соответствующему направлению. Поэтому, как уже отмечалось, показатель поля должен быть знакопеременным, т. е. n_1 и n_2 должны иметь разные знаки. Полагая для определенности $n_1 > 0$, $n_2 < 0$, имеем

$$\begin{aligned}\cos \mu_x &= \cos \chi_1 \cdot \operatorname{ch} |\chi_2| - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_1}{|\chi_2|} + \frac{|\chi_2|}{\chi_1} \right) \cdot \sin \chi_1 \cdot \operatorname{sh} |\chi_2|, \\ \cos \mu_z &= \operatorname{ch} |\chi_1| \cdot \cos \chi_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{|\chi_1|}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{|\chi_1|} \right) \cdot \operatorname{sh} |\chi_1| \cdot \sin \chi_2.\end{aligned}\quad (5.27)$$

Различаются эти выражения только взаимной заменой $\chi_1 \leftrightarrow |\chi_2|$ так что на плоскости параметров $(\chi_1, |\chi_2|)$ кривые $\cos \mu_x = \text{const}$ и $\cos \mu_z = \text{const}$ являются взаимным зеркальным отображением относительно биссектрисы (рис. 5.8). Мы получили «галстук» устойчивости для квадрупольных линз конечной длины.

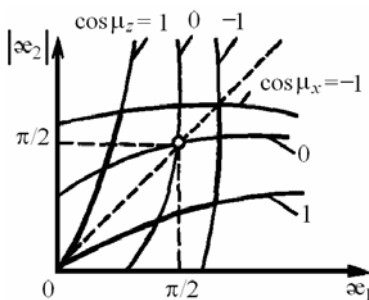


Рис. 5.8. Диаграмма устойчивости для линз конечной длины

Центр области устойчивости соответствует $\chi_1 = |\chi_2| = \pi/2$. При этом $\mu_x = \mu_z = \pi/2$, а на длине волны бетатронных колебаний укладывается четыре элемента периодичности и

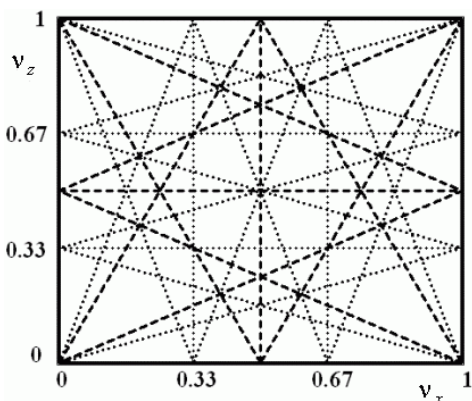
$$n_1 = -n_2 = N^2/4; \quad v_x = v_z = N/4 = \sqrt{n_1}/2. \quad (5.28)$$

Отметим, что в отсутствие дефокусирующих участков $v \sim \sqrt{n}$, т. е. частота вертикальных колебаний всего в 2 раза больше, но зато при абсолютной неустойчивости радиальных бетатронных колебаний. Таким образом, относительное снижение фокусирующих свойств за счет знакопеременности градиента оказывается не столь уж большим. Однако для достижения больших абсолютных значений v показатель поля должен быть достаточно велик, скажем, при $v \approx 10$ на орбите должно быть около 40 элементов периодичности при $|n| \approx 400$.

Конечно, рабочую точку не обязательно выбирать в центре области устойчивости, но она и не должна лежать близко к ее границам. Если одна из величин $\cos \mu_x$ или $\cos \mu_z$ близка к единице, то фокусировка по соответствующей степени свободы будет слабой, что приведет к увеличению размера пучка. Если же $\cos \mu_{x,z} \rightarrow -1$, то существенно увеличивается глубина модуляции огибающей, что тоже приведет к увеличению эффективного размера.

Надо отметить, что даже внутри области устойчивости рабочую точку нельзя выбрать произвольно. В реальном магнитном поле из-за так называемых резонансов бетатронных колебаний целые и полные значения $\nu_{x,z}$ оказываются запрещенными. Положение рабочей точки в области устойчивости должно контролироваться и поддерживаться с абсолютной погрешностью, лучшей 0,1, так что необходимая относительная погрешность параметров резко уменьшается с усилением фокусировки. Это является одной из основных причин недостижимости на практике очень больших значений ν .

Рис. 5.9. Резонансные линии первого – третьего порядков. Сплошные линии – первый порядок. Пунктирные линии – второй порядок. Точки – третий порядок



Нелинейное движение порождает плотную сетку резонансов, т.е., линий на диаграмме бетатронных частот, удовлетворяющих условию $m_x \nu_x + m_z \nu_z = n$, где $m_{x,z}, n$ – целые числа, а $|m_x| + |m_z| = p$ – порядок резонанса. Поэтому в реальном случае окончательный выбор рабочей точки на диаграмме устойчивости должен быть сделан с учетом нелинейностей. На рис. 5.9 приведена

диаграмма резонансов первого–третьего порядка в частотном пространстве.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель выполнена с использованием математического пакета Mathcad. В начале программы задаются эмиттансы пучка, длины дрейфовых промежутков и длины квадрупольных линз. Далее указываются набег фаз бетатронных колебаний на одном суперпериоде (параметры Флоке). Затем программа осуществляет поиск периодического решения и расчет бетатронных (оптических) функций, результат выводится в виде графиков. Ниже на экране, для наглядного пояснения понятия огибающей пучка приводятся траектории частиц с разными начальными условиями. Далее приведена диаграмма резонансов первого–третьего порядка в частотном пространстве с рабочей точкой, где задаются нецелые части бетатронных частот.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения движения пучка заряженных частиц в системе квадрупольных линз.
2. Определить набег фаз на одном суперпериоде (параметры Флоке), если известно число суперпериодов на кольце N и бетатронные частоты $\nu_{x,y}$.
3. По формулам (5.27) рассчитать минимальные и максимальные значения бета-функций.
4. Задать в программе полученные в п. 2 параметры Флоке. Сравнить максимальные и минимальные значения бетатронных функций с рассчитанными аналитически.
5. Задать в программе нецелые части бетатронных частот и посмотреть, куда попадает рабочая точка на диаграмме резонансов. Попытаться максимально удалить рабочую точку от всех ближайших резонансов. Выбор новых бетатронных частот пояснить. Рассчитать новые набег фаз на одном суперпериоде.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, требуемые результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений оформляются в виде таблицы с соответствующими названиями колонок.

3. Приводятся все полученные графики.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните принцип сильной фокусировки.

2. Каким уравнением описываются поперечные колебания частицы в ускорителе?

3. Запишите критерий устойчивости движения частиц в периодической структуре.

4. Как изменится вид матрицы фокусирующей (дефокусирующей) линзы в случае, когда длина линзы много меньше периода фокусировки? В каком случае можно пользоваться приближением так называемых тонких линз?

