

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт горного дела и строительства  
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Утверждено на заседании кафедры  
«Строительство, строительные материалы и  
конструкции»  
« 18 » января 2023 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_  А.А. Трещев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Современные методы расчета строительных конструкций»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**08.03.01 Строительство**

с направленностью (профилем)  
**Промышленное и гражданское строительство**

Формы обучения: очная, заочная, очно-заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-23

Тула 2023 год

## Разработчик методических указаний

Судакова И.А., доцент, к.т.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

## I. Введение

Настоящие методические указания предназначены для оказания помощи студенту в его работе по изучению современных методов расчета строительных конструкций.

С этой целью студенту предлагаются общие и тематические методические указания, которые будут направлять его деятельность по приобретению знаний, умений и навыков в решении типовых задач по изучаемой дисциплине.

Работа над выданным индивидуальным заданием ведется в виде самостоятельной работы при консультативной помощи преподавателя. Результатом этой работы является усвоение алгоритмов решения типовых задач методом конечных элементов, а также языка описания расчетных схем и обозначений, используемых при формулировке математических задач, которые являются следствием применения метода конечных элементов.

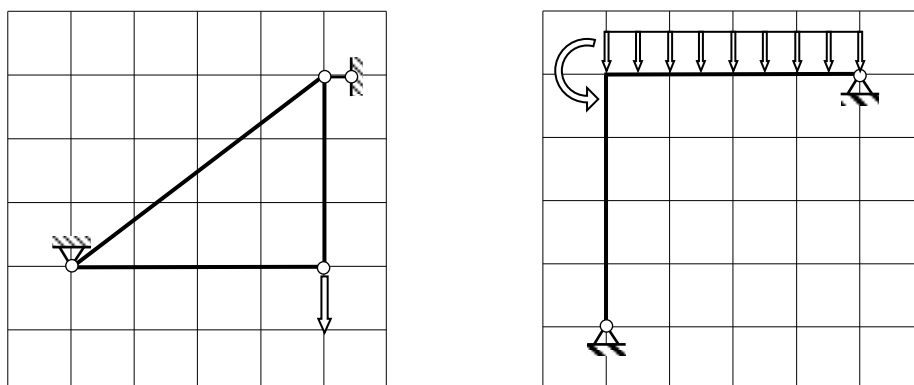
Важно подчеркнуть, что приобретаемые в ходе практических занятий знания, умения и навыки являются основой для принятия решений при проектировании зданий и сооружений в курсовом и дипломном проектировании. В частности, умение правильно и быстро строить эпюры усилий гарантирует достоверную исходную информацию для определения сечений несущих элементов конструкций.

## II. Общие методические указания

**Основной объем материалов**, необходимых для успешного выполнения заданий на практических занятиях по современным методам строительных конструкций, сконцентрирован в конспекте лекций. Поэтому рекомендуется указанный материал иметь с собой и пользоваться этими материалами для выполнения своего индивидуального задания.

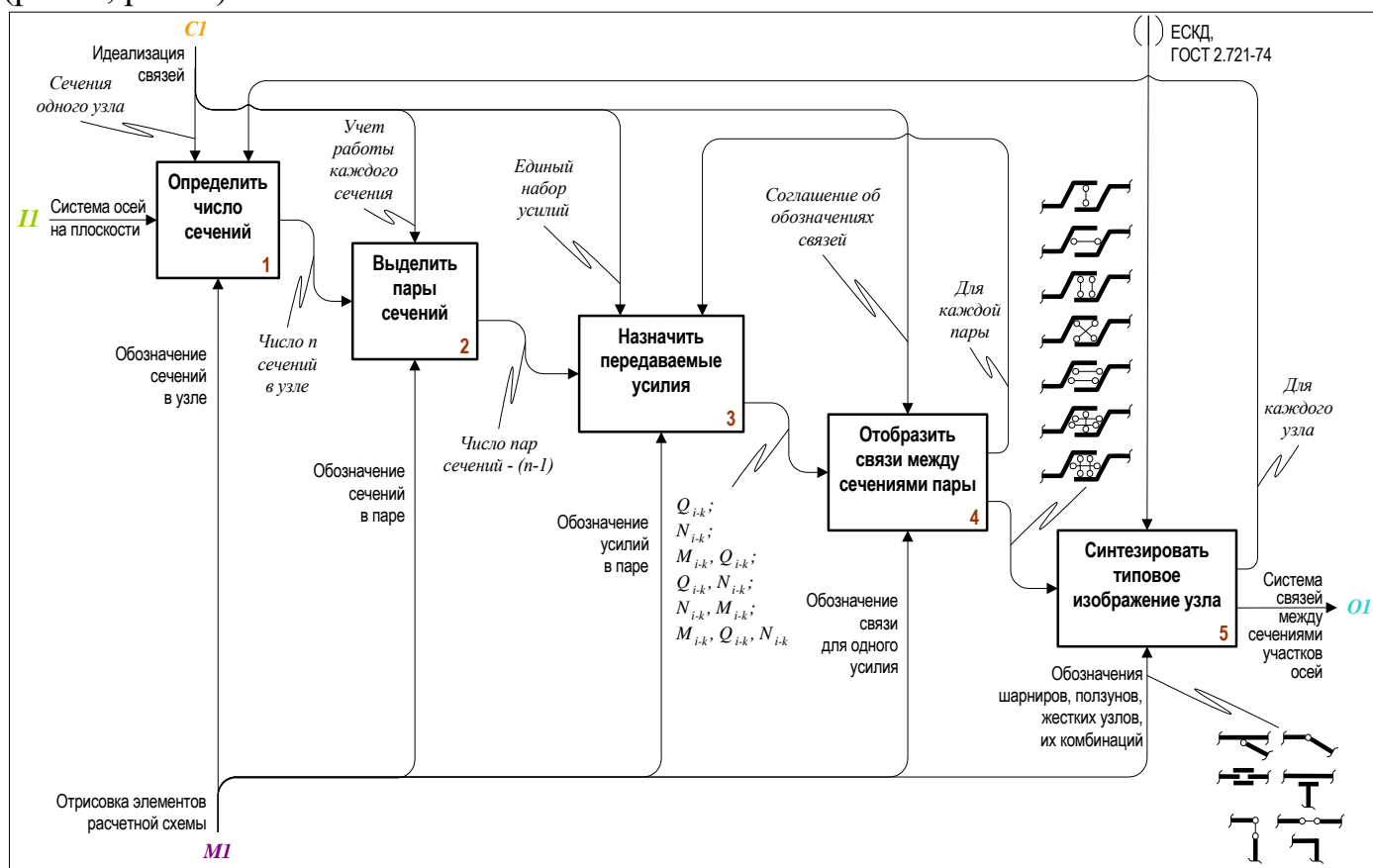
Поскольку тематика практических занятий соответствует тематике глав, разделов и подразделов указанного конспекта лекций, рекомендуется перед каждым новым занятием познакомиться с материалами конспекта лекций и соответствующей темой в настоящих указаниях.

