МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

Институт Высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра "Тренажерные системы и комплексы"

Утверждено на заседании кафедры
«Тренажерные системы и комплексы»
«24» января 2022 г., протокол № 7

Заведующий кафедрой ТСК

________________ Филиппов В.Н.

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

учебной дисциплины (модуля)

«Математическая логика и конечные автоматы»

Уровень профессионального образования: высшее образование – бакалавриат
Направление подготовки: 15.03.06 «Мехатроника и робототехника»

Профили подготовки: «Перспективные учебно-тренировочные средств»,

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Тула 2022г.

Разработчик: *доцент каф. ПАиР, к.т.н.* ________________ *И.В. Зайчиков*

Содержание

1. Практическое занятие №1.
Исследование теоретико-множественной модели цифровых управляющих устройств

1. Выразить с помощью порождающей процедуры.

1.1. Множество неотрицательных корней тригонометрического уравнения

$$\cos^2 x = 1.$$

$1-\sin^2 x = 1, \sin x = 0, x = \pi n, n = ..., -1, 0, 1, ...$ $X = \{x \mid x = \pi n, n \in N, 0 \in N\}$.

1.2. Множество значений сигнала $u = \sum_{m=0}^{M} u_m \exp(im\omega t + \varphi_i)$, взятых через период $\tau = \dfrac{2\pi}{100\omega}$.

$$t_n = \frac{2\pi n}{100\omega}, n = ..., -1, 0, 1, ... \; U = \left\{u \middle| u = \sum_{m=0}^{M} u_m \exp\left(im\omega \frac{\pm 2\pi n}{100\omega}\right), n \in N, 0 \in N\right\} =$$

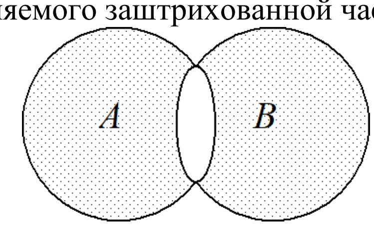
$$= \left\{u \middle| u = \sum_{m=0}^{M} u_m \exp\left(\frac{\pm \pi nmi}{50}\right), n \in N, 0 \in N\right\}.$$

2. Определить с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие зависимости.

2.1. Выразить операцию $C = A \setminus B$ через операции объединения $A \cup B$ и дополнения $\overline{A}$.

2.2. Выразить операцию $C = A \setminus B$ через операции пересечения $A \cap B$ и дополнения $\overline{A}$.

2.3. С применением операций объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$ и дополнения $\overline{A}$ найти выражение для множества, определяемого заштрихованной частью областей.



2.4. Найти выражение для правила Де-Моргана.

$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ и $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

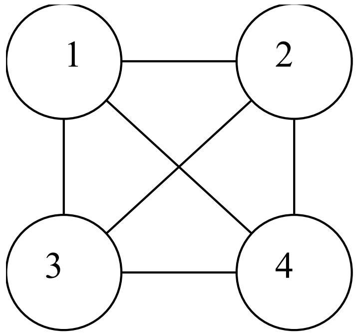
3. Определить мощность множества.

3.1. Объединяющего множество четных чисел, и множество чисел, кратных 3-м, лежащих в интервале от 1 до 100.

3.2. Объединяющих множество символов минимального алфавита, формирующего пословицу "Сколько волка не корми он в лес смотрит" и пословицу "Без труда не вытащишь рыбку из пруда".

4. Составить алгоритм, производящий упорядочение произвольного множества из N чисел по возрастанию.

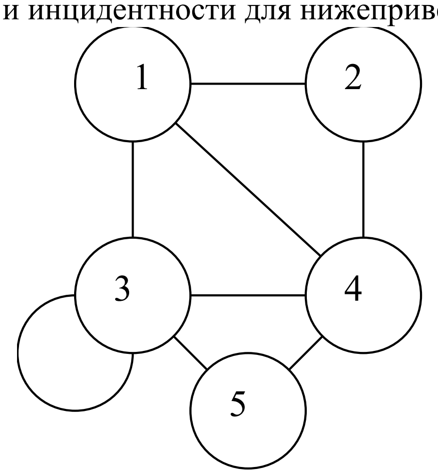
5. На нижеприведенном графе найти



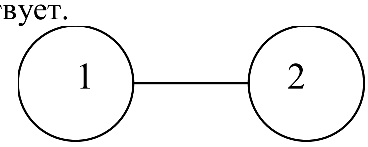
5.1. Все простые пути, ведущие из вершины 1 в вершину 4.