5. Как связаны набег фазы на одном суперпериоде $\mu_{x,y}$ (параметр Флоке) и число суперпериодов на кольце (кратность симметрии) при заданных бетатронных частотах $\nu_{x,y}$?

6. Что такое диаграмма устойчивости бетатронных колебаний? Почему нельзя выбирать рабочую точку с $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \pi$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: 1991.

2. Брук Г., Циклические ускорители заряженных частиц. – М.: Атомиздат, 1970.

Практическое занятие № 6

СИНХРОТРОН

Цель: закрепление теоретических основ физики работы циклического ускорителя – синхротрона, включающих принцип работы как электронного, так и протонного синхротрона.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Синхротрон – циклический резонансный ускоритель как легких, так и тяжелых частиц. В синхротроне орбита ускоряемых частиц остается постоянной, а ведущее магнитное поле изменяется с ростом энергии частиц, обеспечивая цикличность движения частиц (круговую или обычно более сложную орбиту) и устойчивость движения с применением слабой или сильной фокусировки. Ускорение частиц осуществляется высокочастотным переменным электромагнитным полем, создаваемым в устройствах резонаторного типа. Ускоряющие системы размещаются, как правило, в прямолинейных промежутках, свободных от магнитного поля.

В настоящее время синхротроны представляют собой основной тип резонансного ускорителя, с помощью которого можно повышать энергию ускоряемых частиц.

Необходимость иметь постоянный (или почти постоянный) радиус орбиты влечет за собой необходимость выполнения следующих трех требований.

1. В начале ускорения частицы уже должны иметь достаточно высокую кинетическую энергию, которая тем больше, чем больше начальное поле и радиус ускорителя (т.е. конечная энергия). Как правило, эта энергия обеспечивается предварительным (одним или несколькими последовательными) ускорителем-инжектором.

2. Магнитное поле синхротрона переменное во времени; цикл ускорения начинается при малом уровне магнитного поля и заканчивается при большом уровне магнитного поля. Частота повторения циклов относительно невелика и определяется возможной ско-

ростью изменения поля в магните, т.е., в конечном счете, системой его питания.

3. Частота ускоряющего поля должна быть равна или кратна частоте обращения равновесной частицы по орбите.

Первые синхротроны были созданы в 40–50-х годах XX века на энергии в десятки – сотни МэВ, и это было значительным шагом вперед по сравнению с бетатронами как по энергии частиц, так и по току пучка [1–3]. Это были ускорители со слабой фокусировкой. Крупнейшим представителем таких ускорителей был электронный синхротрон ФИАН им. П.Н. Лебедева на энергию 680 МэВ, запущенный в 1952 году.

Затем в начале 50-х годов появились протонные синхротроны, переступившие порог в 1 ГэВ, но также пока со слабой фокусировкой. Долгое время такие синхротроны называли синхрофазотронами, но позднее за ними закрепилось другое название – протонный синхротрон. На ускорители этого класса известны тем, что на Бэватроне (синхротрон на 6 ГэВ, США, Бэркли) в 1956 году были впервые обнаружены антипротоны. За это открытие американский физик Чемберлен получил Нобелевскую премию. В СССР на Синхрофазотроне (ОИЯИ, Дубна) была открыта другая новая частица – анти-сигма-минус-гиперон.

В 1952 году американские физики Курант, Ливингстон и Снайдер опубликовали описание принципа сильной фокусировки частиц в циклических ускорителях. Это было очень важное открытие, позволившее значительно уменьшить магниты синхротронов. Впоследствии выяснилось, что принцип сильной фокусировки еще раньше предложил инженер-электрик Николос Кристофилос, работавший в Афинах, а затем переехавший в США.

Первым ускорителем с сильной фокусировкой стал протонный синхротрон на 28 ГэВ, запущенный в 1959 году в CERN (Женева) и ныне известный как CPS.

Одновременно развивались и электронные синхротроны с сильной фокусировкой. В них, как и в бетатронах, предельная энергия частиц ограничивается потерями энергии ускоряемых частиц на синхротронное излучение. Однако механизм резонансного ускорения с помощью ВЧ резонаторов, используемый в синхро-

тронах, значительно более мощный, чем механизм индукционного ускорения в бетатронах, поэтому предельная энергия частиц, при которой потери энергии за оборот приближаются к приросту энергии за оборот, будет достигается при значительно более высоких энергиях.

На электронных синхротронах были выполнены многие важные исследования в области квантовой электродинамики и фотоядерной физики. Кроме того, эти ускорители используются как источники синхротронного излучения, которое нашло очень широкое применение для технологических процессов и прикладных научных исследований далеко за пределами физики элементарных частиц. Так, вредный на первых порах процесс синхротронных потерь нашел настолько важное применение, что теперь строятся специализированные синхротроны, работающие только как источники синхротронного излучения.

Еще одно развитие синхротронов связано с переводом их в режим накопителей сильноточных пучков и использованием этих синхротронов в качестве основных элементов ускорительно-накопительных комплексов. В таких комплексах сталкиваются во встречных соударениях два пучка частиц, обращающихся во взаимно противоположных направлениях. С недавнего времени такие комплексы называются коллайдерами.

6.1. Принцип действия электронного синхротрона

В ускорителях циклотронного типа и в бетатроне используются сплошные магниты, в которых магнитное поле создается полюсами круглой формы. В таких ускорителях магнитное поле должно быть во всех точках внутри круга, ограниченного предельной орбитой частиц. В циклотроне внутри круга находятся начальные витки спиральной орбиты, а в бетатроне внутри круга существует переменный магнитный поток, создающий индуцированное электрическое поле, ускоряющее частицы.

В синхротроне орбита равновесной частицы – окружность, а вакуумная камера – тороидальное кольцо с узким поперечным сечением. Магнитная система синхротрона выполняется в виде от-

дельных магнитных блоков, расставленных по окружности орбиты. Длина орбиты синхротронов в зависимости от энергии имеет величину от нескольких метров до нескольких десятков километров.

Ускорение частиц происходит в резонаторе, создающем продольное ускоряющее электрическое поле E_s . Условие резонансного ускорения состоит в том, что $\omega_{\text{вч}} = h\omega_0$, где ω_0 – частота обращения равновесной частицы, $h = 1, 2, 3, \dots$. Резонатор устанавливается на некотором азимуте орбиты, поэтому ускорение частицы происходит дискретно, один раз за оборот при одном резонаторе. Однако резонаторов может быть несколько; они размещаются по орбите произвольно, но между ними обязательно устанавливаются точные фазовые соотношения, обеспечивающие попадание равновесной частицы в одну и ту же фазу поля в каждом резонаторе независимо от места расположения резонатора.

В синхротроне для инжекции частиц используется линейный или другой циклический ускоритель. Он придает частицам энергию инжекции, соответствующую магнитному полю на орбите при заданном радиусе синхротрона согласно выражению $\beta W = 300BR$. Иногда имеется также устройство вывода ускоренных частиц из камеры ускорителя на удаленные экспериментальные установки.