**Исходные данные** для формирования индивидуальной расчетной схемы является схема, на которой приведены внутренние и внешние связи, а также виды нагрузки без указания числовых значений. Кроме того, на схеме дана координатная сетка глобальной системы координат с шагом  $a$  по каждому координатному направлению в плоскости изображения (рис. 1).

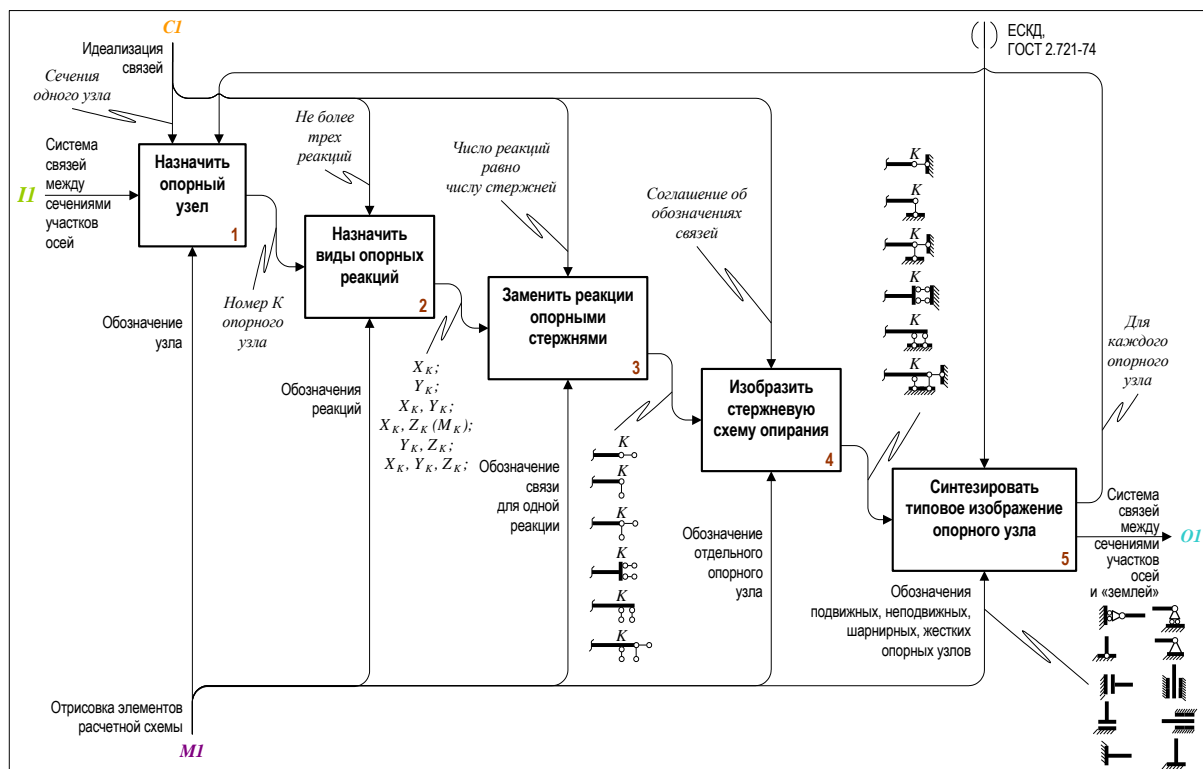


**Рис. 1.** Схемы для формирования расчетных схем индивидуальных заданий

Студент должен знать общепринятые обозначения внешних и внутренних связей, которые изучались в курсах дисциплин «Теоретическая механика», «Строительная механика». Кроме того, необходимо познакомиться с некоторыми уточнениями и дополнениями к этим обозначениям, принятым далее (рис. 2, рис. 3).



**Рис. 2.** Структура и обозначения внутренних связей между сечениями расчетной схемы



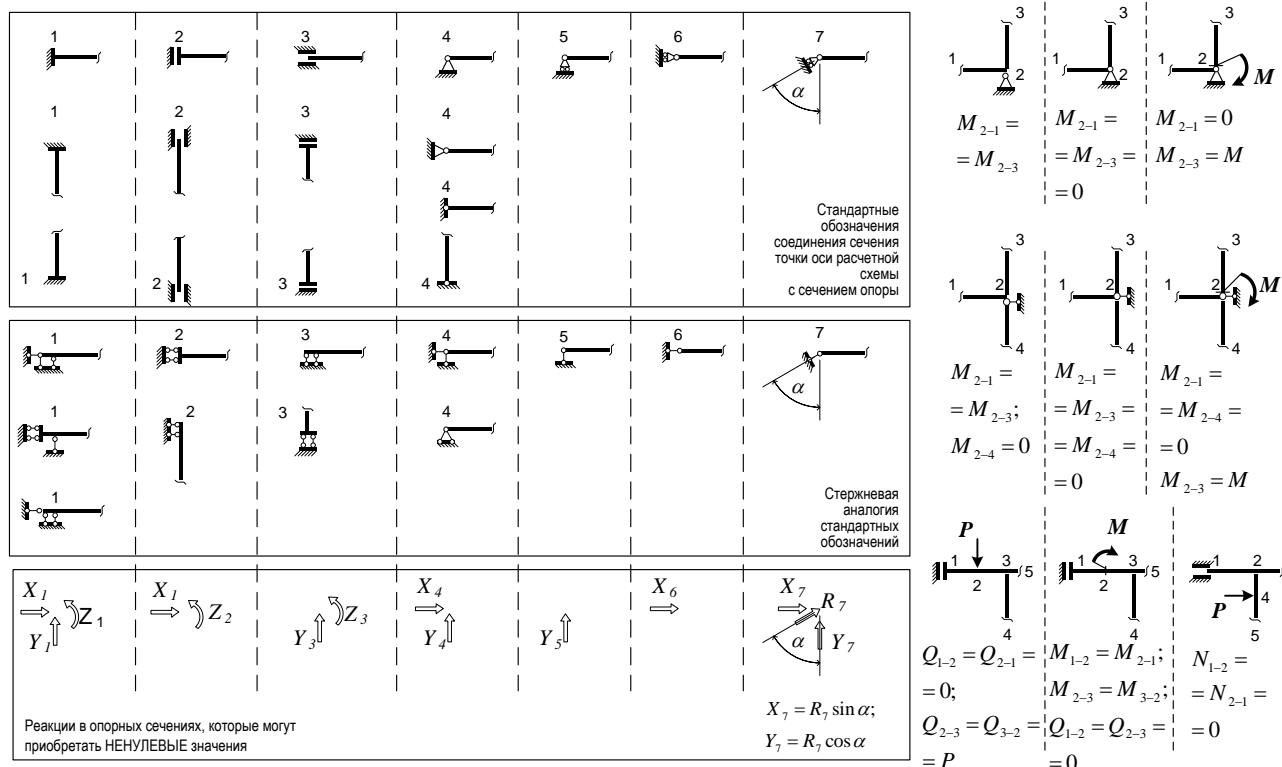
**Рис. 3. Структура и обозначения  
внешних связей в узлах опирания расчетной схемы**