5.2. Все цепи, ведущие из вершины 1 в вершину 4.
5.3. Все циклы, включающие вершину 1.

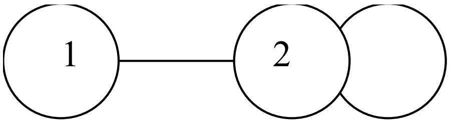
6. Составить таблицы смежности и инцидентности для нижеприведенного графа.



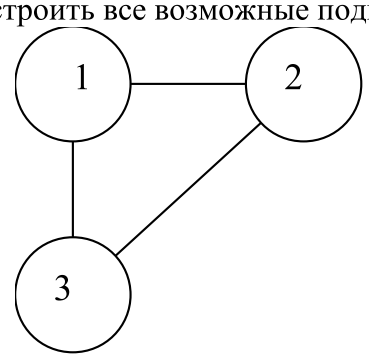
7. Доказать, что путей с длиной, выражающейся четным числом, из вершины 1 в вершину 2 для нижеприведенного графа не существует.



8. Доказать, что для нижеприведенного графа существуют пути с длиной, выраженной как четным, так и нечетным числом.



9. Для нижеприведенного графа построить все возможные подграфы и суграфы.



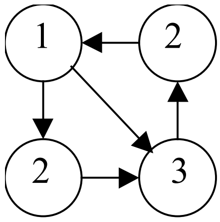
Какие подграфы являются истинными?

10. Для *n*-арного дерева найти формулу, определяющую количество вершин и количество ребер.

2. Практическое занятие №2.
Исследование графовой модели цифровых управляющих устройств

1. Орграфы

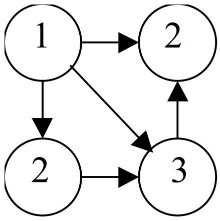
1.1. Для ориентированного графа, приведенного на рисунке, сформировать матрицу смежности.



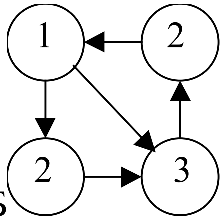
1.2. Имеются ли на данном графе контуры длиной 7? Если имеются, то сколько?

1.3. Достижима ли вершина 1 из вершины 2 по пути четной длины?

1.4. Является ли граф, приведенный на рис. а сильносвязным? А на рис.Б?



А



Б

1.5. Построить таблицу инцидентности графа. Составить таблицу полустепеней исхода и захода вершин.

1.6. Для n-арного дерева с k иерархическими уровнями определить количество вершин и дуг. Пусть в некоторой вершине l-го уровня полустепень исхода m<n. Сколько вершин и дуг имеется в этом дереве?

1.7. Пусть имеется двудольный граф с m вершинами, принадлежащими подмножеству А и n вершинами, принадлежащими подмножеству В. Пусть связи вершин подмножества А с вершинами подмножества В определяются матрицей n × m, а связи вершин подмножества В с вершинами подмножества А - матрицей m × n. Найти матрицу смежности и матрицу инцидентности двудольного графа. Определить свойства матрицы смежности и матрицы инцидентности. Могут ли в двудольном графе иметься петли? Могут ли в двудольном графе иметься циклы?

2. Отношения.

2.1. Пусть имеется отношение $\neq$. Составить таблицу отношений для множества целых чисел.

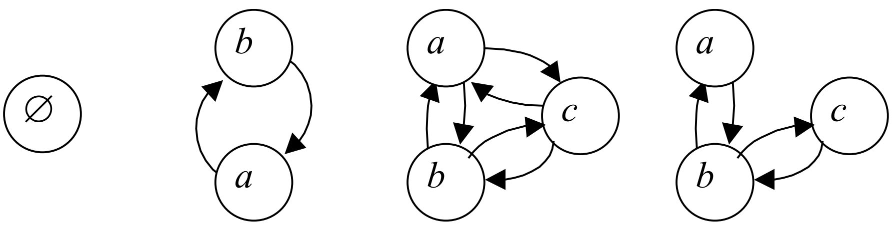
	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	0	1	1	1	0

2.2. Какими свойствами обладает отношение $a\neq b$?.