При выборе энергии, с которой частицы будут инжектироваться в синхротрон, необходимо помнить, что в момент инжекции магнитное поле в поворотных магнитах должно быть в несколько раз больше, чем поле остаточного намагничивания (10–15 мТл). С другой стороны, магнитное поле в поворотных магнитах в конце цикла ускорения для комнатных температур не должно превышать 1,5–2 Тл. Эти два условия накладывают ограничение на величину изменения магнитного поля в поворотных магнитах синхротрона. Обычно магнитное поле в процессе ускорения изменяется не более чем на 2 порядка. В современных ускорительно-накопительных комплексах в оконечном синхротроне, где накапливается пучок, стараются вообще не изменять магнитное поле и поддерживать его на постоянном уровне $\sim 1,5$ Тл. Инжектируемый в этом случае в систему пучок имеет уже соответствующую максимальную энер-

гию. Работа установки в таком режиме позволяет улучшить многие параметры пучка в несколько раз.

При обсуждении устройства синхротронов целесообразно рассмотреть отдельно электронные и протонные синхротроны. Эти ускорители имеют общий принцип действия, однако их устройство и характер работы существенно отличаются в связи с тем, что энергия покоя электрона и протона различны (0,511 МэВ и 938 МэВ). В обоих случаях ускорители-инжекторы частиц в синхротрон сообщают им энергию более нескольких десятков МэВ. Это означает, что в электронный синхротрон частицы поступают практически полностью релятивистскими, т.е. их продольная (азимутальная) скорость почти точно равна скорости света. Для протонного синхротрона энергия инжекции обычно не превышает 100 – 200 МэВ, т.е. частицы будут еще нерелятивистскими.

Условие постоянства радиуса равновесной орбиты $B/W = \text{const}$ принимает вид:

$$B(t) = \frac{\omega_{B\psi}}{hec^2} W(t). \quad (6.1)$$

Это означает, что радиус равновесной орбиты R будет постоянным, если в пределах цикла ускорения магнитное поле электронного синхротрона будет возрастать во времени прямо пропорционально энергии равновесной частицы.

Захват частиц в процесс ускорения в синхротроне может произойти только в самом начале цикла ускорения, когда магнитное поле на орбите имеет минимальное значение, согласованное с энергией инжекции. Затем начинается ускорение – рост энергии всей группы захваченных частиц (в том числе и не совсем удовлетворяющих условию резонансного ускорения $\omega_{B\psi} = h\omega_0$). Как только магнитное поле на орбите начнет возрастать, так сразу прекратится захват частиц и начнется ускорение, так как увеличившееся магнитное поле перестанет соответствовать оставшейся на прежнем уровне энергии инжекции. В этот момент ускоритель-инжектор выключают, а группа захваченных частиц продолжает набор энергии при одновременном росте магнитного поля.

По достижении частицами предельной энергии в синхротроне рост магнитного поля останавливают. Группа ускоренных частиц выводится из камеры синхротрона и пучок направляется в экспериментальные установки. Магнитное поле уменьшается до начальной величины. Так завершается цикл работы ускорителя, а далее следует новый цикл ускорения. Циклы работы синхротрона повторяются до тех пор, пока не завершатся данные эксперименты. Синхротрон, как и фазотрон, работает в циклическом режиме, т.е. с регулярно повторяющимися циклами. Если ΔW – прирост энергии за один оборот частицы на орбите, то с учетом (6.1) и в случае одного резонатора на орбите:

$$\Delta W = eU_{\text{вч}} \cos \varphi_c = \frac{ec^2 T_0^2}{2\pi} \frac{dB}{dt},$$

где $U_{\text{вч}}$ – амплитуда напряжения на резонаторе; T_0 – период обращения синхронной частицы; φ_c – фаза равновесной частицы, где под равновесной частицей понимается частица частота обращения которой кратна частоте генератора. Отсюда

$$\cos \varphi_c = \frac{ec^2 T_0^2}{2\pi e U_{\text{вч}}} \frac{dB}{dt}. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует требование, которое называют условием Векслера для синхротрона:

$$\left| \frac{ec^2 T_0^2}{2\pi e U_{\text{вч}}} \frac{dB}{dt} \right| \leq 1. \quad (6.3)$$

Если условие (6.3) выполнено, то можно определить величину равновесной фазы; если не выполнено, то не существует фазы φ_c , при которой выполнялось бы (6.2), т.е. нет равновесной фазы при данном выборе параметров синхротрона T_0 , $U_{\text{вч}}$, dB/dt .

Выражение (6.3) является условием существования равновесной фазы, т.е. условием того, что в данном синхротроне работает механизм автофазировки (см. ниже). Поскольку отсутствие этого механизма грозит почти полной потерей интенсивности пучка, нужно правильно определить параметры, входящие в (6.3). Выполнению условия (6.3) способствует выбор высоких частот ускоряю-

щего поля (в области СВЧ), больших $U_{вч}$ и малых скоростей роста магнитного поля dB/dt .

6.2. Принцип действия протонного (ионного) синхротрона

Основное отличие протонного синхротрона от электронного состоит в необходимости учитывать нерелятивистское движение частиц и, следовательно, возрастание их скорости по мере набора энергии. Поэтому в протонном синхротроне для сохранения резонанса нельзя оставлять постоянной частоту генератора, ее нужно принудительно менять: медленно увеличивать во времени по мере набора энергии протонами. При этом должна перестраиваться частота резонатора, а магнитное поле на орбите увеличиваться так, чтобы радиус равновесной орбиты оставался постоянным.

Частота генератора в протонном синхротроне растет существенно нелинейно, с замедлением скорости роста частоты обращения при увеличении энергии протонов. В пределе, когда при очень больших энергиях протоны становятся релятивистскими и скорость их перестает меняться, частота генератора плавно прекращает рост и остается неизменной в конце процесса ускорения. В протонных синхротронах на сверхвысокие энергии протоны достигают скорости, близкой к скорости света, так как энергия инжекции достигает нескольких ГэВ. Изменение частоты генератора здесь будет уже сравнительно небольшим и так же, как в электронных синхротронах, для ускорения можно использовать неперестраиваемые резонаторы.

В связи с большой массой протонов и их соответствующей инерционностью все процессы в протонном синхротроне происходят значительно медленнее, чем в электронном.

Из общего выражения для импульса частицы на кольцевой орбите и выражения для полной энергии получаем:

$$W_c(t) = \sqrt{W_0^2 + e^2 c^2 R^2 B^2(t)},$$

где $R = \text{const}$.