Ясное и четкое представление о связях и их комбинациях в узлах расчетной схемы необходимо для того, чтобы не ошибиться в определении усилий, возникающих в сечениях узлов. Поэтому очень важно помнить все варианты комбинации усилий и реакций, которые характерны для типовых расчетных схем (рис. 4., рис. 5).



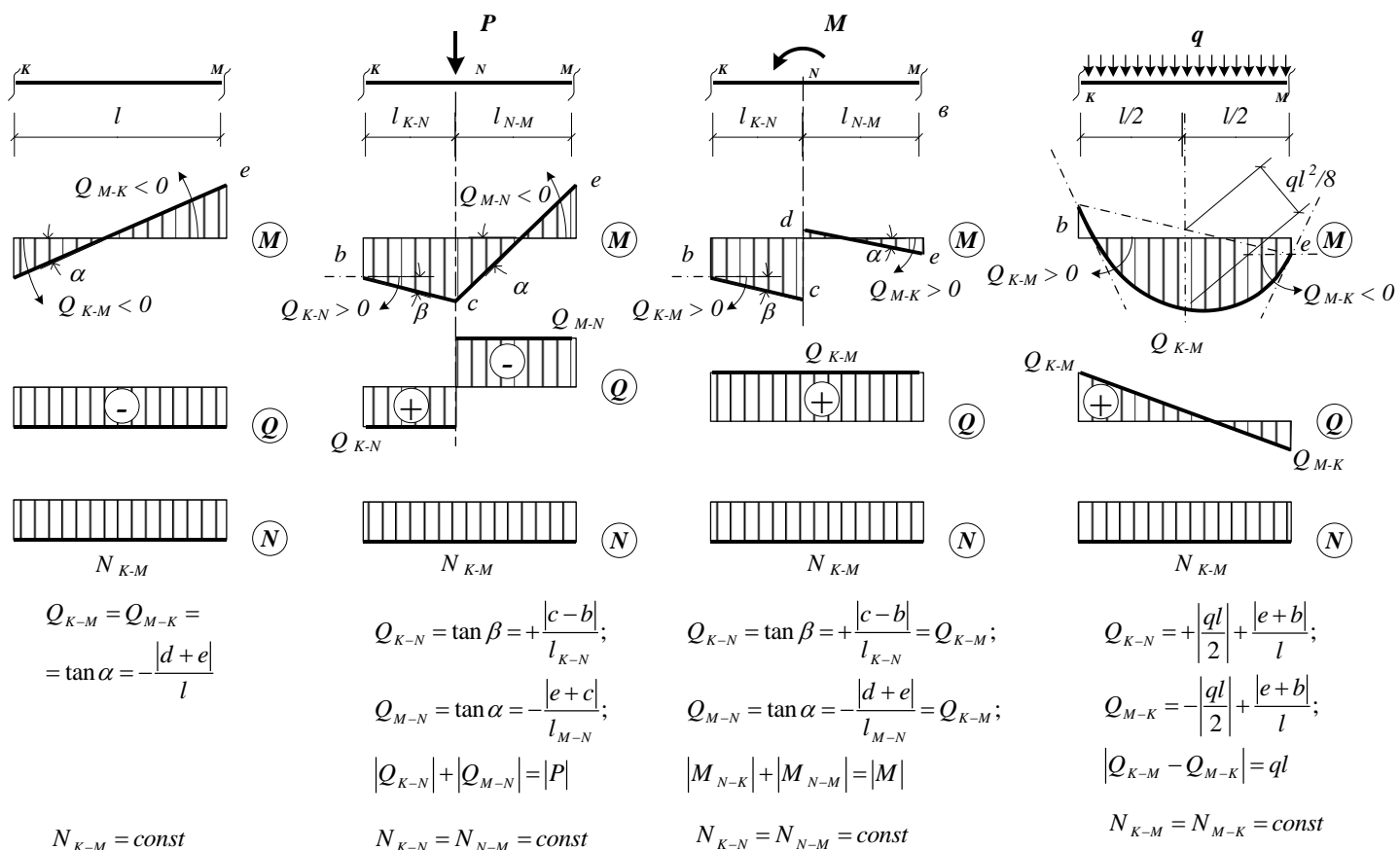
**Рис. 5. Структура и обозначения реакций в узлах расчетной схемы**

Весьма полезно помнить характерные частные случаи передачи усилий и реакций, представленные на рис. 6.



**Рис. 6. Некоторые особенности передачи усилий и реакций через сечения узлов**

Важно также помнить о характерных решениях, полученных для элементарных расчетных схем, работающих на изгиб, в курсе строительной механики (рис. 7).



**Рис. 7.** «Инженерное» правило знаков усилий и характерные особенности эпюр усилий на прямолинейном участке оси

При формировании индивидуального задания следует соблюдать следующие **соглашения об обозначениях и используемых единицах** измерения физических величин.

Для изучения и применения метода конечных элементов абсолютные значения характеристик расчетной схемы значения не имеют, поэтому с целью уменьшения объема вычислительных работ в каждой из задач используются физические величины, численные значения которых заданы в некотором масштабе измерения.

Так, все длины задаются кратными масштабу длины  $a$  ( $[l_k] = a$ ,  $k$  – номер участка), а все интенсивности распределенной вдоль участка оси расчетной схемы нагрузки кратны масштабу  $q$  ( $[q_k] = q$ ), так что масштабом измерения сосредоточенных сил будет величина  $qa$  ( $[P_k] = qa$ ), а момента —  $qa^2$  ( $[M_k] = qa^2$ ).