Отношение нерефлексивно, т.е. $a\neq a$ - неверно.

Отношение симметрично, т.е. $\forall a,\ \forall b\ ((a\neq b)\rightarrow(b\neq a))$.

Отношение нетранзитивно, т.е. из того, что $a\neq b$ и $b\neq c$ еще не следует, что $a\neq c$.



а) б) в)

3. Множество всех подмножеств множества M называется булеаном и обозначается 2^M, $2^M = \{A | A \subseteq M\}$. Доказать, что для конечного множества M $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$.

Доказательство методом математической индукции.

База индукции. Пусть $M = \{\varnothing\}$. Тогда $|M| = 0$. 2^M, где $M = \varnothing$, содержит один элемент, следовательно, $\left|2^M\right| = |\{\varnothing\}| = 2^0 = 1$.

Пусть для всех $M = \{a_1, ..., a_k\}$, для которых $|M| = k$ $\left|2^M\right| = 2^{|M|} = 2^k$. Рассмотрим $M = \{a_1, ..., a_k\}$. Обозначим подмножества множества 2^M, которые можно сформировать из элементов множества $M \supseteq A_i$, по предположению $1 \leq i \leq 2^k$. Добавим в множество M элемент a_{k+1}. Тогда в дополнение к множествам $A_i \in 2^M$ могут быть сформированы множества $B_i = A_i \cup a_{k+1} = \{b | b \in A_i, \textit{или } b = A_{k+1}\}$, причем количество подмножеств также равно 2^k. По определению $B_i \neq A_j$, следовательно $2^{M \cup a_{i+1}} = \{C | C \in 2^M, \textit{или } C \in B\}$, а значит $\left|2^{M \cup a_{i+1}}\right| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

4. Понятие универсальных алгебр

4.1. Пусть носитель алгебры представляет множество $M = \{m | m = x^n, n \in N''\}$. Сигнатура алгебры представляет операцию умножения. Определить тип алгебры (M; $\times$) типа $\mu = (2)$

Алгебра является Абелевой полугруппой, т.к. в ней справедливы аксиомы коммутативности и ассоциативности.

4.2. Пусть носитель алгебры представляет множество $M = \{m | m = x^n, n \in N, 0 \in N\}$. Сигнатура алгебры представляет операцию умножения. Определить тип алгебры (M; $\times$) типа $\mu = (2)$

Алгебра является моноидом, или полугруппой с единицей, т.к. наряду с аксиомами коммутативности и ассоциативности справедлива аксиома о существовании нейтрального элемента.

4.2. Пусть носитель алгебры представляет множество $M = \{m | m = x^{\pm n}, n \in N, 0 \in N\}$. Сигнатура алгебры представляет операцию умножения. Определить тип алгебры (M; $\times$) типа $\mu = (2)$

Алгебра является Абелевой группой, т.к. наряду с аксиомами ассоциативности и о существовании нейтрального элемента справедлива аксиомы коммутативности и о существовании обратного элемента.

4.3. Построить таблицу Кэли для операции суммирования по модулю 4.

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

По таблице определить, является ли операция коммутативной? (да), имеется ли обратный элемент? (да) Имеется ли нейтральный элемент? (да)

4.4. Рассмотрим алгебру (M; +, x), где носитель образован из квадратных матриц размера 2×2, элементами которых являются положительные и отрицательные чётные числа. Сложение матриц ассоциативно и коммутативно. Существует нейтральный для сложения элемент (нулевая матрица). Для каждой из матриц можно подобрать противоположную, например

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, аддитивная группа имеется. Нейтральный элемент для умножения отсутствует, так как для построения единичной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

требуется нечетное число 1, отсутствующее по определению данной алгебры. Если нет нейтрального элемента, не может быть и обратного. Кроме того, умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 24 & 20 \end{vmatrix}, \text{ но } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 32 & 12 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в данном примере мы получили кольцо общего вида.