Частота генератора должна меняться следующим образом:

$$\omega_{\text{вч}} = \frac{hec^2 B(t)}{\sqrt{W_0^2 + e^2 c^2 R^2 B^2(t)}}.$$

Характерная особенность протонных синхротронов – необходимость жесткой связи частоты генератора с магнитным полем. Поэтому изменения $B(t)$ и $\omega_{\text{вч}}(t)$ в техническом устройстве не задаются по отдельным независимым программам, а между этими двумя важнейшими величинами устанавливается однозначная прецизионная связь с помощью специальных схем автоматического регулирования, которые следят за изменением магнитного поля и постоянно корректируют соответствующим образом функцию изменения частоты генератора. Выполнение указанных выше требований позволяет осуществить в синхротронах резонансное ускорение частиц при постоянном радиусе равновесной орбиты.

6.3. Критическая энергия

Физика процесса автофазировки как в линейном, так и в циклическом ускорителе тесно связана с тем, как неравновесная частица перемещается по фазе относительно ускоряющей волны. В линейном случае этот процесс полностью характеризуется однозначной кинематической связью между энергией, импульсом и продольной скоростью:

$$W = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} = m_0 c^2 (1 - v^2 / c^2)^{-1/2},$$

согласно которой

$$\frac{dp}{dv} = \frac{1}{v} \frac{dW}{dv} = m_0 \gamma^3.$$

По аналогии с соответствующим нерелятивистским соотношением, в старых книгах по релятивистской динамике величину $m_0 \gamma^3$ даже называли иногда «продольной» массой, подчеркивая ее отличие от «поперечной» или обычной массы $m_0 \gamma$ и то обстоятельство, что релятивистскую скорость гораздо труднее увеличить по абсолютной величине, чем по направлению. Формальным аналогом этой величины в циклической машине является частная производ-

ная на равновесной орбите $(\partial W / \partial \omega)_c / R^2 \omega_c = (\partial p / \partial \omega)_c / R$, которая имеет размерность массы и называется «эффективной массой». Однако значение и знак этой «эффективной массы»

$$M = \left[R^2 \omega \frac{\partial \omega}{\partial W} \right]_c^{-1} = \left[R \frac{\partial \omega}{\partial p} \right]_c^{-1}$$

определяются не только кинематикой, поскольку при изменении энергии или импульса меняется не только скорость, но и радиус орбиты, от которого зависит частота обращения

Для подробного рассмотрения вопроса о зависимости периода обращения частицы от энергии необходимо обратиться к важному параметру циклических ускорителей – коэффициенту расширения орбит α . Он определяется как коэффициент пропорциональности между малым относительным приростом импульса и соответствующим малым относительным приростом длины орбиты $L = 2\pi R$

$$\alpha = \frac{p}{R} \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{p}{L} \frac{\partial L}{\partial p}. \quad (6.4)$$

Коэффициент α показывает, насколько сильно расширяется орбита при возрастании импульса частицы в магнитном поле с заданной структурой. Коэффициент расширения орбит зависит только от вида магнитной системы. Определение коэффициента расширения орбит является общим, пригодным для ускорителей и со слабой и с сильной фокусировкой.

Из общих соображений очевидно, что в ускорителе желательно иметь α как можно меньшей величины. Тогда орбита слабо реагирует на изменения импульса, т.е. более устойчива. В случае слабой фокусировки магнитное поле однородно по азимуту, а по радиусу спадает как $B = C \cdot R^{-n}$, где $C = \text{const}$, $0 < n < 1$. Отсюда следует:

$$dB / B = -n dR / R. \quad (6.5)$$

В свою очередь, из выражения для импульса $p = eBR$ вытекает:

$$dp / p = (dB / B) + (dR / R). \quad (6.6)$$

Комбинируя (6.5) и (6.6), получим

$$dR / R = [1 / (1 - n)] dp / p,$$

т.е. коэффициент расширения орбит в слабофокусирующих ускорителях равен

$$\alpha = \frac{1}{1-n}.$$

Из ограничений величины n следует, что в таких ускорителях $\alpha > 1$, т.е. орбита сравнительно сильно реагирует на изменения импульса частиц. В этом состоит еще одно проявление слабости фокусировки азимутально-однородным полем: эффективности этой фокусировки не хватает для жесткого сдерживания тенденции орбит к расширению при возрастании импульса частиц.

В случае сильной фокусировки коэффициент расширения орбит связан с параметрами магнитной системы более сложным образом:

$$\alpha = \frac{1}{L} \int \frac{D(s)}{R(s)} ds,$$

где $D(s)$ – дисперсия в дипольных магнитах; $R(s)$ – радиус поворота; L – длина орбиты; s – продольная координата. В современных сильнофокусирующих синхротронах $\alpha \ll 1$.

Теперь найдем общее выражение для связи малых относительных изменений частоты обращения и импульса частиц

$$d\omega/\omega = -X dp/p \quad (6.7)$$

Если неизвестная пока величина $X > 0$, то частота с уменьшается с ростом импульса, если $X < 0$ – частота увеличивается с ростом импульса. Из очевидного равенства $L = vT$ получим

$$d\omega/\omega = dv/v - dL/L = d\beta/\beta - dL/L \quad (6.8)$$

и

$$dp/p = (1 - \beta^2) d\beta/\beta = (1 - \gamma^2) d\beta/\beta. \quad (6.9)$$

Объединяя (6.4), (6.8) и (6.9) получим

$$d\omega/\omega = (1/\gamma^2 - \alpha) dp/p. \quad (6.10)$$

Круглая скобка в (6.10) равна множителю X в (6.7), который теперь полностью известен и может быть определен как по знаку, так и по величине простым вычислением.

Величина $K = 1/\gamma^2 - \alpha$ называется коэффициентом автофазировки. Для слабофокусирующих машин $\alpha > 1$ и $\gamma > 1$, следовательно

но, $K < 0$ всегда. Поэтому в таких ускорителях период обращения частиц всегда возрастает с ростом энергии и импульса частиц, т.е. фактор роста длины орбиты при увеличении импульса сильнее влияет на период обращения, чем фактор роста скорости частиц.

В синхротронах с сильной фокусировкой $\alpha \ll 1$ всегда. С другой стороны, величина $\gamma > 1$ в момент инжекции и достигает больших значений $\gamma \gg 1$ в конце процесса ускорения. Таким образом, K может быть как больше, так и меньше нуля.

Положительная величина коэффициента автофазировки $K > 0$ означает, что в начале процесса ускорения увеличению импульса частицы соответствует уменьшение периода ее обращения по орбите. Физически это означает, что с ростом импульса длина орбиты остается почти постоянной, но за счет роста скорости частицы частота ее обращения увеличивается. Заметим, что преобладание роста скорости в зависимости от увеличения импульса частицы должно в основном иметь место в ускорителях протонов, так как электроны уже с начала ускорения в синхротронах движутся со скоростью света.