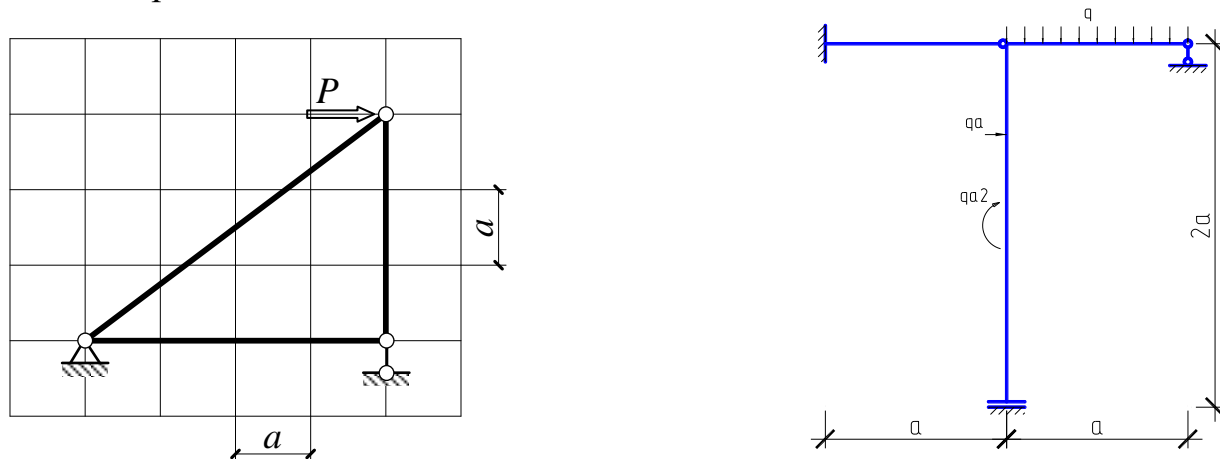
Все значения площадей поперечных сечений кратны масштабу  $F$ , а все моменты инерции на изгиб кратны масштабу  $J$ .

Значения модуля упругости (модуля Юнга) кратны масштабу  $E$ .

В отдельных задачах могут использоваться и другие параметры, однако общим принципом остается приведение задачи к безразмерному виду с тем, чтобы сосредоточить внимание на проблемах собственно метода конечных элементов.



Для уменьшения объема вычислений разрешается геометрические размеры на расчетной схеме задавать в масштабе координатной сетки, а значения каждого вида нагрузки принимать единичными (в соответствующем масштабе). Для всех случаев расчетных схем рамы принимать изгибную жесткость на всех участках одинаковую  $EJ$ . Таким образом, задание на типовой расчет должно иметь вид рис. 8.



**Рис. 8.** Примеры сформированного индивидуального задания

**Решение типовой задачи** на базе сформированного индивидуального задания должно осуществляться в соответствии с методическими указаниями к РГР и оформляться по правилам, описанным выше и продемонстрированным на примерах-образцах.

**При оформлении эпюр усилий** и других графиков в надписи на рисунке следует указывать масштаб измерения величины, отображаемой графиком. На самом же графике указываются только абсолютные значения ординат с принятой в расчетах точностью (достаточной является точность расчетов, в которой удерживается четыре верные значащие цифры в промежуточных результатах, и три – в окончательных). Число значащих цифр регулируется правилами округления.

**Знаки ординат на эпюрах усилий** проставляются на основании «инженерного» правила знаков (рис. 7), которое было определено в дисциплине «Строительная механика».

Вместе с тем целесообразно напомнить, что в строительной механике знак изгибающего момента особого значения не имеет, поскольку эпюра этого усилия строится на растянутых волокнах сечения. В связи с этим знак изгибающего момента на эпюре не проставляется.

Указание знаков поперечного и продольного усилий на каждом участке является обязательным требованием.

**Для идентификации сечений и узлов расчетной схемы** используется их нумерация. Изображение расчетной схемы выполняется в правой декартовой глобальной системе координат со следующим обозначением осей:

$X$  – горизонтальная ось с положительным направлением вправо;

$Y$  – вертикальная ось с положительным направлением вверх;

$Z$  – горизонтальная ось с положительным направлением, перпендикулярным плоскости изображения и направленным к зрителю.

При таких условиях общепринятым является следующее («математическое») **правило** знаков векторных величин:

- положительные векторы направлены вдоль положительных направлений осей координат;

- положительные моменты (углы поворота) направлены против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси, относительно которой действует момент или совершается поворот.

### III. Примеры решения задач методом конечных элементов

#### Занятие № 1. Расчет плоской фермы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС фермы. На этом примере требуется определить усилия в стержнях фермы методом конечных элементов.

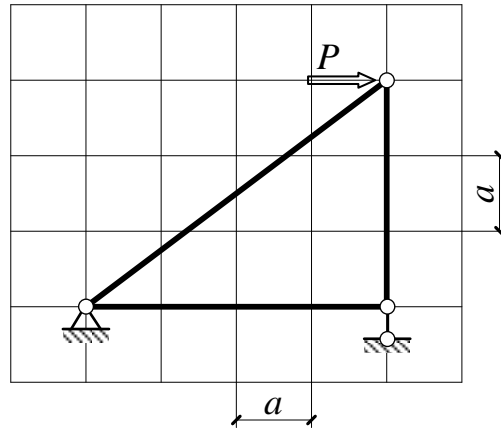


Рис.1. Заданная расчетная схема фермы

#### 1. Разработка схемы дискретизации.

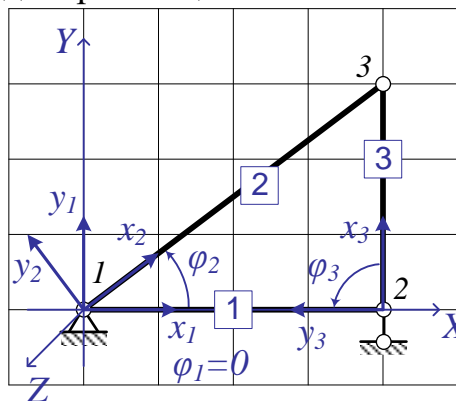


Рис.2. Схема дискретизации

1.1. Обозначение ГСК - глобальной системы координат  $XYZ$ . Начало координат находится в самой нижней и самой левой точке фермы. Ось  $X$  направлена вправо,  $Y$  - вверх,  $Z$  - смотрит на нас.

1.2. Нумерация узлов фермы (см. рис.2). Обычно слева направо, снизу вверх. В фермах с большим количеством узлов надо стремиться к тому, чтобы разность между номерами узлов одного конечного элемента была минимальной.