4.5. Берем такое же множество матриц, но теперь элементами матриц будут целые числа, положительные и отрицательные. Теперь для умножения будет иметься нейтральный элемент: единичная матрица, которая является и левой и правой единицей мультипликативной полугруппы кольца. Обратные элементы могут иногда найтись, например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

но в общем случае их существование не гарантировано. Это можно доказать так. Возьмем равенство

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.,$$

в котором первый сомножитель выбран произвольно, а во втором элементы имеют буквенные обозначения. Чтобы узнать, существует ли такое равенство при целых значениях всех чисел, составим и решим систему уравнений, вытекающую из данного равенства.

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2c = 1, \\ 4a + 5c = 0, \\ 3b + 2d = 0, \\ 4b + 5d = 1. \end{array}\right\}.$$

$$a = \frac{1-2c}{3}; 4\frac{1-2c}{3} + 5c = 0; 4 - 8c + 15c = 0; c = \frac{7}{4}.$$

Равенство удовлетворяется только при дробном значении c. Следовательно, аксиома о существовании обратного элемента здесь не имеет места. Кроме того, умножение остается некоммутативным, вследствие чего в этом примере получается тело.

4.6. Возьмем множество чисел $M = \{0, 1, 2, 3\}$ и определим на нем операции $\otimes_4, \oplus_4$, т.е. умножение и сложение по модулю 4. Составим таблицы Кэли для обеих операций (табл. 4.2 и 4.3).

Табл. 4.2

Таблица Кэли для операции сложения по модулю 4

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Табл. 4.3

Таблица Кэли для операции умножения по модулю 4

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Табл. 4.2 показывает все необходимые для аддитивной группы свойства: ассоциативность и коммутативность операции, наличие нуля и противоположного элемента. Последнее видно из наличия нуля в каждой строке.
Табл. 4.3 показывает все свойства умножения, кроме наличия обратного элемента. Таким образом, в этом примере получилось коммутативное кольцо с единицей.
4.7. Построим алгебру, аналогичную предыдущей, но сложение и умножение теперь будем выполнять по модулю 5. Построим таблицы Кэли (табл. 4.4 и табл. 4.5).

Табл. 4.3

Таблица Кэли для операции сложения по модулю 5

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Табл. 4.4

Таблица Кэли для операции умножения по модулю 5

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Таблица сложения показывает наличие аддитивной коммутативной группы. Таблица умножения показывает ассоциативность и коммутативность операции. Кроме того, в каждой строке или столбце содержится единица, что указывает на аксиомы о существовании единицы и обратного элемента. В данном примере мы получили поле.

4.8. Построить таблицу Кэли для операций сложения и умножения по модулю 2.

Табл. 4.6.

Таблица Кэли для операции сложения по модулю 2

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Табл. 4.7.

Таблица Кэли для операции умножения по модулю 2

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Оно играет важную роль в теории кодирования цифровой информации, с его помощью образуются более сложные алгебраические системы.

3. Практическое занятие №3.
Разработка комбинационных схем на базе элементов И, ИЛИ, НЕ

1. С использованием аксиом:

ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee c,\ a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge c;$$

коммутативность дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a;$$

существование нейтральных элементов для дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee 0 = 0 \vee a = a;\ a \wedge 1 = 1 \wedge a = a;$$

дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

закона исключенного третьего $a \vee \overline{a} = 1$;

закон противоречия $a \wedge \overline{a} = 0$;

дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

замкнутости множества {0, 1} относительно инверсии

$$\overline{0} = 1; \overline{1} = 0$$

Исходя из указанных аксиом, можно доказать как теоремы следующие правила.

1.1. Конъюнкция любой переменной с нулем равна нулю $0x = 0$.

$$0 \wedge x = (0 \wedge x) \vee 0 \text{ (существование нейтрального элемента)}$$

$$(0 \wedge x) \vee 0 = (0 \wedge x) \vee (x \wedge \overline{x}) \text{ (противоречие);}$$

$$(0 \wedge x) \vee (x \wedge \overline{x}) = x \wedge (0 \vee \overline{x}) \text{ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);}$$

$$x \wedge (0 \vee \overline{x}) = x \wedge \overline{x} \text{ (нейтральность нуля для дизъюнкции).}$$

$$x \wedge \overline{x} = 0 \text{ (противоречие).}$$

1.2. Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции

$$a \wedge a = a; a \vee a = a.$$

(Нейтральный элемент, дистрибутивность, нейтральный элемент).