По мере ускорения частицы ее энергия возрастает, а величина $1/\gamma^2$ уменьшается, в то время как величина α остается постоянной. При некоторой энергии частиц $W_{кр}$ будет достигнуто равенство $1/\gamma^2 - \alpha = 0$, т.е.

$$\gamma_{кр} = 1/\sqrt{\alpha}, \quad W_{кр} = W_0/\sqrt{\alpha}. \quad (6.11)$$

Энергия $W_{кр}$ называется критической энергией. Заметим, что при одном и том же значении α величина $W_{кр}$ для электронов много меньше, чем для протонов (в отношении 0,5 МэВ/938 МэВ).

После достижения $W = W_{кр}$ энергия частиц в синхротроне продолжает непрерывно расти в прежнем темпе, однако теперь $K < 0$, т.е. в синхротроне с сильной фокусировкой возникают условия, при которых работает слабофокусирующий синхротрон.

6.4. Фазовые колебания

Фазой частицы в синхротроне будем называть величину:

$$\phi = q(\theta - \theta_0) - \omega_{\text{ВЧ}} t, \quad (6.12)$$

где q – кратность к частоте ВЧ_поля; θ_0 – азимутальный угол, где находится резонатор; $\omega_{\text{ВЧ}}$ – частота ВЧ-поля; t – время.

До сих пор мы рассматривали движение только равновесной частицы. Теперь перейдем к рассмотрению динамики остальных частиц в сгустке, у которых энергия и фаза отличаются от равновесной. Пусть за один оборот равновесная частица получает прирост энергии $\Delta W_c = eV_0 \cos \phi_c$, а неравновесная – $\Delta W = eV_0 \cos \phi$, ϕ – фаза неравновесной частицы. Разность приростов энергии неравновесной и равновесной частицы за один оборот будет иметь следующий вид:

$$\Delta W - \Delta W_c = T_c \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{\omega_c} \frac{dW}{dt} = eV_0 (\cos \phi - \cos \phi_c),$$

сделав замену $\varepsilon = \Delta W - \Delta W_c$, получим:

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{eV_0}{2\pi} (\cos \phi(t) - \cos \phi_c). \quad (6.13)$$

В выражении (6.13) фаза $\phi(t)$ зависит от изменения энергии частицы. Рассмотрим скорость изменения фазы от времени, дифференцируя выражение (12), получим:

$$\frac{1}{q} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega = \omega - \omega_c. \quad (6.14)$$

Учитывая, что $\omega = \omega(E)$ и энергия мало отличается от энергии равновесной частицы, можно использовать разложение:

$$\omega = \omega_c + \frac{d\omega}{dW} (W - W_c).$$

Подставив последнее выражение в (6.14), получим:

$$\frac{d\phi}{dt} = q\varepsilon K \frac{\omega_c}{W_c}, \quad (6.15)$$

где $\frac{W_c}{\omega_c} \frac{d\omega}{dW} = K$.

Выражения (6.13) и (6.15) являются общими уравнениями фазового движения неравновесной частицы в зависимости от времени. Для захваченных частиц они описывают колебания фазы неравновесной частицы около фазы равновесной частицы φ_c , а для не захваченных – монотонное удаление от равновесной фазы.

Если рассмотреть сравнительно небольшие отрезки времени, в течение которых функции $W_c(t)$, $K(t)$, $\omega_c(t)$ изменяются достаточно мало и могут приближенно считаться постоянными, то выражения (6.13) и (6.15) можно объединить в одно более простое дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = qK \frac{\omega_c^2}{W_c} \frac{eV_0}{2\pi} (\cos\varphi - \cos\varphi_c). \quad (6.16)$$

В случае малых отклонений фазы частицы от равновесной выражение (6.16) можно еще упростить. Так как $\varepsilon \ll 1$ и $\varphi \ll 1$, то $\cos\varphi \approx \cos\varphi_c - \varphi \sin\varphi_c$ и выражение (6.16) примет вид уравнения колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_c^2 \varphi = 0, \quad (6.17)$$

где $\Omega_c^2 = \omega_c^2 \frac{q}{W_c} K \frac{eV_0}{2\pi} \sin\varphi_c$ – частота малых (линейных) фазовых колебаний. Видно, что движение частицы будет устойчивым, если $\Omega_c^2 > 0$ или когда $K \cdot \sin(\varphi_c) > 0$.

Таким образом, уравнение для фаз произвольной частицы в случае близости ее к фазе равновесной частицы превращается в уравнение гармонического осциллятора, а сами колебания становятся чисто синусоидальными с частотой Ω_c .

Таким образом, при малом отклонении энергии и фазы частицы от равновесной она будет захвачена в режим ускорения и в среднем будет набирать ту же энергию, что и равновесная частицы (эффект автофазировки).

В выражение для частоты фазовых колебаний входит величина K . В момент времени, когда энергия равновесной частицы становится равной критической и $K = 0$, период обращения частицы на

орбите перестает зависеть от энергии. Это означает, что временно прекращает работать автофазировка. Такое состояние отсутствия автофазировки, удерживающей в процессе ускорения множество неравновесных частиц, может привести к полной потере пучка. Поэтому в современных протонных синхротронах с сильной фокусировкой существует серьезная проблема перехода через критическую энергию.

Рассмотрим зависимость знака равновесной фазы (φ_c) от знака коэффициента автофазировки (K).

1. Слабофокусирующий ускоритель с азимутально-однородным магнитным полем:

$$\alpha > 1, \gamma \geq 1, K < 0 \Rightarrow \varphi_c < 0.$$

2. Сильнофокусирующий ускоритель при $\gamma < \gamma_{кр}$:

$$\alpha < 1, K > 0 \Rightarrow \varphi_c > 0.$$

3. Сильнофокусирующий ускоритель при $\gamma > \gamma_{кр}$:

$$\alpha < 1, K < 0 \Rightarrow \varphi_c < 0.$$

Теперь запишем общее уравнение фазовых колебаний в форме:

$$\frac{d}{dt} \left(u \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{eV_0\omega_c}{2\pi} (\cos \varphi - \cos \varphi_c), \quad (6.18)$$

где $u = W_c / q\omega_c K$ есть слабая функция времени, поскольку от времени зависят W_c , ω_c , K . Считая колебания малыми, можно показать, что (6.16) сводится к виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\dot{u}}{u} \frac{d\varphi}{dt} + \Omega_c^2 \varphi = 0. \quad (6.19)$$

Мы видим, что учет переменного характера $u(t)$ приводит к появлению в (6.17) дополнительного члена с первой производной $d\varphi/dt$. Величина $d\varphi/dt$ имеет смысл скорости изменения фазы частицы. Наличие в (6.19) члена, пропорционального первой производной $d\varphi/dt$, связано не с диссипацией энергии, а с медленным (адиабатическим) изменением параметров системы, что приводит к уменьшению амплитуды фазовых колебаний.