1.3. Нумерация КЭ - конечных элементов соответствует нумерации узлов фермы. Первым нумеруют КЭ, которые берут свое начало в точке 1. Первый элемент 1-2, второй - 1-3. Третий элемент 2-3.

1.4. Обозначение ЛСК для каждого КЭ - локальной системы координат  $xuz$ . Начало координат находится в начальном узле КЭ. Ось  $x$  направлена вдоль КЭ,  $y$  - против часовой стрелки под углом  $90^\circ$  к оси  $x$ ,  $z$  - смотрит на нас.

1.5. Обозначение направляющих углов  $\varphi$  для каждого КЭ. Этот угол определяется от оси  $X$  ГСК против часовой стрелки до совмещения с осью  $x$  ЛСК каждого КЭ (см. рис.2).

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3
х, а	0	4	4
у, а	0	0	3

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$i$  - номер начального узла КЭ;  $j$  - номер конечного узла КЭ;  $i < j$ ;

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}; \cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

$$l_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 4a;$$

$$\cos \varphi_{12} = \frac{X_2 - X_1}{l_{12}} = \frac{4a - 0}{4a} = 1; \sin \varphi_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{l_{12}} = \frac{0 - 0}{4a} = 0.$$

$$l_{13} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = \sqrt{(4a - 0)^2 + (3a - 0)^2} = 5a;$$

$$\cos \varphi_{13} = \frac{X_3 - X_1}{l_{13}} = \frac{4a - 0}{5a} = 0,8; \sin \varphi_{13} = \frac{Y_3 - Y_1}{l_{13}} = \frac{3a - 0}{5a} = 0,6.$$

$$l_{23} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} = \sqrt{(4a - 4a)^2 + (3a - 0)^2} = 3a;$$

$$\cos \varphi_{23} = \frac{X_3 - X_2}{l_{23}} = \frac{4a - 4a}{3a} = 0; \sin \varphi_{23} = \frac{Y_3 - Y_2}{l_{23}} = \frac{3a - 0}{3a} = 1.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	$i$	$j$	$l_k, a$	$\cos \varphi_k$	$\sin \varphi_k$
1	1	2	4	1	0
2	1	3	5	0,8	0,6
3	2	3	3	0	1

Матрицы преобразования для стержневого конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 \\ 0 & \cos \varphi_k \\ 0 & \sin \varphi_k \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; (p)_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; (p)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

В локальной системе координат матрица жесткости отдельного стержневого КЭ имеет вид:

$$[k_k^n] = \frac{E \cdot F}{l_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $EF$  - жесткость конечного элемента на растяжение-сжатие (принимается одинаковой для всех элементов), тогда для каждого КЭ, подставляя данные из таблицы 2, получим:

$$[k_1^n] = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_2^n] = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; [k_3^n] = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^r] = (p)_k \cdot [k_k^n] \cdot (p)_k^T.$$

$$[k_1^r] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_2^r] = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0 & 0,8 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix}$$

;

$$[k_3^r] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формирование матрицы жесткости для ансамбля конечных элементов в ГСК.

Обозначим перемещения узлов фермы в ГСК. Для этого в каждом узле фермы обозначим по две степени свободы - горизонтальную и вертикальную.

Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК. Так как на ферму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены оба перемещения - горизонтальное и вертикальное, а в точке 2 - только вертикальное. Таким образом, получаем следующие перемещения фермы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2, второе - горизонтальное в точке 3 и третье - вертикальное в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, а потом вертикальное перемещение.

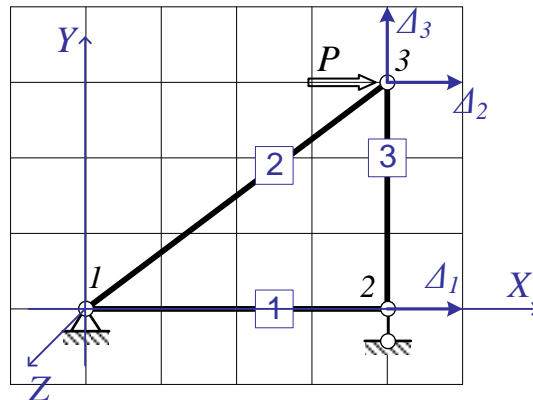
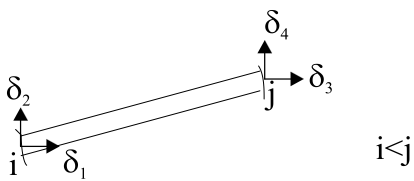


Рис. 3 Векторы перемещений в глобальной системе координат

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ				
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$
1	0	0	1	0
2	0	0	2	3
3	1	0	2	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля КЭ имеет размер 3х3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$K_{11} = k_{1,33}^{\Gamma} + k_{3,11}^{\Gamma} = \frac{EF}{4a}(1) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,25 \frac{EF}{a};$$

$$K_{12} = k_{3,13}^{\Gamma} = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{13} = k_{3,14}^{\Gamma} = \frac{EF}{3a}(0) = 0;$$

$$K_{22} = k_{2,33}^{\Gamma} + k_{3,33}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,64) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,128 \frac{EF}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,34}^{\Gamma} + k_{3,34}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,48) + \frac{EF}{3a}(0) = 0,096 \frac{EF}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,44}^{\Gamma} + k_{3,44}^{\Gamma} = \frac{EF}{5a}(0,36) + \frac{EF}{3a}(1) = 0,4053 \frac{EF}{a};$$

#### 4. Разрешающие уравнения метода конечных элементов.

Для решения задачи методом конечных элементов с использованием стержневых конечных элементов разрешающая система уравнений имеет вид:

$$-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \text{вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Решение СЛАУ

Переносим вектор внешних нагрузок в правую часть уравнения

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,096 \\ 0 & 0,096 & 0,4053 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

и решаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta_1 = 0; \Delta_2 = 9,5 \frac{Pa}{EF}; \Delta_3 = -2,25 \frac{Pa}{EF}.$$

#### 5. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}; \{\delta_3^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF}.$$

$$\{\delta_l^{\eta}\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_2^{\mathcal{N}}\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_3^{\mathcal{N}}\} = (p)_3^T \cdot \{\delta_3^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EF} = \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix};$$