1.3. Правила поглощения

$$a \vee (a \wedge b) = a; a \wedge (a \vee b) = a.$$

1.4. Правила склеивания

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a; (a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a.$$

1.5. Правила Де-Моргана (двойственная связь между дизъюнкцией и конъюнкцией)

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b};$$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

2. Сформировать таблицу истинности для следующих типовых комбинационных схем:

2.1. Четырехразрядный мультиплексор.

2.2. Двухразрядная схема сравнения кодов для реализации отношений >, <, =, $\neq$.

2.3. Схема сдвига разрядов.

2.4. Преобразователь унарного двоичного кода в натуральный.

2.5. Преобразователь кода Грея в натуральный двоичный код.

3. По таблицам истинности записать булеву формулу для приведенных в п. 2 комбинационных схем.

4. По булевым формулам составить карту Карно для приведенных в п. 2 комбинационных схем.

5. Минимизировать булевы выражения и привести к штриху Шеффера для приведенных в п. 2 комбинационных схем.

6. Минимизировать булевы выражения и привести к стрелке Пирса для приведенных в п. 2 комбинационных схем.

7. Сформировать сумматор, который на управляющий сигнал x = 0 проводил бы операцию суммирования, а на x = 1 - операцию вычитания.

4. Практическое занятие №4.
Разработка комбинационных схем на базе элементов штрих Шеффера (стрелка Пирса)

1. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу дешифратора 4-хбитного двоичного кода на элементах И, ИЛИ, штрих Шеффера (стрелка Пирса) и выяснить отличия при опознавании одинаковых кодов.

2. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу мультиплексора двух однобитных кодов на элементах И, ИЛИ, штрих Шеффера (стрелка Пирса) и выяснить отличия при одинаковых состояниях входов.

3. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу сумматора двух однобитных кодов без входного переноса на элементах И, ИЛИ, штрих Шеффера (стрелка Пирса) и выяснить отличия при одинаковых состояниях входов.

4. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу компаратора двух однобитных кодов без входных условий на элементах И, ИЛИ, штрих Шеффера (стрелка Пирса) и выяснить отличия при одинаковых состояниях входов.

5. Практическое занятие №5.
Изучение типовых комбинационных схем

1. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу мультиплексора четырёх однобитных кодов на элементах И, ИЛИ, штрих Шеффера (стрелка Пирса) и выяснить отличия при одинаковых состояниях входов.

2. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу демультиплексора четырёх однобитных кодов без входного переноса на элементах И, ИЛИ.

3. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу сумматора двух однобитных кодов со входом и выходом переноса условий на элементах И, ИЛИ.

4. Составить таблицу истинности, комбинационную схему и булеву формулу компаратора двух однобитных кодов со входом и выходом переноса условий на элементах И, ИЛИ.

6. Практическое занятие №6.

Изучение типовых триггеров

1. Составить таблицу истинности и комбинационную схему RS-триггера.
2. Составить таблицу истинности и комбинационную схему RSE-триггера.
3. Составить таблицу истинности и комбинационную схему DE-триггера.
4. Составить таблицу истинности и комбинационную схему RSC-триггера.
5. Составить таблицу истинности и комбинационную схему JCK-триггера.
6. Составить таблицу истинности и комбинационную схему RSDC-триггера.
7. Составить таблицу истинности и комбинационную схему DC-триггера.

7. Практическое занятие №7.

Разработка схем операционных автоматов

1. Составить таблицу истинности выполнения операции суммирования/вычитания двух однобитных операндов со входами и выходами переноса

2. Составить комбинационную схему выполнения операции суммирования/вычитания двух 4-хбитных операндов со входами и выходами переноса

3. Составить алгоритм выполнения операции суммирования/вычитания по логическому условию с проверкой переноса.

4. Составить функциональную схему выполнения операции суммирования/вычитания двух 4-хбитных операндов со входами и выходами переноса.

8. Практическое занятие №7.

Разработка схем управляющих автоматов

1. Составить порядок выполнения операции умножения/деления двух операндов в двоичном представлении

2. Составить алгоритм выполнения операции умножения/деления по количеству двоичных разрядов.

3. Составить функциональную схему выполнения операции умножения/деления двух 4-хбитных операндов со входами и выходами переноса.