Из выражения (6.16) можно легко получить первый интеграл уравнения движения (гамильтониан). Тождественно преобразовав $d^2\varphi/dt^2$ и умножив на $d\varphi$, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) - \Omega_c^2 (\cos\varphi d\varphi - \cos\varphi_c d\varphi) = 0.$$

Проинтегрировав последнее выражение по времени, можно найти гамильтониан системы H , величина которого определяется начальными условиями:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2\Omega_c^2}{\sin\varphi_c} (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi_c) = H.$$

Каждому значению H соответствует своя траектория на фазовой плоскости. Когда траектория замкнута, то фазовое движение будет устойчивым, а в случае неустойчивого движения траектория будет разомкнута. Физический смысл интеграла состоит в том, что для каждой фазовой траектории сумма кинетической T и потенциальной U энергии взаимодействия частицы с ВЧ полем является постоянной величиной:

$$T + U = H.$$

Таким образом, выражение для гамильтониана позволяет найти потенциальную функцию для частицы в электрическом поле в зависимости от фазы:

$$U = -\frac{2\Omega_c^2}{\sin\varphi_c} (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi_c).$$

6.5. Сепаратрисы

Первый интеграл уравнения фазовых колебаний

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \varphi_0^2 - \frac{2\Omega_c^2}{\sin\varphi_c} (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi_c - \sin\varphi_0 + \varphi_0 \cos\varphi_c) = 0 \quad (6.20)$$

является гамильтонианом системы и может быть проанализирован, как это обычно делается в теории линейных ускорителей. Здесь φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ являются известными начальными условиями. Они не обяза-

тельно должны выбираться в начале процесса (т.е. при $t = 0$), а могут быть взяты при любом промежуточном моменте $t = t_1, t_2 \dots$ процесса, описываемого дифференциальным уравнением. Возьмем случай, когда энергия частиц в синхротроне меньше критической. Как мы знаем из анализа автофазировки в линейных ускорителях, фаза $-\varphi_c$ есть левый предел области устойчивости фазовых колебаний. Если фаза частицы при ее движении влево доходит до точки $\varphi = -\varphi_c$, то частицы здесь останавливается, и дальнейшее движение по фазе продолжается только после этой остановки. Следовательно, «начальному» значению $\varphi_0 = -\varphi_c$ соответствует «начальное» значение $\dot{\varphi}_0 = 0$. В результате для этих начальных условий для (6.20) получаем

$$\frac{1}{\Omega_c} \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\sin \varphi_c} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_c + \sin \varphi_c - \varphi_c \cos \varphi_c)}. \quad (6.21)$$

Отсюда видно, что обе границы области устойчивости фазовых колебаний соответствуют условию $\dot{\varphi} = 0$; левая граница очевидна $\varphi_{\text{л}} = -\varphi_c$, правая граница $\varphi_{\text{п}}$ получается из решения уравнения

$$\sin \varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{п}} \cos \varphi_c + \sin \varphi_c - \varphi_c \cos \varphi_c = 0.$$

Фазовым синхротронным колебаниям соответствуют синхротронные колебания энергии неравновесной частицы около энергии равновесной частицы. Связь колебаний энергии с колебаниями фазы описывается уравнением (6.15), из которого видно, что колебания фазы и энергии неравновесной частицы сдвинуты по фазе на $\pi/2$ (в масштабе синхротронных колебаний), так как согласно (6.15) имеем $\varepsilon \sim d\varphi/dt$. Следовательно, в момент, когда скорость изменения фазы максимальна (т.е. когда текущая фаза неравновесной частицы принимает значение $\varphi = \varphi_c$), энергия этой частицы максимально отличается от энергии равновесной частицы. Когда же фаза неравновесной частицы останавливается на максимальном расстоянии от φ_c слева и справа (т.е. в момент когда $d\varphi/dt = 0$), энергия неравновесной частицы сравнивается с энергией равновесной частицы ($\varepsilon = 0$).

Выражение (6.21) представляет собой уравнение сепаратрисы, поскольку этому выражению удовлетворяет точка $d\varphi/dt = 0$ и $\varphi = -\varphi_c$. Уравнение (6.21) определяет контур сепаратрисы в плоскости переменных $d\varphi/dt$ и φ . В выражение (6.21) входит параметр φ_c , следовательно, оно задает семейство сепаратрис, каждая из которых соответствует определенному значению равновесной фазы (рис. 6.1).

Самая большая сепаратриса соответствует равновесной фазе $\varphi_c = \pi/2$, она простирается по горизонтали от $-\pi/2$ до $3\pi/2$ и имеет ширину 2π . Самая мала сепатриса вырождена в точка в центра семейства ($\varphi = d\varphi/dt = 0$), она соответствует равновесной фазе $\varphi_c = 0$. Промежуточные сепаратрисы уменьшают свой размер по мере уменьшения равновесной фазы.

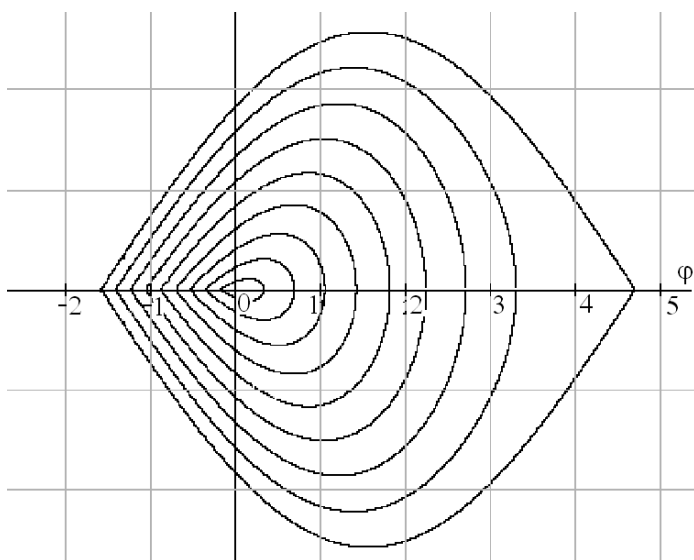


Рис. 6.1. Семейство сепаратрис при различных значениях равновесной фазы

Часто сепаратрису строят в координатах $(\Delta W, \varphi)$. Такой способ ее представления позволяет оценить энергетический разброс частиц в пучке при захвате в режим ускорения и в процессе ускорения. Связь между $d\varphi/dt$ и ΔW определяется выражением (6.15).

При проектировании синхротрона выбор равновесной фазы представляет собой непростую задачу. Так, при большом значении φ_c , близком к $\pi/2$, прирост энергии частицы в резонаторе мал (недостаток), размах фазовых колебаний широк, энергетическая неоднородность пучка велика (недостаток). Однако область захвата велика и интенсивность пучка значительна (достоинство). С другой стороны, при малом φ_c , близком к нулю, прирост энергии в резонаторе большой (достоинство), размах фазовых колебаний мал и, соответственно, мала энергетическая неоднородность (достоинство), однако область захвата мала, мала и интенсивность пучка (недостаток).