Вычисление усилий:

$$\{N_1^{\mathcal{N}}\} = [k_1^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_1^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{4a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_2^{\mathcal{N}}\} = [k_2^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_2^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{5a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -1,25 \\ 1,25 \end{Bmatrix};$$

$$\{N_3^{\mathcal{N}}\} = [k_3^{\mathcal{N}}] \cdot \{\delta_3^{\mathcal{N}}\} = \frac{EF}{3a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{Pa}{EF} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2,25 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0,75 \\ -0,75 \end{Bmatrix}.$$

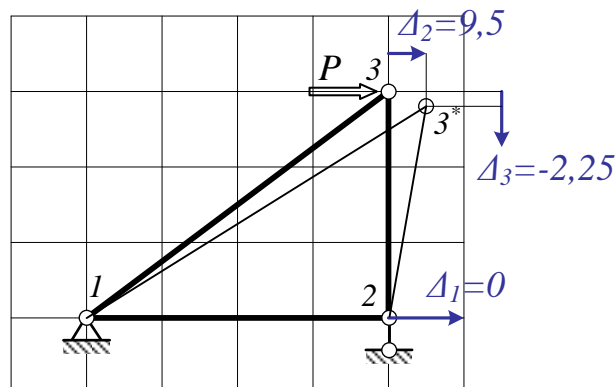


Рис.4. Схема деформирования заданной расчетной схемы

#### 6. Проверка равновесия узлов фермы

Определим опорные реакции фермы от заданной внешней нагрузки (см. рис. 5)

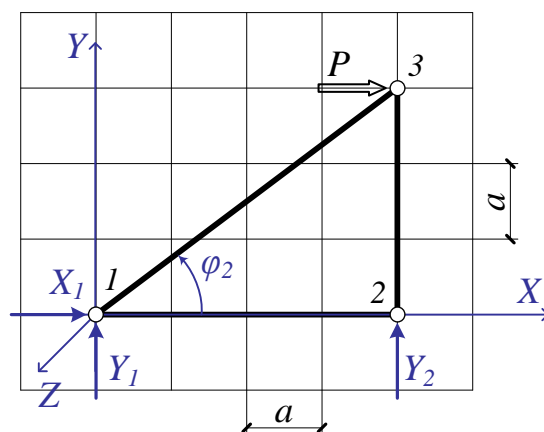


Рис.5. Опорные реакции заданной расчетной схемы



$$\begin{aligned}\sum X &= P + X_1 = 0; X_1 = -P; \\ \sum \text{mom}_1 &= -P \cdot 3a + Y_2 \cdot 4a = 0; Y_2 = 0,75P; \\ \sum \text{mom}_2 &= -P \cdot 3a - Y_1 \cdot 4a = 0; Y_1 = -0,75P.\end{aligned}$$

Проверим равновесие узлов фермы методами строительной механики (см. рис. 6):

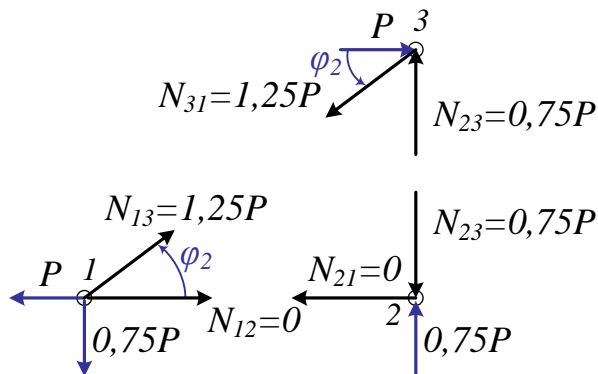


Рис.6. Равновесие узлов фермы

Узел 1.

$$\sum X = -P + N_{12} + N_{13} \cdot \cos \varphi_2 = -P + 0 + 1,25P \cdot 0,8 = 0; -P + P = 0;$$

$$\sum Y = -0,75P + N_{13} \cdot \sin \varphi_2 = -0,75P + 1,25P \cdot 0,6 = 0; \quad -0,75P + 0,75P = 0.$$

Узел 2.

$$\sum X = -N_{21} = 0;$$

$$\sum Y = 0,75P - N_{23} = 0,75P - 0,75P = 0.$$

Узел 3.

$$\sum X = P - N_{31} \cdot \cos \varphi_2 = P - 1,25P \cdot 0,8 = 0; P - P = 0;$$

$$\sum Y = 0,75P - N_{31} \cdot \sin \varphi_2 = 0,75P - 1,25 \cdot 0,6 = 0; 0,75P - 0,75P = 0.$$

Проверка выполняется.

## ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены.

Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении заданной расчётной схемы под действием внешней силы, направленной горизонтально.

## Занятие № 2. Расчет плоской рамы методом конечных элементов.

На рис.1 приведена ЗРС рамы. На этом примере требуется определить внутренние усилия в раме методом конечных элементов.

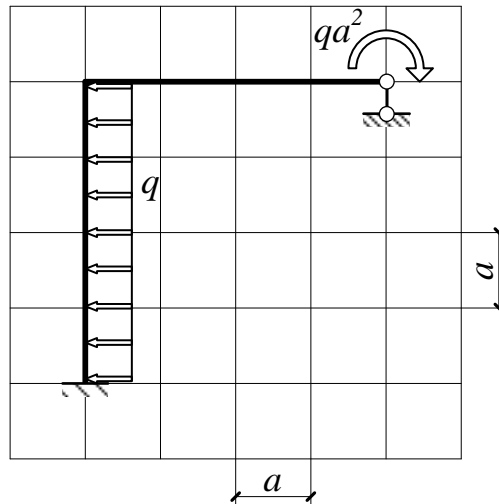


Рис.1. Заданная расчетная схема рамы.

### 1. Разработка схемы дискретизации.

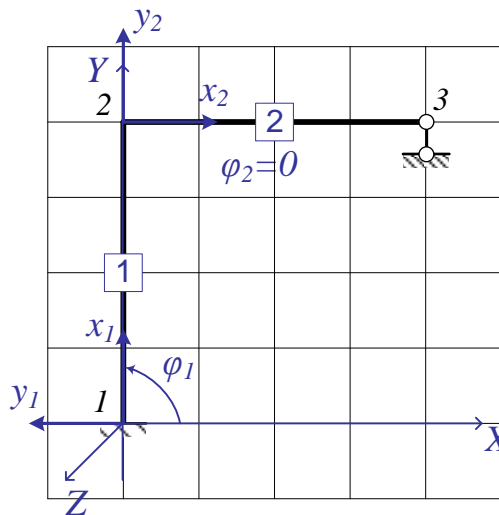


Рис.2. Схема дискретизации.

### 2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3
$x, a$	0	0	4
$y, a$	0	4	4

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2};$$

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}; \sin \varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

$N_{\Sigma} KЭ$	$i$	$j$	$l_k, a$	$\sin \varphi_k$	$\cos \varphi_k$
1	1	2	4	1	0
2	2	3	4	0	1

Матрицы преобразования для балочного конечного элемента имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (p)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

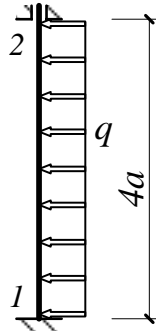
В локальной системе координат матрица жесткости для балочного конечного элемента записывается следующим образом ( $EJ$  - жесткость стержней на изгиб, принимается одинаковой для всех участков):

$$[k_k^n] = \frac{E \cdot J}{l_k^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

$$[k_1^n] = [k_2^n] = \frac{EJ}{(4a)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 4a & -12 & 6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 \\ -12 & -6 \cdot 4a & 12 & -6 \cdot 4a \\ 6 \cdot 4a & 2 \cdot (4a)^2 & -6 \cdot 4a & 4 \cdot (4a)^2 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}$$

4. Вычисление реакций на внутрипролетную нагрузку, приложенную к КЭ.

Из ЗРС видно, что к первому КЭ приложена распределенная нагрузка. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:



$$\alpha = 1/12;$$

$$\gamma = 1/2;$$

$$M_1 = M_2 = \alpha q l^2 = \frac{1}{12} q (4a)^2 = 1,333 q a^2;$$

$$Q_1 = Q_2 = \gamma q l = \frac{1}{2} q \cdot 4a = 2qa.$$

$$\{S_{q,1}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_1^n \\ M_1^n \\ Q_2^n \\ M_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix}; \quad \{S_{q,2}^n\} = \begin{Bmatrix} Q_2^n \\ M_2^n \\ Q_3^n \\ M_3^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

5. Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$[k_k^r] = (p)_k \cdot [k_k^n] \cdot (p)_k^T.$$

$$\begin{aligned}
[k_I^T] &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} -3 & -6a & 3 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6a & -3 & 0 & -6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 16a^2 & 6a & 0 & 8a^2 \\ -3 & 0 & 6a & 3 & 0 & 6a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6a & 0 & 8a^2 & 6a & 0 & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{EJ}{16a^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6a & 0 & -3 & 6a \\ 0 & 6a & 16a^2 & 0 & -6a & 8a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6a & 0 & 3 & -6a \\ 0 & 6a & 8a^2 & 0 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix}.$$

4. Матрицы реакций на внутрипролетную нагрузку в глобальной системе координат:

$$\{S_{q,1}^{\mathcal{N}}\} = \begin{Bmatrix} Q_1^{\mathcal{N}} \\ M_1^{\mathcal{N}} \\ Q_2^{\mathcal{N}} \\ M_2^{\mathcal{N}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix};$$

$$\{S_{q,1}^{\Gamma}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,333a \\ 2 \\ 0 \\ 1,333a \end{Bmatrix} qa;$$

$$\{S_{q,2}^{\mathcal{N}}\} = \begin{Bmatrix} Q_2^{\mathcal{N}} \\ M_2^{\mathcal{N}} \\ Q_3^{\mathcal{N}} \\ M_3^{\mathcal{N}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{S_{q,2}^{\Gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

#### 5. Формирование матрицы жесткости для ансамбля КЭ в ГСК.

Обозначим перемещения узлов рамы в ГСК. Для этого в каждом узле рамы обозначим по три степени свободы - горизонтальную, вертикальную и угловую. Пока значения этих перемещений неизвестны, они принимаются положительными, то есть направлены вдоль положительных полуосей ГСК, поворот - против часовой стрелки. Так как на раму наложены внешние связи, прикрепляющие ее к плоскости, то некоторые из этих перемещений отсутствуют. В точке 1 запрещены три перемещения - горизонтальное, вертикальное и угловое, а в точке 3 - только вертикальное. Кроме этого, перемещениями, возникающими вследствие растяжения-сжатия КЭ пренебрегаем. Таким образом, получаем следующие перемещения рамы в ГСК: первое - горизонтальное в точке 2 и 3 (то есть эти перемещения будут одинаковыми), второе - угловое в точке 2 и третье

- угловое в точке 3. Следует заметить, что в одной точке сначала нумеруется горизонтальное, потом вертикальное, а затем угловое перемещение.

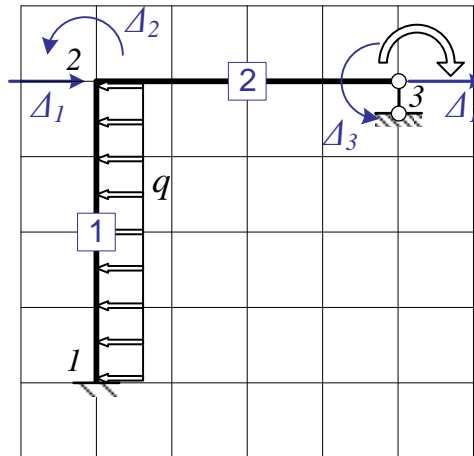


Рис.3. Векторы перемещений в глобальной системе координат.

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ						
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	$\delta_6$
1	0	0	0	1	0	2
2	1	0	2	1	0	3

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля конечных элементов имеет размер 3x3 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица вычисляется по формулам:

$$K_{11} = k_{1,44}^{\Gamma} + k_{2,11}^{\Gamma} + k_{2,44}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(3) + 0 + 0 = 0,1875 \frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{12} = k_{1,46}^{\Gamma} + k_{2,13}^{\Gamma} + k_{2,43}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(6a) + 0 + 0 = 0,375 \frac{EJ}{a^2};$$

$$K_{13} = k_{2,16}^{\Gamma} + k_{2,46}^{\Gamma} = 0 + 0 = 0;$$

$$K_{22} = k_{1,66}^{\Gamma} + k_{2,33}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) + \frac{EJ}{16a^3}(16a^2) = 2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{23} = k_{2,36}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3} (8a^2) = 0,5a^2 \frac{EJ}{a};$$

$$K_{33} = k_{2,66}^{\Gamma} = \frac{EJ}{16a^3} (16a^2) = 1 \frac{EJ}{a}.$$

6. Формирование вектора реакций на внутрипролетную нагрузку:

$$S_{q,1} = S_{q,1(4)}^{\Gamma} + S_{q,2(1)}^{\Gamma} + S_{q,2(4)}^{\Gamma} = 2qa + 0 + 0 = 2qa;$$

$$S_{q,2} = S_{q,1(6)}^{\Gamma} + S_{q,2(3)}^{\Gamma} = 1,333qa^2 + 0 = 1,333qa^2;$$

$$S_{q,3} = S_{q,2(6)}^{\Gamma} = 0.$$

$$[S_q] = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa.$$

Разрешающие уравнения метода.