В пределе обе альтернативные тенденции приводят к неприемлемому результату. Если принять $\varphi_c = \pi/2$, то разброс энергии будет максимальным, захват 100%, но $\cos\varphi_c = 0$, и пучок ускоряться не будет. Если взять $\varphi_c = 0$, то темп ускорения будет максимальным, разброс энергий будет отсутствовать, но захват частиц и интенсивность пучка будут равны нулю. Поэтому выбор равновесной фазы производится путем компромисса на основе исходных технических требований к ускорителю.

На рис. 6.2а и 6.2б приведены два вида потенциальных функций и соответствующие им сепаратрисы. На рис. 6.2а фаза синхронной частицы близка к $-\pi/2$, а на рис. 6.2б – к $-\pi/3$.

Рассмотрим характер поведения сепаратрис при переходе энергии частиц через критическую энергию. Для сохранения режима автофазировки величина $K \cdot \sin(\varphi_c)$ должна быть больше нуля. Это означает, что при переходе через критическую энергию фаза скачком должна поменять знак. При перемене знака равновесной фазы сепаратриса на фазовой плоскости преобразуется симметрично относительно фазы $\varphi = 0$ (рис. 6.3).

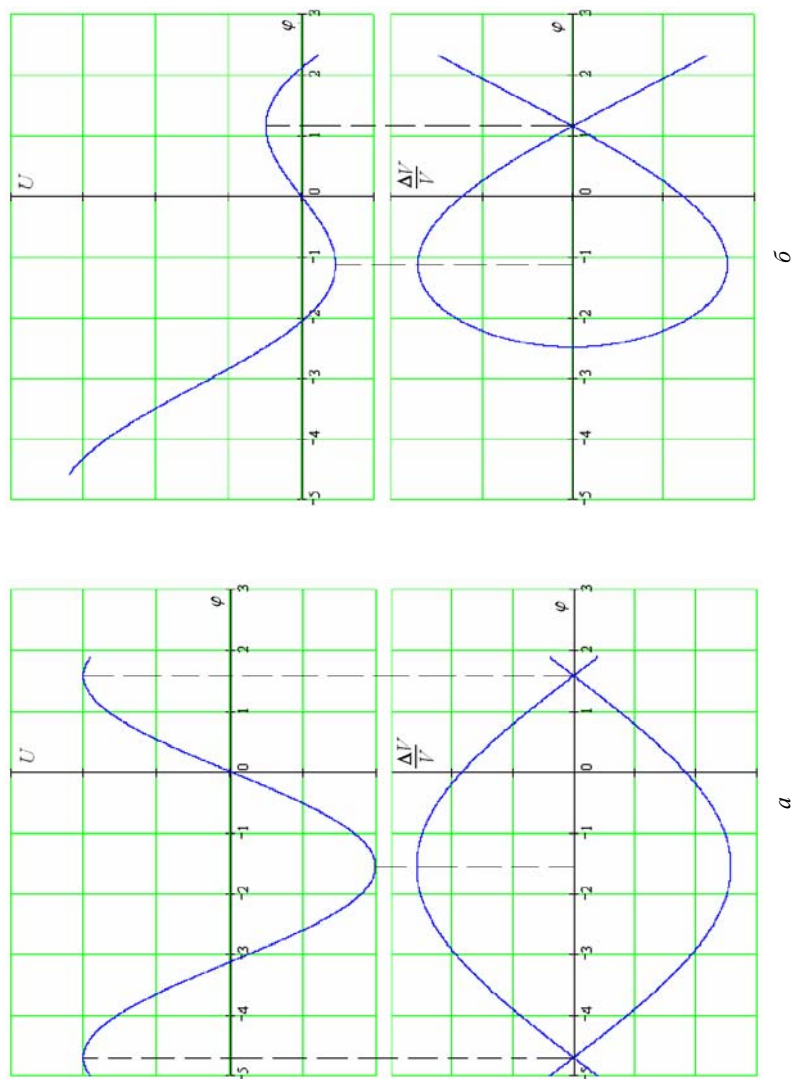


Рис. 6.2. Потенциальные ямы и соответствующие им сепаратрисы (фаза синхронной частицы близка к $-\pi/2$ (а) и $-\pi/3$ (б))

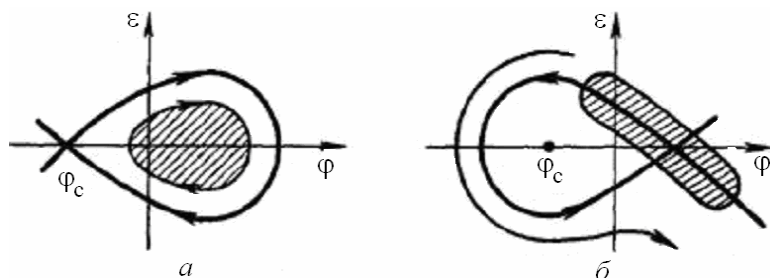


Рис. 6.3. Структура фазовой плоскости до (а) и после (б) перехода через критическую энергию. Заштрихованная область занята частицами

При переходе через критическую точку и «переворачивание» сепаратрисы частицы на фазовой плоскости оказываются вблизи ее седловой точки и в последующем двигаются по фазовым траекториям, близким к сепаратрисе и лежащим вне и внутри ее. Частицы, оказавшиеся вне области устойчивости будут в дальнейшем потеряны. В очень невыгодном положении оказываются и перезахваченные частицы, так как после перехода через критическую точку амплитуда колебаний частиц увеличивается, и они легко выходят из области устойчивости.

Таким образом, при переходе через критическую энергию подавляющее большинство частиц должно выпасть из режима ускорения. Чтобы предотвратить это явление, можно применить следующие методы.

1. Увеличить критическую энергию. Если соответствующим образом исказить магнитную систему, то можно добиться уменьшения коэффициента расширения орбит, а следовательно, увеличения критической энергии. Если критическая энергия больше конечной энергии, то ускоритель всегда работает при энергии ниже критической. Недостаток этого метода – сильное отличие орбиты от круговой, что приводит при той же максимальной магнитной индукции к существенному увеличению среднего радиуса машины.

2. Если в момент перехода энергии через критическое значение резко изменить фазу ускоряющего напряжения на $2\varphi_c$, то при этом изображающие точки частиц остаются на месте, а вся картина фазовых траекторий сдвигается так, что они «накрываются» сепарат-

рисой, соответствующей ускорению при энергии, больше критической (рис. 6.4). Для того чтобы осуществить изменение фазы в точно определенный момент, применяют автоматическую систему слежения за пучком. Время, в течение которого изменяется фаза ВЧ-колебаний, необходимо сделать значительно меньше периода синхротронных колебаний.