$$-[K] \cdot \{\Delta\} - \{S_q\} + \{P\} = \{0\}.$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} qa^2. \text{ - вектор внешних нагрузок.}$$

$$-\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1,333a \\ 0 \end{Bmatrix} qa + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1a \end{Bmatrix} qa = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

7. Решение СЛАУ.

$$\frac{EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375a & 0 \\ 0,375a & 2a^2 & 0,5a^2 \\ 0 & 0,5a^2 & 1a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -1qa^2 \end{Bmatrix}.$$

$$\Delta_1 = -17,00qa^4 / EJ;$$

$$\Delta_2 = 3,167qa^3 / EJ;$$

$$\Delta_3 = -2,5835qa^3 / EJ.$$

8. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:



$$\{\delta_l^\Gamma\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}; \quad \{\delta_2^\Gamma\} = \begin{Bmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ}.$$

$$\{\delta_k^\eta\} = (p)_k^T \cdot \{\delta_k^\Gamma\} = 0;$$

$$\{\delta_l^\eta\} = (p)_l^T \cdot \{\delta_l^\Gamma\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{Bmatrix}$$

;

$$\{\delta_2^\eta\} = (p)_2^T \cdot \{\delta_2^\Gamma\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -17,000a \\ 0 \\ 3,1667 \\ -17,000a \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix}.$$

9. Вычисление усилий:

$$\{S^\eta\} = [k^\eta] \cdot \{\delta^\eta\} + \{S_q^\eta\};$$

$$\{S_l^\eta\} = [k_l^\eta] \{\delta_l^\eta\} + \{S_{q,l}^\eta\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17,000a \\ 3,1667 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2qa \\ -1,333qa^2 \\ -2qa \\ 1,333qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ -6,125a \\ 0 \\ -1,875 \end{Bmatrix} qa;$$

$$\{S_2^{\pi}\} = [k_2^{\pi}] \{\delta_2^{\pi}\} + \{S_{q,2}^{\pi}\} = \frac{EJ}{16a^3} \begin{bmatrix} 3 & 6a & -3 & 6a \\ 6a & 16a^2 & -6a & 8a^2 \\ -3 & -6a & 3 & -6a \\ 6a & 8a^2 & -6a & 16a^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1667 \\ 0 \\ -2,5835 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2187 \\ 1,875a \\ -0,2187 \\ -1,000 \end{Bmatrix} qa;$$

Деформированное состояние ЗРС, отвечающее полученному решению, приведено на рис.4.

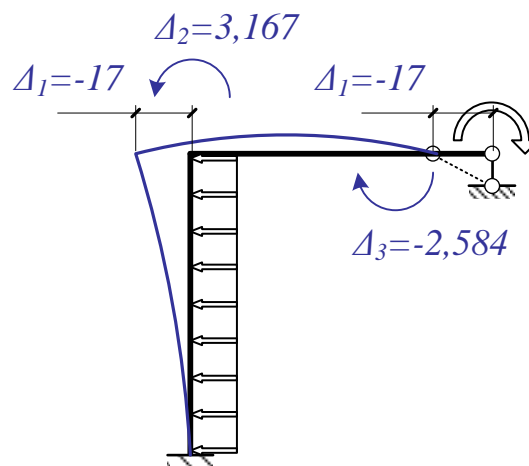


Рис.4. Схема перемещений.

На рис. 6 показан результат построения эпюр.

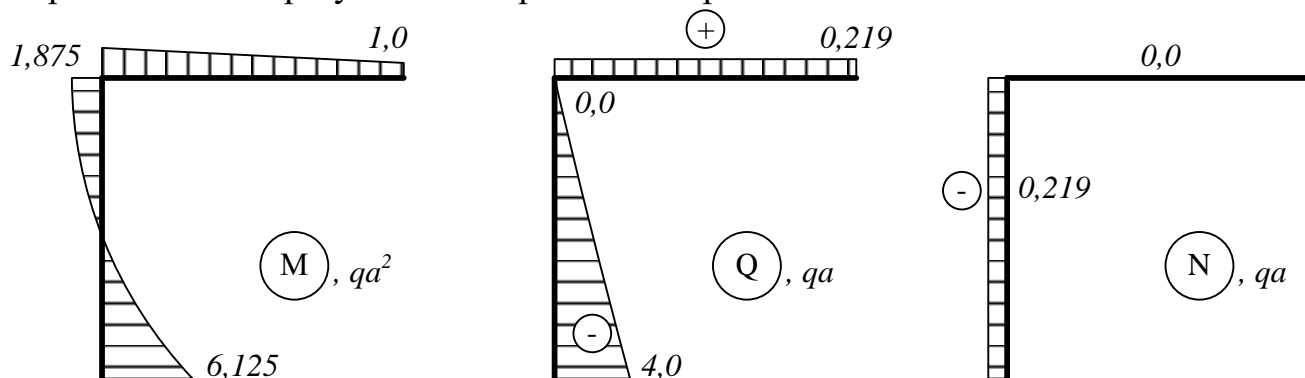
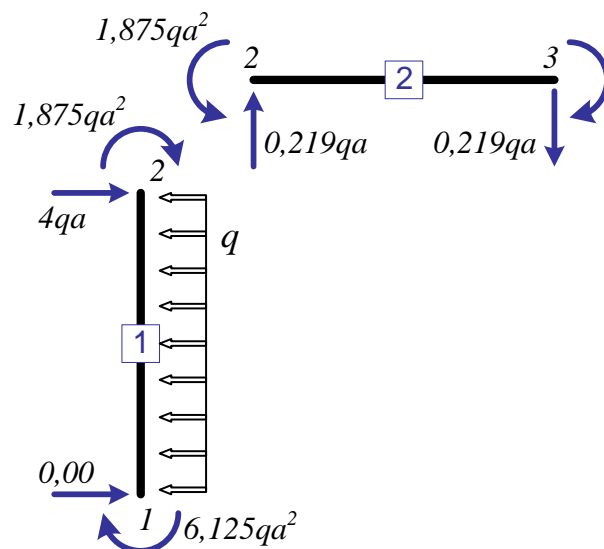


Рис.6.

10. Контроль проведенных построений осуществляется проверкой условий равновесия узлов ЗРС и ее произвольной части.



## ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены. Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении ЗРС рамы под действием сил.