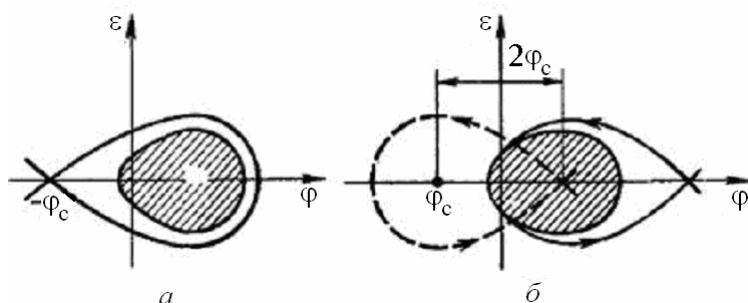


Рис. 6.4. Перевод частиц через критическую энергию методом сдвига фазы. Показана фазовая плоскость до (а) и после (б) перевода.

Область, занятая частицами, заштрихована; пунктиром показана сепаратриса без сдвига фазы

В любом случае допуски на параметры ВЧ-системы в районе критической энергии значительно ужесточаются. Поэтому успешное осуществление метода переброса фазы, используемого сейчас повсеместно, в первую очередь, зависит от техники автоматического регулирования параметров ускорителя (частоты ускоряющего поля) по данным о движении самого пучка.

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Математическая модель использует инструментарий и встроенные функции математического пакета Mathcad и состоит из двух основных частей.

В первой части исследуется сепаратриса и рассматриваются синхротронные колебания в стационарном режиме. В этой части преподавателем, согласно варианту, задаются следующие основные параметры моделирования:

Постоянные величины:

заряд частицы	$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
скорость света	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
кратность ВЧ	$q = 67$
периметр ускорителя	$P = 110,89$ м

Переменные величины:

энергия равновесной частицы при инжекции	$W_b = 10$ МэВ
энергия покоя электрона	$W_0 = 5,11 \cdot 10^5$ эВ
энергия покоя протона	$W_0 = 9,38 \cdot 10^8$ эВ
начальное относительное отклонение неравновесной частицы по энергии	$\Delta W_0 = 0,05$
коэффициент уплотнения орбит	$\alpha = 0,011$
амплитуда высокочастотного напряжения	$V_{rf} = 1,5$ МВ

Результатами расчета является фазовая плоскость (в переменных $(\Delta W, \varphi)$) с сепаратрисой и фазовой траекторией неравновесной частицы, а также график изменения амплитуды (фазы) синхротронных колебаний в зависимости от времени. Кроме этого приводится анимированный график, показывающий напряжение, видимое равновесной и неравновесной частицами в момент пролета в ВЧ-резонаторе. Расчеты сделаны в приближении, что синхротрон работает в режиме накопителя, т.е. равновесная фаза выбрана таким образом, чтобы компенсировать потери энергии равновесной частицы на синхротронное излучение.

Во второй части работы рассматриваются поведение сепаратрисы и параметры синхротрона в процессе ускорения. В этой части работы преподавателем задаются следующие переменные величины:

энергия инжекции	$W_{\min} = 80$ МэВ
максимальная энергия	$W_{\max} = 2500$ МэВ
время ускорения	$T_{\text{уск}} = 0,5$ с
амплитуда высокочастотного напряжения	$V_{rf} = 1,5$ МВ

Результатами расчета являются анимированный график сепаратрисы и начальной фазы (нулевой кадр – начало ускорения, а каждый кадр соответствует 10 мс ускорения). Также имеется стати-

ческий график изменения частоты ВЧ-генератора в процессе ускорения. Расчеты сделаны в приближении, что напряжение на ВЧ-резонаторе в процессе ускорения не меняется, а равновесная фаза выбирается таким образом, чтобы компенсировать увеличивающиеся потери энергии равновесной частицы на синхротронное излучение.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с математической моделью, разработанной для изучения особенностей фазового движения пучка заряженных частиц в синхротроне.

2. При заданном согласно варианту значении коэффициента пространственного уплотнения орбит рассчитать критическую энергию для электронов и протонов.

3. Исследовать сепаратрису и равновесную фазу для электронов и протонов выше и ниже критической энергии при постоянном напряжении ВЧ-резонатора. Аналитически и по графику определить крайнюю правую и крайнюю левую фазы, найти ширину сепаратрисы и максимально возможное отклонение частиц по энергии.

4. Для электронов выше критической энергии исследовать изменение сепаратрисы при изменении напряжения на ВЧ-резонаторе.

5. Рассчитать частоту синхротронных колебаний, определить ее по графику для случая линейных и нелинейных колебаний и сравнить получившиеся результаты. Определить амплитуду колебаний неравновесной частицы.

6. Изучить изменение размеров сепаратрисы в процессе ускорения: в частности, изменение сепаратрисы выше критической энергии и переход через критическую энергию.

7. Изучить зависимость изменения частоты ВЧ поля в процессе ускорения электронного и протонного пучков. Сравнить полученные графики. Найти, через какое время после начала ускорения, частота ВЧ поля отличается менее чем на 5% от конечной частоты.

8. Определить частоту обращения электронов и протонов при впуске в синхротрон и выпуске из него при кратности частоты ВЧ генератора $q = 67$.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. В отчет заносятся: название работы, цель работы, полученные задания, результаты моделирования, формулы, использованные при обработке результатов, результаты теоретических расчетов.

2. Результаты всех измерений оформляются в виде таблицы с соответствующими названиями колонок и отображаются на графиках.

3. Результаты расчетов рекомендуется заносить в таблицу следующего вида:

	электроны	протоны
α		
$\gamma_{кр}$		
$W_{кр}, \text{эВ}$		

4. Результаты моделирования рекомендуется заносить в таблицы следующего вида:

$$W = \dots, V_{rf} = \dots$$

	e^-		p^+	
	рад	м	рад	м
φ_c				
$\varphi_{пр}$				
$\varphi_{лев}$				
$\Delta W/W$				

$V_{rf}, \text{МВ}$	$\Delta W/W$	$\Delta\varphi, \text{рад}$

	оценка	моделирование
$\Omega, \text{рад/с (лин.)}$		
$\Omega, \text{рад/с (не линн.)}$		
$\varphi_{тах}, \text{рад}$		

5. Построить все графики и сделать для каждого задания соответствующие выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каких энергиях можно считать, что протоны и электроны являются нерелятивистскими?
2. Какой метод ускорения используется в синхротроне: индукционный, резонансный, электростатический?
3. В чем основное различие протонного и электронного синхротрона?
4. Что такое синхронная частица и синхронная фаза?
5. Качественно пояснить принцип автофазировки.
6. Что такое критическая энергия?
7. Что такое коэффициент расширения орбит?
8. Вывести уравнения для малых фазовых колебаний.
9. Определить скорость протона и электрона при энергиях 100 кэВ, 1 МэВ, 1 ГэВ, 50 ГэВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. – М.: 1962.
2. Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Вальднер О.А., Глазков А.А. Современные синхротроны. – М.: 1990.